Runde 4, Beispiel 24

LVA 118.181, Übungsrunde 4, 08.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

1 Angabe

Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \qquad m \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, dass $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)x$ reduziere man die Ordnung der Differentialgleichung und ermittle eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

1.1 Lösung des Beispiels

Zunächst Vorbereiten des Ansatzes:

$$y = c(x) \cdot x$$
$$y' = c(x) + c'(x) \cdot x$$
$$y'' = c(x)' + c'(x) + c''(x) \cdot x = c''(x) \cdot x + 2 \cdot c'(x)$$

Diesen Ansatz setzt man die die Angabe ein und erhält eine Gleichung mit $c''(x)$ und $c'(x)$:

$$c''(x) = (\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2}) \cdot c'(x)$$

Nun führt man die Substitution $c'(x) = u(x) \;\Rightarrow\; c''(x) = u'(x)$ durch und integriert:

$$c'(x) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot x^2 \cdot c$$

Wiederum folgt nach nochmaligem integrieren:

$$c(x) = (\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}) \cdot c1 + c2$$
$$\ln|u| = \ln|1-x| - \ln|1+x| - 2 \cdot \ln|x|$$

Daraus folgt:

$$u = \frac{1-x}{(1+x) \cdot x^2}$$

u war ja $c'(x)$, daher Rücksubstitution, und dahach um c zu erhalten weiter integrieren

$$c = \int u = \frac{1-x}{(1+x)\cdot x^2}$$

Nun führt man eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1-x}{(1+x)\cdot x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$
$$1-x = Ax^2 + Bx^2 + C + Cx$$
$$x^0 : \ 1 = C$$
$$x^1 : \ -1 = B + C, \ \Rightarrow \ B = -2$$
$$x^2 : \ 0 = A + B \ \Rightarrow \ A = 2$$
$$\frac{1-x}{(1+x)\cdot x^2} = \frac{2}{1+x} - \frac{B}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Nach Integration erhält man dann das Endergebnis:

$$\mathbf{y(x) = 2 \cdot \ln|x+1| - 2 \cdot x \cdot \ln|x| - 1}$$