10. UE Analysis für INF und WINF

$\boxed{316}$ $f(x,y) = \dfrac{2y^2}{|x|+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$, und $f(0,0) = 0$.

Fall 1: $\alpha \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2\beta^2 t^2}{|\alpha|\cdot|t| + \beta^2 t^2} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2\beta^2 |t|}{|\alpha| + \beta^2 |t|} = \dfrac{0}{|\alpha|+0} = 0.$

Fall 2: $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} f(0, \beta t) =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2\beta^2 t^2}{\beta^2 t^2} = \lim\limits_{t\to 0} 2 = 2.$

Fall 3: $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} f(0,0) = 0.$

Also ist die Funktion $f(x,y)$ an $(0,0)$ nicht stetig, denn sonst müsste $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten: $\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0$.

$\boxed{318}$ $f(x,y) = \dfrac{x + y\cdot\cos\frac{1}{y}}{x+y}$, $0 \neq y \neq -x$.

Der Definitionsbereich von $f(x,y)$ ist also $\mathbb{R}^2$ ohne die Geraden $y=0$ (x-Achse) und $y=-x$.

$\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y\cdot\cos\frac{1}{y}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \cos\frac{1}{y}$, aber dieser Grenzwert existiert nicht:

Sei $y_n = \dfrac{1}{2n\pi} \Rightarrow \dfrac{1}{y_n} = 2n\pi \Rightarrow \cos\dfrac{1}{y_n} = \cos(2n\pi) = 1$,

und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Sei $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi} \Rightarrow \dfrac{1}{y_n} = (2n+1)\pi \Rightarrow \cos\dfrac{1}{y_n} =$

$= \cos(2n+1)\pi = -1$, und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

$|\cos\frac{1}{y}| \le 1 \Longrightarrow \lim\limits_{y\to 0}(y\cdot\cos\frac{1}{y}) = 0 \Longrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

Der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht, denn:

Für die Folge $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{2n\pi})$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(0,\frac{1}{2n\pi}) = 1.$

Ebenso gilt für die Folge $(x_n,y_n) = (0, \frac{1}{(2n+1)\pi})$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim f(0,\frac{1}{(2n+1)\pi}) = -1.$

$\boxed{322}$ $f(x,y) = \frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x,y)\neq(0,0)$, und $f(0,0)=0.$

$\Longrightarrow$ f ist stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ als Quotient stetiger Funktionen.

$a+b \ge 2\sqrt{ab}$, denn $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0, \ \forall a,b \ge 0.$

$\Longrightarrow x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2|x|\cdot|y|$. Sei nun $(x,y)\neq(0,0)$.

Falls $x=0$ oder $y=0$, dann gilt $f(x,y)=0$.

Falls $x\neq 0$ und $y \neq 0$, dann haben wir:

$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|\cdot y^2 + x^2\cdot|y|}{x^2+y^2} \le$

(denn $|xy^2+x^2y| \le |xy^2| + |x^2y| = |x|y^2 + x^2|y|$)

$\le \frac{|x|\cdot y^2+x^2\cdot|y|}{2\cdot|x|\cdot|y|} = \frac{1}{2}\cdot(|x|+|y|)$, und wegen

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}(|x|+|y|) = 0$ gilt auch $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)| = 0$

und somit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$ Wegen $f(0,0)=0$

ist also $f(x,y)$ auch stetig in $(0,0)$, also auf ganz $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{327}$ (a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ mit dem Definitions=bereich $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ (Einheitskreis).

$\Longrightarrow f_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

und analog $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0) lautet: $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

(Siehe Buch, Seite 247.) Setzen wir $x_0=0{,}2=\frac{2}{10}$, $y_0=0{,}3=\frac{3}{10}$, so erhalten wir $f(x_0,y_0)=\sqrt{1-\frac{4}{100}-\frac{9}{100}}=\frac{\sqrt{87}}{10}=:a$ und

$z=a-\frac{0{,}2}{a}(x-0{,}2)-\frac{0{,}3}{a}(y-0{,}3)$ als Tangentialebene.

Diese Gleichung können wir umformen zu:

$az+0{,}2x+0{,}3y=a^2+(0{,}2)^2+(0{,}3)^2=1$, also

$$0{,}2x+0{,}3y+\frac{\sqrt{87}}{10}z=1.$$

Andere Berechnung mittels der impliziten Funktion

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Der Gradient im Punkt (x_0,y_0,z_0) ist gegeben durch $\begin{pmatrix}2x_0\\2y_0\\2z_0\end{pmatrix}$ und ein Normalenvektor der Tangentialebene in (x_0,y_0,z_0).

Also ist auch $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor dieser Tangentialebene.

Weiters muss die Tangentialebene durch den Punkt (x_0,y_0,z_0) mit $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ gehen, was auf die Gleichung

$$x_0\cdot x+y_0\cdot y+z_0\cdot z=1 \quad \text{führt.}$$

In unserem Fall ergibt sich also:

$$0{,}2x+0{,}3y+\frac{\sqrt{87}}{10}z=1.$$

Geometrischer Hintergrund: $x^2+y^2+z^2=1$ ist die so genannte „Einheitskugel", und damit steht der Ortvektor (x_0,y_0,z_0) eines Punktes normal auf die Fläche.

$\boxed{327}$ (b)

$$f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x+2y), \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \quad f_x = 2x \sin y - \sin(x+2y),$$
$$f_y = x^2 \cos y - 2\sin(x+2y).$$

$$\Longrightarrow \quad f_{xx} = 2\sin y - \cos(x+2y),$$
$$f_{yy} = -x^2 \sin y - 4\cos(x+2y),$$
$$f_{xy} = 2x\cos y - 2\cos(x+2y) =$$
$$= f_{yx}.$$

Anmerkung: Die letzte Gleichung muss nach dem Satz von Schwarz (6.11 im Buch) gelten, da der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ eine offene Menge ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

$\boxed{340}$ $z = \dfrac{xy}{x+y}$ (Fläche 2. Grades), $x = e^t$, $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Nach der Kettenregel (Buch, Satz 6.20) gilt:

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$, und wir haben:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y \cdot (x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, analog: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$,

weiters $\dfrac{dx}{dt} = e^t$, $\dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}$. Einsetzen liefert:

$$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} \cdot e^t + \dfrac{(e^t)^2}{(e^t+e^{-t})^2} \cdot (-e^{-t}) = \dfrac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

Probe: $z(t) = \dfrac{1}{e^t+e^{-t}} \Longrightarrow \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{0 - 1 \cdot (e^t - e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} = \dfrac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}$.

Anmerkung: In Differential-Schreibweise lautet die Kettenregel: $dz = z_x dx + z_y dy$ mit $dx = x' dt$, $dy = y' dt$, also $dz = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} dx + \dfrac{x^2}{(x+y)^2} dy$. Einsetzen von x, y, dx und dy liefert:

$$dz = \dfrac{(e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} \cdot e^t dt + \dfrac{(e^t)^2}{(e^t+e^{-t})^2} \cdot (-e^{-t}) dt =$$
$$= \dfrac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2} dt, \text{ also } \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

Parameterdarstellung der Kurve auf der Fläche:

$\vec{x} = (x, y, z) = \left(e^t, e^{-t}, \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Der Tangentenvektor ist gegeben durch: $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = (x', y', z') = \left(e^t, -e^{-t}, \dfrac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2}\right)$.

$\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ horizontal $\Longleftrightarrow z' = \dfrac{e^{-t}-e^t}{(e^t+e^{-t})^2} = 0 \Longleftrightarrow e^{-t} = e^t \Longleftrightarrow e^{2t} = 1$

$\Longleftrightarrow t = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2})$.

362 Für die implizit gegebene Kurve

$$F(x,y) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 - 36 = 0$$ (einen Kegelschnitt)

ist die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ (nach Buch, Satz 6.22) gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x-4y}{-4x+18y} = \frac{4x-4y}{4x-18y} = \frac{2x-2y}{2x-9y}.$$

Probe durch „implizites Differenzieren":

$$4x - 4y - 4xy' + 18yy' = 0 \Rightarrow y'\cdot(18y-4x) = 4y-4x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4y-4x}{18y-4x} = \frac{2x-2y}{2x-9y}.$$

Tangenten mit Anstieg 1:

$$y' = \frac{2x-2y}{2x-9y} = 1 \Leftrightarrow 2x-2y = 2x-9y \Leftrightarrow 7y=0 \Leftrightarrow y=0.$$

Einsetzen in $F(x,y)=0$ liefert: $2x^2=36 \Leftrightarrow x^2=18 \Leftrightarrow x=\pm 3\sqrt{2}$.

Die zugehörigen Punkte lauten: $P_1=(3\sqrt{2},0)$, $P_2=(-3\sqrt{2},0)$.

Die Gleichungen der zugehörigen Tangenten haben die Form $y=x+d$, und Einsetzen der Punkte liefert $d=\mp 3\sqrt{2}$, also

$t_1 \ldots\ldots y = x - 3\sqrt{2}$, $\quad t_2 \ldots\ldots y = x + 3\sqrt{2}$.

Tangenten mit Anstieg −1:

$$y' = -1 \Leftrightarrow 2x-2y = 9y-2x \Leftrightarrow 4x = 11y \Leftrightarrow x = \tfrac{11}{4}y,\ y=\tfrac{4}{11}x.$$

Setzen wir $x=\frac{11}{4}y$ in $F(x,y)=0$ ein, so erhalten wir:

$$2\cdot\left(\tfrac{11}{4}\right)^2 y^2 - 4\cdot\tfrac{11}{4}y\cdot y + 9y^2 = 36 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow 105y^2 = 36\cdot 8 \Rightarrow$$

$$210y^2 = 36\cdot 16 \Rightarrow y = \pm\frac{24}{\sqrt{210}} \Rightarrow x = \frac{11}{4}y = \pm\frac{66}{\sqrt{210}}.$$

Die zugehörigen Punkte lauten: $P_1 = \frac{6}{\sqrt{210}}(11,4)$, $P_2 = \frac{-6}{\sqrt{210}}(11,4)$.

Tangenten: $y=-x+d \Rightarrow d=x+y$.

$\Rightarrow t_1 \ldots\ldots y = -x + \frac{90}{\sqrt{210}}$, $\quad t_2 \ldots\ldots y = -x - \frac{90}{\sqrt{210}}$.