

Bitte frei lassen!

Punkte:

Note:

Mathematik 2 für Informatik - Vorlesungsprüfung - (Panholzer)

Familienname: [REDACTED]

Vorname: [REDACTED]

Matrikelnummer: [REDACTED]

(1) [8 Punkte] Man bestimme das Integral

$$\int_0^{100} \frac{2x+7}{x^2+7x+10} dx.$$

Was kann man über das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2x+7}{x^2+7x+10} dx$$

sagen? (eigentlich, uneigentlich, konvergent, divergent)

(2) [8 Punkte] Man bestimme alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 + 2).$$

Geben Sie dabei auch jeweils an, ob es sich um relative Maxima oder Minima handelt.

(3) [8 = 4(a) + 4(b) Punkte] Gegeben ist die folgende lineare Differenzengleichung erster Ordnung:

$$a_{n+1} = 2a_n - 2, \quad \text{für } n \geq 0 \quad \text{und} \quad a_0 = -1.$$

(a) Man bestimme die Lösung dieser Differenzgleichung durch eine der folgenden in der Vorlesung kennengelernten Methoden: explizite Formel; Variation der Konstanten + unbestimmter Ansatz; Charakteristische Gleichung + unbestimmter Ansatz.

(b) Man wende zum Lösen der Differenzgleichung die Methode der erzeugenden Funktionen an und bestimme eine explizite Formel für die erzeugende Funktion $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Das Koeffizientenablesen von der erzeugenden Funktion ist hier aber nicht mehr verlangt.

(4) [8 = 2(a)+2(b)+2(c)+2(d) Punkte]

(a) Man erkläre die Begriffe "Gradientenfeld" und "Stammfunktion eines Vektorfeldes $f(x)$ ".

(b) Was versteht man unter den "Integrabilitätsbedingungen" ?

(c) Wie ist das "Kurvenintegral des Vektorfeldes $f(x)$ längs der Kurve $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$," definiert?

(d) Sei $f(x)$ ein Gradientenfeld und $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Welchen Wert besitzt dann das Kurvenintegral

$$\oint_c f(x) dx$$

von $f(x)$ längs $c(t)$?

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema Approximation und Interpolation (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein). Sie können allenfalls notwendige Rechnungen zur Beantwortung der Fragen auf einem separaten Blatt durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Durch welche Minimalbedingung bestimmt man eine Ersatzfunktion p der Wertepaare (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$ einer Funktion f mit $y_i = f(x_i)$ durch Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate?

- $\sum_i |f(x_i) - p(x_i)| \rightarrow \min$ $\sum_i (f(x_i) - p(x_i))^2 \rightarrow \min$ $\sum_i |f(x_i^2) - p(x_i^2)| \rightarrow \min$

Wie viele verschiedene Interpolationspolynome vom Grad $\leq n$ gibt es für $n+1$ Interpolationsstellen (x_i, y_i) , $0 \leq i \leq n$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$?

- 1 2 ∞ hängt von den Werten y_i ab

Gegeben sind die Interpolationsstellen $(0, 0)$, $(1, 2)$ und $(3, 12)$. Wie lautet das dazugehörige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Grad 2?

- $x + x^2$ $-x(x-3) + 2x(x-1)$ $2x + x(x-1) \Rightarrow a=b=c$

Bei der Interpolation nach Lagrange bildet man das Lagrange'sche Interpolationspolynom mittels $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$. Welche Aussagen gelten für die Polynome $L_i(x)$?

- $L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$
 $L_i(x)$ kann mit Hilfe eines Differenzschemas einfach berechnet werden
 $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Welche(n) Vorteil(e) besitzt die Interpolation nach Newton gegenüber der Interpolation nach Lagrange?

- es liefert eine direkte (nicht-rekursive) Formel für das Interpolationspolynom
 Verfahren flexibler, wenn neue Stützpunkte dazukommen

Bei der Interpolation nach Newton verwendet man den Ansatz $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$. Wie bestimmt man hierbei b_1 ?

- $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ $b_1 = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$ $b_1 = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$ (mit $f(x_i) = y_i$)

Warum verwendet man bei einer großen Zahl von Interpolationsstellen für die Interpolation im Allgemeinen kein Polynom so großen Grades?

- wegen unerwünschter Schwankungen des Interpolationspolynoms
 große Fehler zwischen den Stützstellen können auftreten

Was versteht man unter der Spline-Interpolation?

- stückweise Interpolation mit Hilfe von Polynomen niederen Grades
 Interpolation mit Hilfe von rationalen Funktionen und anderer elementarer Funktionen