Übungsblatt 1
Analysis I, WS 2010/11
Prof. Dr. Joachim Schöberl

Aufgabe 1.
Sei $M = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathbb{B} = \{f,w\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen

(a) Elemente von M und $\mathbb{B}$

(b) Elemente von $M \times M$

(c) Teilmengen von M und $\mathbb{B}$

(d) Abbildungen von M nach $\mathbb{B}$

(e) Abbildungen von M nach M

(f) Abbildungen von $M \times M$ nach M

(g) bijektive Abbildungen von M nach M

(h) injektive Abbildungen von $\mathbb{B}$ nach M

Lösung

(a) $|M| = 5$, $|B| = 2$

(b) $|M \times M| = |M| \cdot |M| = 5 \cdot 5 = 25$

(c) Wählt man eine Teilmenge von M, so bestehen für jedes Element aus M zwei Möglichkeiten: Entweder ist das Element in der Teilmenge, oder nicht. Damit gibt es insgesamt $2^5 = 32$ mögliche Teilmengen von M.
Teilmengen von $\mathbb{B}$: $\emptyset$, $\{f\}$, $\{w\}$, $\{f,w\}$, also 4.

(d) 2 Möglichkeiten für $1 \mapsto f(1)$
2 Möglichkeiten für $2 \mapsto f(2)$
usw...
Insgesamt $2^5 = 32$ Abbildungen $M \to \mathbb{B}$

(e) $5^5 = 3125$ Abbildungen $M \to M$

(f) 25 Elemente in $M \times M$ mit je 5 Möglichkeiten, also 25^5 Abbildungen $M \times M \to M$

(g) Sei F die gesuchte Abbildung. Es gibt 5 Möglichkeiten $F(1)$ zu wählen. Da F injektiv sein soll, muss $F(2) \neq F(1)$ gelten, also gibt es nur noch 4 Möglichkeiten $F(2)$ zu wählen usw. Insgesamt gibt es also 5! injektive Abbildungen $M \to M$. Diese sind auch surjektiv, also bijektiv.

(h) Es gibt 5 Möglichkeiten F(f) zu wählen, und 4 Möglichkeiten F(w) zu wählen, also insgesamt 20 infektive Abbildungen von $\mathbb{B}$ nach M.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper mit den Körperoperationen $+, \times, -, ()^{-1}$ und neutralen Elementen 0 und 1. Sei $\widetilde{K}$ eine Menge und $f : K \to \widetilde{K}$ eine bijektive Abbildung mit Umkehrfunktion f^{-1}. Man zeige, dass $\widetilde{K}$ mit den neutralen Elementen $\tilde{0} := f(0)$ und $\tilde{1} := f(1)$, und den für $a, b \in \widetilde{K}$ wie folgt definierten Operationen

(a) $a \widetilde{+} b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b))$

(b) $a \widetilde{\times} b := f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b))$

(c) $\widetilde{-} a := f(-f^{-1}(a))$

(d) $a^{-1} := f((f^{-1}(a))^{-1})$

Lösung
Seien $a, b, c \in \widetilde{K}$. Nach Voraussetzung existieren eindeutige $f^{-1}(a), f^{-1}(b), f^{-1}(c) \in K$

- Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} a \widetilde{+} b &= f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b) + f^{-1}(a)) = b \widetilde{+} a \\ a \widetilde{\times} b &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b) \times f^{-1}(a)) = b \widetilde{\times} a \end{aligned}$$

- Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} a \widetilde{+} (b \widetilde{+} c) &= f(f^{-1}(a) + f^{-1}(f(f^{-1}(b) + f^{-1}(c)))) \\ &= f(f^{-1}(a) + (f^{-1}(b) + f^{-1}(c))) \\ &= f((f^{-1}(a) + f^{-1}(b)) + f^{-1}(c)) \\ &= f((f^{-1}(f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b))) + f^{-1}(c)) = (a \widetilde{+} b) \widetilde{+} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \widetilde{\times} (b \widetilde{\times} c) &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(f(f^{-1}(b) \times f^{-1}(c)))) \\ &= f(f^{-1}(a) \times (f^{-1}(b) \times f^{-1}(c))) \\ &= f((f^{-1}(a) \times f^{-1}(b)) \times f^{-1}(c)) \\ &= f((f^{-1}(f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b))) \times f^{-1}(c)) = (a \widetilde{\times} b) \widetilde{\times} c \end{aligned}$$

- Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} a \widetilde{\times} (b \widetilde{+} c) &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(f(f^{-1}(b) + f^{-1}(c)))) \\ &= f(f^{-1}(a) \times (f^{-1}(b) + f^{-1}(c))) \\ &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) + f^{-1}(a) \times f^{-1}(c)) \\ &= f(f^{-1}(f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b))) + f^{-1}(f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(c)))) \\ &= f(f^{-1}(a \times b) + f^{-1}(a \times c)) \\ &= a \widetilde{\times} b \ \widetilde{+} \ a \widetilde{\times} c \end{aligned}$$

- Neutrale Elemente:

$$\begin{aligned} a \widetilde{+} (\widetilde{0}) &= f(f^{-1}(a) + f^{-1}(f(0))) = f(f^{-1}(a) + 0) = a \\ a \widetilde{\times} (\widetilde{1}) &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(f(1))) = f(f^{-1}(a) \times 1) = f(a) \end{aligned}$$

- Inverse Elemente:

$$\begin{aligned} a \widetilde{+} (\widetilde{-} a) &= f(f^{-1}(a) + f^{-1}(-(f^{-1}(a)))) = f(f^{-1}(a) + (-f^{-1}(a))) = f(0) = \widetilde{0} \\ a \widetilde{\times} ((a)^{-1}) &= f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(f((f^{-1}(a))^{-1}))) = f(f^{-1}(a) \times (f^{-1}(a))^{-1}) = f(1) = \widetilde{1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Geben Sie 6 verschiedene Wertetabellen für Körper über der Menge $\{0,1,2\}$ an. Benennen Sie die neutralen Elemente bezüglich + und $\times$ mit n und e, das verbleibende dritte Element mit z. Zeigen Sie zuerst, dass $e+e=z$ sein muss.

Lösung
Seien a,b,c Elemente eines Körpers und $a+b=a+c$. Dann folgt, dass

$$(-a)+a+b=(-a)+a+c \Rightarrow b=c \tag{1}$$

Für verschiedene Elemente $b \neq c$ gilt also $a+b \neq a+c$. Angenommen, es gelte $e+e=n$. Dann wäre $e+z \neq e+n=e$ und $e+z \neq e+e=n$, also $e+z=z$. Das ist ein Widerspruch, da $e+z=e+n$. Weil außerdem $e+e \neq e+n=e$, muss gelten $e+e=z$ und $e+z=n$. Unter Berücksichtigung der Kommutativität ergibt sich folgende Additionstabelle (Sudoku!):

$$\begin{array}{c|ccc} + & n & e & z \\ \hline n & n & e & z \\ e & e & z & n \\ z & z & n & e \end{array} \tag{2}$$

Sei nun $a \neq n$. Dann gilt für alle a,b:

$$\begin{aligned} & a \times b = a \times c & (3) \\ \Rightarrow \quad & a^{-1} \times a \times b = a^{-1} \times a \times c & (4) \\ \Rightarrow \quad & a = c & (5) \end{aligned}$$

Damit gilt $z \times z \neq z \times n = n$ und $z \times z \neq z \times z \times e = z$, also $z \times z = e$. Die Multiplikationstabelle lautet also

$$\begin{array}{c|ccc} \times & n & e & z \\ \hline n & n & n & n \\ e & n & e & z \\ z & n & z & e \end{array} \tag{6}$$

Aus den Tabellen lässt sich ablesen, dass inverse Elemente der Addition und Multiplikation existieren. Seien $a,b \in K$. Nachrechnen zeigt, dass die Additionstabelle das Assoziativgesetz erfüllt. Dabei kann man nur mit der Kommutativität (die aus der Symmetrie der Tabelle abzulesen ist) und den Eigenschaften der neutralen Elemente die Anzahl der zu berechnenden Fälle stark reduzieren:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \overset{\text{Kommutativität}}{\Rightarrow} c+(b+a)=(b+c)+a$$

$$a+(a+a)=(a+a)+a$$

$$a+(n+b)=a+b=(a+n)+b$$
$$n+(a+b)=a+b=(n+a)+b$$

Damit bleiben nur noch die folgenden Fälle zu überprüfen:

$$e+(e+z)=e+n=e$$
$$(e+e)+z=z+z=e$$

$$e+(z+z)=e+z=z$$
$$(e+z)+z=n+z=z$$

Für die Multiplikation folgt die Assozivität bereits aus den Eigenschaften der neutralen Elemente und der Kommutativität:

$$\begin{aligned}
n \times (a \times b) = n = (n \times a) \times b \\
a \times (n \times b) = n = (a \times n) \times b \\
e \times (a \times b) = a \times b = (a \times b) \times e \\
a \times (e \times b) = a \times b = (a \times e) \times b \\
a \times (a \times a) = (a \times a) \times a
\end{aligned}$$

Womit nur noch das Distributivgesetz zu zeigen ist:

$$\begin{gathered}
a \times (b+c) = a \times b + a \times c \;\Rightarrow\; a \times (c+b) = a \times (c+b) = a \times b + a \times c = a \times c + a \times b \\
n \times (a+b) = n = n \times a + n \times b \\
e \times (a+b) = a+b = e \times a + e \times b \\
a \times (n+b) = a \times b = a \times n + a \times b
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z \times (e+e) = z \times z = e \\
z \times e + z \times e = z + z = e
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z \times (e+z) = z \times n = n \\
z \times e + z \times z = z + e = n
\end{gathered}$$

Damit sind alle Körperaxiome erfüllt. Es wurde gezeigt, dass die Wertetabellen nach Wahl der neutralen Elemente eindeutig bestimmt sind. Es gibt $3 \cdot 2$ verschieden Möglichkeiten, ein Paar $(n,e) \subset \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ von neutralen Elementen zu wählen, also genau sechs Möglichkeiten einen Körper über der Menge $\{0,1,2\}$ zu definieren.

Aufgabe 4.
Versuchen Sie, Wertetabellen für einen Körper mit vier Elementen aufzustellen. Alle Hilfsmittel sind erlaubt.

Lösung
In Aufgabe (3) wurde gezeigt, dass aus $b \neq c$ folgt, dass $a+b \neq a+c$. Es gilt also $e+e \neq e$. Sei nun $e+e \neq n$. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $e+e = x$ wählen:

$+$	n	e	x	y
n	n	e	x	y
e	e	x		
x	x			
y	y			

Setzt man diese Überlegung fort (Sudoku!), ergibt sich folgende Additionstabelle:

$+$	n	e	x	y
n	n	e	x	y
e	e	x	y	n
x	x	y	n	e
y	y	n	e	x

Nun gilt aber $x+x=n$ und damit $n=e\times(x+x)=e\times x+e\times x=(e+e)\times x$. Damit folgt $e+e=n$, was einen Widerspruch zur Wertetabelle darstellt. Es muss also $e+e=n$ gelten

$+$	n	e	x	y
n	n	e	x	y
e	e	n		
x	x			
y	y			

und $n=a\times(e+e)=a\times e+a\times e=(a+a)\times e \;\Rightarrow\; a+a=n$ für alle Elemente a.

$+$	n	e	x	y
n	n	e	x	y
e	e	n		
x	x		n	
y	y			n

Daraus lässt sich auf die folgende Wertetabelle schließen:

$+$	n	e	x	y
n	n	e	x	y
e	e	n	y	x
x	x	y	n	e
y	y	x	e	n

Für die Multiplikation lässt sich mit den Argumenten aus Aufgabe (2) die folgende Wertetabelle herleiten:

$\times$	n	e	x	y
n	n	n	n	n
e	n	e	x	y
x	n	x	y	e
y	n	y	e	x

Nun muss noch nachgewiesen werden, dass diese Operationen Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllen. Wie in Aufgabe (2) können dabei die meisten Fälle mit der Kommutativität und den Eigenschaften der neutralen Elemente gezeigt werden. Die restlichen Fälle müssen nachgerechnet werden.

Aufgabe 5.
Zeigen Sie, dass $A:=\{a+\sqrt{2}b \;:\; a,b\in\mathbb{Q}\}$ mit den aus der Schule bekannten Rechenregeln ein Körper ist.

Lösung
Da die reellen Zahlen ein Körper sind, gelten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze auch für die Operationen $+$ und $\cdot$ eingeschränkt auf $A\subset\mathbb{R}$. Außerdem ist $0=0+\sqrt{2}\cdot 0\in A$ und $1=1+\sqrt{2}\cdot 0\in A$. Es bleibt also zu zeigen, dass die Menge A bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen ist (d.h. $+,\cdot\;:\;A\times A\to A$), und dass für $x\in A$ auch $-x\in A$ und $x^{-1}\in A$. Sei $x=a+\sqrt{2}b,\; y=c+\sqrt{2}d$. Dann gilt:

- Abgeschlossenheit bzgl. $+$ und $\cdot$:

$$x+y=(a+\sqrt{2}b)+(c+\sqrt{2}d)=(a+c)+\sqrt{2}(b+d)\in A$$
$$x\cdot y=(a+\sqrt{2}b)\cdot(c+\sqrt{2}d)=ac+\sqrt{2}ad+\sqrt{2}bc+2bd=(ac+2bd)+\sqrt{2}(ad+bc)\in A$$

- Inverse Elemente:

$$-x = -(a+\sqrt{2}b) = (-a)+\sqrt{2}(-b) \in A$$
$$x^{-1} = \frac{1}{a+\sqrt{2}b} = \frac{a-\sqrt{2}b}{(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)} = \frac{a+\sqrt{2}b}{a^2-2b^2} = \left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{b}{a^2-2b^2}\right)$$

Angenommen, es sei $a^2-2b^2=0$. Dann folgt $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, was ein Widerspruch ist zu $a,b\in\mathbb{Q}$. Damit gilt $a^2-2b^2\neq 0$ und $x^{-1}\in A$.

Aufgabe 6.
Betrachte die Menge $M=\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

(a) $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

(b) $(a_1,a_2)\odot(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$

Man verwende die Information $\mathbb{R}$ ist ein Körper. Bestimmen Sie die neutralen Elemente bezüglich $\oplus$ und $\odot$. Kann M mit diesen Operationen zu einem Körper gemacht werden?

Lösung
Für $a,b\in\mathbb{R}$ gilt

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b) \quad \text{und}$$
$$(a,b)\odot(1,1)=(a\cdot 1,b\cdot 1)=(a,b),$$

also sind (0,0) und (1,1) die neutralen Elemente bzgl. $\oplus$ und $\odot$. Es gilt aber $(1,0)\neq(0,0)\in M$ und

$$\forall a,b\in\mathbb{R}:\ (1,0)\odot(a,b)=(a,0)\neq(1,1) \tag{7}$$

Damit existiert kein inverses Element zu $(1,0)$ bzgl. $\odot$ und M ist kein Körper.

Aufgabe 7.

(a) Seien X und Y Mengen, $A: X\times Y\to\{f,w\}$ eine Aussagenform. Man zeige

$$\exists y\in Y:\forall x\in X: A(x,y) \quad\Rightarrow\quad \forall x\in X:\exists y\in Y: A(x,y) \tag{8}$$

(b) Sei X eine Menge, und für $i,j\in\{1,2\}$ seien $A_{i,j}\subset X$. Man zeige

$$\bigcup_{i\in\{1,2\}}\bigcap_{j\in\{1,2\}} A_{i,j} \subset \bigcap_{j\in\{1,2\}}\bigcup_{i\in\{1,2\}} A_{i,j} \tag{9}$$

Lösung

(a) Nach Voraussetzung existiert $\bar{y}\in Y$, so dass

$$\forall x\in X: A(x,\bar{y}) \Rightarrow \forall x\in X:\exists y\in Y: A(x,y) \tag{10}$$

(b) Sei $x\in \bigcup_{i\in\{1,2\}}\bigcap_{j\in\{1,2\}} A_{i,j}$. Dann gilt:

$$\exists k\in\{1,2\}:\forall l\in\{1,2\}: x\in A_{k,l} \tag{11}$$
$$\overset{(a)}{\Rightarrow} \exists k\in\{1,2\}:\forall l\in\{1,2\}:\exists k\in\{1,2\}: x\in A_{k,l} \tag{12}$$
$$\Rightarrow x\in \bigcap_{j\in\{1,2\}}\bigcup_{i\in\{1,2\}} A_{i,j} \tag{13}$$

Aufgabe 8.
Sei $m \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Relation

$$a \equiv b :\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : a - b = jm$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist. Schulwissen über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ darf vorausgesetzt werden.
Man zeige, dass für $a \equiv b$ und $c \equiv d$ auch $a + c \equiv b + d$ und $ac \equiv bd$ ist.

Lösung

- Reflexivität, d.h. $a \equiv a$:
$$a - a = 0 = 0 \cdot m \ \wedge \ 0 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a \equiv a$$
- Transitivität: Sei $a \equiv b \ \wedge \ b \equiv c$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists j_1 \in \mathbb{Z} : \ a - b = j_1 \cdot m \quad \wedge \quad \exists j_2 \in \mathbb{Z} : \ b - c = j_2 \cdot m \\ &\Rightarrow a - c = a - b + b - c = (j_1 + j_2) \cdot m \\ &\Rightarrow a \equiv c, \quad \text{da} \quad j_1 + j_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
- Symmetrie: Sei $a \equiv b$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : \ a - b = jm \\ &\Rightarrow b - a = -(a - b) = (-j) \cdot m \\ &\Rightarrow b \equiv a, \quad \text{da} \quad -j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Damit ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation.
Sei nun $a \equiv b$ und $c \equiv d$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists j_1 \in \mathbb{R} : \ a - b = j_1 m \quad \wedge \quad \exists j_2 \in \mathbb{R} : \ c - d = j_2 m \\ &\Rightarrow (a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) = (j_1 + j_2) \cdot m \\ &\Rightarrow a + b \equiv c + d, \quad \text{da} \quad j_1 + j_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} &ac - bd = ac - bd + bc - bc = c(a - b) + b(c - d) = cj_1 m + bj_2 m = (cj_1 + bj_2)m \\ &\Rightarrow ac \equiv bd, \quad \text{da} \quad cj_1 + bj_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$