Lösung von Aufgabe 350

$M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a \circ b = a + b + ab$.

(i) $\circ$ ist Operation auf $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$: Klar ist, dass für $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ gilt: $a \circ b = a + b + ab \in \mathbb{Q}$.
Angenommen, $a \circ b = a + b + ab = -1$, dann ist $(a+1)(b+1) = a + b + ab + 1 = 0$, also wäre $a = -1$ oder $b = -1$. $\lightning$

(ii) $\circ$ ist kommutativ:

$a \circ b = a + b + ab = b + a + ba = b \circ a$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

(iii) $\circ$ ist assoziativ: $(a \circ b) \circ c = (a + b + ab) \circ c =$
$= a + b + ab + c + (a + b + ab)c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$. Dasselbe erhält man für $a \circ (b \circ c)$.

(iv) 0 ist neutrales Element:

$a \circ 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.

(v) Berechnung des Inversen von $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

$a \circ x = 0 \iff a + x + ax = 0 \iff x(1+a) = -a \iff$
$\iff x = -\dfrac{a}{1+a}$, also ist $-\dfrac{a}{1+a}$ das (eindeutig bestimmte) Inverse von a.

Nach (i) – (v) ist $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \circ)$ eine abelsche (= kommutative) Gruppe.