Springer Lehrbuch

Ekbert Hering · Rolf Martin · Martin Stohrer

Physik für Ingenieure

10., vollständig neu bearbeitete Auflage
Mit 810 Abbildungen, 116 Tabellen und 2 Falttafeln

Springer

Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Ekbert Hering
Hochschule Aalen

Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. Rolf Martin
Hochschule Esslingen

Prof. Dr. rer. nat. Martin Stohrer
Hochschule für Technik Stuttgart

unter Mitarbeit von
Prof. Dr. G. Kurz, Hochschule Esslingen
Dr. rer. nat. Wolfgang Schulz, Zweckverband Landeswasserversorgung Stuttgart

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-540-71855-0 10. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-21036-9 9. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995, 1997, 1999, 2002, 2004 and 2007

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Innentypografie: deblik, Berlin
Einbandgestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Satz, Umbruch und Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier 7/3180/YL – 5 4 3 2 1 0

Zum Geleit

Physikalische Grundlagen sind für den Ingenieur unerlässlich, weil sie sowohl prinzipielle Grenzen aufzeigen als auch eine klare Orientierung im schneller werdenden technischen Wandel bieten. Quantentheorie und Festkörperphysik sind derzeit die Schrittmacher des technischen Fortschritts; deshalb wird ihnen in diesem Buch der gebührende Platz eingeräumt. Mein Wunsch ist, dass die Erkenntnisse aus der physikalischen Grundlagenforschung einen erkennbaren praktischen Nutzen zeigen. So wie der Quanten-Hall-Effekt nicht nur die physikalischen Grundlagen gefördert hat, sondern auch in der Präzisionsmesstechnik als Widerstandsnormal von Bedeutung ist, sollte die Verbindung zwischen physikalischen Grundlagen und ingenieurmäßiger Umsetzung enger und effektiver werden.
Möge dieses Buch einen Beitrag dazu leisten.

Prof. Dr. Klaus von Klitzing
Nobelpreisträger der Physik 1985

Vorwort zur zehnten, völlig überarbeiteten Auflage

In der zehnten Auflage erhielten wir die Chance, das Werk völlig neu zu überarbeiten. Eine neue Typografie, ein neuer Umschlag, die Berücksichtigung der neuen Rechtschreibreform und der neuen DIN EN ISO-Normen sind nur die äußerlichen Zeichen der gründlichen Überarbeitung. Alle Übersichten und ingenieurtechnischen Anwendungen wurden aktualisiert und die Übungsaufgaben teilweise neu konzipiert. Vor allem wurden ausführliche Wege zur Lösung der Übungsaufgaben aufgezeigt, so dass die physikalischen Erkenntnisse direkt erkennbar wurden. In Kapitel 2 (Mechanik) wurde eine neue Übersicht über die Hydro- und Aerodynamik eingefügt und der Trägheitstensor behandelt. In Kapitel 3 (Thermodynamik) wurde der Entropiebegriff neu hergeleitet. Im Kapitel 4 (Elektrizität und Magnetismus) wurden die Übersichten über Batterien um die Li-ion-Batterien erweitert und die Übersicht über Lampen um die Festkörperlampen. Ebenso aktualisiert und ergänzt wurde die Übersicht über die Kondensatoren. Darüber hinaus wurde ein neuer Abschnitt über Brennstoffzellen aufgenommen. In Kapitel 5 (Schwingungen und Wellen) geschah die Umstellung auf die neuen Formelzeichen der geänderten DIN 1311. In Kapitel 6 (Optik) wurden folgende Abschnitte neu aufgenommen: Matrixmethoden bei der Berechnung optischer Systeme, Farbmetrik, Laseranwendungen und moderne Mikroskopiemethoden (z. B. Rasterkraft-, Rastertunnel- und SNOM-Mikroskope). Eingefügt haben wir in Kapitel 7 (Akustik) eine Übersicht über Schallanwendungen. In Kapitel 8 (Atom- und Kernphysik) wurden die neuen gesetzlichen Bestimmungen zum Strahlenschutz aufgenommen, ferner die neuen Elemente im periodischen System sowie die neuesten Erkenntnisse in der Quantenphysik eingearbeitet. Solarzellen wurden in Kapitel 9 (Festkörperphysik) zusätzlich aufgenommen.
Dank sagen möchten wir vor allem Herrn *Dr. Hubertus von Riedesel* und Frau *Eva Hestermann-Beyerle* vom Springer Verlag. Sie gaben uns die Chance, das erfolgreiche Werk in der Jubiläumsauflage in wesentlichen Teilen neu zu gestalten und inhaltlich zu aktualisieren. Mit ihrer professionellen und freundlichen Betreuung haben sie uns immer motiviert, mit großem Ener-

gieeinsatz an diesem Werk zu arbeiten. Vorzügliche satztechnische Arbeit vollbrachte Frau *Steffi Hohensee* von der Firma LE-TEX, der wir ganz herzlich danken möchten. Die außerordentlich positive Resonanz von Studierenden, Kollegen und Mitarbeiter aus der Industrie und die vielen ermunternden Zuschriften und Verbesserungsvorschläge haben dieses Werk zusätzlich aktualisiert. In alter Verbundenheit möchten wir die Kollegen aus der Universität München erwähnen: *Prof. Dr. J. de Boer, Prof. Dr. K.E.G. Löbner* und *Prof. Dr. K.-H.Speidel* sowie die Kollegen *Prof. Dr. J. Massig* und *Prof. Dr. D. Weber* von der Hochschule Aalen. Stellvertretend für die vielen Persönlichkeiten, die uns beim Gelingen dieses aktuellen Werkes unterstützt haben, möchten wir nennen: Herrn *Dr. Norbert Südland* von der Universität Ulm für die Durchrechnung vieler Übungsaufgaben und die wertvollen Hinweise, *Prof. Dr. U. Weiss* von der Universität Stuttgart, *Prof. Dr. G. Prillinger* und Frau *Prof. Dr. R. Hiesgen* von der Hochschule Esslingen, Herrn *Dr. R. Behr* von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt sowie Herrn *Dr. H. D. Rüter* von der Universität Hamburg, der uns bei der Darstellung der Quantenmechanik sehr geholfen hat. Ausgezeichnete Unterstützung erhielten wir von Fachleuten aus der Industrie. Hierbei seinen genannt: *Dr. D. Ilic* und *M. Krebs* (VARTA Microbatteries), *Dr. M. Ross-Messemer* (Carl Zeiss), *Dr. K. Orth* (Osram) und *W. Günther* (Epcos).
Wir wünschen unseren Lesern beim Lesen des Werkes gute Erkenntnisse in der faszinierenden Welt der Physik und viel Freude beim Lernen. Sehr gerne nehmen wir konstruktive Hinweise aus dem sachkundigen Leserkreis auf.

Aalen, Esslingen und Stuttgart
Sommer 2007

Ekbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Lehrbuch gibt eine Einführung in die physikalischen Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Es ist das Anliegen des Buches, eine Brücke zu schlagen zwischen grundlegenden physikalischen Effekten und den Anwendungsfeldern der Ingenieurpraxis. Es ist deshalb selbstverständlich, dass ausschließlich SI-Maßeinheiten verwendet werden und in den entsprechenden Abschnitten auf DIN- bzw. ISO-Normen hingewiesen wird. Bei der Stoffauswahl sind besonders die modernen Teilgebiete berücksichtigt, wie beispielsweise Festkörperphysik (einschließlich Halbleiterphysik und Optoelektronik), technische Akustik, Lasertechnik, Holografie, Klimatechnik und Wärmeübertragung sowie in der Atom- und Kernphysik der quantisierte Hall-Effekt. Ein Sonderabschnitt Strahlenschutz informiert über die Strahlenbelastung aus Kernkraftwerken, über die physikalische und biologische Wirksamkeit radioaktiver Stoffe, die Strahlenmesstechnik sowie über die neuen gesetzlichen Vorschriften zum Strahlenschutz.
Zum mathematischen Verständnis sind die Verfahren der Differential-, Integral- und Vektorrechnung notwendig; allerdings sind die entsprechenden Herleitungen so ausführlich, dass auch der Leser mit geringen Vorkenntnissen zu folgen vermag. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich nicht nur an Studenten wendet, sondern auch praktizierenden Ingenieuren die physikalischen Grundlagen zur Einarbeitung in neue Fachgebiete und zur Weiterbildung liefert. Somit ist es auch eine Basis für eine flexible berufliche Entwicklung.

Im ersten Abschnitt sind die Methode physikalischen Erkennens und der Aufbau der Physik erläutert. Die Physik soll in ihren Zusammenhängen begriffen und nicht als bloße Aneinanderreihung spezieller physikalischer Gesetze missdeutet werden. Der Stoff ist in die Abschnitte Mechanik, Thermodynamik, Elektrizität und Magnetismus, Schwingungen und Wellen, Optik, Akustik, Atom- und Kernphysik, Festkörperphysik sowie Relativitätstheorie eingeteilt. Jedem Abschnitt ist ein Strukturbild vorangestellt, das die jeweiligen Teilbereiche und ihre gesetzmäßigen Zusammenhänge aufzeigt. Damit soll das Denken in Zusammenhängen gefördert und den Details ihr Platz im Gesamtgefüge zugewiesen werden. Übergreifende Darstellungen (z. B. beim Feldbegriff in der Mechanik, Thermodynamik und Elektrizitätslehre) sollen dem Leser darüber hinaus das universelle Denkkonzept der Physik vor Augen führen. Komplizierte Zusammenhänge sind in zweifarbigen Skizzen oder durch Rechnerausdrucke veranschaulicht; zahlreiche Bilder aus der Technik vermitteln einen aktuellen Praxisbezug.

Um zu zeigen, wie sich die physikalische Erkenntnis durch die Genialität einzelner Physiker sprunghaft entwickelt hat, sind in den entsprechenden Abschnitten die Meilensteine der Physik und ihre Wegbereiter genannt und im Anhang die Physik-Nobelpreisträger aufgeführt.

Zur Vertiefung des Verständnisses enthalten viele Unterabschnitte aus der Ingenieurpraxis stammende Berechnungsbeispiele. Aufgaben (mit Lösungen im Anhang) ermöglichen es dem Leser, selbst den Stoff zu üben und sein physikalisches Wissen zu vertiefen. Um alternative Fragestellungen zu untersuchen und physikalische Sachverhalte graphisch zu veranschaulichen, wurden programmierbare Rechner verwendet. Den Firmen Casio und Sharp, insbesondere den Herren *Newerkla* und *Wachter*, möchten wir für die Bereitstellung programmierbarer Taschenrechner danken.

Wir danken unseren akademischen Lehrern und Vorbildern, die uns zur physikalischen Erkenntnis geführt haben, vor allem den Professoren *U. Dehlinger, H. Haken, M. Pilkuhn, A. Seeger* und *C. F. von Weizsäcker*. Für konstruktive Kritik bedanken wir uns bei unseren Kollegen *H. Bauer, M. Käß, P. Kleinheins, G. Kneer, J. Linser* und *R. Schempp*. Frau *G. Folz* und den Herren *K. Schmid* und *A. Plath* danken wir für ihre tatkräftige Mithilfe. Der Unterstützung vieler Firmen ist es zu verdanken, dass aktuelles Anschauungsmaterial bereitgestellt werden konnte. Hierbei sind besonders folgende Firmenmitarbeiter zu erwähnen: *B. Imb* (BBC), *P. Gradischnig* (BMW), *D. Stöckel* und *P. Tautzenberger* (Rau), *M. Mayer* (Osram), *F. Schreiber* (Siemens), *H. Garrels* (Varta) und *H. Schweikart* (Voith). Ganz besonderer Dank gebührt dem VDI-Verlag, speziell Herrn Dipl.-Ing. *H. Kurt*, der das Lektorieren übernahm und für die reibungslose Abwicklung in erfreulicher Atmosphäre sorgte. Dabei wurde er in den Abschnitten 2, 3 und 6 von Professor *F. Hell* in besonders sachkundiger Weise unterstützt. Zuletzt möchten wir unseren Familien für ihre Geduld, ihre moralische Unterstützung und ihr großes Verständnis danken.

Wir hoffen, dass dieses Buch den Ingenieurstudenten eine gute Hilfe beim Erarbeiten physikalischer Zusammenhänge und den Ingenieuren in der Praxis ein brauchbares Nachschlagewerk ist. Gern nehmen wir Kritik und Verbesserungsvorschläge entgegen.

Aalen, Esslingen und Stuttgart,
Januar 1988

Ekbert Hering
Rolf Martin
Martin Stohrer

Inhaltsverzeichnis

Verwendete physikalische Symbole XVII

1 Einführung

1.1 Physikalischer Erkenntnisprozess **3**
1.2 Bereiche der physikalischen Erkenntnis **5**
1.3 Physikalische Größen **8**
1.3.1 Definition und Maßeinheit 8
1.3.2 Messgenauigkeit 14
1.3.3 Fehlerfortpflanzung 18
1.3.4 Kurvenanpassung 18
1.3.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion 21
1.3.6 Korrelationsanalyse 22

2 Mechanik

2.1 Einführung **29**
2.2 Kinematik des Punktes **29**
2.2.1 Eindimensionale Kinematik 30
2.2.2 Dreidimensionale Kinematik 36
2.2.3 Kreisbewegungen 39
2.3 Grundgesetze der klassischen Mechanik **43**
2.3.1 Konzept der klassischen Dynamik 43
2.3.2 Die Newton'schen Axiome 43
2.3.3 Masse 44
2.3.4 Kraft 45
2.4 Dynamik in bewegten Bezugssystemen **50**
2.4.1 Relativ zueinander geradlinig bewegte Bezugssysteme 50
2.4.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme 52
2.5 Impuls **56**
2.5.1 Impuls eines materiellen Punktes 56
2.5.2 Impuls eines Systems materieller Punkte 58
2.5.3 Raketengleichung 60
2.6 Arbeit und Energie **62**
2.6.1 Arbeit 62
2.6.2 Leistung, Wirkungsgrad 64
2.6.3 Energie 66
2.6.4 Energieerhaltungssatz 67
2.7 Stoßprozesse **68**
2.7.1 Übersicht und Grundbegriffe 68
2.7.2 Gerader, zentraler, elastischer Stoß 69
2.7.3 Gerader, zentraler, unelastischer Stoß 71
2.7.4 Schiefe, zentrale Stöße 73

2.8 Drehbewegungen ... 75
2.8.1 Drehmoment ... 75
2.8.2 Newton'sches Aktionsgesetz der Drehbewegung ... 75
2.8.3 Arbeit, Leistung und Energie bei der Drehbewegung ... 77
2.8.4 Drehbewegungen von Systemen materieller Punkte ... 78
2.8.5 Analogie Translation und Rotation ... 79
2.9 Mechanik starrer Körper ... 80
2.9.1 Freiheitsgrade und Kinematik ... 80
2.9.2 Kräfte am starren Körper ... 82
2.9.3 Schwerpunkt und potentielle Energie eines starren Körpers ... 85
2.9.4 Kinetische Energie eines starren Körpers ... 86
2.9.5 Massenträgheitsmomente starrer Körper ... 88
2.9.6 Kreisel ... 95
2.10 Gravitation ... 101
2.10.1 Beobachtungen ... 101
2.10.2 Newton'sches Gravitationsgesetz ... 103
2.10.3 Hubarbeit und potentielle Energie ... 104
2.10.4 Satellitenbahnen ... 106
2.11 Mechanik deformierbarer fester Körper – Elastomechanik ... 108
2.11.1 Elastische Verformung ... 108
2.11.2 Plastische Verformung ... 117
2.11.3 Härte fester Körper ... 119
2.12 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase-, Hydro- und Aeromechanik ... 121
2.12.1 Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik) und ruhende Gase (Aerostatik) ... 123
2.12.2 Fluide – strömende Flüssigkeiten (Hydrodynamik) und Gase (Aerodynamik) ... 135

3 Thermodynamik
3.1 Grundlagen ... 175
3.1.1 Einführung ... 175
3.1.2 Thermodynamische Grundbegriffe ... 177
3.1.3 Temperatur ... 179
3.1.4 Thermische Ausdehnung ... 181
3.1.5 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase ... 185
3.2 Kinetische Gastheorie ... 188
3.2.1 Gasdruck ... 188
3.2.2 Thermische Energie und Temperatur ... 190
3.2.3 Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle ... 192
3.3 Hauptsätze der Thermodynamik ... 194
3.3.1 Wärme ... 194
3.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik ... 197
3.3.3 Berechnung der Wärmekapazitäten ... 201
3.3.4 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase ... 204
3.3.5 Kreisprozesse ... 212

3.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik 222
3.3.7 Thermodynamische Potentiale 229
3.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik 231
3.4 Zustandsänderungen realer Gase 232
3.4.1 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung 233
3.4.2 Gasverflüssigung (Joule-Thomson-Effekt) 236
3.4.3 Phasenumwandlungen 237
3.4.4 Dämpfe und Luftfeuchtigkeit 245
3.5 Wärmeübertragung 248
3.5.1 Wärmeleitung 248
3.5.2 Konvektion 254
3.5.3 Wärmestrahlung 258
3.5.4 Wärmedurchgang 264

4 Elektrizität und Magnetismus
4.1 Physikalische Gesetze und Definitionen 270
4.1.1 Ladung 271
4.1.2 Stromstärke 273
4.1.3 Spannung 273
4.1.4 Widerstand und Leitwert 275
4.1.5 Ohm'sches Gesetz 278
4.1.6 Kirchhoff'sche Regeln im verzweigten Stromkreis 278
4.1.7 Schaltung von Widerständen 281
4.1.8 Messbereichserweiterung 283
4.1.9 Ausgewählte Messanordnungen 285
4.1.10 Klemmenspannung und innerer Widerstand 287
4.1.11 Schaltung von Spannungsquellen 288
4.1.12 Elektrische Leistung und elektrische Arbeit 290
4.2 Ladungstransport in Flüssigkeiten und Gasen 292
4.2.1 Ladungstransport in Flüssigkeiten 292
4.2.2 Ladungstransport im Vakuum und in Gasen 308
4.2.3 Plasmaströme 317
4.3 Elektrisches Feld 317
4.3.1 Allgemeiner Feldbegriff 317
4.3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes 318
4.3.3 Elektrische Feldstärke und Kraft 319
4.3.4 Elektrische Feldstärke und elektrostatisches Potential 321
4.3.5 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld 326
4.3.6 Leiter im elektrischen Feld 331
4.3.7 Nichtleiter im elektrischen Feld, elektrische Polarisation und Permittivitätszahl 340
4.3.8 Energieinhalt des elektrischen Feldes 350
4.4 Magnetisches Feld 351
4.4.1 Beschreibung des magnetischen Feldes 351

4.4.2 Magnetische Feldstärke und Durchflutungsgesetz . . . 352
4.4.3 Magnetische Flussdichte und Kraftwirkungen im Magnetfeld . . . 357
4.4.4 Materie im Magnetfeld . . . 368
4.5 Instationäre Felder . . . 383
4.5.1 Elektromagnetische Induktion . . . 383
4.5.2 Periodische Felder (Wechselstromkreis) . . . 390
4.5.3 Ein- und Ausschaltvorgänge in Stromkreisen . . . 404
4.5.4 Messgeräte . . . 408
4.5.5 Zusammenhang elektrischer und magnetischer Größen – Maxwell'sche Gleichungen 412

5 Schwingungen und Wellen
5.1 Schwingungen . . . 419
5.1.1 Physikalische Grundlagen schwingungsfähiger Systeme . . . 419
5.1.2 Freie Schwingung . . . 423
5.1.3 Erzwungene Schwingung . . . 443
5.1.4 Überlagerung von Schwingungen . . . 450
5.1.5 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden (gekoppeltes Schwingungssystem) . . . 459
5.1.6 Nichtlineare Schwinger . . . 463
5.1.7 Parametrisch erregte Schwingungen . . . 463
5.2 Wellen . . . 464
5.2.1 Physikalische Grundlagen der Wellenausbreitung . . . 464
5.2.2 Harmonische Wellen . . . 468
5.2.3 Doppler-Effekt . . . 474
5.2.4 Interferenz . . . 477

6 Optik
6.1 Einführung . . . 491
6.2 Geometrische Optik . . . 492
6.2.1 Lichtstrahlen . . . 492
6.2.2 Reflexion des Lichtes . . . 493
6.2.3 Brechung des Lichtes . . . 499
6.2.4 Abbildung durch Linsen . . . 510
6.2.5 Blenden im Strahlengang . . . 522
6.2.6 Abbildungsfehler . . . 523
6.2.7 Optische Instrumente . . . 523
6.3 Radio- und Fotometrie . . . 534
6.3.1 Einführung . . . 534
6.3.2 Strahlungsphysikalische Größen . . . 534
6.3.3 Lichttechnische Größen . . . 542
6.3.4 Farbmetrik . . . 545
6.4 Wellenoptik . . . 549
6.4.1 Interferenz und Beugung . . . 549
6.4.2 Polarisation des Lichtes . . . 578

6.5 Quantenoptik ... 588
6.5.1 Lichtquanten ... 588
6.5.2 Dualismus Teilchen–Welle ... 592
6.5.3 Wärmestrahlung ... 593
6.5.4 Laser ... 596
6.5.5 Materiewellen ... 600
6.6 Abbildung mikroskopischer Objekte ... 603
6.6.1 Beugungsbegrenzte Abbildung ... 603
6.6.2 Überwindung der Beugungsbegrenzung ... 606

7 Akustik
7.1 Einführung ... 613
7.2 Schallwellen ... 614
7.2.1 Schallausbreitung ... 614
7.2.2 Schallwandler ... 619
7.2.3 Schallwellen an Grenzflächen ... 624
7.3 Schallempfindung ... 630
7.3.1 Physiologische Akustik ... 630
7.3.2 Musikalische Akustik ... 634
7.4 Technische Akustik ... 638
7.4.1 Raumakustik ... 638
7.4.2 Luftschalldämmung ... 641
7.4.3 Körperschalldämmung ... 642
7.4.4 Strömungsgeräusche ... 645
7.4.5 Ultraschall ... 647
7.4.6 Schalleinsatz ... 649

8 Atom- und Kernphysik
8.1 Bohr'sches Atommodell ... 654
8.1.1 Optisches Spektrum des Wasserstoffatoms ... 654
8.1.2 Bohr'sche Postulate ... 657
8.1.3 Quantenbedingungen nach Bohr/Sommerfeld ... 659
8.2 Quantentheorie ... 659
8.2.1 Hamilton-Operator ... 662
8.2.2 Schrödinger-Gleichung ... 664
8.2.3 Unschärferelation ... 669
8.2.4 Quantenmechanik des Wasserstoffatoms ... 673
8.2.5 Quanten-Hall-Effekt ... 677
8.2.6 Tunneleffekt ... 684
8.3 Bahn- und Spinmagnetismus ... 686
8.3.1 Zeeman- und Stark-Effekt ... 690
8.3.2 Elektronen- und Kernspinresonanz ... 690
8.4 Systematik des Atombaus ... 692

8.4.1 Periodensystem der Elemente 692
8.4.2 Aufbau der Elektronenhülle 693
8.5 Röntgenstrahlung 694
8.5.1 Bremsstrahlung und charakteristische Strahlung 694
8.5.2 Absorption von Röntgenstrahlung, Computertomographie 695
8.6 Molekülspektren 698
8.6.1 Potentialkurve 698
8.6.2 Rotations-Schwingungs-Spektrum 700
8.6.3 Raman-Effekt 703
8.7 Aufbau der Atomkerne 703
8.7.1 Größe und Ladungsverteilung 703
8.7.2 Kernmodelle 706
8.8 Kernumwandlung 714
8.8.1 Radioaktiver Zerfall 715
8.8.2 Kernreaktionen 730
8.8.3 Kernspaltung und Kernreaktoren 733
8.8.4 Kernfusion 741
8.9 Elementarteilchen 746
8.9.1 Einteilung 748
8.9.2 Erhaltungssätze 752
8.9.3 Fundamentale Wechselwirkungen 754
8.10 Strahlenschutz 756
8.10.1 Wechselwirkung der Strahlung mit Materie 757
8.10.2 Dosisgrößen 765
8.10.3 Biologische Wirkung der Strahlung 770
8.10.4 Dosismessung 773
8.10.5 Strahlenschutzmaßnahmen 776

9 Festkörperphysik
9.1 Struktur fester Körper 785
9.1.1 Kristallbindungsarten 785
9.1.2 Kristalline Strukturen 788
9.1.3 Gitterfehler 792
9.1.4 Amorphe Werkstoffe 794
9.1.5 Makromolekulare Festkörper 796
9.1.6 Ausgewählte Werkstoffe 800
9.1.7 Flüssigkristalle 806
9.2 Elektronen in Festkörpern 809
9.2.1 Energiebänder-Modell 809
9.2.2 Metalle 812
9.2.3 Halbleiter 818
9.2.4 Supraleitung 832
9.3 Thermodynamik fester Körper 837

9.3.1 Gitterschwingungen 837
9.3.2 Effekte im Zusammenhang mit Wärmefluss und elektrischem Strom 845
9.3.3 Piezoelektrizität 847
9.4 Optoelektronische Halbleiter-Bauelemente 850
9.4.1 Strahlungsquellen 850
9.4.2 Empfänger 854

10 Spezielle Relativitätstheorie
10.1 Relativität des Bezugssystems 867
10.2 Lorentz-Transformation 870
10.3 Relativistische Effekte 872
10.3.1 Längenkontraktion 872
10.3.2 Zeitdilatation 872
10.3.3 Relativistische Addition der Geschwindigkeiten 874
10.4 Relativistische Dynamik 875
10.5 Spezielle Relativitätstheorie in der Elektrodynamik 878
10.5.1 Elektrodynamische Kraft 878
10.5.2 Doppler-Effekt des Lichtes 880

11 Anhang 885
11.1 Lösungen der Übungsaufgaben 885
11.2 Nobelpreisträger der Physik 973

12 Namen- und Sachverzeichnis 987

Verwendete physikalische Symbole

(Symbole, die in nachfolgenden Abschnitten die gleiche Bedeutung haben, sind nur einmal angegeben.)

2. Mechanik

A	Fläche	R	Gaskonstante; Krümmungsradius
$\boldsymbol{a}$	Beschleunigung	$\boldsymbol{r}$	Ortsvektor
c	Lichtgeschwindigkeit; Schallgeschwindigkeit	Re	Reynoldszahl
		$\boldsymbol{s}$	Ortskoordinate
c_A	Auftriebsbeiwert	s	Weg; Bogenlänge
c_D	Druckwiderstandsbeiwert	T	Kelvin-Temperatur; Periodendauer
c_M	Momentenbeiwert	t	Zeit
c_W	Widerstandsbeiwert	V	Volumen
d	Abstand; Dickenänderung	$\dot{V}$	Volumenstrom
E	Energie; Elastizitätsmodul	$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeit
$\boldsymbol{e}$	Einheitsvektor	W	Arbeit
$\boldsymbol{F}$	Kraft	w	spezifische (massebezogene) Arbeit
Fr	Froudezahl		
G	Schubmodul, Gravitationskonstante	α	Durchflusszahl; Kontraktionszahl; Winkelbeschleunigung
$\boldsymbol{g}$	Gravitationsfeldstärke		
g	Fallbeschleunigung	β	Winkel
H	Fallhöhe; Förderhöhe	Γ	Zirkulation
h	Höhe	γ	Schiebung; Scherwinkel; Raumausdehnungskoeffizient
I	Flächenträgheitsmoment		
J	Massenträgheitsmoment	Δ	Differenz
$\boldsymbol{j}$	Transportflussdichte; Massenstromdichte	ε	Neigungswinkel; Dehnung; Expansionszahl; Gleitzahl
K	Kompressionsmodul	η	dynamische Viskosität; Wirkungsgrad
k	Federsteifigkeit; Rauigkeit	ϑ	Celsius-Temperatur
k_t	Drehfedersteifigkeit	$\varkappa$	Kompressibilität
$\boldsymbol{L}$	Drehimpuls	λ	Rohrreibungszahl
l	Länge	μ	Reibungszahl; Ausflusszahl; Poissonzahl
$\boldsymbol{M}$	Drehmoment		
Ma	Mach'sche Zahl	ν	kinematische Viskosität
m	Masse	ϱ	Dichte
$\dot{m}$	Massenstrom	σ	Spannung; Normalspannung
n	Drehzahl	τ	Schubspannung
P	Leistung	Φ	Transportgröße
$\boldsymbol{p}$	Impuls	φ	Drehwinkel; Potentialfunktion; Geschwindigkeitsziffer; Fluidität
p	Druck; Anteil		
Q	Förderstrom (Pumpen); Volumenstrom (Turbinen)	φ_G	Gravitationspotential
		$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit

3. Thermodynamik

a	Temperaturleitfähigkeit
C, C_m, c	Wärmekapazität, molare bzw. spezifische Wärmekapazität
C_{mp}, c_p	isobare molare bzw. isobare spezifische Wärmekapazität
C_{mv}, c_v	isochore molare bzw. isochore spezifische Wärmekapazität
C_{12}	Strahlungsaustauschkoeffizient
c	Schallgeschwindigkeit
E_A	Aktivierungsenergie
$\overline{E}_{kin}$	mittlere kinetische Energie eines Moleküls
F, F_m, f	freie Energie, freie molare bzw. freie spezifische Energie
f	Anzahl der Freiheitsgrade; Wärmequellendichte
G, G_m, g	freie Enthalpie, freie molare bzw. freie spezifische Enthalpie
g_i	statistisches Gewicht des Zustandes i
H, H_m, h	Enthalpie, molare bzw. spezifische Enthalpie
j_q	Wärmestromdichte
k	Boltzmann-Konstante; Wärmedurchgangskoeffizient
M	Molmasse
M_e	spezifische Ausstrahlung
m_M	Masse eines Moleküls
N	Teilchenanzahl eines Systems
n	Polytropenexponent, Teilchenzahldichte
N_A	Avogadro-Konstante
P_i	Wahrscheinlichkeit der Besetzung des Zustands i
p	Druck
Q, Q_m, q	Wärme, molare bzw. spezifische Wärme
Q	Wärmestrom
R_i, R_m	individuelle bzw. allgemeine (molare) Gaskonstante
S, S_m, s	Entropie, molare bzw. spezifische Entropie
T	thermodynamische Temperatur
U, U_m, u	innere Energie, molare bzw. spezifische innere Energie
V, V_m, v	Volumen, molares bzw. spezifisches Volumen
$v_m, \overline{v}, v_w$	mittlere, durchschnittliche bzw. wahrscheinlichste Geschwindigkeit von Gasmolekülen
W	thermodynamische Wahrscheinlichkeit
x	Feuchtegrad
Z	Realgasfaktor
α	Längenausdehnungskoeffizient; Absorptionsgrad
α^*	Wärmeübergangskoeffizient
γ	Raumausdehnungskoeffizient
ε	Emissionsgrad; Kompressionsverhältnis
$\varepsilon_K, \varepsilon_W$	Leistungszahl einer Kältemaschine bzw. einer Wärmepumpe
η_{th}	thermischer Wirkungsgrad
$\varkappa$	Isentropen-(Adiabaten-)Exponent
λ	Wärmeleitfähigkeit
ν	Stoffmenge (Teilchenmenge)
ϱ	Dichte; Reflexionsgrad
τ	Transmissionsgrad
Φ_e	Strahlungsleistung
φ	relative Luftfeuchte
φ_a	absolute Luftfeuchte
φ_{12}	Einstrahlzahl

4. Elektrizität und Magnetismus

A_r	relative Atommasse
A	elektrochemisches Äquivalent
A_H	Hall-Koeffizient
$\boldsymbol{B}$	magnetische Induktion, Flussdichte
B	Blindleitwert, Suszeptanz
B_R	Remanenzinduktion
B_S	Sättigungsinduktion
C	Kapazität
$\boldsymbol{D}$	elektrische Verschiebungsdichte
$\boldsymbol{E}$	elektrische Feldstärke
E_H	Hall-Feldstärke
e	Elementarladung
$\boldsymbol{F}_L$	Lorentz-Kraft
F	Faraday-Konstante
f	Spulenformfaktor
G	Leitwert, Konduktanz
$\boldsymbol{H}$	magnetische Feldstärke
H_C	Koerzitivfeldstärke

I, i	elektrische Stromstärke
$\hat{i}$	Amplitude der elektrischen Stromstärke
I, i_{eff}	Effektivwert der Wechselstromstärke
$\boldsymbol{J}$	magnetische Polarisation
j	elektrische Stromdichte
L	Induktivität
$\boldsymbol{M}$	Magnetisierung
$\boldsymbol{m}$	Ampere'sches magnetisches Moment
$\boldsymbol{m}_{\text{C}}$	Coulomb'sches magnetisches Moment
N	Windungszahl
$\boldsymbol{P}$	elektrische Polarisation
P, p	Leistung
$\boldsymbol{p}$	elektrisches Dipolmoment
Q	elektrische Ladung; Blindleistung
R	elektrischer Widerstand
R_{m}	magnetischer Widerstand
S	Scheinleistung
T_{C}	Curie-Temperatur
T_{N}	Néel-Temperatur
U, u	elektrische Spannung
$\hat{u}$	Amplitude der elektrischen Spannung
U, u_{eff}	Effektivwert der elektrischen Spannung
U_{H}	Hall-Spannung
u_{ind}	induzierte Spannung
W_{A}	Austrittsarbeit
W_{el}	elektrische Arbeit und Feldenergie
w_{el}	elektrische Energiedichte
W_{magn}	magnetische Arbeit und Feldenergie
w_{magn}	magnetische Energiedichte
X	Blindwiderstand, Reaktanz
Z	Scheinwiderstand, Impedanz
z	Wertigkeit
α	Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes
γ	Spannungsfaktor
ε	Permittivität
ε_0	elektrische Feldkonstante
ε_{r}	Permittivitätszahl
$\varkappa$	elektrische Leitfähigkeit, Konduktivität
μ	Permeabilität
μ_0	magnetische Feldkonstante
μ_{r}	Permeabilitätszahl
ϱ	spezifischer elektrischer Widerstand, Resistivität
ϱ	Raumladungsdichte
σ	Streufaktor; elektrische Flächenladungsdichte
τ	Zeitkonstante
φ	elektrisches Potential; Verlustwinkel
χ_{e}	elektrische Suszeptibilität
χ_{m}	magnetische Suszeptibilität
Θ	elektrische Durchflutung
Φ	magnetischer Fluss
ψ	elektrischer Fluss

5. Schwingungen und Wellen

c	Phasengeschwindigkeit
c_{gr}	Gruppengeschwindigkeit
d	Dämpfungskoeffizient
f	Frequenz
f_0, f_{d}	Eigenfrequenz der freien ungedämpften bzw. gedämpften Schwingung
f_{Res}	Resonanzfrequenz
f_{S}	Schwebungsfrequenz
j	$\sqrt{-1}$
k	Federsteifigkeit; Wellenzahl
k_{t}	Drehfedersteifigkeit
Q	Güte
I, S	Intensität
T	Periodendauer
T_0, T_{d}	Periodendauer der freien ungedämpften bzw. gedämpften Schwingung
T_{S}	Periodendauer der Schwebung
w	Energiedichte
y	Auslenkung
$\hat{y}$	Amplitude
β	Auslenkungswinkel
$\hat{\beta}$	Amplitude des Auslenkungswinkels
γ	Phasenverschiebung zwischen Erreger und Schwinger
Δ	Gangunterschied
δ	Abklingkoeffizient
η	Kreisfrequenzverhältnis
ϑ	Dämpfungsgrad
Λ	logarithmisches Dekrement
λ	Wellenlänge
φ	Phasenwinkel
φ_0	Nullphasenwinkel
$\Delta\varphi$	Phasenverschiebung zwischen zwei Schwingungen
ω	Kreisfrequenz

ω_0, ω_d	Kreisfrequenz der freien ungedämpften bzw. gedämpften Schwingung
Ω	Erregerkreisfrequenz
ω_{Res}	Resonanzkreisfrequenz

6. Optik

A_N	numerische Apertur
a, a'	Gegenstands- bzw. Bildweite
A, B	Einstein-Koeffizienten
b	Spaltbreite
D'	Brechkraft
D_{AP}, D_{EP}	Durchmesser von Austritts- bzw. Eintrittspupille
E_e	Bestrahlungsstärke
E_v	Beleuchtungsstärke
E_{ph}	Energie eines Photons
e	Abstand zweier Linsen
f, f'	gegenstandsseitige bzw. bildseitige Brennweite
g	Gitterkonstante
H_e	Bestrahlung
H_v	Beleuchtung
h	Planck'sche Konstante
I	Intensität
I_e	Strahlstärke
I_v	Lichtstärke
K_m	photometrisches Strahlungsäquivalent
k	Blendenzahl
l	Kohärenzlänge
L_e	Strahldichte
L_v	Leuchtdichte
M_e	spezifische Ausstrahlung
M_v	spezifische Lichtausstrahlung
m	Ordnungszahl bei Interferenzen
N_i	Besetzungszahl des Niveaus i
n	Brechungsindex
p	Gitterstrichzahl
Q_e	Strahlungsenergie
Q_v	Lichtmenge
r	Krümmungsradius
s, s'	gegenstandsseitige bzw. bildseitige Schnittweite
u'	Durchmesser des Unschärfekreises
V	Hellempfindlichkeitsgrad
y, y'	Gegenstands- bzw. Bildgröße
Z	Dämmerungszahl
z, z'	Abstand vom Gegenstand bzw. Bild zum jeweiligen Brennpunkt
α	brechender Winkel eines Prismas
β'	Abbildungsmaßstab
Γ'	Vergrößerung
δ	Ablenkungswinkel
ε	Einfallswinkel
ε_r	Reflexionswinkel
ε'	Brechungswinkel
ε_p	Polarisationswinkel
Θ	Glanzwinkel
σ	Winkel zwischen Strahl und optischer Achse
τ	Lebensdauer
Φ_e	Strahlungsleistung
Φ_v	Lichtstrom
φ	Zentriwinkel
Ω	Raumwinkel

7. Akustik

A	äquivalente Schallabsorptionsfläche
B	Biegesteifigkeit
d	Absorberdicke
f_G	Grenzfrequenz der Spuranpassung
G_{pU}	Übertragungsmaß elektroakustischer Wandler
I	Schallintensität
L	Schallpegel
L_S	Lautstärke
L_n	Norm-Trittschallpegel
m'	flächenbezogene Masse
P	Schallleistung
p	Schalldruck
R	Schalldämm-Maß
r	Reflexionsfaktor
S	Lautheit; Fläche
T	Nachhallzeit
v	Schallschnelle
w	Schallenergiedichte
y	Elongation

Z	Schallkennimpedanz
α	Schallausbreitungs-Dämpfungskoeffizient
α_s	Schallabsorptionsgrad
δ	Einfallswinkel
Δ	Bewertungsfaktor
ϱ_s	Schallreflexionsgrad
τ_s	Schalltransmissionsgrad

8. Atom- und Kernphysik

A	Nukleonenzahl; Aktivität
A_S	spezifische Aktivität
a_0	Bohr'scher Radius des Wasserstoffatoms im Grundzustand
B	Baryonenzahl
$D, \dot{D}$	Energiedosis, Energiedosisleistung
$D_q, \dot{D}_q$	Äquivalentdosis, Äquivalentdosisleistung
d	Flächenmasse
E	Energie-Eigenwert
E_B	Bindungsenergie
E_S	Schwellenenergie
$\boldsymbol{F}, F$	Gesamtdrehimpuls des Atoms einschließlich Kerndrehimpuls, zugehörige Quantenzahl
g	Faktor nach Landé
H	Hamilton-Funktion
$\hat{H}$	Hamilton-Operator
h	Planck'sches Wirkungsquantum ($\hbar = h/(2\pi)$)
$\boldsymbol{I}, I$	Kerndrehimpuls, zugehörige Quantenzahl
$\boldsymbol{J}, J$	Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle, zugehörige Quantenzahl
$\boldsymbol{j}, j$	Gesamtdrehimpuls eines Elektrons, zugehörige Quantenzahl
$\boldsymbol{L}, L$	Gesamtbahndrehimpuls der Elektronenhülle, zugehörige Quantenzahl
L	Leptonenzahl
$\boldsymbol{l}, l$	Bahndrehimpuls eines Elektrons, zugehörige Quantenzahl
m_l	magnetische Quantenzahl des Drehimpulses
m_s	magnetische Quantenzahl des Spins
m_j	magnetische Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses
m_0	Ruhemasse
N	Neutronenzahl
n	Hauptquantenzahl
Q	Kern-Quadrupolmoment
R	Reichweite
R_H	Rydberg-Konstante
$\boldsymbol{S}$	Gesamtspinmoment
$\boldsymbol{s}, s$	Elektronenspin, zugehörige Quantenzahl (Spinquantenzahl)
$t_{1/2}$	Halbwertszeit
u	atomare Masseneinheit
x	Schichtdicke
Z	Kernladungszahl (Ordnungszahl, Protonenzahl)
α	Feinstrukturkonstante
γ	gyromagnetisches Verhältnis
λ	Zerfallskonstante; Wellenlänge
$\boldsymbol{\mu}, \mu$	magnetisches Moment
μ	Absorptionskoeffizient
μ_K	Kern-Magneton
μ_B	Bohr'sches Magneton
ν	Frequenz
Π	Paritätsquantenzahl
Σ	makroskopischer Wirkungsquerschnitt
σ	Wirkungsquerschnitt
Φ	Flussdichte
Ψ	zeitabhängige Wellenfunktion
ψ	Wellenfunktion

9. Festkörperphysik

A	Fläche; Transistor-Stromverstärkung in Basisschaltung
a	Gitterkonstante
B	Transistor-Stromverstärkung in Emitterschaltung
B_c	kritische magnetische Flussdichte
c_{gr}	Gruppengeschwindigkeit
c_{ph}	Phasengeschwindigkeit
$D(E)$	Zustandsdichte
D^*	Detektivität
E_B	Bindungsenergie
E_e	Bestrahlungsstärke

E_F	Fermi-Energie	S	Empfindlichkeit
E_g	Breite der verbotenen Zone	T_c	kritische Temperatur
$f(E)$	Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion	T_D	Debye-Temperatur
I_B, I_C, I_E	Basis-, Kollektor- bzw. Emitterstrom	T_E	Einstein-Temperatur
I_F	Flussstrom	T_F	Fermi-Temperatur
I_{ph}	Photostrom	T_0	charakteristische Temperatur
I_S	Sperrsättigungsstrom	U_d	Diffusionsspannung
I_{th}	Schwellstrom	U_F	Flussspannung
j_c	kritische Stromdichte	U_K	Kontaktspannung
k	Wellenzahl	U_L	Leerlaufspannung
k_F	Fermi-Vektor	U_{th}	Thermospannung
L	Kristall-Länge; Lorenz'sche Zahl	$V(\lambda)$	Hellempfindlichkeitsgrad
l	mittlere freie Weglänge	v_d	Driftgeschwindigkeit
M	Molmasse; Multiplikationsfaktor	v_F	Fermi-Geschwindigkeit
N_L, N_v	effektive Zustandsdichte im Leitungsband bzw. im Valenzband	α	Absorptionskoeffizient; Madelung-Konstante; thermischer Ausdehnungskoeffizient
n	Elektronenkonzentration	$\bar{\varepsilon}$	mittlere Energie eines Atoms
n_A, n_D	Akzeptoren- bzw. Donatoren-konzentration	η	Quantenausbeute
n_i	Eigenleitungsdichte	μ, μ_n, μ_p	Beweglichkeit, Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeit
n_{ph}	Phononendichte	Φ_0	magnetisches Flussquantum
$\overline{n}$	Brechungsindex		
p	Löcherkonzentration		

10. Spezielle Relativitätstheorie

l, l'	Länge im System S bzw. S′	u	Geschwindigkeit
m, m_0	bewegte Masse bzw. Ruhemasse	v	Systemgeschwindigkeit
t, t'	Zeit im System S bzw. S′	γ	relativistischer Faktor

Kapitel 1
Einführung

1

1 Einführung
1.1 Physikalischer Erkenntnisprozess 3
1.2 Bereiche der physikalischen Erkenntnis 5
1.3 Physikalische Größen 8
1.3.1 Definition und Maßeinheit 8
1.3.2 Messgenauigkeit 14
1.3.3 Fehlerfortpflanzung 18
1.3.4 Kurvenanpassung 18
1.3.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion 21
1.3.6 Korrelationsanalyse 22

1 Einführung

1.1 Physikalischer Erkenntnisprozess

Die Physik ist ein Teilgebiet der Naturwissenschaften. Sie beschäftigt sich im Gegensatz zur Medizin oder Biologie mit der *leblosen Umwelt*. Dieser eingeengte Betrachtungsbereich muss beachtet werden, wenn es um die Frage geht, ob die Methoden der physikalischen Erkenntnis auch auf andere Wissenschaftsgebiete direkt übertragbar sind.

In der Physik versucht man, die Gesetzmäßigkeiten der unbelebten Umwelt zu erfassen. Sind diese bekannt, so kann man die physikalischen Gesetze für technische Zwecke ausnützen. Die *Ingenieurwissenschaft* ist ein Beispiel hierfür, weil man in allen ihren Bereichen, beispielsweise im Maschinenbau, in der Feinwerktechnik und in der Elektrotechnik, erfolgreich physikalische Gesetze in der industriellen Praxis angewendet. Der Prozess der physikalischen Erkenntnis ist in Abb. 1.1 als geschlossener Regelkreis dargestellt. Er umfasst vier Stationen:

a) *Experiment*
Im ersten Schritt werden Merkmale der leblosen Umwelt, die *physikalischen Größen*, gesucht. Zur präziseren Beschreibung müssen auch Merkmale durch *physikalische Definitionen* festgelegt werden (z. B. die Definition der Kraft). In einem Experiment werden durch Messungen zwei oder mehr physikalische Größen miteinander verglichen und die dabei aufgestellten Zusammenhänge aufgeschrieben.

Auf geniale und faszinierende Weise ist es dem menschlichen Geist gelungen, alle denkbaren physikalischen Erscheinungen auf *höchstens sieben physikalische Grundgrößen (Basisgrößen)* zurückzuführen (Zeit, Masse, Länge, Temperatur, Stromstärke, Lichtstärke und Stoffmenge, Abschn. 1.3.1). Diese Reduktion der Komplexität auf verhältnismäßig wenige relevante Faktoren ist ein Grund für den Erfolg bei der ingenieurmäßigen Umsetzung physikalischer Erkenntnisse in der Technik.

In der Ingenieurpraxis können physikalische Zusammenhänge jedoch auch so komplex

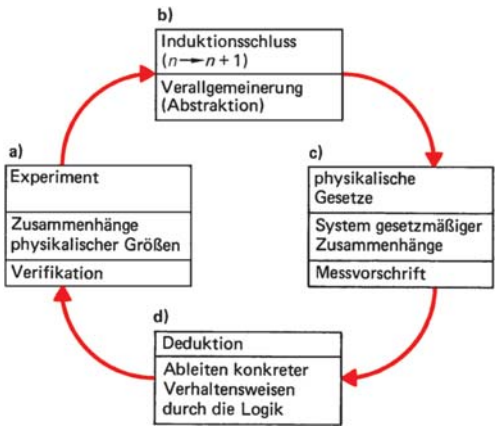


Abb. 1.1 Regelkreis der physikalischen Erkenntnis

sein, dass empirisch gefundene Beziehungen in Tabellen und Grafiken niedergelegt werden müssen, weil sie theoretisch nicht exakt genug vorhergesagt werden können (z. B. der Einfluss der Reibung bei der Strömung realer Flüssigkeiten und Gase).

b) *Induktionsschluss*
Werden physikalische Zusammenhänge immer wieder experimentell bestätigt, dann kann gefolgert werden, dass sie zu jeder Zeit und an jedem Ort gültig sind. Dieser Schluss, der eine *Verallgemeinerung* darstellt, wird in der Mathematik *Induktionsschluss* (Schluss von n auf $n + 1$) genannt. Eine derartige Verallgemeinerung ist nur zulässig, wenn sich die physikalischen Konstanten nicht ändern. Diese wichtige Forderung nach der *Konstanz der Naturereignisse* äußert sich in der Physik in der Existenz von Naturkonstanten (z. B. Lichtgeschwindigkeit c). Beim Übertragen des physikalischen Erkenntnisprozesses auf andere Disziplinen, z. B. auf die Psychologie, muss daher genau geprüft werden, ob die Konstanz der Aussageparameter gegeben und damit eine Verallgemeinerung der Beziehungen zulässig ist.

c) *Physikalische Gesetze*
Mit der Verallgemeinerung durch den Induktionsschluss ist ein *physikalisches Gesetz* formuliert (z. B. die Kraft ist proportional zur Masse und Beschleunigung). Das physikalische Gesetz wird für die weitere Analyse und die Anwendung mathematisch formuliert (z. B. $F = ma$). Bildet die Vielzahl an physikalischen Gesetzen ein widerspruchsfreies System wissenschaftlicher Aussagen über die gesetzmäßigen Zusammenhänge eines physikalischen Bereiches, so wird dieses System *Theorie* genannt. Die Theorie ermöglicht einerseits eine Vorhersage durch die Deduktion (d) und andererseits die Überprüfung ihres eigenen Wahrheits- bzw. Gültigkeitsanspruches durch das Experiment (a).

d) *Deduktion*
Aus den physikalischen Theorien oder Gesetzen können mit Hilfe der Logik spezielle, auf ein konkretes Problem bezogene Aussagen hergeleitet werden. In der klassischen Mechanik kann beispielsweise aus der Bahnkurve für den schiefen Wurf zu jeder Zeit jeder Ort des sich bewegenden Körpers vorhergesagt werden.
Der große Erfolg der physikalischen Erkenntnismethode beruht hauptsächlich auf der *Genauigkeit* und *Zuverlässigkeit* der *Vorhersage*. Zum Beispiel wäre die Mondlandung nicht möglich gewesen, wenn auf der Erde nicht alle Gesetzmäßigkeiten bekannt gewesen wären, sodass alle möglichen Ereignisse während des Fluges auf der Erde simuliert werden konnten. Es war möglich, die Mondlandung gleichsam im Geist vorwegzunehmen, weil die physikalischen Theorien richtig und zuverlässig sind und eine gültige Aussage im konkreten Fall erlauben. Ein wichtiger Bestandteil der ingenieurmäßigen Denkweise besteht nämlich darin, zukünftiges Verhalten beispielsweise von Maschinen oder elektronischen Schaltungen durch die gültigen physikalischen Gesetze vorauszusehen. Diese Methode wird vor allem auf dem Gebiet der Schadensverhütung außerordentlich wirkungsvoll eingesetzt.

a) *Experiment*
Auch die sorgfältigste Vorhersage physikalischer Zustände kann fehlerhaft sein, weil bestimmte Einflussgrößen nicht berücksichtigt sind. Aus diesem Grund muss die Vorhersage eines physikalischen Gesetzes durch ein Experiment auf ihre Richtigkeit überprüft werden *(Verifikation)*. Voraussetzung dafür ist, dass mit dem physikalischen Gesetz ein realer Messaufbau definiert ist, der die Verifizierung der Prognose erlaubt. Diese harte Forderung von Albert Einstein, dass *jedes physikalische Gesetz zugleich eine Mess-*

vorschrift für eine reproduzierbare Messung darstellen muss, hat die Physik davor bewahrt, in geistreiche Phantastereien abzugleiten. Mit der Prüfung der Prognose am Experiment ist der physikalische Erkenntnisprozess wie in einem Regelkreis geschlossen. Die Wirklichkeit korrigiert damit im Verifikationstest den physikalischen Erkenntnisprozess. Auf diese Weise ist ausgeschlossen, dass dieser auf das rein geistige Denkvermögen des Menschen beschränkt bleibt.

1.2 Bereiche der physikalischen Erkenntnis

Wie Abb. 1.2 zeigt, lässt sich die Physik in zwei Hauptbereiche einteilen, in die *Makrophysik* und in die *Mikrophysik*. Entscheidend für die Zuordnung ist die *Größe der Wirkung* (Wirkung = Energie × Zeit). Sind die Wirkungen sehr groß im Vergleich zum *Planck'schen Wirkungsquantum* $h = 6{,}6260693 \cdot 10^{-34}$ J s, dann handelt es sich um Vorgänge in der Makrophysik. Sind die Wirkungen dagegen in der Größenordnung von h, so liegt die Mikrophysik vor. Anschaulich könnte diese Einteilung auch in dieser Weise vorgenommen werden: Die Mikrophysik beschäftigt sich mit Phänomenen im *atomaren* und *subatomaren Bereich* (Längen in der Größenordnung $\lesssim 10^{-10}$ m), während sich die Makrophysik mit bis zu *lichtmikroskopisch sichtbaren Phänomenen* auseinandersetzt (Längen in der Größenordnung $\gtrsim 10^{-6}$ m). Die wesentlichen Unterschiede zwischen Makro- und Mikrophysik gehen aus Abb. 1.2 hervor:

- *Erfahrbarkeit*
  Makrophysikalische Vorgänge sind unmittelbar erfahrbar, mikrophysikalische dagegen nicht. Dies bedeutet, dass die Mikrophysik im Prinzip nicht anschaulich sein kann, weil sie sich der Anschauung entzieht.
- *Zerlegung*
  Die Makrophysik beschäftigt sich mit Phänomenen, die in kleinere Teile zerlegbar sind und nach ihrer Zerlegung getrennt untersucht werden können. In der Mikrophysik handelt es sich grundsätzlich um unzerlegbare Teilchen (Quanten). Aufgrund dieser Tatsache müssen die praktizierten analytischen, auf Zerlegung basierenden Experimente versagen. Dies hat zur Folge, dass unser experimenteller Zugriff auf die unzerlegbaren Teile völlig anders geartet sein muss.
- *Ablaufstruktur*
  Während die Makrophysik kontinuierliche, stetige Abläufe zum Inhalt hat, die es gestatten, die zeitliche Entwicklung physikalischer Vorgänge genau zu verfolgen, spielen sich mikrophysikalische Vorgänge diskontinuierlich und unstetig ab.

Die *klassische Physik* beschreibt die Phänomene der Makrophysik, die *Quantenphysik* die Effekte der Mikrophysik. Klassische Physik und Quantenphysik haben in ihrer Beschreibungsmethodik in drei Punkten fundamentale Unterschiede:

- *Anschaulichkeit*
  Weil die Quantenphysik nicht unmittelbar erfahrbare Effekte beschreibt, ist sie im Gegensatz zur klassischen Physik unanschaulich und abstrakt.
- *Determiniertheit*
  In der Quantenphysik laufen keine streng vorherbestimmten (deterministischen) Prozesse ab wie in der klassischen Physik. Die Abläufe sind deshalb nicht chaotisch, sondern sie gehorchen einer statistischen Gesetzmäßigkeit.
- *Messgenauigkeit*
  In der Quantenphysik können im Gegensatz zur klassischen Physik bestimmte physikalische Zustände (z. B. Ort und Ge-

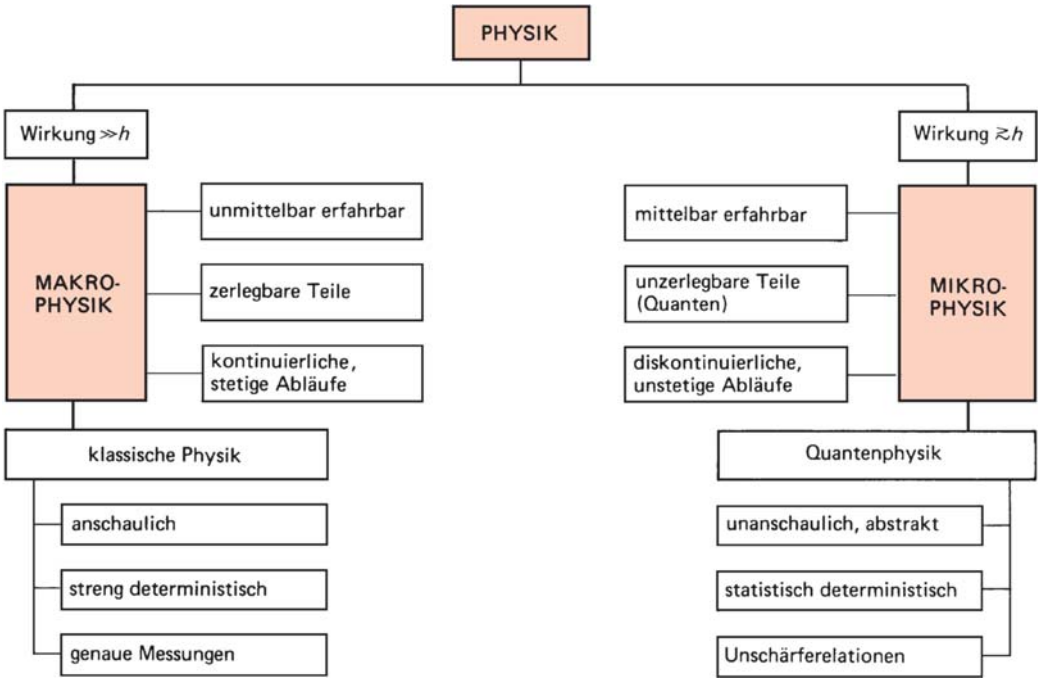


Abb. 1.2 Bereiche der physikalischen Erkenntnis

schwindigkeit eines Teilchens) nicht exakt, sondern nur innerhalb bestimmter Unschärfen experimentell bestimmt werden: Durch die Messung eines Wertes u wird ein anderer Messwert v so beeinflusst, dass dieser nicht mehr exakt messbar ist (Abschn. 6.5.5.2). Der physikalische Zustand ist deshalb nicht mehr durch einen genauen Wert beschreibbar, sondern durch eine statistische Wahrscheinlichkeit, bestimmte Werte vorzufinden.

In Abb. 1.3 sind die Gebiete der Physik dargestellt. In der Mitte befindet sich das Gebiet der klassischen Physik. Ihre Erscheinungen können völlig gleichwertig entweder durch das *Wellenbild* oder durch das *Partikelbild* erklärt werden. Die klassische Physik wird durch zwei Erfahrungen erweitert: Zum einen führt die Tatsache der endlichen Signalgeschwindigkeit zur *Relativitätstheorie* (links) und zum andern führen die Unschärferelationen zur *Quantentheorie* (rechts), die die Gebiete Molekül- und Atomphysik sowie Kern- und Elementarteilchenphysik umfasst. Beide Theorien wurden durch P.A.M. Dirac miteinander verknüpft.

Die klassische Physik hat vier Hauptbereiche:

- *Mechanik*
  Sie beschreibt die Zustandsänderungen eines massebehafteten Körpers in Raum und Zeit.
- *Thermodynamik*
  In der Thermodynamik beschreibt man physikalische Erscheinungen, bei denen die Temperatur eine wichtige zusätzliche Zustandsgröße ist.
- *Elektrizität und Magnetismus*
  Die Elektrizität und für bewegte Ladungen die Theorie des Magnetismus befassen sich mit den Effekten eines physikalischen Systems, wenn zusätzlich zu den mechanischen Grundgrößen (Masse, Länge und Zeit) noch die Eigenschaft der Ladung vorhanden ist.

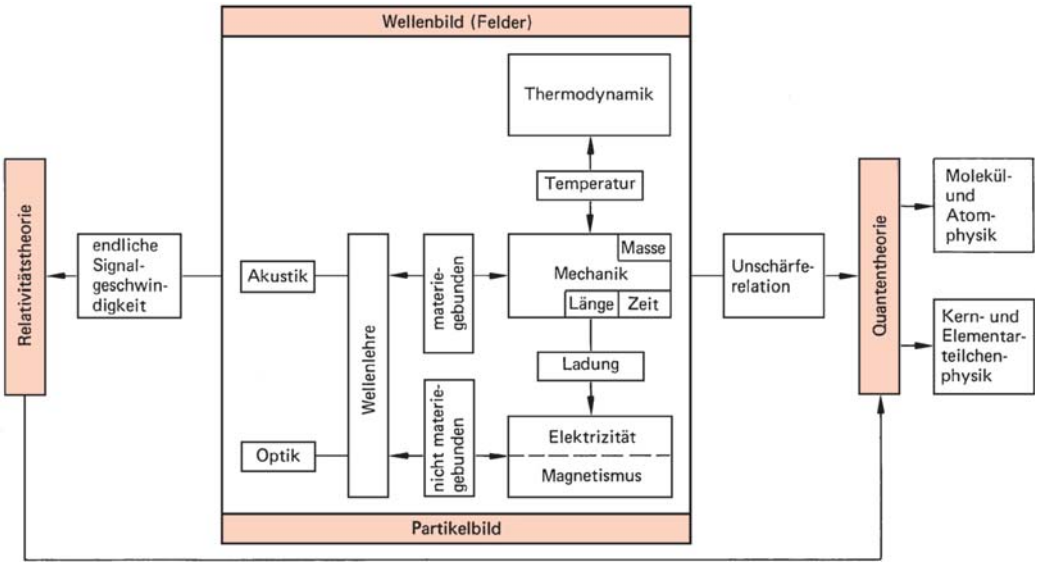


Abb. 1.3 Gebiete der Physik

– *Wellenlehre*
  In diesem Lehrgebiet werden periodische Zustandsänderungen beschrieben. Wellen können sowohl materiegebunden (z. B. Akustik) als auch nicht an Materie gebunden sein (z. B. Optik).

Bis zum ersten Viertel des zwanzigsten Jahrhunderts herrschte das *streng kausale* und *deterministische Denkprinzip* der klassischen Physik Newton'scher Prägung vor. Da es sehr erfolgreich war, wurde es von anderen Wissenschaften übernommen. Beispielsweise erklärt der Darwinismus in klaren, kausalen Gedankenketten die Entwicklung der Arten (Evolutionstheorie). Gemäß der Schulmedizin wird die Krankheit von isolierbaren Einflüssen verursacht (z. B. Bakterien, Viren oder Organdefekten); durch Beseitigung dieser einzelnen Krankheitsursachen wird der Mensch gesund. In der geschichtlichen Beurteilung durch den Marxismus (historischer Materialismus) wird eine kausale Argumentation verwendet und die Determiniertheit des geschichtlichen Ablaufes postuliert. Die kausaldeterministische Denkweise Newton'scher Prägung nach dem Regelkreis physikalischen Erkennens (Abb. 1.1) auf andere Gebiete zu übertragen, ist aber bedenklich, wenn

– die für den Induktionsschluss geforderte Konstanz der Systemvariablen nicht gegeben ist, weil diese je nach Situation unterschiedliche Werte einnehmen (z. B. hängt die Antwort in einem Interview auch von der Art der Fragestellung ab) und wenn
– die für einen Deduktionsschluss notwendige, vollständige Kenntnis der Anfangsbedingungen eines Systems nicht gegeben ist.

Die heute beklagte „Unmenschlichkeit" der Technik und die Zukunftslosigkeit vieler Menschen hat ihren Grund auch darin, dass die rein kausale, deterministische Denkweise von der klassischen Physik ausgehend weite Bereiche der geistigen Welt erfasst hat. In letzter Konsequenz führt dieses Denken zu dem Schluss, das menschliche Leben sei ein sinnloses, vorherbestimmtes Existieren. Der Begriff Freiheit als Gegenteil von Determiniertheit wird dann

ebenso sinnlos wie ein Moralbegriff, da vorherbestimmte Abläufe keinen Schuldigen kennen.

Mit der Begründung der Quantenphysik Mitte der zwanziger Jahre des 20. Jahrhunderts wurde deutlich, dass sich atomare und subatomare Strukturen nicht mehr deterministisch verhalten und die klassische Physik ein Spezialfall der Quantenphysik ist. Damit wurde in der Physik erstmalig die deterministische Denkweise in ihrer generellen Gültigkeit in Frage gestellt. Dies bedeutet freilich nicht, dass der in Abb. 1.1 dargestellte Regelkreis der physikalischen Erkenntnis in der Quantenphysik falsch wird. Er ist nach wie vor gültig. Es wird beim Induktionsschluss die Konstanz der Variablen ersetzt durch die Konstanz der statistischen Zusammenhänge, weshalb die Deduktion keine determinierten, sondern lediglich wahrscheinliche Vorhersagen erlaubt.

Weil in quantenmechanischen Systemen die Elemente unteilbar sind, sind sie ganzheitlich und dürfen nicht analytisch betrachtet werden. Zudem besteht zwischen den quantenmechanischen Systemkomponenten eine so starke Wechselwirkung, dass bei einer Trennung der Komponenten für eine Einzelanalyse diese erheblich verändert werden; somit ist ein Denken in wechselwirkenden Zusammenhängen (Regelkreisen) bei quantenmechanischen Systemen notwendig.

Das für viele Probleme unserer Zeit (z. B. Umweltzerstörung) notwendige vernetzte Denken in ganzheitlichen Kategorien als erforderliche Korrektur zur isolierten, analytischen Denkweise war in der Physik bereits vor achtzig Jahren notwendig, um quantenphysikalische Effekte erklären zu können. Sicherlich wird ein über die statistische Determiniertheit hinausgehendes Denkkonzept benötigt, um soziale und lebendige Systeme in ihrem Verhalten richtig beschreiben zu können. Aus diesem Grund wird von einigen Physikern versucht, die Quantenphysik in ihrer ganzheitlichen, auf Regelkreisen beruhenden Betrachtungsweise als Denkmodell beispielsweise für gesellschaftliche Strukturen und deren Veränderungen oder zur ästhetischen Beurteilung von Kunstwerken heranzuziehen. Es bleibt abzuwarten, inwieweit diese Übertragungsversuche quantenmechanischer Denkkonzepte auf andere Wissenschaften erfolgreich sind.

1.3 Physikalische Größen

1.3.1 Definition und Maßeinheit

Eine physikalische Größe kennzeichnet Eigenschaften und beschreibt Zustände sowie Zustandsänderungen von Objekten der Umwelt. Sie muss nach der Forderung Einsteins (Abb. 1.1) messbar sein, d. h. ein Messverfah-

Tabelle 1.1 Bezeichnung der dezimalen Vielfachen und Teile von Einheiten

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Beispiel
10^{18}	Exa	E	Em, EJ
10^{15}	Peta	P	Pm, PJ
10^{12}	Tera	T	Tm, TJ
10^{9}	Giga	G	Gm, GJ
10^{6}	Mega	M	Mm, MJ
10^{3}	Kilo	k	km, kJ
10^{2}	Hekto	h	hPa, hJ
10^{1}	Deka	da	dam, daJ
[3pt] 10^{-1}	Dezi	d	dm, dJ
10^{-2}	Zenti	c	cm, cJ
10^{-3}	Milli	m	mm, mJ
10^{-6}	Mikro	µ	µm, µJ
10^{-9}	Nano	n	nm, nJ
10^{-12}	Piko	p	pm, pJ
10^{-15}	Femto	f	fm, fJ
10^{-18}	Atto	a	am, aJ

Tabelle 1.2 Basisgrößen, Basiseinheiten und Definitionen im SI-Maßsystem

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	Definition	relative Unsicherheit
Zeit	Sekunde	s	1 Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.	10^{-14}
Länge	Meter	m	1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.	10^{-14}
Masse	Kilogramm	kg	1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.	10^{-9}
elektrische Stromstärke	Ampere	A	1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.	10^{-6}
Temperatur	Kelvin	K	1 Kelvin ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.	10^{-6}
Lichtstärke	Candela	cd	1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1/683 W/sr beträgt.	$5 \cdot 10^{-3}$
Stoffmenge	Mol	mol	1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12/1 000 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.	10^{-6}

ren definieren. Die Vereinbarung, nach der die beobachtete physikalische Einheit quantifiziert wird, ist die *Einheit* der physikalischen Größe. Beispielsweise wurde für die Temperatur T als Einheit K (Kelvin) der 273,16-te Teil der Temperatur des Tripelpunktes von Wasser festgelegt (Abschn. 3.1.3). Der *Zahlenwert* vor der Einheit gibt an, wie oft der Vergleichsmaßstab der Einheit angelegt werden kann. Somit besteht eine physikalische Größe G immer aus einer *quantitativen Aussage* $\{G\}$ (ausgedrückt durch den Zahlenwert) und einer *qualitativen Aussage* $[G]$ (ausgedrückt durch die Einheit):

$$G = \{G\} \cdot [G] \,. \tag{1.1}$$

Durch das *Gesetz über Einheiten im Messwesen* vom 2. Juli 1969 (BGBl. I S. 709) wurden ab 1.1.1978 die Vereinbarungen der *Internationalen Organisation für Standardisation (ISO)*, die

Tabelle 1.3 Zusammenstellung einiger physikalischer Größen mit ihren SI-Einheiten, die von den Basiseinheiten abgeleitet sind

Physikalische Größe	Formelzeichen	Berechnung	Einheit	
Fläche	A	A = Länge × Breite	m^2	
Winkel	φ	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \mathrm{rad}$	Radiant
Raumwinkel	Ω	$\Omega = \frac{\text{Fläche des Kugelabschnitts}}{\text{Quadrat des Kugelradius}}$	$\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{sr}$	Steradiant
Frequenz	ν, f	$f = \frac{1}{\text{Periodendauer}}$	$\frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$	Hertz
Geschwindigkeit	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v} = \frac{\text{Wegintervall}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	
Beschleunigung	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	
Kraft	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$ = Masse × Beschleunigung	$\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$	Newton
Arbeit, Energie	W, E	W = Kraft × Weg	$\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$	Joule
Leistung	P	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} = \mathrm{W}$	Watt
Wärme	Q	Q = Energie	$\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Ws} = \mathrm{J}$	Joule

Tabelle 1.3 (Fortsetzung)

Physikalische Größe	Formelzeichen	Berechnung	Einheit	
Wärmekapazität	C	$C = \frac{\text{Wärme}}{\text{Temperaturintervall}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} = \frac{\text{J}}{\text{K}}$	
elektrische Ladung	Q	$Q =$ elektr. Stromstärke $\times$ Zeit	$\text{A} \cdot \text{s} = \text{C}$	Coulomb
elektrische Feldstärke	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E} = \frac{\text{elektrische Kraft}}{\text{elektrische Ladung}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	
elektrische Spannung	U	$U = \frac{\text{elektrische Arbeit}}{\text{elektrische Ladung}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \text{V}$	Volt
elektrischer Widerstand	R	$R = \frac{\text{elektrische Spannung}}{\text{elektrische Stromstärke}}$	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$	Ohm
magnetische Feldstärke	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H} = \frac{\text{elektr. Stromstärke} \times \text{Windungszahl}}{\text{Spulenlänge}}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	
magnetischer Fluss	Φ	$\Phi =$ magnetische Induktion $\times$ Fläche	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = \text{V} \cdot \text{s} = \text{Wb}$	Weber
magnetische Induktion	$\boldsymbol{B}$	$B =$ Permeabilität $\times$ magnetische Feldstärke	$\frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T}$	Tesla
Beleuchtungsstärke	E	$E = \frac{\text{Lichtstrom}}{\text{Fläche}}$	$\frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2} = \text{lx}$	Lux

Tabelle 1.4 Wichtige Naturkonstanten (international empfohlene CODATA-Werte von 2002)

Bezeichnung	Symbol	Wert	relative Unsicherheit
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	c	$2{,}99792458 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	0
Gravitationskonstante	G	$6{,}6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6{,}0221415 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
Elementarladung	e	$1{,}60217653 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A\,s}$	$8{,}5 \cdot 10^{-8}$
Ruhemasse des Elektrons	m_{0_e}	$9{,}1093826 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
Ruhemasse des Protons	m_{0_p}	$1{,}67262171 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6{,}6260693 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante	α	$7{,}297352568 \cdot 10^{-3}$	$3{,}3 \cdot 10^{-9}$
elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}854187817 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$	0
magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$	0
Faraday-Konstante	F	$9{,}64853383 \cdot 10^{4}\ \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{mol}}$	$8{,}6 \cdot 10^{-8}$
universelle Gaskonstante	R_m	$8{,}314472\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$
Boltzmann-Konstante	k	$1{,}3806505 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5{,}670400 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K^4}}$	$7{,}0 \cdot 10^{-6}$

sogenannten *SI-Einheiten (Système International d'Unités)*, in der Bundesrepublik Deutschland eingeführt. Im amtlichen und geschäftlichen Verkehr dürfen seither für physikalische Größen nur noch die *SI-Einheiten* benutzt werden. Durch Vorsätze oder Präfixe können dezimale Vielfache oder Teile der Einheiten gebildet und damit umständlich zu schreibende Zehnerpotenzen der Maßzahlen vermieden werden. In Tabelle 1.1 sind die Vorsilben und Kurzzeichen für die Vorsätze zusammengestellt. Doppelvorsätze wie z. B. µmm, sind nicht zulässig.

Hohe Anforderungen an die Genauigkeit des Vergleichs mit der Einheit, d. h. an die Messgenauigkeit, können nur mit sehr aufwändigen Apparaturen erfüllt werden, bei denen Störeinflüsse auf den Vergleichsmaßstab weitgehend ausgeschlossen und die Ablesung des Vergleichsmaßstabs hochverfeinert ist. Weltweit kann ein solcher messtechnischer Aufwand nur in wenigen

Mess- und Eichlaboratorien getrieben werden. In der Bundesrepublik Deutschland ist dafür die *Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)* in Braunschweig zuständig. Abbildung 1.4 zeigt das *primäre Zeitnormal* der PTB Braunschweig, die Atomuhr. Schon wegen dieses messtechnischen Aufwandes wurde in den SI-Vereinbarungen darauf geachtet, die Einheiten der physikalischen Größen auf möglichst wenige, voneinander unabhängige Basiseinheiten zurückzuführen. Von deren absoluter Messgenauigkeit sind unsere physikalischen Beobachtungen bestimmt. In Tabelle 1.2 sind die sieben *Basisgrößen* im SI-Einheitensystem wiedergegeben, ihre Definitionen und ihre relative Messunsicherheit angegeben.

Durch die ISO-Festlegung der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit vom 20.10.1983 auf $c = 299\,792\,458$ m/s ist das Meter von der Sekunde metrologisch abhängig geworden. Durch die Beziehung $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ ist bei Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit c und der magnetischen Feldkonstanten μ_0 der Wert für die elektrische Feldkonstante ε_0 exakt festgelegt (Abschn. 4.5.5). Nach dem von *K. von Klitzing* 1980 entdeckten *quantisierten Hall-Effekt* lässt sich auch eine aus Naturkonstanten sehr exakt bestimmbare Basisgröße für den elektrischen Widerstand $R = h/(i\,e^2)$ bestimmen ($i = 1, 2, 3\ldots$). Die SI-Einheiten der übrigen physikalischen Größen werden aus den Basiseinheiten entsprechend ihrer Definitionsgleichung abgeleitet.



Abb. 1.4 Die Cäsium-Atomuhren CS1, CS2 und CS3 der PTB Braunschweig, aufgestellt in der abgeschirmten und klimatisierten Atomuhrenhalle

Eine Auswahl abgeleiteter Einheiten zeigt Tabelle 1.3.
Bei der theoretischen Beschreibung der ermittelten Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen ergeben sich universelle Proportionalitätskonstanten, die *Naturkonstanten*. Einige dieser Naturkonstanten sind in Tabelle 1.4 aufgeführt.

1.3.2 Messgenauigkeit

Die Messung einer physikalischen Größe erfolgt durch den Vergleich der Einheit dieser Größe nach der Messmethode der SI-Vereinbarung oder einem darauf geeichten Messverfahren. Oft werden die Messwerte von Wiederholungsmessungen Abweichungen untereinander haben, die kennzeichnend für die Messgenauigkeit sind. Wie Tabelle 1.5 zeigt, ist dabei zwischen den *systematischen*, für das Messverfahren charakteristischen Abweichungen und den *zufälligen* oder *statistischen*, vom Experimentator abhängigen Abweichungen zu unterscheiden.
Um systematische Abweichungen aufzudecken, werden in der Prüfpraxis *Ringversuche* durchgeführt, bei denen dieselbe Probe von verschiedenen Prüfstellen gemessen und die Ergebnisse anschließend verglichen werden. Aus den zufälligen Abweichungen wird durch die *Fehlerrechnung* die Messgenauigkeit des angewandten Messverfahrens bestimmt. Die mathematischen Grundlagen für diese Analyse der Messgenauigkeit sind in Lehrbüchern der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie beschrieben. Die praxisgerechten Verfahren sind in Normen zusammengefasst:

DIN EN 1 319: Grundbegriffe der Messtechnik,
DIN 55 302: Statistische Auswerteverfahren,
DIN 55 303: Statistische Auswertung von Daten,
DIN 55 350: Qualitätssicherung und Statistik.

Zur grafischen Analyse der Messwertschwankungen dient das *Histogramm*. Ein Beispiel hierfür zeigt Abb. 1.5. In dieses wird balkenförmig über dem Messwert x die relative Häufigkeit h_j des Messwerts aufgetragen:

$$h_j = \frac{N_j}{N} \,. \tag{1.2}$$

N_j ist die Anzahl des Messwerts x_j bei N Messungen der Messgröße x.
Bei zufälligen Messabweichungen ist die Häufigkeitsverteilung symmetrisch zu einem *häufigsten Wert*, dem *Erwartungswert* μ. Bei einer Wiederholungsmessung wird dieser Erwartungswert mit größter Wahrscheinlichkeit gemessen. Vom häufigsten Wert abweichende Messwerte x_j werden umso seltener gemessen, je größer ihre Abweichung $d_j = x_j - \mu$ vom Erwartungswert μ ist.
Wird die Anzahl der Wiederholungsmessungen stark erhöht, so geht die Häufigkeitsverteilung $h(x_j)$ in eine glockenförmige *Normal-*

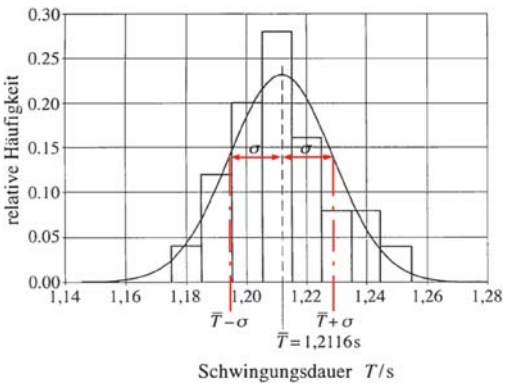


Abb. 1.5 Histogramm der Häufigkeitsverteilung h_j (T) bei einer Schwingungsdauermessung sowie die Normalverteilungskurve nach (1.3) für $\mu = \overline{T}$ und $\sigma^2 = s_T^2$ mit $\overline{T} = 1,2116\,s$ und $s_T = 0,0172\,s$

Tabelle 1.5 Abgrenzung zwischen systematischen und statistischen Abweichungen

	systematische Abweichungen	statistische Abweichungen
Hinweise	unsymmetrische Häufung der Messwerte von Wiederholungsmessungen	symmetrische Häufung der Messwerte um einen häufigsten Wert
Ursachen	falsche Kalibrierung der Messgeräte (z. B. falsch eingestellter Nullpunkt) Ablesefehler (z. B. Parallaxenfehler bei Zeigerinstrumenten) falsche Messgerätejustierung (z. B. nicht horizontale Aufstellung) Messwertdriften (z. B. Messverfahren verändert die Messgröße)	Schwankungen beim Anlegen von Maßstäben (z. B. mangelnde Geschicklichkeit, elektronische Triggerschwankungen) Schätzung von Zwischenwerten auf Maßstäben
Abhilfen	Konsistenzmessungen (z. B. Eichpunkte, Messbereichsumschaltung) stabilisierende Maßnahmen (z. B. Thermostatisierung, Vakuumschutz) Einsatz unterschiedlicher Messverfahren	keine (Messgenauigkeit des Messverfahrens entspricht Messfehler)
Charakterisierung	Angabe von Namen, Institut (amtliche Zulassung, Prüfstelle), Messdatum und verwendeten Messgeräten	Angabe der Abweichung nach mathematischer Analyse der Messwerte (Fehlerrechnung)

Verteilung der Messwerte über. Im Grenzfall liegen die Werte des Histogramms auf der von C.F. Gauß aufgestellten Verteilungsfunktion

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (1.3)$$

$h(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Wiederholungsmessung der Messwert x zwischen x und $x + \mathrm{d}x$ liegt. Die Funktion $h(x)$ ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und durch den Faktor $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ so normiert, dass die Wahrscheinlichkeit 1 ist, bei einer Wiederholungsmessung einen Wert x im Bereich $-\infty < x < +\infty$ zu finden. Die *Varianz* σ^2 ist ein Maß für die Breite der Verteilungsfunktion $h(x)$: 68,3% der Messwerte liegen im Bereich $x = \mu \pm \sigma$ und 95,4% im Bereich $x = \mu \pm 2\sigma$. Die Varianz σ^2 kann auch aus der Halbwertsbreite $b_{1/2}$, d. h. der Breite der Glockenkurve in halber Höhe des Maximums der Gauß-Verteilung, bestimmt werden; es ist

$$\sigma^2 = \frac{b_{1/2}^2}{8 \ln 2} = 0{,}18\, b_{1/2}^2 . \qquad (1.4)$$

Aus der Häufigkeitsverteilung $h(x_\mathrm{j})$ einer endlichen Anzahl N von Messungen der m diskreten Messwerte $x_1, \ldots, x_\mathrm{m}$ lassen sich für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 nach der *Theorie der Beobachtungsfehler* von Gauß Schätzwerte berechnen. Demnach ist die beste Näherung für μ der *arithmetische Mittelwert* $\overline{x}$ aus den Messwerten. Die theoretischen Beziehungen zur Berechnung der Schätzwerte sind in Tabelle 1.6 zusammengestellt.

Charakteristisch für die Varianz σ^2 und damit die Breite der Häufigkeitsverteilung ist die Summe der quadratischen Abweichungen $(x_\mathrm{i} - x_0)^2$ von einem Festwert x_0, die Fehlersumme *FS*. Die Fehlersumme hat den minimalen Wert FS_min, wenn für den Festwert der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ eingesetzt wird. Mit Hilfe der minimalen Fehlersumme lässt sich

Tabelle 1.6 Beziehungen zur Berechnung der Kennwerte der Fehlerrechnung

Kennwerte der Fehlerrechnung		Beziehungen	
$\overline{x}$	arithmetischer Mittelwert; Schätzwert für den Erwartungswert	$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	(1.5)
$FS_{\min}$	minimale Fehlersumme einer Anzahl von N Messwerten	$FS_{\min} = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$ $= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\,\overline{x}^2$	(1.6)
s	Standardabweichung des Messwerts bzw. Messverfahrens; Schätzwert für die Varianz	$s = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N-1}}$	(1.7)
$\triangle\overline{x}$	Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts	$\triangle\overline{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$	(1.8)
u_z	Zufallskomponente der Messunsicherheit mit t_P-Faktor der Student-Verteilung	$u_z = \triangle\overline{x}\,t_P$	(1.9)

als Breitenmaß der Häufigkeitsverteilung die *Standardabweichung s* berechnen; s ist die minimale Fehlersumme $FS_{\min}$, normiert auf die Anzahl $n_w = N - 1$ der Wiederholungsmessungen. Die Standardabweichung s hat dieselbe Maßeinheit wie die Messgröße x. Nach der Theorie der Beobachtungsfehler ist s^2 der beste Schätzwert für die Varianz σ^2. In Abb. 1.5 ist in das Histogramm die Verteilungsfunktion $h(x)$ nach (1.3) eingezeichnet, wenn an Stelle μ und σ^2 die nach Tabelle 1.6 berechneten Werte $\overline{x}$ und s^2 gesetzt werden.

Die Genauigkeit eines Messverfahrens bestimmt die Breite der Häufigkeitsverteilung. Die Standardabweichung s charakterisiert somit die Messgenauigkeit des verwendeten Messverfahrens und kann deshalb durch Wiederholungsmessungen nicht erhöht werden; dazu muss das Messverfahren geändert werden.

Dagegen erhöhen Wiederholungsmessungen die Genauigkeit, sodass der berechnete arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ mit dem Erwartungswert μ als wahrem häufigsten Wert der Messgöße übereinstimmt. Die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts $\Delta\overline{x}$ in Tabelle 1.6 ist ein Maß für die Abweichung zwischen Schätzwert $\overline{x}$ und wahrem Wert μ.

Häufig liegt bei Messungen die Anzahl der Wiederholungsmessungen, d. h. die Anzahl der Messungen N abzüglich der Anzahl der gesuchten Erwartungswerte unter zehn. Bei einer solchen kleinen Anzahl von Messungen ähnelt in der Regel das Histogramm Abb. 1.5 nur sehr entfernt einer Normalverteilungskurve nach (1.3). Dementsprechend ungenau ist die Abschätzung des Erwartungswertes der Messgröße durch das arithmetische Mittel der Messwerte. Die Güte dieser Abschätzung wird durch einen *Vertrauensbereich um den arithmetischen Mittelwert* gekennzeichnet, in dem der Erwartungswert der Messgröße mit einer vom Experimentator vorzugebenden Wahrscheinlichkeit, der *statistischen Sicherheit P*, liegt.

Nach der Theorie der Beobachtungsfehler (*t-Verteilung nach Student*, alias W.S. Gosset, 1876 bis 1937) sind bei normalverteilten Messgrößen die Vertrauensgrenzen für den Erwartungswert abhängig von der Anzahl N der

Messungen und der Standardabweichung s des Messverfahrens:

obere Vertrauensgrenze: $x_o = \overline{x} + u_z$,

untere Vertrauensgrenze: $x_u = \overline{x} - u_z$.

Die Messunsicherheit u_z, die den Vertrauensbereich des statischen Messwerts abgrenzt, berechnet sich nach (1.17) in Tabelle 1.6 und hängt von der Standardabweichung $\Delta\overline{x}$ des arithmetischen Mittelwerts ab.

Der Faktor t folgt aus der *Student-t-Verteilung* und ist abhängig von der Anzahl der Wiederholungsmessungen und der geforderten statistischen Sicherheit P. In Tabelle 1.7 sind für verschiedene Werte der statistischen Sicherheit P Werte für den t-Faktor aufgeführt. In der Physik und in der Vermessungstechnik rechnet man mit der statistischen Sicherheit P = 68,3%. In diesem Fall entspricht die Messunsicherheit u_z gerade der Standardabweichung $\Delta\overline{x}$ des arithmetischen Mittelwerts. In der Industrie dagegen bevorzugt man die höhere statistische Sicherheit von P = 95,4%. Deshalb muss bei der Angabe der Messunsicherheit bzw. des Vertrauensbereichs stets die gewählte statistische Sicherheit P angegeben werden.

Liegt neben der *statistischen* Messunsicherheit u_z auch noch eine *systematische* Messunsicherheit u_s vor, so ist als *Gesamt-Messunsicherheit* die Summe, also der Wert $u_g = u_z + u_s$, anzugeben.

Das Ergebnis von N Messungen der Messgröße x mit einem Messverfahren, dessen Messgenauigkeit durch die Standardabweichung s gekennzeichnet ist, wird in der Form

$$x_P = \overline{x} \pm t_P \frac{s}{\sqrt{N}} \qquad (1.10)$$

angegeben. Der Index P kennzeichnet bei sehr genauen Messungen die gewählte statistische Sicherheit. Die Angabe der statistischen Sicherheit wird allerdings in der Praxis oft weggelassen. Dies kann zu Verwirrungen führen. So kann beispielsweise die Temperaturmessung mit einem Thermometer mit 1/10 °C Teilung bei einer Kalibrierung mit der statistischen Sicherheit von 68,3% eine Messgenauigkeit von u_g = 0,1 K aufweisen. Für den Einsatz in der Industrie mit einer Anforderung an die statistische Sicherheit von 95,4% muss für dieses Thermometer die doppelte Messungenauigkeit u_g = 0,2 K angegeben werden.

Wie aus (1.10) hervorgeht, nimmt die Messunsicherheit von x nur mit der Wurzel der Messungen ab. Deshalb steigern viele Wiederholungsmessungen die Messgenauigkeit des

Tabelle 1.7 Zahlenwerte nach DIN EN 1319 und Anpassungspolynom des t-Faktors der Vertrauensgrenzen für verschiedene statistische Sicherheiten

Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - k$	statistische Sicherheit P 68,3% $t_{0,68}$	95,4% $t_{0,95}$
1	1,84	12,71
2	1,32	4,30
3	1,20	3,18
4	1,15	2,78
5	1,11	2,57
7	1,08	2,37
10	1,06	2,25
20	1,03	2,09
50	1,01	2,01
100	1,00	1,98
> 100	1,00	1,96
Anpassungspolynom	$t_{0,68} = 1 + \frac{0,584}{n_w} - \frac{0,032}{n_w^2} + \frac{0,288}{n_w^3}$	$t_{0,95} = 1,96 + \frac{3,012}{n_w} - \frac{1,273}{n_w^2} + \frac{8,992}{n_w^3}$

Erwartungswertes der Messgröße nur noch wenig.

In Tabelle 1.6 sind die *absoluten Standardabweichungen* zusammengestellt. Zum Vergleich der Genauigkeiten verschiedener Messverfahren werden häufig die *relativen Standardabweichungen* des Messverfahrens $s/\bar{x}$ bzw. des arithmetischen Mittelwerts $\Delta\bar{x}/\bar{x}$ herangezogen. Die Relativwerte werden dabei jeweils auf den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ bezogen und in *Prozentwerten* (1% = 10^{-2}), *Promille* (1 ‰ = 10^{-3}) oder *parts per million* (1 ppm = 10^{-6}) angegeben.

1.3.3 Fehlerfortpflanzung

Oft werden die physikalischen Größen $f(x, y, z, \ldots)$ nicht direkt gemessen, sondern indirekt aus den Messungen der Teilgrößen $x, y, z, \ldots$ bestimmt, beispielsweise die Dichte ϱ eines zylindrischen Körpers aus den Messungen der Masse, des Durchmessers und der Höhe. Als Messergebnisse liegen also die arithmetischen Mittelwerte und die Standardabweichungen der Teilgrößen vor. Nach dem *Fehlerfortpflanzungsgesetz* von *Gauß* lassen sich aus diesen Werten der Teilgrößen der wahrscheinliche Wert $\bar{f}$ der indirekt gemessenen Größe $f(x, y, z, \ldots)$ und deren Standardabweichungen nach den Beziehungen in Tabelle 1.8 errechnen.

Häufig wird (1.20) in Tabelle 1.8 für die Standardabweichung mit Hilfe des *absoluten Größtfehlers* Δf nach (1.11) abgeschätzt. Besonders einfach lässt sich der *relative Größtfehler* $\Delta f/\bar{f}$ einer Größe $f = x^k y^m z^n$ berechnen, die über Potenzprodukte von den Teilgrößen abhängt:

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} = |k| \left|\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}\right| + |m| \left|\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}}\right| + |n| \left|\frac{\Delta\bar{z}}{\bar{z}}\right| . \tag{1.11}$$

1.3.4 Kurvenanpassung

Außer der direkten Bestimmung von Messwerten für einzelne physikalische Größen f, beispielsweise der Länge oder der Masse eines Körpers, wird in Physik und Technik die Messtechnik dazu eingesetzt, Theorien von Naturvorgängen zu überprüfen und die Parameter dieser Theorien experimentell zu bestimmen. Dabei werden für unterschiedliche Messvariablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Messwerte $f_1, f_2, f_3, \ldots$ der physikalischen Größe f gemessen, mit den theoretischen Werten $f(x_1; a_0, a_1, \ldots)$, $f(x_2; a_0, a_1, \ldots)$, $f(x_3; a_0, a_1, \ldots)\ldots$ verglichen und die Parameter $a_0, a_1, \ldots$ der Theorie so gewählt, dass die theoretischen Werte der physikalischen Größe f im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messwerten übereinstimmen. Lassen sich die Messwerte nicht durch die theoretischen Kurven anpassen, so ist entweder die zugrunde liegende Theorie falsch oder die Messung mit systematischen Messfehlern behaftet. Eine für die theoretische Elementarteilchenphysik bahnbrechende experimentelle Untersuchung mit Fehleranalyse zeigt Abb. 1.6.

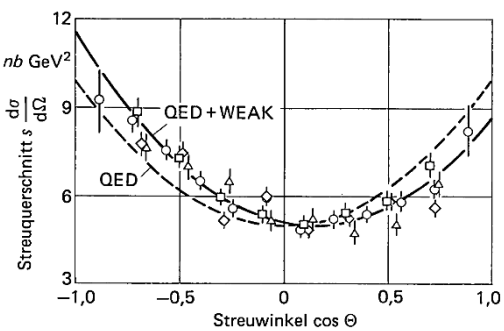


Abb. 1.6 PETRA-Experimente am Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) bewiesen 1983 das Versagen der reinen Quanten-Elektrodynamik (QED) bei der Erzeugung von Myonen und bestätigten im Rahmen der Messgenauigkeit die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung (QED + WEAK)

Tabelle 1.8 Beziehungen für die Kennwerte der Fehlerrechnung indirekt gemessener physikalischer Größen

Kennwerte der Fehlerfortpflanzung der Fehlerrechnung		Beziehungen
$\overline{f}$	wahrscheinlichster Wert der indirekt gemessenen physikalischen Größe f	$\overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ (1.12)
s_f	Standardabweichung der Größe f bzw. des indirekten Messverfahrens für f	$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 s_z^2 + \ldots}$ (1.13)
Δf	absoluter Größtfehler der Größe f bzw. des Messverfahrens für f	$\Delta f = \left\lvert\frac{\partial f}{\partial x}\right\rvert \Delta\overline{x} + \left\lvert\frac{\partial f}{\partial y}\right\rvert \Delta\overline{y} + \left\lvert\frac{\partial f}{\partial z}\right\rvert \Delta\overline{z} + \ldots$ (1.14)
$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$	arithmetische Mittelwerte der Teilmessgrößen $x, y, z, \ldots$	
$\Delta\overline{x}, \Delta\overline{y}, \Delta\overline{z}, \ldots$	Standardabweichungen der Mittelwerte $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$	
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$	partielle Ableitungen der Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ nach den Teilgrößen $x, y, z, \ldots$ an der Stelle $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$	

Sind die Messfehler der Messwerte $f_1, f_2, \ldots$ zufällig und unterliegen sie dem Normalverteilungsgesetz, so sind nach der *Theorie der Beobachtungsfehler* von *Gauß* die Parameter $a_0, a_1, \ldots$ der Theorie am wahrscheinlichsten, für die die Fehlersumme, d. h. die Summe der Quadrate der Abweichungen, ein Minimum ist:

$$FS = \sum_{i=1}^{N} g_i [f_i - f(x_i; a_0, a_1, \ldots)]^2 \rightarrow \text{Minimum} \qquad (1.15)$$

Mit den *Gewichten* g_i können die Beiträge einzelner Messwerte zur Fehlersumme unterschiedlich gewichtet werden.

Es wird bei diesem Ansatz vorausgesetzt, dass die Abweichungen $f_i - f(x_i; a_0, a_1, \ldots)$ voneinander unabhängig sind und die Standardabweichung der Messungen f_i für alle Maßvariablen x_i, denselben Wert s hat.

Die Forderung dieser *Methode der kleinsten Quadrate* führt auf ein *System von Normalgleichungen* für die Parameter $a_0, a_1, \ldots$:

$$-2 \sum_{i=1}^{N} g_i [f_i - f(x_i; a_0, a_1, \ldots)] \frac{\partial f}{\partial a_0} = 0 \,, \qquad (1.16a)$$

$$-2 \sum_{i=1}^{N} g_i [f_i - f(x_i; a_0, a_1, \ldots)] \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \qquad (1.16b)$$

und so fort .

Für Linearkombinationen der Parameter $a_0, a_1, \ldots$ ist das Normalgleichungssystem linear und geschlossen lösbar. Abbildung 1.7 gibt einen Überblick über Funktionen f mit linearen Normalgleichungen. Die Standardabweichungen $s_{a0}, s_{a1}, \ldots$ der Parameter lassen sich aus dem Wert des Minimums der Fehlersumme $FS_{\min}$, der Anzahl der Wiederholungsmessungen n_w und aus den Gewichten $g_1, g_2, \ldots$ der Messwerte ermitteln.

Oft lässt sich eine theoretische Beziehung $y = f(x; a_0, a_1)$ durch eine Transformation $v = v(y)$ in eine Geradendarstellung $v = mx + a$ um-

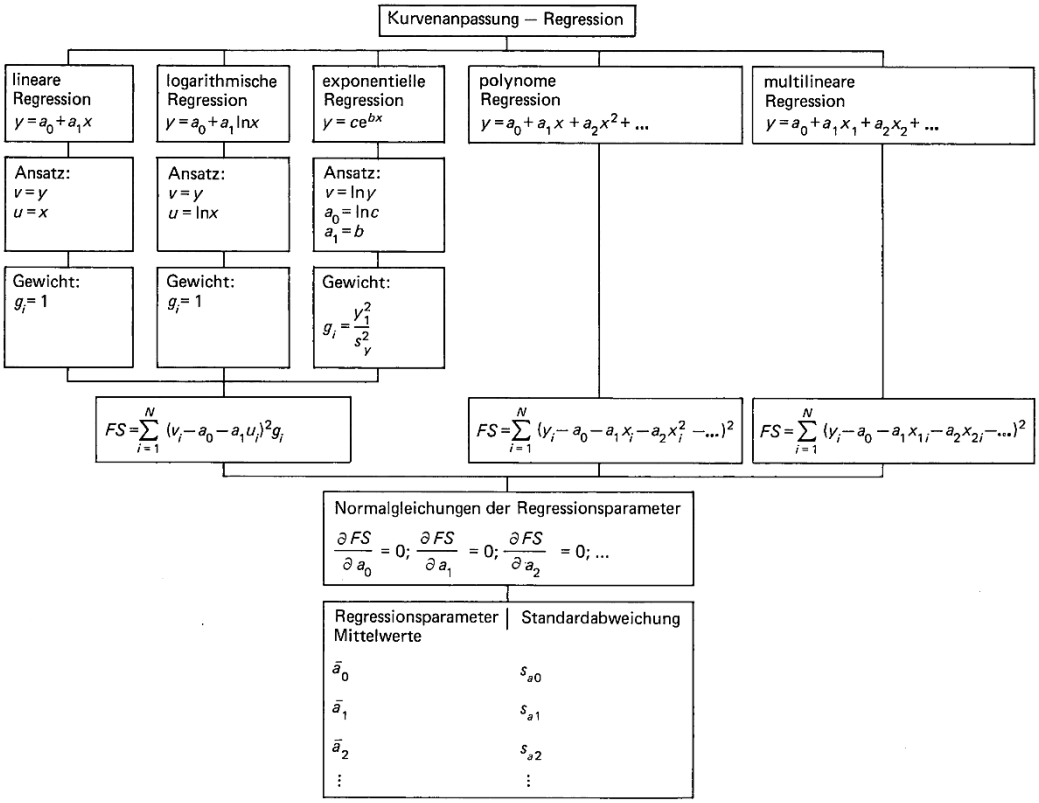


Abb. 1.7 Funktionen mit einem linearen Normalgleichungssystem für die Parameter der Kurvenanpassung

formen. Die Parameter Steigung m und Achsenabschnitt a dieser Geradendarstellung $v(x)$ können dann entweder rechnerisch oder grafisch durch eine *Regressionsgerade* ermittelt werden. Durch die Umformung von $y = f(x)$ in $v = v(x)$ ändern sich jedoch die Gewichte g_i der einzelnen Messwerte; die Fehlersumme lautet dann

$$FS = \sum_{i=1}^{N} g_i (v_i - m\,x_i - a)^2 \,. \qquad (1.17)$$

Ist die Standardabweichung s_y für alle Werte y_i gleich und kann die Messungenauigkeit der Werte x_i vernachlässigt werden, so ergeben sich die Gewichte g_i aus

$$g_i = \frac{1}{\left(\frac{\partial v(y_i)}{\partial y_i}\right)^2 s_y^2} \,. \qquad (1.18)$$

In Abb. 1.8 sind für die Spezialfälle der linearen, logarithmischen und exponentiellen Regression die Lösungen für die Mittelwerte und Standardabweichungen der Parameter zusammengestellt.

Die *Vertrauensgrenzen* u_z, die die statistische Messungenauigkeit begrenzen, ergeben sich je nach geforderter statistischer Sicherheit aus dem Faktor t von Tabelle 1.7. Es ist zu beachten, dass bei k Parametern und N Messungen die Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - k$ beträgt. So ist bei der Regressions-

Einlesen
Anzahl Messpunkte N
Messwerte x_i, y_i

Regressionsfall		
logarithmische	lineare	exponentielle
$v_i = y_i$ $u_i = \ln x_i$ $g_i = 1$	$v_i = y_i$ $u_i = x_i$ $g_i = 1$	$v_i = \ln y_i$ $u_i = x_i$ $g_i = y_i^2$

$$A = \sum_{i=1}^{N} g_i \qquad D = \sum_{i=1}^{N} g_i v_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{N} g_i u_i \qquad E = \sum_{i=1}^{N} g_i u_i v_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} g_i u_i^2 \qquad F = \sum_{i=1}^{N} g_i v_i^2$$

$$a_0 = \frac{CD - BE}{AC - B^2} \qquad s_{a0} = \left(\frac{(F - 2a_0 D - 2a_1 E + 2a_1 a_0 B + a_0^2 A + a_1^2 C) C}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$$

$$a_1 = \frac{AE - BD}{AC - B^2} \qquad s_{a1} = \left(\frac{(F - 2a_0 D - 2a_1 E + 2a_1 a_0 B + a_0^2 A + a_1^2 C) A}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$$

Ausgabefall		
logarithmische Regression	lineare Regression	exponentielle Regression
Ansatz: $y = c_0 + c_1 \ln x$	Ansatz: $y = c_0 + c_1 x$	Ansatz: $y = c_0 e^{c_1 x}$
Anpassung:	Anpassung:	Anpassung:
$c_0 = a_0$ $\quad s_{c0} = s_{a0}$	$c_0 = a_0$ $\quad s_{c0} = s_{a0}$	$c_0 = e^{a_0}$ $\quad s_{c0} = s_{a0} e^{a_0}$
$c_1 = a_1$ $\quad s_{c1} = s_{a1}$	$c_1 = a_1$ $\quad s_{c1} = s_{a1}$	$c_1 = a_1$ $\quad s_{c1} = s_{a1}$

Abb. 1.8 Kurvenanpassung durch lineare, logarithmische und exponentielle Regression

geraden die Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - 2$. Das Ergebnis der Kurvenanpassung ist

$$a = \overline{a} \pm t(n_w) \frac{s_a}{\sqrt{N}} \,. \tag{1.19}$$

1.3.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion

Eine zeichnerische Darstellung der Messpunkte und des Verlaufs der angepassten theoretischen Kurve eignet sich besonders gut für die schnelle Beurteilung, ob die Theorie im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messwerten übereinstimmt. Wird ein linearer Zusammenhang $y = mx + a$ zwischen der Messvariablen x und der Messgröße y erwartet, so kann im Messdiagramm die *Ausgleichsgerade* auch grafisch durch die Messwerte gelegt werden. Der Parameter $\overline{a}$ ergibt sich aus dem Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade, $\overline{m}$ aus der Steigung.

Die Standardabweichungen Δm und Δa der Parameter lassen sich durch 2 *Grenzgeraden* I und II an die Messwerte abschätzen, die durch den *Schwerpunkt der Messwerte* $y_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$ und $x_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ zu legen sind. Eine der Grenzgeraden ist die steilste, die andere die flachste mögliche Gerade durch die Messwerte, wie Abb. 1.9 zeigt. Aus den der Zeichnung entnommenen Parametern $m^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{I}}$ sowie m^{II} und a^{II} der Grenzgeraden werden die *Anpassungsfehler* in folgender Weise bestimmt:

$$\Delta m = \pm \left| \frac{m^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{II}}}{2} \right| \,, \tag{1.20a}$$

$$\Delta a = \pm \left(\left| \frac{a^{\mathrm{I}} - a^{\mathrm{II}}}{2} \right| + |\Delta y_s| \right) \,. \tag{1.20b}$$

Δy_s ist die geschätzte Standardabweichung der Ordinate y_s des Schwerpunkts der Messwerte. Die grafische Bestimmung der Ausgleichsgeraden und die Analyse der Anpassungsgenauigkeit über Randgeraden sind naturgemäß sehr

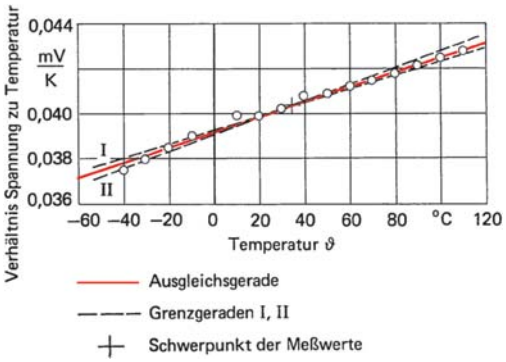


Abb. 1.9 Grafische Kurvenanpassung für das Thermoelement Cu–CuNi an die Eichkurve

subjektiv. Doch bei einiger Messerfahrung gelingt es, die rechnerisch ermittelten wahrscheinlichsten Werte und den Vertrauensbereich für eine statistische Sicherheit von 68,3% in guter Annäherung auch auf grafischem Weg wiederzugeben.

1.3.6 Korrelationsanalyse

In der Messwertanalyse wird die *Methode der Regressionsgeraden* benutzt, um zu untersuchen, ob zwischen den N Messwerten oder Merkmalen y_i und x_i einer zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung $y_i = y(x_i)$ ein Zusammenhang besteht. Ist der Zusammenhang linear bzw. ist eine Proportionalität zwischen den Werten y_i und x_i vorhanden, dann liegen diese Wertepaare auf einer Regressionsgeraden. Sind die Werte y_i und x_i dagegen voneinander unabhängig, dann streuen die Punkte in der $y_i(x_i)$-Darstellung regellos, sodass sich ein „Sternenhimmel“ gemäß Abb. 1.10a ergibt.
Ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein linearer Zusammenhang zwischen y_i und x_i besteht, ist der Betrag des *Korrelationskoeffizienten r*:

$$r = \left| \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{y})^2}} \right| , \tag{1.21a}$$

$$r = \left| \overline{m} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\overline{y}^2}} \right| \tag{1.21b}$$

mit

$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ als dem Mittelwert der Merkmale x_i,

$\overline{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$ als dem Mittelwert des Merkmals y_i

und

$\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\,\overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\,\overline{x}^2}$ als der Steigung der Regressionsgeraden.

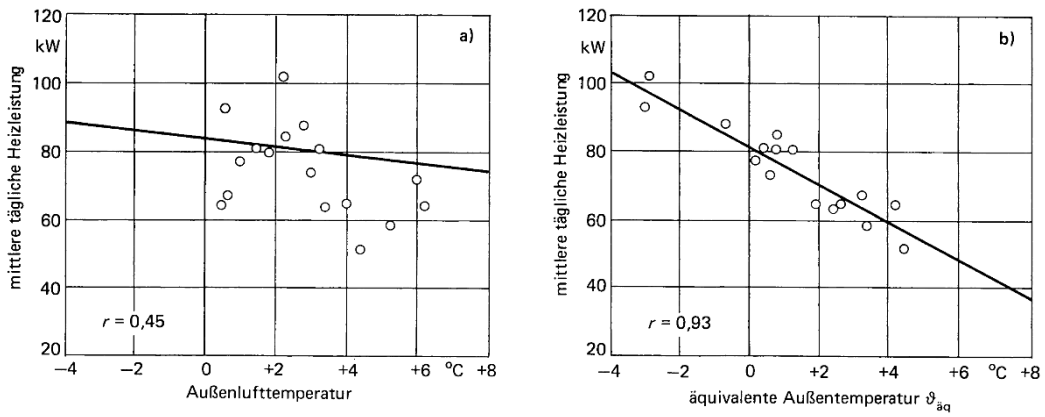


Abb. 1.10 Korrelationsanalyse der mittleren täglichen Heizleistung eines Wohnhauses:
a) Zusammenhang zwischen Heizleistung und Außenlufttemperatur; Korrelation unwahrscheinlich ($r < 0{,}5$);
b) Zusammenhang zwischen Heizleistung und äquivalenter Außentemperatur (unter Berücksichtigung von Sonnenzustrahlung und Windeinfluss); Korrelation wahrscheinlich ($r > 0{,}9$)

Der *Korrelationskoeffizient* r ist also proportional zur Steigung m der Regressionsgeraden durch die Messwerte x_i, y_i. Nach (1.21b) berechnet eine Reihe von Taschenrechnerprogrammen den Korrelationskoeffizienten r. Liegt der Korrelationskoeffizient nahe bei $r = 1$ (also $0{,}8 < r \leq 1{,}0$), etwa entsprechend Abb. 1.10b, dann besteht mit großer Wahrscheinlichkeit eine lineare Beziehung zwischen den Messwerten bzw. Merkmalen y_i, und x_i. Ein Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen y_i und x_i ist unwahrscheinlich, wenn der Korrelationskoeffizient wie in Abb. 1.10a im Bereich $0 \leq r < 0{,}5$ liegt.

Zur Übung

Ü 1.3-1 Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels wird mit einer Stoppuhr 25-mal gemessen. Es ergeben sich folgende Messwerte:

T = 1,21 s; 1,20 s; 1,23 s; 1,19 s; 1,21 s; 1,22 s; 1,18 s;
1,21 s; 1,24 s; 1,20 s; 1,21 s; 1,25 s; 1,19 s; 1,20 s;
1,22 s; 1,21 s; 1,19 s; 1,23 s; 1,21 s; 1,22 s; 1,20 s;
1,24 s; 1,21 s; 1,22 s; 1,20 s.

a) Berechnet werden soll der wahrscheinlichste Wert der Schwingungsdauer.
b) Wie groß ist die Standardabweichung und damit die Genauigkeit des Messverfahrens?
c) Wie groß ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts?
d) Welchen Wert hat die Grenze u_z des Vertrauensbereichs, wenn eine statistische Sicherheit von $P = 95\%$ verlangt wird?

Ü 1.3-2 Die Wärmeleitfähigkeit λ eines Stoffes wird im Plattengerät nach DIN 52 612 unter stationären Temperaturbedingungen aus der Messung der Probendicke s, der Kantenlängen a und b der plattenförmigen Probe, aus den Oberflächentemperaturen T_1 und T_2 auf der Kalt- und Warmseite sowie aus dem Wärmestrom Φ durch die Probe bestimmt. Es gilt

$$\lambda = \frac{\Phi s}{a\, b\, (T_2 - T_1)} \,.$$

Die Messwerte bei einer Leichtbetonprobe sind

$\Phi = (16 \pm 0{,}1)\,\mathrm{W}$, $\quad b = (495 \pm 1)\,\mathrm{mm}$,
$s = (80 \pm 1)\,\mathrm{mm}$, $\quad T_2 = (15 \pm 0{,}1)\,^\circ\mathrm{C}$,
$a = (500 \pm 1)\,\mathrm{mm}$, $\quad T_1 = (6 \pm 0{,}1)\,^\circ\mathrm{C}$.

a) Wie groß ist der wahrscheinlichste Wert der Wärmeleitfähigkeit?
b) Wie groß ist die Standardabweichung s_λ der Wärmeleitfähigkeit?
c) Wie groß ist der relative Größtfehler der Wärmeleitfähigkeitmessung?

Ü 1.3-3 Für das Thermoelement-Material Cu–CuNi soll die thermoelektrische Beziehung für die Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$

$$U_{\mathrm{th}} = a_1 \vartheta + a_2\, \vartheta^2$$

an die Werte der folgenden Wertetabelle rechnerisch und grafisch angepasst werden. Zu bestimmen sind die wahrscheinlichsten Werte der Thermomaterialkonstanten a_1 und a_2 und der Vertrauensbereich für eine statistische Sicherheit $P = 68{,}3\%$.
Wertetabelle für Cu–CuNi:

Tag-Nr.	mittlere tägliche Heizleistung kW	mittlere Außenluft-temperatur °C	äquivalente Außentem-peratur °C
1	85	2,3	0,8
2	81	1,5	0,4
3	67	0,6	3,2
4	93	0,6	−3,0
5	81	3,2	1,2
6	88	2,8	−0,7
7	102	2,2	−2
8	73	6,0	0,6
9	65	6,2	4,2
10	64	3,4	3,5
11	78	1,0	0,2
12	65	0,5	2,0
13	81	1,8	0,7
14	74	3,0	1,4
15	65	4,0	2,6
16	52	4,4	4,4
17	59	5,3	3,4

ϑ/°C		−40	−30	−20	−10
U_{th}/mV		−1,50	−1,14	−0,77	−0,39
ϑ/°C	0	+10	+20	+30	+40
U_{th}/mV	0	+0,40	+0,80	+1,21	+1,63
ϑ/°C		+50	+60	+70	+80
U_{th}/mV		+2,05	+2,48	+2,91	+3,35
ϑ/°C		+90	+100	+110	+120
U_{th}/mV		+3,80	+4,25	+4,71	+5,18

Ü 1.3-4

Bei der energetischen Analyse eines Mehrfamilienhauses mit Zentralheizung wird die Abhängigkeit der mittleren Heizleistung je Tag von der mittleren Außenlufttemperatur untersucht. In einem weiteren Schritt wird zum Vergleich der Zusammenhang der Heizleistung mit einer äquivalenten Außentemperatur analysiert. Diese berücksichtigt die Einflüsse der Sonnenzustrahlung, der mittleren Windgeschwindigkeit an den Außenflächen und die Wärmespeicherfähigkeit der Außenwandkonstruktion und wird aus den lokalen Klimadaten berechnet. Für einen 17-tägigen Messzyklus ergeben sich folgende Daten:

a) Wie groß sind die Steigung und der Achsenabschnitt der Regressionsgeraden bei der Abhängigkeit der mittleren Heizleistung von der Außenlufttemperatur bzw. von der äquivalenten Außentemperatur (Abb. 1.10)?
b) Beurteilt werden soll anhand der Korrelationskoeffizienten die Abhängigkeit der mittleren Heizleistung von den beiden Parametern Außenlufttemperatur und äquivalenter Außentemperatur.
c) Wie groß sind die Standardabweichungen der Steigung und des Achsenabschnitts bei den beiden Regressionsgeraden?
d) Wie groß sind die Vertrauensbereiche für die Steigung und den Achsenabschnitt der Regressionsgeraden bei der statistischen Sicherheit P = 68,3%?

Kapitel 2
Mechanik

2

2

2 Mechanik

2.1 Einführung 29
2.2 Kinematik des Punktes 29
2.2.1 Eindimensionale Kinematik 30
2.2.2 Dreidimensionale Kinematik 36
2.2.3 Kreisbewegungen 39
2.3 Grundgesetze der klassischen Mechanik 43
2.3.1 Konzept der klassischen Dynamik 43
2.3.2 Die Newton'schen Axiome 43
2.3.3 Masse 44
2.3.4 Kraft 45
2.4 Dynamik in bewegten Bezugssystemen 50
2.4.1 Relativ zueinander geradlinig bewegte Bezugssysteme 50
2.4.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme 52
2.5 Impuls 56
2.5.1 Impuls eines materiellen Punktes 56
2.5.2 Impuls eines Systems materieller Punkte 58
2.5.3 Raketengleichung 60
2.6 Arbeit und Energie 62
2.6.1 Arbeit 62
2.6.2 Leistung, Wirkungsgrad 64
2.6.3 Energie 66
2.6.4 Energieerhaltungssatz 67
2.7 Stoßprozesse 68
2.7.1 Übersicht und Grundbegriffe 68
2.7.2 Gerader, zentraler, elastischer Stoß 69
2.7.3 Gerader, zentraler, unelastischer Stoß 71
2.7.4 Schiefe, zentrale Stöße 73
2.8 Drehbewegungen 75
2.8.1 Drehmoment 75
2.8.2 Newton'sches Aktionsgesetz der Drehbewegung 75
2.8.3 Arbeit, Leistung und Energie bei der Drehbewegung 77
2.8.4 Drehbewegungen von Systemen materieller Punkte 78
2.8.5 Analogie Translation und Rotation 79
2.9 Mechanik starrer Körper 80
2.9.1 Freiheitsgrade und Kinematik 80
2.9.2 Kräfte am starren Körper 82
2.9.3 Schwerpunkt und potentielle Energie eines starren Körpers 85
2.9.4 Kinetische Energie eines starren Körpers 86
2.9.5 Massenträgheitsmomente starrer Körper 88
2.9.6 Kreisel 95
2.10 Gravitation 101
2.10.1 Beobachtungen 101

2.10.2 Newton'sches Gravitationsgesetz 103
2.10.3 Hubarbeit und potentielle Energie 104
2.10.4 Satellitenbahnen 106
2.11 Mechanik deformierbarer fester Körper – Elastomechanik 108
2.11.1 Elastische Verformung 108
2.11.2 Plastische Verformung 117
2.11.3 Härte fester Körper 119
2.12 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase-, Hydro- und Aeromechanik 121
2.12.1 Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik) und ruhende Gase (Aerostatik) 123
2.12.2 Fluide – strömende Flüssigkeiten (Hydrodynamik) und Gase (Aerodynamik) 135

2 Mechanik

2.1 Einführung

Die Mechanik ist der Teil der Physik, der sich mit der Zusammensetzung und dem Gleichgewicht von Kräften, die auf einen ruhenden Körper wirken (*Statik*), mit Bewegungsvorgängen (*Kinematik*) und den Kräften als Ursache der Bewegung (*Dynamik*) befasst. Die Dynamik wird auch als *Kinetik* bezeichnet oder dient als Sammelbegriff für Statik und Kinetik.

Eine Übersicht über die Bereiche der Mechanik, die Zusammenhänge zwischen ihren Teilgebieten und ihren wichtigsten Beziehungen vermittelt Abb. 2.1.

Die Mechanik nimmt unter den Teilgebieten der Physik eine besondere Stellung ein. Die planmäßige Erforschung der Naturgesetze begann im 16. und 17. Jahrhundert in der Mechanik. So wurde beispielsweise durch die Fallversuche von Galilei (G. Galilei, 1564 bis 1642) erstmals das gezielte Experiment als Hilfsmittel wissenschaftlicher Erkenntnis in der Physik eingeführt (Abschn. 1.1, Abb. 1.1). Galileis Untersuchungen zur Dynamik wurden von Huygens (Chr. Huygens, 1629 bis 1695) fortgeführt und von Newton (I. Newton, 1643 bis 1727) zu einem gewissen Abschluss gebracht. Auf den *Newton'schen Axiomen* fußt das ganze Gebäude der klassischen Mechanik, die ihm zu Ehren auch als *Newton'sche Mechanik* bezeichnet wird.

Die allgemeinen Begriffe der Mechanik, wie z. B. Masse, Kraft, Arbeit, Energie und Impuls, und ihre mathematischen Methoden, wie z. B. die Beschreibung von Bewegungsabläufen mit Hilfe von Differential- und Integralgleichungen, sind für die ganze Physik von grundlegender Bedeutung. Die außerordentlichen Erfolge der Newton'schen Mechanik beispielsweise auch in den Gebieten Astronomie und Wärmelehre nährten lange Zeit den Glauben, dass sich alle Naturerscheinungen auf die Mechanik zurückführen ließen. Um die Wende vom 19. ins 20. Jahrhundert wurde klar, dass dies bei der Elektrodynamik nicht möglich ist. Ferner erkannte man, dass die Newton'sche Mechanik ganz *klare Gültigkeitsgrenzen* hat. So liefert die klassische Mechanik falsche Voraussagen, wenn sich Objekte mit sehr großer Geschwindigkeit (insbesondere nahe Lichtgeschwindigkeit) bewegen. Dort wird sie abgelöst von der durch Einstein (A. Einstein, 1879 bis 1955) begründeten *relativistischen Mechanik*. Im Bereich der atomaren Dimensionen versagt die klassische Mechanik ebenfalls: Mikroobjekte gehorchen der *Quantenmechanik* (Abschn. 1.2, Abb. 1.3).

In diesem Abschnitt werden lediglich Gesetze der klassischen Mechanik beschrieben (Abb. 2.1).

2.2 Kinematik des Punktes

Die *Kinematik* hat zur Aufgabe, die Bewegung von Körpern zu beschreiben. Dies geschieht

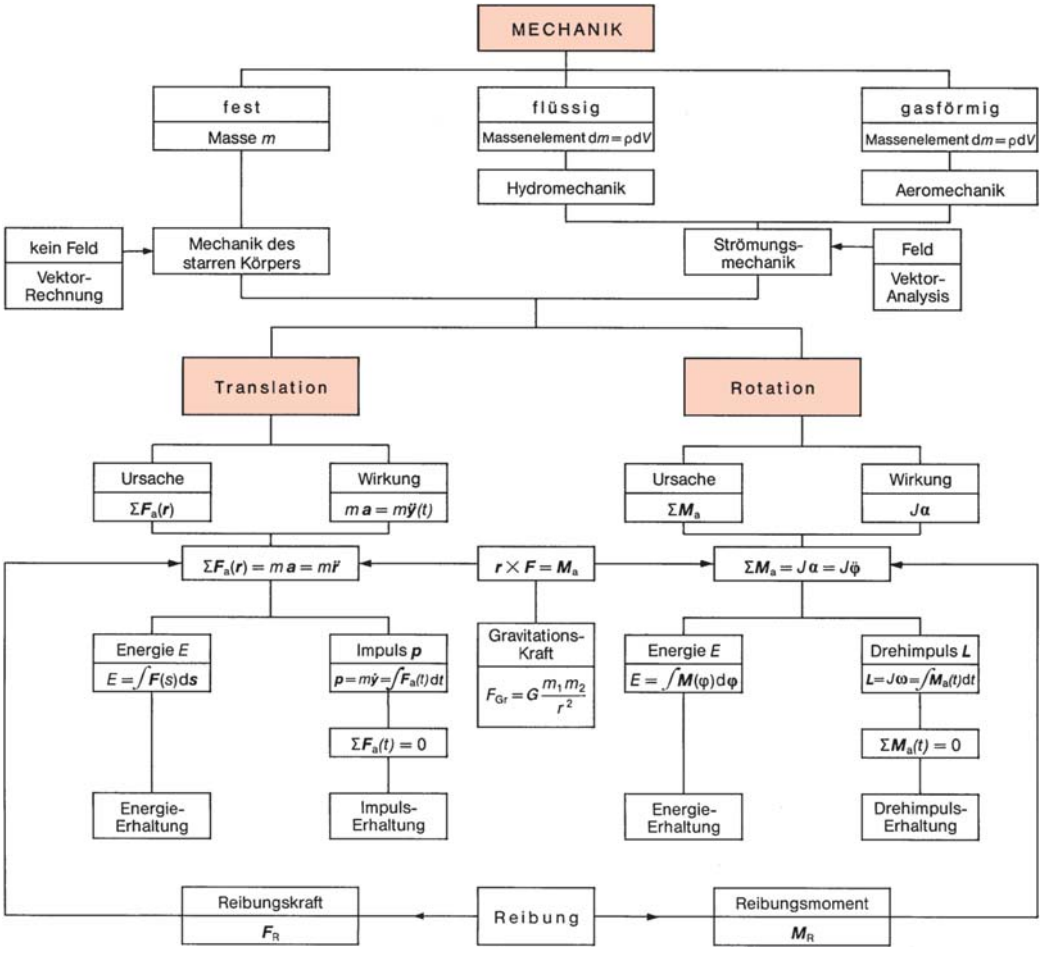


Abb. 2.1 Strukturbild der Mechanik

durch die Angabe von Ortskoordinaten und deren Zeitabhängigkeit. Bei komplizierten Gebilden können einzelne Teile ganz verschiedene Bewegungen ausführen. So ist etwa bei einem fahrenden Auto die Bewegung eines Punktes der Karosserie völlig verschieden von jener eines Punktes auf einem Reifen. Für die vollständige Beschreibung des Bewegungszustands eines Systems sind demnach unter Umständen viele Angaben erforderlich. Da aber jedes System aus einzelnen Punkten zusammengesetzt ist, hat die Beschreibung der Bewegung eines einzelnen Punktes eine vorrangige Bedeutung. In diesem Abschnitt ist deshalb ausschließlich die *Kinematik des einzelnen* Punktes beschrieben. Die Kinematik der *starren Körper* wird in Abschn. 2.9.1 erläutert. Die Kinematik befasst sich nicht mit der Frage nach der Ursache einer bestimmten Bewegung. Dies ist Aufgabe der *Dynamik* oder *Kinetik*. Die Kinematik ist eine reine Bewegungsgeometrie.

2.2.1 Eindimensionale Kinematik

2.2.1.1 Geschwindigkeit

Eindimensional ist die Kinematik eines Punktes, wenn die Bewegung nur auf einer vorge-

gebenen Bahn erfolgt, wie es beispielsweise bei Schienenfahrzeugen und Werkzeugschlitten der Fall ist. Eindimensional wird die Bewegung deshalb genannt, weil zur eindeutigen Ortsbestimmung die Angabe *einer* Koordinate ausreicht, ein solcher spurgeführter Punkt also nur *einen Freiheitsgrad* hat. Die Lage eines Punktes P ist eindeutig beschrieben, wenn gemäß Abb. 2.2 die längs der Bahn gemessene Entfernung s von einem Anfangspunkt A angegeben ist.

Eine wichtige Grundgröße der Kinematik ist die *Geschwindigkeit*. Je größer die Geschwindigkeit eines Punktes ist, umso größer ist der zurückgelegte Weg innerhalb einer bestimmten Zeitspanne. Befindet sich nach Abb. 2.3 ein Punkt zur Zeit t am Ort P_1, charakterisiert durch die Entfernung $s(t)$ vom Ausgangspunkt A, und zur Zeit $t + \Delta t$ am Ort P_2 mit der Entfernung $s(t + \Delta t)$, dann ist die *mittlere Geschwindigkeit*

$$v_\mathrm{m} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \qquad (2.1)$$

Die abgeleitete SI-Maßeinheit der Geschwindigkeit v ist 1 m/s. Andere Quotienten gesetzlich zugelassener Längen- und Zeiteinheiten, wie z. B. km/h, sind ebenfalls möglich.

Wird die Zeitdifferenz Δt zu groß gewählt, dann kann die tatsächliche *Momentangeschwindigkeit* v von der mittleren Geschwindigkeit v_m erheblich abweichen. Um die Momentangeschwindigkeit zu erhalten, muss

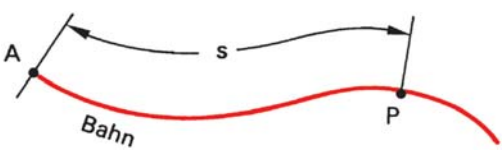


Abb. 2.2 Ortskoordinate eines Punktes P auf vorgegebener Bahn s Weg vom Anfangspunkt A

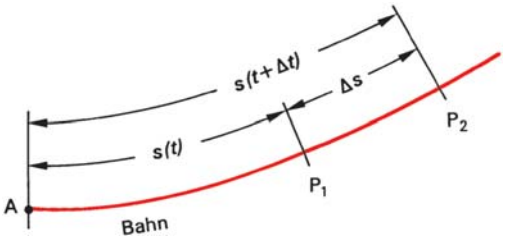


Abb. 2.3 Zur Definition der Geschwindigkeit, t Zeit (sonstige Bezeichnungen wie in Abb. 2.1)

nach (2.1) ein Quotient aus der Weg- und Zeitdifferenz bei verschwindend kurzem Zeitintervall gebildet werden. Mathematisch drückt man diesen Sachverhalt durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ aus:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \,. \qquad (2.2)$$

Der Differentialquotient nach der Zeit wird in der Mechanik häufig mit einem aufgesetzten Punkt symbolisiert. Der Differentialquotient $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ hat eine anschauliche Bedeutung:

> Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Kurve in einem Weg-Zeit-Diagramm.

Beispiel

2.2-1 Abbildung 2.4 a zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm eines Fahrzeugs. Wie groß ist dessen minimale, maximale und mittlere Geschwindigkeit?

Lösung

Am Anfang und Ende des s, t-Diagramms hat die Kurve eine waagrechte Tangente; hier liegt also die minimale Geschwindigkeit $v = 0$ vor. Der Punkt P auf der Kurve kennzeichnet den Ort maximaler Steigung. Der Betrag der Steigung lässt sich aus dem eingezeichneten Steigungsdreieck ablesen, dessen Hypotenuse eine Tangente zur Kurve in P ist. Man erhält

$$v_{\max} = \frac{30\ \text{km}}{12{,}7\ \text{min}} = 2{,}36\ \text{km/min} = 142\ \text{km/h}\ .$$

Die mittlere Geschwindigkeit für den Gesamtvorgang beträgt

$$v_{\text{m}} = \frac{30\ \text{km}}{40\ \text{min}} = 0{,}75\ \text{km/min} = 45\ \text{km/h}\ .$$

Bestimmt man nun im s,t-Diagramm von Abb. 2.4 a an jedem Punkt die Steigung, so erhält man das kontinuierliche Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm von Abb. 2.4 b. Liegt aber das v,t-Diagramm durch eine Messung bereits vor, dann kann das zugehörige s,t-Diagramm durch Integration ermittelt werden. Ist s_0 der Ort zur Zeit t_0, dann ist der Ort $s(t_1)$ zur Zeit t_1 gegeben durch das Integral

$$s(t_1) = s_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t\ . \qquad (2.3)$$

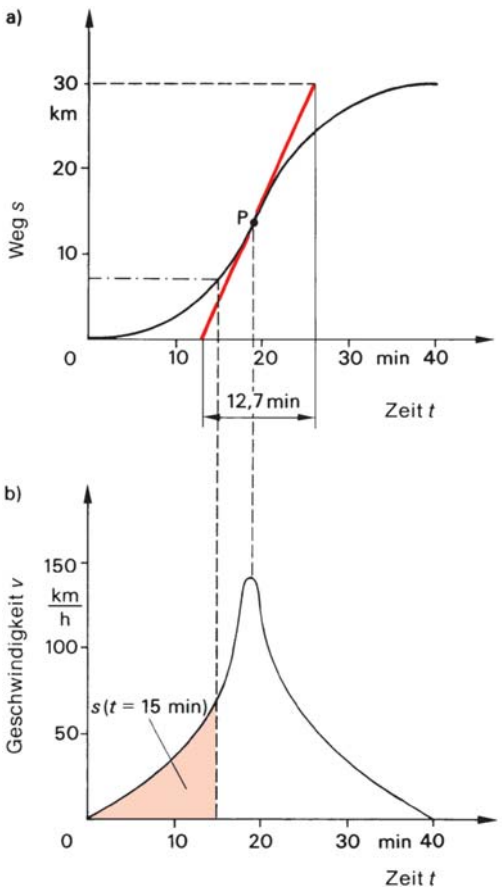


Abb. 2.4 Bewegung mit ungleichförmiger Geschwindigkeit (Beispiel 2.2-1). **a**) Weg-Zeit-Diagramm, **b**) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

Weil dieses Integral die Bedeutung der Fläche unter einer Kurve hat, kann der zurückgelegte Weg durch Flächenbestimmung aus dem v,t-Diagramm gewonnen werden. Sehr häufig liegen in der Praxis gemessene Kurven vor, die nicht analytisch beschrieben werden können. Bei solchen Kurven muss die Integration bzw. Flächenbestimmung „numerisch" durchgeführt werden.

Als Beispiel einer solchen Integration ist in Abb. 2.4 b die Fläche zwischen $0 \leqq t \leqq 15$ min rot eingezeichnet. Durch Auszählen von Karos auf Millimeterpapier ergibt sich die „Fläche" 6,7 km. Zur Zeit $t = 15$ min ist also $s(15\ \text{min}) = 6{,}7$ km. Dieses Ergebnis stimmt mit der Abb. 2.4 a gut überein.

2.2.1.2 Beschleunigung

Eine beschleunigte Bewegung liegt vor, wenn sich die Geschwindigkeit im Lauf der Zeit ändert. Die Beschleunigung ist umso größer, je stärker sich die Geschwindigkeit innerhalb einer Zeitspanne Δt ändert. Sind $v(t)$ die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit t und $v(t+\Delta t)$ die Geschwindigkeit zur späteren Zeit $t+\Delta t$, so ist die *mittlere Beschleunigung*

$$a_{\text{m}} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\ . \qquad (2.4)$$

Die abgeleitete SI-Maßeinheit der Beschleunigung a ist $1\ \text{m/s}^2$. Wie bei der Geschwindigkeit weicht im Allgemeinen die *Momentanbeschleunigung* a von der mittleren Beschleuni-

gung a_m ab. Die Momentanbeschleunigung erhält man nach einem Grenzübergang für verschwindend kurze Messzeiten aus

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} \,. \tag{2.5}$$

Die Beschleunigung kann anschaulich interpretiert werden:

> Die Beschleunigung ist die Steigung der Kurve in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

Beispiel

2.2-2 Bei einem mathematischen Pendel hängt an einem Faden ein kleiner Körper mit vernachlässigbarer Ausdehnung. Die Geschwindigkeit dieses Massenpunktes wird durch die Beziehung $v(t) = 0{,}25\ \mathrm{m/s} \cdot \sin(3{,}14\ \mathrm{s^{-1}}\, t)$ beschrieben und ist in Abb. 2.5 a dargestellt in der Zeitspanne $0 \leqq t \leqq 1\ \mathrm{s}$. Wie lautet der Ausdruck für die Beschleunigung des Punktes? Wie groß sind die Extremwerte?

Lösung

Für die Beschleunigung gilt

$$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0{,}79\ \mathrm{m/s^2} \cdot \cos\,(3{,}14\ \mathrm{s^{-1}}\,\mathrm{t}) \,.$$

Die Extremwerte sind $a_{max} = \pm 0{,}79\ \mathrm{m/s^2}$ bei $t = 0$ bzw. $t = 1\ \mathrm{s}$. Den Verlauf zeigt Abb. 2.5 b.

Liegt die a, t-Kurve vor (z. B. mit einem Beschleunigungsaufnehmer gemessen), dann ergibt sich daraus die v, t-Kurve durch Integration:

$$v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

mit v_0 als der Geschwindigkeit zur Zeit t_0.

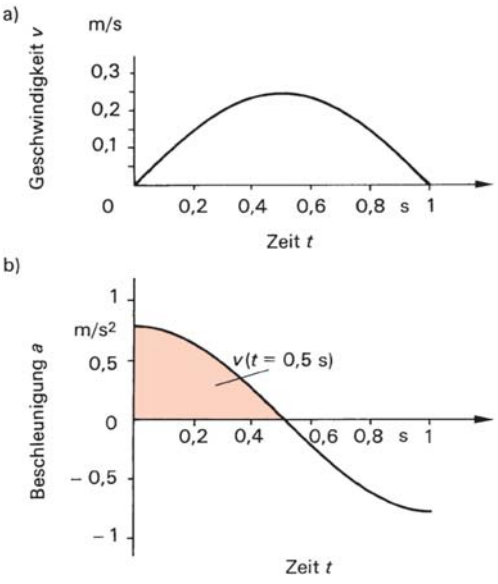


Abb. 2.5 Beschleunigte Bewegung (Beispiel 2.2-2). **a**) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, **b**) Beschleunigung-Zeit-Diagramm

Die rot eingezeichnete Fläche in Abb. 2.5 b stellt beispielsweise die Geschwindigkeit zur Zeit $t_1 = 0{,}5\ \mathrm{s}$ dar. Weil die Beschleunigung analytisch vorliegt, kann sofort integriert werden. Man erhält

$$v(0{,}5\ \mathrm{s}) = \int_0^{0{,}5\ \mathrm{s}} 0{,}79\ \mathrm{m/s^2} \cdot \cos(3{,}14\ \mathrm{s^{-1}} t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0{,}25\ \mathrm{m/s} \,.$$

2.2.1.3 Einfache Spezialfälle

Von Bedeutung sind die Spezialfälle der gleichmäßigen Geschwindigkeit v = konstant und der gleichmäßigen Beschleunigung a = konstant. Für diese Fälle liefern die allgemeinen Gleichungen verhältnismäßig einfache Ausdrücke, die in Abb. 2.6 zusammengefasst sind. Sehr einfache Beschreibungen ergeben sich, wenn die jeweiligen Integrationskonstanten v_0 und s_0 gleich null gesetzt werden.

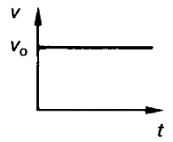
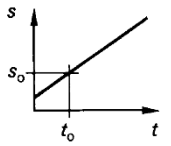
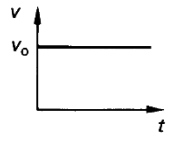
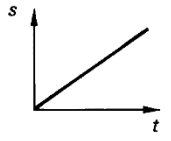
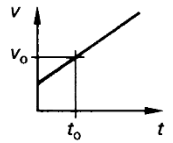
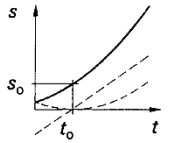
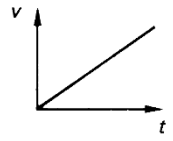
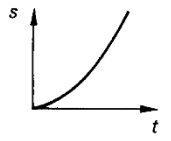
	Beschleunigung	Anfangsbedingungen	Geschwindigkeit	Ort	v, t-Diagramm	s, t-Diagramm
Definition	a	s_0, v_0	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$		
gleichmäßige Geschwindigkeit	$a = 0$	$s = s_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0$	$s = s_0 + v_0(t - t_0)$		
		$s = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = v_0$	$s = v_0 t$		
gleichmäßige Beschleunigung	$a = a_0$	$s = s_0$ $v = v_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0 + a_0(t - t_0)$	$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$		
		$s = 0$ $v = 0$ zur Zeit $t = 0$	$v = a_0 t$ $v = \sqrt{2 a_0 s}$	$s = \frac{1}{2} a_0 t^2$ $s = \frac{v^2}{2 a_0}$		

Abb. 2.6 Translationsbewegung

Ein allgemein bekanntes Beispiel für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist der *freie Fall* an der Erdoberfläche. Alle Körper erfahren beim Fall im Vakuum die Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Beim Fall in der Luft wirkt sich der Strömungswiderstand störend aus, der aber in vielen Fällen vernachlässigt werden kann.

Beispiel

2.2-3 Von einem $h = 10\ \mathrm{m}$ hohen Turm wird eine kleine Stahlkugel mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Für diesen Fall sind die v, t- und y, t-Diagramme zu zeichnen. Zu berechnen sind die maximale Steighöhe, die Gesamtzeit, die vergeht, bis die Kugel auf der Erde aufschlägt, und die Endgeschwindigkeit, mit der die Kugel auf der Erde ankommt.

Lösung

Abbildung 2.7a zeigt die gewählte Höhenkoordinate. Die y-Achse weist senkrecht nach oben; $y = 0$ entspricht der Erdoberfläche. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ sind $y(0) = h$ und $v(0) = +v_0$. Die Beschleunigung ist $a = -g$ = konstant. Das Minuszeichen bringt zum Ausdruck, dass die Beschleunigung der positiven y-Richtung entgegengesetzt ist.
Aus (2.6) bzw. Abb. 2.6 folgt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = v_0 - gt\ . \qquad \text{(I)}$$

Der Ort der Kugel ergibt sich aus (2.3) bzw. Abb. 2.6 zu

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\ . \qquad \text{(II)}$$

Die Gleichungen (I) und (II) sind in den kinematischen Diagrammen Abb. 2.7b und 2.7c dargestellt. Die maximale Steighöhe ist erreicht, wenn $v = 0$ geworden ist (Umkehrpunkt). Aus (I) folgt für diesen Zeitpunkt $t(y_{\max}) = v_0/g = 0{,}51\ \mathrm{s}$.
Aus (II) erhält man die zugehörige Ortskoordinate

$$y_{\max} = h + \frac{1}{2} v_0^2/g = 11{,}27\ \mathrm{m}\ .$$

Der Fall ist beendet, wenn $y = 0$ wird. Die zugehörige Zeit t_f folgt aus der quadratischen Gleichung (II):

$$\frac{1}{2} g\, t_\mathrm{f}^2 - v_0\, t_\mathrm{f} - h = 0\ .$$

Für die *Fallzeit* des freien Falls ergibt sich allgemein

$$t_\mathrm{f} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}\ . \qquad (2.7)$$

In Beispiel 2.2-3 ist $t_\mathrm{f} = 2{,}03\ \mathrm{s}$ (Abb. 2.7c). Die Geschwindigkeit v_f der Kugel am Ende des Falls ergibt sich aus (I) mit der Zeit t_f zu

$$v_\mathrm{f} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}\ . \qquad (2.8)$$

In Beispiel 2.2-3 ist $|v_\mathrm{f}| = 14{,}9\ \mathrm{m/s}$ (Abb. 2.7 b). Der freie Fall aus der Ruhe ist als Spezialfall für $v_0 = 0$ in den vorgenannten Ableitungen enthalten. So gelten z. B. für die Fallzeit aus der Höhe h

$$t_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2.9)$$

und für die Endgeschwindigkeit

$$|v_\mathrm{f}| = \sqrt{2gh}\ . \qquad (2.10)$$

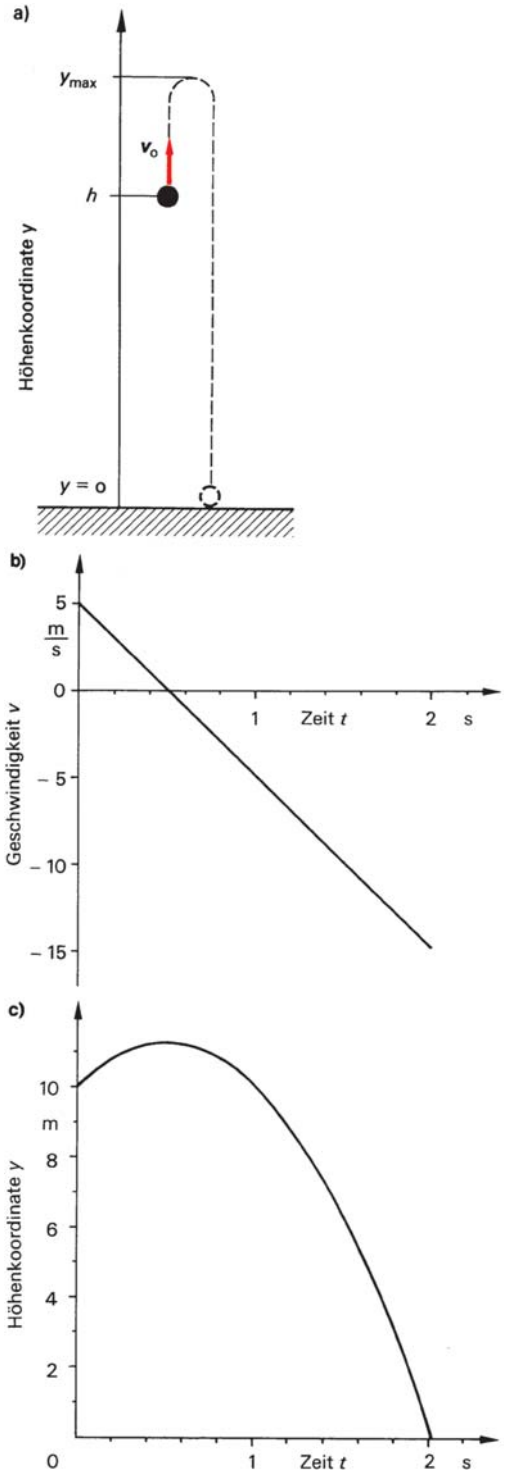


Abb. 2.7 Zu Beispiel 2.2-3: Senkrechter Wurf nach oben. **a**) Höhenkoordinate, **b**) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, **c**) Weg-Zeit-Diagramm

2.2.2 Dreidimensionale Kinematik

2.2.2.1 Ortsvektor und Bahnkurve

Die Bewegung eines Punktes im dreidimensionalen Raum hat drei Freiheitsgrade; zu seiner eindeutigen Lagebestimmung ist die Kenntnis von drei Koordinaten erforderlich. Dazu können beispielsweise die Komponenten eines *Ortsvektors* $\boldsymbol{r}$, der vom Ursprung eines Koordinatensytems bis zum Ort des betreffenden Punktes zeigt, benutzt werden. Wird gemäß Abb. 2.8 ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, dann hat der Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$, als Spaltenmatrix geschrieben, die Komponenten

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} .$$

Werden die Ortsvektoren zu verschiedenen Zeiten aufgezeichnet, wandert die Spitze der Ortsvektoren auf der Bahnkurve des Punktes. In diesem Abschnitt wird ausschließlich mit kartesischen Koordinaten gearbeitet. Bei bestimmten Bewegungsabläufen ist jedoch die Verwendung anderer Koordinatensysteme (z. B. Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten) vorteilhaft.

2.2.2.2 Geschwindigkeitsvektor

Abbildung 2.9 zeigt die Bewegung eines Punktes auf einer gekrümmten Bahnkurve. Es sind zwei Ortsvektoren $\boldsymbol{r}$ zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ eingezeichnet. In Analogie zur Definitionsgleichung (2.1) für die mittlere Geschwindigkeit wird ein *Vektor* der mittleren Geschwindigkeit definiert:

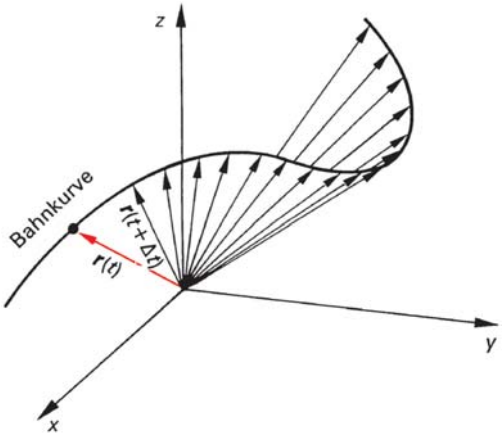


Abb. 2.8 Ortsvektor und Bahnkurve. x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit

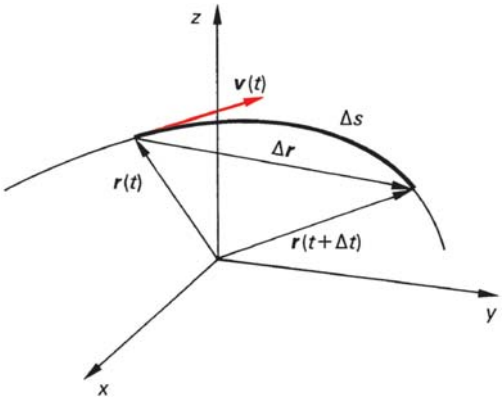


Abb. 2.9 Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$. x, y, z Raumkoordinaten, t Zeit, s Weg, $\boldsymbol{r}$ Ortsvektor

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \,. \qquad (2.11)$$

Dieser Vektor hat die Richtung des Differenzvektors $\Delta \boldsymbol{r}$ und gibt grob die Bewegungsrichtung an. Wenn die Zeitspanne Δt genügend klein ist, gilt $|\Delta \boldsymbol{r}| \approx \Delta s$. Damit ist der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}}$ ungefähr gleich der mittleren Geschwindigkeit, wie sie in (2.1) definiert ist.

Der Vektor der Momentangeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ergibt sich wieder durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \,. \qquad (2.12)$$

Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$ ist exakt gleich der früher in (2.2) eingeführten Geschwindigkeit, denn nach dem Grenzübergang besteht zwischen Bogen und Sehne kein Unterschied mehr. Für die Richtung des Vektors gilt (Abb. 2.9):

> Der Vektor $\boldsymbol{v}$ der Momentangeschwindigkeit liegt stets tangential zur Bahnkurve.

Mit Hilfe des *Tangenteneinheitsvektors* $\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}}$ (Betrag eins, Richtung der Tangente an die Bahnkurve) kann der Vektor der Geschwindigkeit auch so geschrieben werden:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{tan}} \,. \qquad (2.13)$$

2.2.2.3 Beschleunigungsvektor

Der Vektor der Beschleunigung wird als Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit definiert:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \,. \qquad (2.14)$$

Dieser Vektor steht, wie in Abb. 2.10 gezeigt, im Allgemeinen schief zur Bahnkurve. Seine *Tangential-* und *Normalkomponenten* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{tan}}$ und $\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}}$ können berechnet werden, indem der

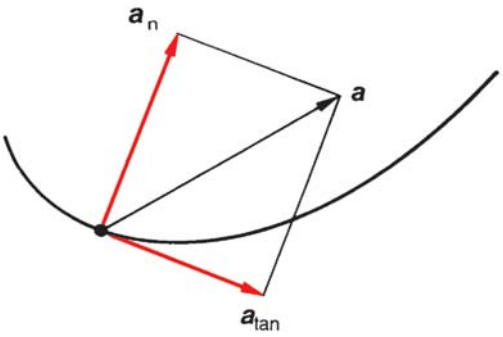


Abb. 2.10 Tangential- und Normalkomponenten des Beschleunigungsvektors

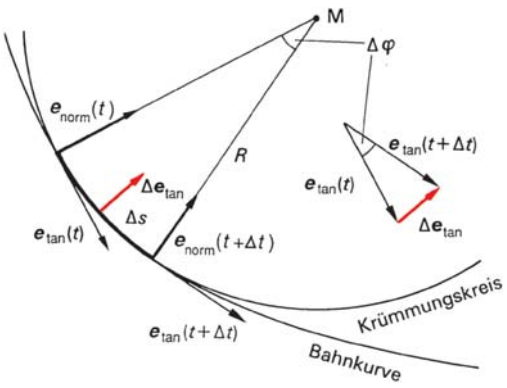


Abb. 2.11 Zur Bestimmung der Differentialquotienten $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\tan}/\mathrm{d}t$

Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\tan}$ nach der Zeit differenziert wird. Dies ergibt mit Hilfe der Produktregel der Differentialrechnung

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\tan} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\tan} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\tan}}{\mathrm{d}t} \ .$$

Das erste Glied hat die Richtung der Tangente und stellt die Tangentialkomponente der Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}_{\tan} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\tan} \qquad (2.15)$$

dar. Der Betrag der Tangentialbeschleunigung $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ ist identisch mit der Beschleunigung, die bei der eindimensionalen Bewegung durch (2.5) definiert wurde.

Zur Bestimmung der Normalkomponente $\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}}$ muss die Differentiation $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\tan}/\mathrm{d}t$ durchgeführt werden. Dazu wird zuerst der Differenzenquotient $\Delta\boldsymbol{e}_{\tan}/\Delta t$ bestimmt. Abbildung 2.11 zeigt die Konstruktion des Differenzvektors $\Delta\boldsymbol{e}_{\tan} = \boldsymbol{e}_{\tan}(t+\Delta t) - \boldsymbol{e}_{\tan}(t)$. Jede gekrümmte Bahn lässt sich auf einem mehr oder weniger langen Bogenstück Δs als Kreis mit dem Krümmungsradius R annähern. $\Delta\boldsymbol{e}_{\tan}$ steht senkrecht auf der Bahnkurve in Richtung Krümmungsmittelpunkt M. Für die Beträge gilt

$$\frac{\Delta s}{R} \approx \frac{|\Delta\boldsymbol{e}_{\tan}|}{|\boldsymbol{e}_{\tan}|} = |\Delta\boldsymbol{e}_{\tan}| \ .$$

Damit ist der Betrag des Differenzenquotienten

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_{\tan}}{\Delta t}\right| \approx \frac{\Delta s}{\Delta t R} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{R} \ .$$

Nach dem Grenzübergang $\Delta t \to 0$ ergibt sich

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\tan}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{v}{R} \ .$$

Somit ist die Normalkomponente der Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\tan}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{norm}} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{norm}} \qquad (2.16)$$

mit $\boldsymbol{e}_{\mathrm{norm}}$ als dem *Normaleinheitsvektor* an der Bahnkurve.

Beispiel

2.2-4 Eine kleine Kugel wird zur Zeit $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30$ m/s unter dem Winkel $\beta = 60°$ gegen die Horizontale abgeschossen. Unter

Vernachlässigung des Luftwiderstands soll die Bewegung diskutiert werden.

a) Wie lauten die allgemeinen Ausdrücke für $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{r}(t)$?
Abbildung 2.12 zeigt das verwendete Koordinatensystem. Beschleunigt wird die Kugel infolge der Schwerkraft nur senkrecht nach unten, also ist die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$. Für die Geschwindigkeit gilt

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \\ v_0 \sin\beta - gt \end{pmatrix} .$$

Der Ortsvektor hat die Form

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\beta t \\ v_0 \sin\beta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} .$$

Wird aus der x- und y-Komponente des Ortsvektors die Zeit t eliminiert, so erhält man die Gleichung der Bahnkurve, die *Wurfparabel*:

$$y = \tan\beta\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\beta} x^2 . \qquad (2.17)$$

b) An welchem Punkt P_1 befindet sich die Kugel zur Zeit $t_1 = 2$ s?
Der zugehörige Ortsvektor lautet $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 30{,}00 \text{ m} \\ 32{,}34 \text{ m} \end{pmatrix}$.
c) Wie groß sind Betrag und Richtung der Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1?
Der Geschwindigkeitsvektor lautet $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 15{,}00 \text{ m/s} \\ 6{,}36 \text{ m/s} \end{pmatrix}$.
Der Betrag der Geschwindigkeit ist $|\boldsymbol{v}_1| = 16{,}3$ m/s. Der Geschwindigkeitsvektor liegt tangential an der Parabel, sein Winkel gegen die x-Achse folgt aus $\tan\beta_1 = \frac{6{,}36}{15} = 0{,}424$ zu $\beta_1 = 23°$.
d) Wie groß sind Normal- und Tangentialbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{norm}}(t_1)$ und $\boldsymbol{a}_{\text{tan}}(t_1)$?
Abbildung 2.12 zeigt die Komponentenzerlegung von $\boldsymbol{a}$. Es ergeben sich

$$|\boldsymbol{a}_{\text{norm}}(t_1)| = g\cos\beta_1 = 9{,}03 \text{ m/s}^2 \quad \text{und}$$
$$|\boldsymbol{a}_{\text{tan}}(t_1)| = g\sin\beta_1 = 3{,}83 \text{ m/s}^2 .$$

e) Zu welchem Zeitpunkt t_s erreicht die Kugel den Scheitel S?
Am Scheitel ist $v_y = 0$ bzw. $v_0 \sin\beta - g\, t_s = 0$; daraus

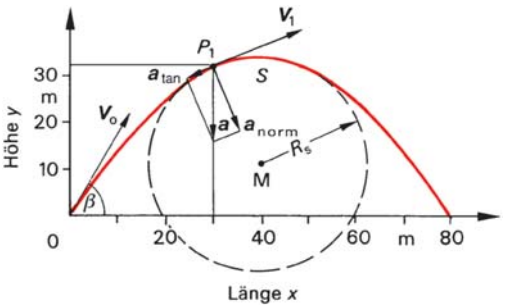


Abb. 2.12 Zu Beispiel 2.2-4: Wurfparabel

folgt

$$t_s = \frac{v_0 \sin\beta}{g} = 2{,}65 \text{ s} .$$

f) Wie groß ist der Krümmungsradius R_s der Wurfparabel im Scheitel?

Die Geschwindigkeit im Scheitel beträgt $v_s = v_0 \cos\beta = 15$ m/s. Nach (2.16) gilt $|\boldsymbol{a}_{\text{norm}}| = v^2/R$; somit ist $R_s = v_s^2/g = 22{,}94$ m.

2.2.3 Kreisbewegungen

Bei einer Kreisbewegung ist die Normalkomponente der Beschleunigung stets zum Kreismittelpunkt gerichtet; man nennt sie deshalb auch *Zentripetalbeschleunigung*. Ist r der Radius des Kreises und v die Bahngeschwindigkeit, so gilt für die Zentripetalbeschleunigung

$$|\boldsymbol{a}_{\text{zp}}| = \frac{v^2}{r} . \qquad (2.18)$$

Die Tangentialbeschleunigung $|\boldsymbol{a}_{\text{tan}}| = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ hängt davon ab, ob sich die Geschwindigkeit betragsmäßig ändert. Für Kreisbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit ist $a_{\text{tan}} = 0$.
Bei der Kreisbewegung ist es häufig vorteilhaft, anstatt der Größen $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ andere, speziell auf die Kreisbewegung angepasste Größen zur Beschreibung des Bewegungsablaufs zu verwenden. Nach Abb. 2.13 lässt sich der Ort eines

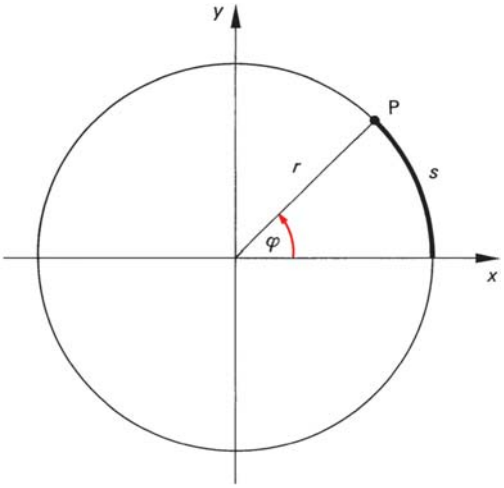


Abb. 2.13 Definition des Drehwinkels φ der Kreisbewegung. r Radius, s Bogenlänge

Punktes P auf einem Kreis sowohl durch den *Drehwinkel* φ als auch durch die *Bogenlänge* s angeben. In der Kinematik empfiehlt es sich, den Winkel im Bogenmaß als Bogenlänge, bezogen auf den Radius, zu verwenden:

$$\varphi = \frac{s}{r} . \tag{2.19}$$

Die SI-Maßeinheit für φ ist 1 m/m = 1 rad (Radiant). Der Winkel wird von der positiven x-Achse aus im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) gemessen.
Ändert sich der Winkel mit der Zeit, dann gibt die *Winkelgeschwindigkeit* an, welcher Drehwinkel in der Zeiteinheit überstrichen wird. Die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{2.20}$$

hat die Maßeinheit 1 rad/s oder kurz 1 s^{-1}.
Der Winkelgeschwindigkeit ω wird der Charakter eines *axialen Vektors* zugeschrieben. Dieser steht senkrecht auf der Ebene der Kreisbahn. Die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ ist nach Abb. 2.14 der Drehrichtung einer Rechtsschraube zugeordnet. Liegt, wie in der oberen Hälfte von Abb. 2.14 dargestellt ist, die Kreisbahn in der Zeichenebene, wird die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ durch die Symbole für die Pfeilspitze $\odot$ oder das Pfeilende $\otimes$ angezeigt. Die Winkelgeschwindigkeit hängt mit der *Drehzahl* oder *Drehfrequenz* n und der Periodendauer T zusammen:

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} . \tag{2.21}$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit ω schreibt man die Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\mathrm{zp}}$ nach (2.18) in vektorieller Form:

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{zp}} = -\omega^2 \boldsymbol{r} . \tag{2.22}$$

Bei beschleunigter Kreisbewegung gibt die *Winkelbeschleunigung* α an, wie sich die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit ändert:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} . \tag{2.23}$$

Die SI-Maßeinheit für α ist 1 $\mathrm{rad/s^2}$ oder kurz 1 $\mathrm{s^{-2}}$. Auch die Winkelbeschleunigung ist ein axialer Vektor. Bei positiver Beschleunigung ist $\boldsymbol{\alpha}$ gleichsinnig parallel zu $\boldsymbol{\omega}$. Bei Bremsvorgängen sind $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\omega}$ entgegengesetzt gerichtet.
Da die Größen φ, ω und α genauso miteinander verknüpft sind wie die Größen s, v und a der eindimensionalen Kinematik, sind alle Gleichungen in Abb. 2.6 direkt auf Kreisbewegungen anwendbar, wenn jeweils einander zugeordnete Größen nach dem Schema $s \to \varphi, v \to \omega, a \to \alpha$ ausgetauscht werden.

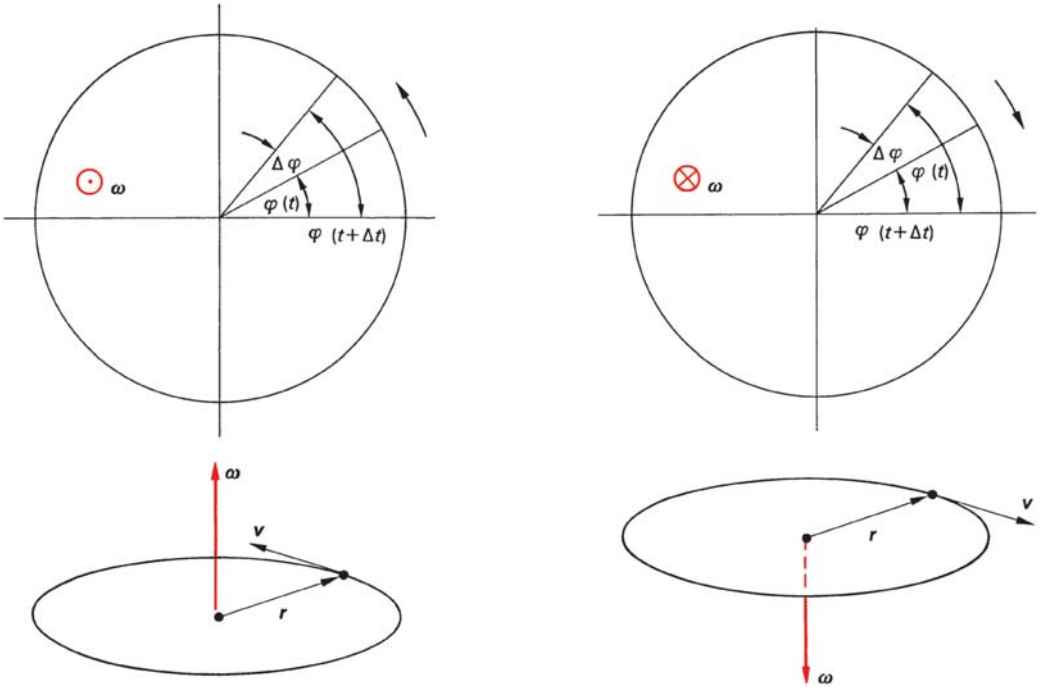


Abb. 2.14 Zur Definition der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ bei verschiedenen Drehrichtungen.

Die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ der allgemeinen dreidimensionalen Kinematik sind auf einfache Weise mit den entsprechenden Größen $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\alpha}$ verknüpft. Eine Zusammenstellung der Beziehungen enthält Tabelle 2.1.

Beispiel

2.2-5 Ein Autoreifen mit dem Radius $r = 0{,}28$ m rollt auf einer Ebene mit der Geschwindigkeit $v_0 = 100$ km/h. Die Bewegung eines Punktes auf der Lauffläche soll diskutiert werden, und zwar a) vom Standpunkt eines mitfahrenden Beobachters, wo der Punkt eine Kreisbahn beschreibt, und b) vom Standpunkt eines Beobachters auf der Straße, von dem aus der Punkt auf der in Abb. 2.15 gezeigten Zykloide läuft. Die Parameterdarstellung der Zykloide ist $x = r(\omega t - \sin \omega t)$ und $y = r(1 - \cos \omega t)$.

a 1) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω?
Beim Abrollen eines Rads ohne Schlupf ist die Geschwindigkeit des Mittelpunktes identisch mit der Umfangsgeschwindigkeit. Deshalb gilt $\omega = v_0/r = 99{,}2$ rad/s.

a 2) Wie groß ist die Beschleunigung des Punktes und welche Richtung hat sie?
Da es sich um eine gleichförmige Kreisbewegung handelt, besteht die Beschleunigung lediglich aus der Zentripetalbeschleunigung, die zum Kreismittelpunkt weist. Sie beträgt $a_{zp} = \omega^2 r = 2\,756$ m/s^2 oder das 281-fache der Erdbeschleunigung.

a 3) Wie groß sind Drehzahl und Periodendauer?
Nach (2.21) ergeben sich $n = \omega/2\pi = 15{,}8\,\text{s}^{-1} = 947\,\text{min}^{-1}$ und $T = 63{,}3$ ms.

b 1) Wie lautet der Vektor der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$? Welchen Betrag und welche Richtung hat $\boldsymbol{v}$ in den

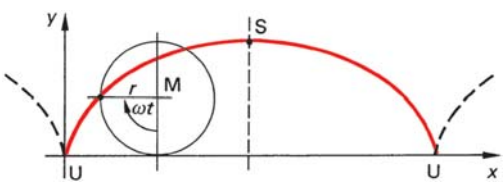


Abb. 2.15 Zykloide als Bahnkurve eines Punktes auf der Lauffläche eines Rads (Beispiel 2.2-5)

Tabelle 2.1 Kreisbewegungsgleichungen (r Radius, t Zeit, N Anzahl Umdrehungen)

Bewegungsgrößen	gleichmäßige Kreisbewegung $\varphi(t_0) = \varphi_0$	gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung $\varphi(t_0) = \varphi_0, \omega(t_0) = \omega_0$	gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 0, t_0 = 0$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = 0$	$\alpha = \alpha_0$	$\alpha = \alpha_0$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \omega_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha_0(t - t_0)$	$\omega = \alpha_0 t = \sqrt{2\alpha_0\varphi}$
Drehwinkel	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0)$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2$	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 = \frac{\omega^2}{2\alpha_0} = 2\pi N$
Umfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$	$v = r\omega_0$	$v = r[\omega_0 + \alpha_0(t - t_0)]$	$v = r\alpha_0 t$
Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{zp} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$	$a_{zp} = r\boldsymbol{\omega}_0^2$	$a_{zp} = r[\omega_0 + \alpha_0(t - t_0)]^2$	$a_{zp} = r\alpha_0^2 t^2$
Tangentialbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{tan} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$a_{tan} = 0$	$a_{tan} = \alpha_0 r$	$a_{tan} = \alpha_0 r$

Umkehrpunkten U, in der gezeichneten Stellung zur Zeit $t = T/4$ und in den Scheitelpunkten S? Der Ortsvektor lautet

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \omega t - \sin \omega t \\ 1 - \cos \omega t \end{pmatrix} .$$

Daraus ergibt sich durch Ableiten nach der Zeit

$$\boldsymbol{v} = r\omega \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} .$$

Umkehrpunkte liegen bei $t = 0, T, 2T, \ldots$ In einem Umkehrpunkt ist $\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; der Punkt ruht momentan auf der Fahrbahn. Nach einer Viertelumdrehung ist die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(T/4) = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, verläuft also unter 45° und hat den Betrag $\sqrt{2}v_0 = 141$ km/h. Scheitelpunkte sind gegeben durch $t = T/2, 3/2T, \ldots$ In einem Scheitelpunkt ist die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(T/2) = v_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $|\boldsymbol{v}| = 200$ km/h. Sie ist waagerecht gerichtet und doppelt so groß wie die Geschwindigkeit der Achse.

b 2) Wie lautet der Vektor der Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$?

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = r\omega^2 \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} .$$

Dieser Vektor läuft auf einem Kreis um und ist stets zum Radmittelpunkt gerichtet. Sein Betrag ist $|\boldsymbol{a}| = r\omega^2 = a_{zp}$.

b 3) Wie groß ist der Krümmungsradius der Zykloide im Scheitelpunkt?

Nach (2.16) ist $R = v^2/a_{norm} = 4r = 1{,}12$ m.

Zur Übung

Ü 2.2-1 Ein Fahrzeug wird aus dem Stand wechselnd beschleunigt und zwar

für $0 \leqq t \leqq 2$ s mit $a = 1$ m/s^2,
für $2\text{ s} < t < 4$ s mit $a = 0$ und
für $4\text{ s} \leqq t \leqq 5$ s mit $a = -2$ m/s^2.

a) Zeichnen Sie die kinematischen Diagramme, d. h. das a, t-Diagramm, das v, t-Diagramm und das s, t-Diagramm für $0 \leqq t \leqq 5$ s. b) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit? c) Welche Geschwindigkeit hat das Fahrzeug zur Zeit $t = 5$ s? d) Wie groß ist der insgesamt zurückgelegte Weg?

Ü 2.2-2 Ein Bauteil wird ungleichmäßig aus der Ruhe beschleunigt. In kurzen Zeitabständen wird die Geschwindigkeit gemessen; es ergibt sich eine Wertetabelle:

t in s	0	1	2	3	4	5
v in m/s	0	0,2	0,7	1,6	3,2	6,0

a) Zeichnen Sie maßstäblich das v, t-Diagramm (Millimeterpapier). b) Ermitteln Sie aus dem v, t-Diagramm das a, t-Diagramm. Wie groß ist die Beschleunigung zur Zeit $t_1 = 4\,\text{s}$? c) Bestimmen Sie durch grafische bzw. numerische Integration den zurückgelegten Weg nach $t_2 = 5\,\text{s}$.

Ü 2.2-3 Ein Ball rollt auf einem waagerechten Tisch von der Höhe $h = 0{,}75\,\text{m}$ über die Kante und fällt zu Boden. Der Auftreffpunkt ist in horizontaler Richtung $s = 0{,}40\,\text{m}$ von der Kante entfernt. Wie groß war die Geschwindigkeit des Balls auf dem Tisch?

Ü 2.2-4 Ein Elektromotor läuft mit der Drehzahl $n_0 = 1\,400\,\text{min}^{-1}$. Nach dem Abschalten wird er mit konstanter Winkelverzögerung α abgebremst, bis er nach $N = 50$ Umdrehungen stehen bleibt. a) Wie groß ist die Winkelverzögerung α? b) Wie lange dauert der Bremsvorgang?

Ü 2.2-5 Ein Eisenbahnzug fährt mit gleichmäßiger Tangentialbeschleunigung auf einem Kreisbogen mit dem Radius $r = 2\,\text{km}$. Dabei legt er die Strecke $\Delta s = 1\,200\,\text{m}$ zurück. Zu Beginn der betrachteten Bewegung hat er die Geschwindigkeit $v_1 = 30\,\text{km/h}$, am Ende $v_2 = 100\,\text{km/h}$. a) Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang? b) Wie groß ist die Tangentialbeschleunigung? c) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung. d) Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung zu Beginn und am Ende des Vorgangs?

Ü 2.2-6 Die Erde benötigt für eine vollständige Umdrehung die Zeit $T = 86\,163\,\text{s}$ (einen Sternentag). a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω_E der Erde? b) Welche Richtung hat der Vektor $\boldsymbol{\omega}_\text{E}$? c) Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit an einem Ort mit dem Breitenwinkel φ? Berechnen Sie die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator und in Stuttgart mit $\varphi = 48°41'$ nördlicher Breite (Erdradius $R = 6\,370\,\text{km}$). d) Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung am Äquator und in Stuttgart?

2.3 Grundgesetze der klassischen Mechanik

2.3.1 Konzept der klassischen Dynamik

Die *Kinematik* (Abschn. 2.2) hat die Bewegung materieller Punkte geometrisch-analytisch beschrieben, ohne die Frage zu stellen: „Was ist die Ursache für die Bewegung?“ Die *Dynamik* untersucht die *Ursachen für die Bewegung* eines Körpers. Jeder Körper besteht aus Materie; er hat eine Masse und eine geometrische Ausdehnung, d. h. ein Volumen. Einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn die geometrische Ausdehnung des Körpers klein ist im Vergleich zu den Dimensionen (Abmessungen, Abstände), in denen sich der Körper bewegt. In höchster Idealisierung ist die Masse des Körpers in einem materiellen Punkt vereinigt, der keine räumliche Ausdehnung mehr hat. Mit der *Modellvorstellung des materiellen Punktes* werden einfachste Verhältnisse geschaffen, denn ein materieller Punkt kann *nicht rotieren* und sich *nicht verformen*.

Wie ein Körper ist auch ein materieller Punkt *Einwirkungen von außen* ausgesetzt; physikalisch bezeichnet man dies als die Einwirkung der Umgebung auf das System oder – noch allgemeiner – als die *Wechselwirkung zweier Systeme*. Die *Kraft* ist die physikalische Größe, welche die Einwirkung beschreibt, die den Bewegungszustand des Körpers ändert. Dabei werden Körper unterschiedlicher Masse durch die gleiche Kraft unterschiedlich beschleunigt. Begründet auf Erfahrung und durch kühne Extrapolation erfasste Newton die Wechselwirkungen zwischen beschleunigendem und beschleunigtem System und formulierte *drei Axiome zur Mechanik*, welche die Begriffe *Kraft* und *Masse* definieren, ihre Verknüpfung angeben und ein Maßsystem festlegen.

2.3.2 Die Newton’schen Axiome

In Tabelle 2.2 sind die drei Axiome in moderner Schreibweise zusammengefasst, wie sie I. Newton (1643 bis 1727) im Jahr 1687 veröffentlichte. Die Newton’schen Axiome beschreiben die *makroskopische Welt der klassischen Physik* exakt; sie versagen jedoch bei

der Beschreibung der mikroskopischen Welt der Atome (Quantenphysik, Abschn. 8.2) und bei Geschwindigkeiten, die nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c sind (Relativitätstheorie, Abschn. 10).

Das *erste Axiom* definiert ein *Bezugssystem*, in dem die drei Axiome gelten. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Mechanik nehmen ihre einfachste mathematische Form an, wenn sie für ein Bezugssystem aufgeschrieben werden, in dem die Geschwindigkeit eines Körpers ohne äußere Einwirkungen konstant ist. Man nennt solche Systeme *Inertialsysteme*.

Es gibt beliebig viele Inertialsysteme; sie alle haben die Eigenschaft, sich gegen den Fixsternhimmel geradlinig und gleichförmig zu bewegen. Absolute Ruhe lässt sich nicht feststellen, es gibt deshalb kein ausgezeichnetes Inertialsystem.

Die Erde rotiert relativ zum Fixsternhimmel, das Bezugssystem Erde stellt deshalb kein Inertialsystem dar. Ist die Erdrotation im Vergleich zum Zeitablauf eines Experiments vernachlässigbar langsam, dann ist ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem in sehr guter Näherung ein Inertialsystem.

Das *zweite Newton'sche Axiom* heißt *Aktionsprinzip*, weil es den Zusammenhang zwischen der Bewegungsänderung eines Körpers und der Einwirkung von Kräften herstellt. Newton verstand unter Bewegungsänderung nicht nur die Beschleunigung; seine mathematische Formulierung umfasste bereits den *Impuls* $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (Abschn. 2.5). Somit lässt sich das Aktionsgesetz schreiben:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.24}$$

Für den im täglichen Leben häufigen Fall einer konstanten Masse ergibt sich daraus das Newton'sche Grundgesetz

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}\,. \tag{2.25}$$

Wenn die Summe der äußeren Kräfte gleich null ist, dann ist auch die Beschleunigung null und damit die Geschwindigkeit konstant, entsprechend der Forderung des ersten Axioms.

Das *dritte Axiom*, das Axiom über die *Wechselwirkungen*, sagt aus, dass es eine einzelne, isolierte Kraft nicht gibt. Es wirkt immer ein Körper (oder ein System 1) auf einen zweiten Körper (oder System 2). Wird eine Systemgrenze vorgegeben, dann kann zwischen äußeren Kräften, die von einem Körper außerhalb des Systems herrühren, und inneren Kräften, die nur innerhalb des Systems wirken, unterschieden werden. Diese Systemgrenzen können nach Zweckmäßigkeit gewählt werden.

Das dritte Axiom setzt voraus, dass die *Kräfte gleichzeitig*, d. h. ohne Zeitverzögerung, wahrgenommen werden. Weil die Lichtgeschwindigkeit die Grenzgeschwindigkeit für die Ausbreitung eines Signals oder einer Information ist, dauert es eine endliche Zeitspanne, bis ein Körper die Änderung einer Kraftwirkung spürt, die von einem zweiten Körper ausgeübt wird. Für dieses Problem der Gleichzeitigkeit hat Einstein die Lösung in den Grundgesetzen der relativistischen Mechanik angegeben (Abschn. 10).

2.3.3 Masse

Trägheit ist der *Widerstand* eines Körpers gegen eine *Bewegungsänderung*. Das Maß für die Trägheit ist die *Masse*. Die Masse ist unabhängig vom Ort, an dem sich ein Körper befindet und in der klassischen Mechanik unabhängig vom Bewegungszustand des Körpers. Damit ist die Masse auch ein geeignetes Maß für die *Menge*, d. h. für die Anzahl der Teilchen (Atome, Moleküle) in einem Körper. Die *Addition von Massen* entspricht der *Addition von*

Tabelle 2.2 Die Newton'schen Axiome

Newton'sche Axiome	Formulierung	Beziehung
1. Axiom Trägheitsgesetz	Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung so lange bei, wie er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.	
2. Axiom Aktionsgesetz Grundgesetz der Mechanik	Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße, des Impulses $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, ist gleich der resultierenden Kraft $\boldsymbol{F}$. Um einen Körper konstanter Masse zu beschleunigen, ist eine Kraft $\boldsymbol{F}$ erforderlich, die gleich dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ ist.	allgemein: $\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$ speziell: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$
3. Axiom Wechselwirkungsgesetz actio = reactio	Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft $\boldsymbol{F}_{12}$, so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft $\boldsymbol{F}_{21}$; beide Kräfte haben den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.	$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

Mengen. Die Maßeinheit der Masse ist durch einen Eichkörper festgelegt (Abschn. 1.3).
Eine Möglichkeit zum Vergleich von Massen gibt das Newton'sche Aktionsgesetz. Man lasse auf zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 jeweils die gleiche Kraft wirken und bestimme experimentell die Beschleunigungen a_1 und a_2, die den beiden Körpern erteilt werden. Dann gilt im eindimensionalen Fall nach (2.25)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \,. \tag{2.26}$$

Damit ist das Verhältnis zweier Massen durch eine dynamische Messung bestimmbar.
Die physikalische Größe Masse hat außer der Eigenschaft Trägheit auch die Eigenschaft *Schwere.* Auf Körper im Wirkungsbereich der Riesenmassen kosmischer Körper (z. B. der Sonne oder der Erde) wirken *Gravitationskräfte* (Abschn. 2.10), die proportional zu den Massen der beteiligten Körper sind. Die Schwere einer Masse ist also ein Kennzeichen für die Kraft des Zentralgestirns auf diesen Körper. Experimentell lässt sich *kein Unterschied zwischen träger und schwerer Masse* nachweisen. Die Identität von träger und schwerer Masse ist die Grundlage für die Einstein'sche Relativitätstheorie (Abschn. 10).

2.3.4 Kraft

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Kraft $\boldsymbol{F}$ für Körper mit konstanter Masse proportional zur Momentanbeschleunigung $\boldsymbol{a}$. Die Kraft ist also eine vektorielle physikalische Größe, deren Richtung parallel zur Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ und deren Betrag $F = ma$ ist. Im SI-System ist die Einheit für die Kraft $1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = 1\,\mathrm{N}$ (Newton).
Für die *Addition von Kräften* und die *Zerlegung* einer Kraft in verschiedene Kraftrichtungen gelten die Regeln der *Vektorrechnung*. In Abb. 2.16 sind für die Addition von zwei Kräften und für die Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen die grafischen Lösungswege im *Kräfteparallelogramm* und die trigonome-

trischen Lösungen angegeben. Die Addition von mehr als zwei Kräften erfolgt zweckmäßigerweise durch die *Methode der Komponentenzerlegung* in einem kartesischen Koordinatensystem.

Ist die Beschleunigung eines Körpers $\boldsymbol{a} = 0$, so ist auch die resultierende Kraft auf den Körper nach dem Newton'schen Aktionsprinzip null. Dies ist die Bedingung des *statischen Kräftegleichgewichts*:

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots = 0\,. \qquad (2.27)$$

Körper fallen auf der Erde mit einer konstanten Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ (Abschn. 2.2.1.3). Die Ursache dieser gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Schwerkraft oder Gewichtskraft auf die Masse m der Körper. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom beträgt die Schwerkraft

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g} \qquad (2.28)$$

und wirkt in Richtung der Fallbeschleunigung (näherungsweise zum Erdmittelpunkt). Die Massenanziehung durch die Erdmasse ist die Ursache der Schwerkraft (Abschn. 2.10). Die Schwerkraft auf Körper an der Erdoberfläche führt bei Körpern auf einer *schiefen Ebene* mit dem Neigungswinkel ε gemäß Abb. 2.17 zu einer hangabwärts, parallel zur schiefen Ebene gerichteten beschleunigenden Kraft, der *Hangabtriebskraft* $\boldsymbol{F}_\mathrm{H}$, mit dem Betrag

$$F_\mathrm{H} = mg \sin\varepsilon \qquad (2.29)$$

und zu einer senkrecht auf die Ebene wirkenden Kraft, der *Normalkraft* $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$, mit dem Betrag

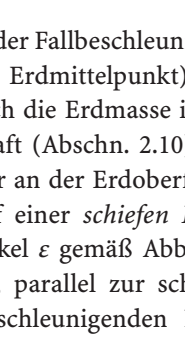
$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$	Kräfteparallelogramm	Kräfte	Richtungswinkel
Kräfteaddition; gegeben F_1, F_2, α, β		$F_x = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta$ $F_y = F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta$ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\beta-\alpha)}$	$\gamma = \arctan\dfrac{F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta}{F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta}$
Kräftezerlegung; gegeben F, γ, α, β oder F, γ, F_1, F_2		$F_1 = F\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)}$ $F_2 = F\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$	$\alpha = \gamma - \arccos\dfrac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2FF_1}$ $\beta = \gamma + \arccos\dfrac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2FF_2}$

Abb. 2.16 Kräfteaddition und Kraftzerlegung

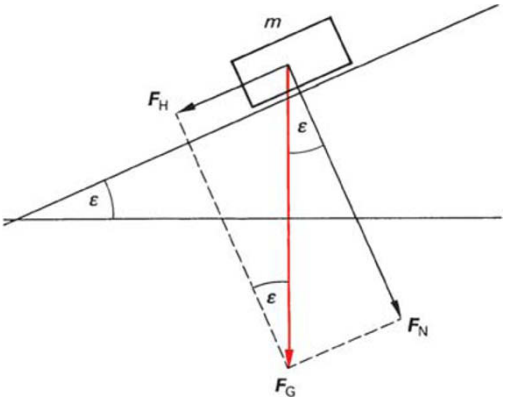


Abb. 2.17 Kräfte auf schiefer Ebene. ε Neigungswinkel

$$F_N = mg\cos\varepsilon\,. \tag{2.30}$$

Die beschleunigende Kraft, die einen Körper bei der gleichförmigen Kreisbewegung auf einer Kreisbahn hält und die Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{zp}$ nach (2.22) verursacht, ist nach dem Newton'schen Grundgesetz die *Zentripetalkraft*

$$\boldsymbol{F}_{zp} = -m\omega^2\boldsymbol{r}\,. \tag{2.31}$$

Sie ist zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet.

Kräfte verursachen nicht nur beschleunigte Bewegungen (dynamische Kraftwirkung), sondern ändern auch die geometrische Form von Körpern. Umgekehrt üben deformierte Körper Kräfte aus, die *elastischen Kräfte* oder *Federkräfte*. Abbildung 2.18 gibt hierzu Erläuterungen. Nach dem dritten Newton'schen Axiom ist die der Deformation entgegenwirkende, elastische Kraft $\boldsymbol{F}_{el}$ entgegengesetzt gleich der von außen wirkenden Kraft $\boldsymbol{F}_a$; die Längenänderung $\boldsymbol{s}$ ist also ein Maß für die verursachende Kraft.

Alle *Festkörper* zeigen innerhalb maximaler Deformationsgrenzen ein *elastisches Verhalten* (Abschn. 2.11), das durch das *Hooke'sche Gesetz* (Abb. 2.18b) beschrieben wird:

$$\boldsymbol{F}_{el} = -k\,\boldsymbol{s}\,. \tag{2.32}$$

Die Proportionalitätskonstante k wird als *Federkonstante* oder Richtgröße bezeichnet.

Große elastische Längenänderungen, hervorgerufen schon durch kleine Kräfte, weisen Metallfedern auf; Federwaagen werden deshalb in der Praxis als Kraftmesser eingesetzt. Abbildung 2.19 zeigt eine Übersicht über den Aufbau von Kraftmessern entsprechend DIN EN ISO 376 51 301 und den VDI/VDE/GESA-Richtlinien 2635 und VDI/VDE 2637.

Werden mehrere Federn gekoppelt, so ist die *resultierende Richtgröße* k_{res} bei der *Parallelschaltung* (verschiedene Kräfte, gleicher Weg)

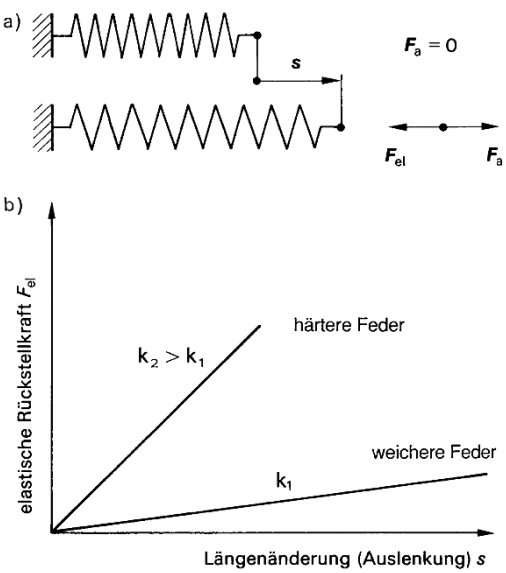


Abb. 2.18 Elastische Deformation **a**) äußere Kraft F_a und elastische Rückstellkraft F_{el}, **b**) Federkonstante k

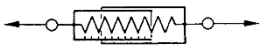
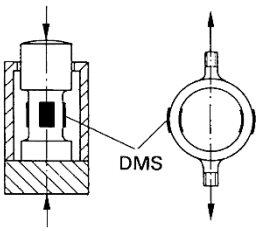
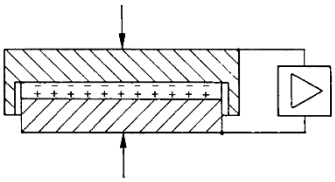
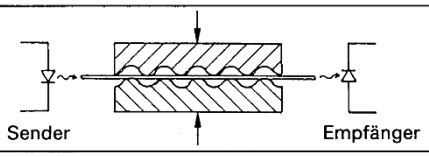
Sensorelement	Aufbau der Messapparatur	Messprinzip
Feder		Verlängerung der Feder ist proportional zur Kraft (Hookesches Gesetz).
Dehnungs-mess-streifen		Deformationen des Verformungskörpers werden auf die aufgeklebten Dehnungsmessstreifen (DMS) übertragen. Der elektrische Widerstand R der DMS ändert sich proportional zur Dehnung ε. Die Widerstandsänderung wird in einer Wheatstone'schen Brückenschaltung gemessen: $\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$.
piezoelektrischer Kristall		Kristalle ohne Symmetriezentrum (z. B. Quarz) zeigen den piezoelektrischen Effekt. Bei Belastung treten an den Kristalloberflächen elektrische Ladungen auf, die mit einem Ladungsverstärker nachgewiesen werden. Die Ladungsmenge ist proportional zur Kraft $\Delta Q \sim F$.
Glasfaser		Bei Belastung verbiegt sich die Glasfaser. Dadurch werden Lichtwellen vom Faserkern in den -mantel ausgekoppelt (Leckwellen), und das Empfängersignal geht zurück.

Abb. 2.19 Methoden der Kraftmessung

$$F_1/s + F_2/s + \ldots = k_1 + k_2 + k_3 \ldots = k_{\text{res, p}}$$

und bei der *Serienschaltung* (verschiedene Wege, gleiche Kraft)

$$s_1/F + s_2/F + \ldots = 1/k_1 + 1/k_2 + \ldots = 1/k_{\text{res, s}} \,.$$

Unter realen Bedingungen wird die Bewegung von Körpern durch *Reibung* an der Unterlage, der umgebenden Flüssigkeit oder dem umgebenden Gas beeinflusst. Nach dem Newton'schen Aktionsprinzip ist die Ursache der Bewegungsänderung durch Reibung eine Kraft, die *Reibungskraft* $\boldsymbol{F}_\text{R}$. Die Richtung der Reibungskraft $\boldsymbol{F}_\text{R}$ ist der Bewegungsrichtung, also der Momentangeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Körpers stets entgegengerichtet: $\boldsymbol{F}_\text{R} \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}$. Der Betrag von F_R setzt sich je nach Situation in unterschiedlicher Weise aus den drei Grenzfällen in Abb. 2.20 zusammen.

Die *Festkörperreibung* hängt von der Oberflächenbeschaffenheit der reibenden Körper ab; die Reibungszahlen für die *Haft- und Gleitreibungskraft* unterscheiden sich stark. In Tabelle 2.3 sind die Werte einiger Stoffpaare zusammengestellt. Der Laufwiderstand beim Abrollen eines Rades auf einer Unterlage hängt nicht nur von der Verformung des Bodens durch die Normalkraft und vom Raddurchmesser ab, sondern auch noch von den Reibungsverhältnissen in der Radnabe.

Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist die Laufwiderstandskraft näherungsweise proportional zur Normalkraft. Die Proportionalitätskonstante ist die *Rollreibungszahl* μ_R. Bei Ei-

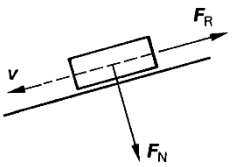
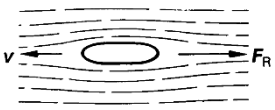
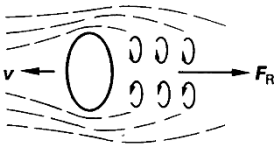
	äußere Reibung Festkörperreibung	innere Reibung Flüssigkeitsreibung	turbulente Reibung Luftreibung
Reibungskraft			
Ansatz	$F_R = \mu F_N$	$F_R = d v$	$F_R = b v^2$
Proportionalitätsfaktor	μ: Reibungszahl μ ist unabhängig von der Kontaktfläche zwischen Körper und Unterlage; hängt ab von der Kontaktgeometrie und den Materialien von Körper und Unterlage.	d: Zähigkeitskoeffizient d hängt von der Form des Körpers und der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Es wird laminare Strömung vorausgesetzt.	b: Luftreibungskoeffizient b hängt von der Anströmfläche und der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers sowie von der Dichte und Art des strömenden Mediums ab.
Spezialfälle	μ_R: Rollreibung μ_G: Gleitreibung μ_H: Haftreibung	$d = 6\pi\eta r$ laminare Umströmung einer Kugel vom Radius r in einem Medium mit der Zähigkeit η	$b = \frac{1}{2} c_W \varrho A$ Körper mit Anströmfläche A und dem Widerstandsbeiwert c_W im Medium der Dichte ϱ

Abb. 2.20 Reibungskräfte

Tabelle 2.3 Haft- und Gleitreibungszahlen (μ_H und μ_G)

Stoffpaar	μ_H	μ_G
Stahl auf Stahl	0,15	0,12
Stahl auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,5
Stahl auf Eis	0,027	0,014
Holz auf Holz	0,65	0,2 bis 0,4
Holz auf Leder	0,47	0,27
Gummi auf Asphalt	0,9	0,85
Gummi auf Beton	0,65	0,5
Gummi auf Eis	0,2	0,15

senbahnrädern ist $\mu_R = 0{,}002$; Straßenfahrzeuge haben Werte von etwa $\mu_R = 0{,}02$ bis $\mu_R = 0{,}05$.

Die Reibungskraft bei der Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten und Gasen hängt von der Dichte und Viskosität der Medien, der Geometrie (Stromlinienform, Spoiler) der Körper und dem Strömungstyp (laminar, turbulent) ab (Abschn. 2.12.2.3). In laminaren Strömungen ist der Strömungswiderstand F_R proportional zur Geschwindigkeit: $F_R \sim v$. Kommt es durch die Reibungskraft an der Körperoberfläche in der Strömung zu Rotationsbewegungen (Wirbel), so nimmt der Strömungswiderstand erheblich zu und die Reibungskraft ist $F_R \sim v^2$. Nur Bewegungen mit Festkörperreibung verlaufen gleichmäßig beschleunigt oder verzögert; dominieren die anderen Reibungsarten, dann sind die Bewegungsgesetze kompliziert.

Zur Übung

Ü 2.3-1 Zwei Körper (Masse $m_1 < m_2$) hängen an einem dünnen, masselosen Faden, der über eine masselose Rolle läuft. Zwischen der Rolle und dem Faden soll es keine Reibung geben. a) Wie groß ist die Beschleunigung a der beiden Körper? b) Wie groß ist die Kraft F_F im Faden?

Ü 2.3-2 Ein Radiergummi ($m = 40$ g) liegt auf einer Metallscheibe (Radius $r = 20$ cm). Die Scheibe rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Haft-

reibungszahl zwischen Scheibe und Radiergummi ist $\mu_H = 0{,}5$.
a) Welche Kräfte wirken auf den Radiergummi (Skizze)? b) Welche Kraft oder welche Kräfte bringt die Zentripetalkraft auf den Radiergummi auf? c) Der Radiergummi wird $r_1 = 5$ cm vom Drehzentrum positioniert. Wie groß muss die Drehzahl n_1 mindestens sein, damit der Radierer zu rutschen anfängt? d) Die Scheibe rotiere mit der Drehzahl $n_2 = 70\ \text{min}^{-1}$. In welchem Radius-Bereich bleibt der Radiergummi liegen?

Ü 2.3-3 Aus einem Maschinengewehr treten in einer Sekunde sechs Geschosse (Masse jeweils $m = 25$ g) aus. Die Geschwindigkeit der Kugeln ist $v = 800\ \text{m s}^{-1}$.
a) Die Kugeln treffen auf einen fest im Boden verankerten großen Holzklotz und bleiben in ihm stecken. Welche mittlere Kraft F_{m1} wird auf den Klotz ausgeübt? b) Welche mittlere Kraft F_{m2} ist aufzuwenden, um einen Rückstoß des Gewehres zu unterdrücken? c) Angenommen, die Kugeln bleiben nicht stecken; sie sollen abprallen und mit einem Zehntel ihrer Anfangsgeschwindigkeit auf der alten Flugbahn zurückfliegen. Welche mittlere Kraft F_m wird unter diesen Bedingungen auf den Klotz ausgeübt?

Ü 2.3-4 Auf einen Körper (Masse $m = 2{,}0$ kg) wirken drei Kräfte ($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$). Unter ihrem Einfluss bewegt er sich mit der konstanten Beschleunigung $\boldsymbol{a} = 1\ \text{ms}^{-2}$ nach Süden. Die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ weist nach Norden, ihr Betrag ist $F_1 = 3{,}0$ N. Die Kraft $\boldsymbol{F}_2$ weist nach Osten, ihr Betrag ist $\boldsymbol{F}_2 = 2{,}0$ N. Wie groß ist $\boldsymbol{F}_3$ nach Betrag und Richtung?

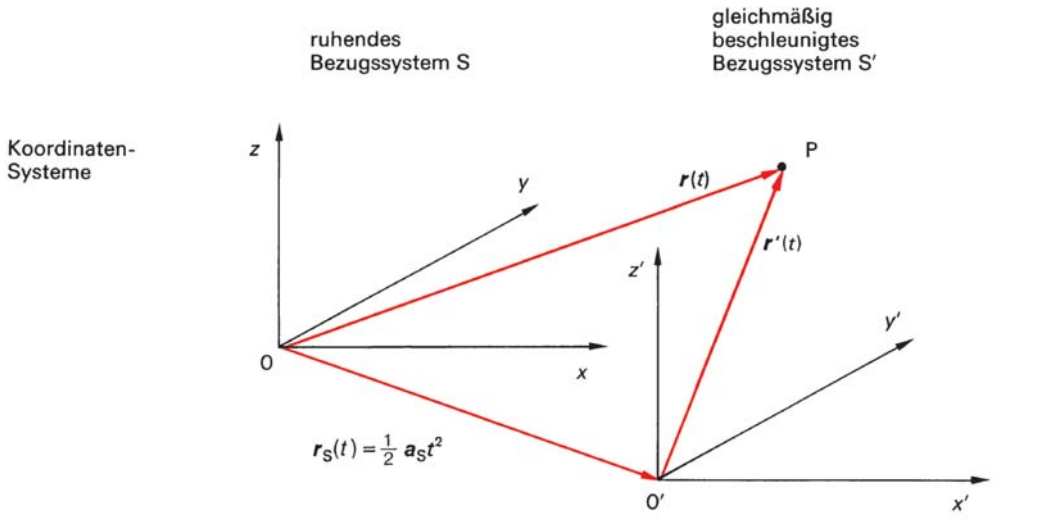
Ü 2.3-5 Eine Aufzugskabine hat die Masse $m_A = 1\,200$ kg, die Masse des Gegengewichts ist $m_G = 1\,100$ kg. In der Kabine befindet sich eine Person (Masse $m_M = 75$ kg).
a) Mit welcher Beschleunigung a fiele die Kabine, wenn die Bremseinrichtungen versagten? (Vereinfachend seien z. B. die Trägheit der Seiltrommeln und die Reibung vernachlässigt.) b) Welches wäre unter diesen Fallbedingungen das scheinbare Gewicht der Person? c) Nach einer Fallhöhe von $h = 15$ m wird die Kabine durch Federn aufgefangen und nach einem Bremsweg von $s = 20$ cm zum Stillstand gebracht. Welche mittlere Kraft F_m spürt die Person beim Bremsvorgang in den Beinen?

Ü2.3-6 Eine schwere Last soll an einem Stahlseil hochgezogen werden. In Ruhestellung zeigt ein Kraftmesser eine Gewichtskraft $F_G = 8 \cdot 10^4$ N an; die zulässige Höchstbelastung des Seils ist $F_{max} = 10^5$ N. Welches ist die größte erlaubte Beschleunigung beim Hochziehen der Last?

2.4 Dynamik in bewegten Bezugssystemen

2.4.1 Relativ zueinander geradlinig bewegte Bezugssysteme

Betrachtet sei die Bewegung zweier Bezugssysteme gegeneinander, wobei eines der beiden Systeme vereinfachend als ruhend (Inertialsystem) angenommen wird. Die Koordinaten des materiellen Punkts P im ruhenden System S sind x, y, z, die im bewegten System S′ dagegen x', y', z'. Zur Zeit $t = 0$ sollen die beiden Systeme zusammenfallen. Für den Fall, dass die Relativbewegung der beiden Bezugssysteme gleichmäßig beschleunigt, a_S also konstant ist, sind die sich ergebenden Transformationen der Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Abb. 2.21 angegeben.
In der klassischen Physik wird der Zeitmaßstab in beiden Bezugssystemen als gleich angenommen, die Zeitkoordinaten also mit $t = t'$ transformiert und damit eine absolute Zeit vorausgesetzt. Wie die Relativitätstheorie (Abschn. 2.10) zeigt, gilt diese Annahme nur in der klassischen Näherung, dass die Relativgeschwindigkeit v_S im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c klein ist.
Ist die Geschwindigkeit des bewegten Systems v_S = konstant, dann ist die Beschleunigung $a_S = 0$ und damit $a = a'$; die Beschleunigung eines Körpers ist also in beiden Systemen gleich. In diesem Spezialfall *Galilei-Transformation* ist auch die Kraft, die eine Beschleunigung bewirkt, in beiden Systemen gleich. Sämtliche Gleichungen der Mechanik haben im bewegten Bezugssystem dieselbe Struktur wie im ruhenden, die Gesetze sind



Ortsvektoren	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_S t^2$	$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_S t^2$
Geschwindigkeitsvektoren	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{a}_S t$	$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}_S t$
Beschleunigungsvektoren	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_S$	$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_S$

Abb. 2.21 Galilei-Transformation in gleichmäßig gegeneinander beschleunigten Bezugssystemen

Galilei-invariant. Werden beispielsweise in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug Fallexperimente durchgeführt, dann sind die Messergebnisse, wie z. B. Fallzeit und Endgeschwindigkeit, dieselben wie auf dem Bahnsteig.

Beispiel

2.4-1 Es soll gezeigt werden, dass der Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 Galilei-invariant ist, d. h. nicht von der Relativbewegung zweier Bezugssysteme gegeneinander abhängt. Vereinfachend sollen die beiden Punkte in der x, y-Ebene liegen und sich das System S' längs der x-Richtung bewegen.

Lösung

Die Koordinaten der beiden Punkte sind

im ruhenden System S: $P_1(x_1, y_1, 0)$ und $P_2(x_2, y_2, 0)$,

im bewegten System S′: $P_1(x'_1, y'_1, 0)$ und $P_2(x'_2, y'_2, 0)$.

Für die Abstandsquadrate ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} s'^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 \\ &= [(x_2 - v_S t) - (x_1 - v_S t)]^2 + [y_2 - y_1]^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = s^2 . \end{aligned}$$

Ein Beobachter im bewegten Koordinatensystem S′ misst also den gleichen Abstand wie ein Beobachter im ruhenden System S. Bewegt sich das System S′ gegenüber S beschleunigt mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a}_S$, dann gilt nach Abb. 2.21 für die Beschleunigung im bewegten System $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_S$. In jedem System wird ein Beobachter die Beschleunigung auf die Wirkung einer Kraft zurückführen: im Bezugssystem S auf $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ und in S′ auf $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{a}_S$. Die Differenz der beiden Kräfte ist die *Trägheitskraft* oder *Scheinkraft*

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{S} \,. \tag{2.33}$$

Diese Trägheitskraft muss zusätzlich zu den *realen physikalischen* Kräften, wie beispielsweise der Gravitation oder elektrostatischen Kraft, die im ruhenden System S die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ verursachen, im beschleunigten System S′ in Rechnung gesetzt werden, damit auch in S′ das Newton'sche Grundgesetz $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$ angewendet werden kann.

Prinzip von d'Alembert

Kräfte auf einen Körper bewirken eine Beschleunigung. Schreibt man das Newton'sche Aktionsgesetz (2.25) um, so lautet es

$$\boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}) = 0 \,. \tag{2.34}$$

J. d'Alembert (1717 bis 1783) interpretierte den Ausdruck $(-m\boldsymbol{a})$ als die von (2.33) bekannte Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{S}$.
Mit der d'Alembert'schen Trägheitskraft können dynamische Probleme auf statische zurückgeführt werden. Hierbei wird zusätzlich zu realen physikalischen Kräften, die auf einen Körper wirken und durch ihre Resultierende $\boldsymbol{F}_\mathrm{res}$ beschrieben werden, eine Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ eingeführt. Im beschleunigten System S′ ist der Körper im statischen Gleichgewicht, wenn gemäß (2.27) die Summe aller Kräfte (einschließlich der Trägheitskraft) null ist:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{res} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t} = 0 \,. \tag{2.35}$$

Beispiel

2.4-2 Welche Kräfte wirken auf eine Person, die sich in einem an der Erdoberfläche frei fallenden Aufzug befindet?

Lösung

Es wird ein ruhendes, mit der Erde verbundenes Koordinatensystem gewählt, in dem der Vektor der Fallbeschleunigung nach unten zeigt. In diesem ruhenden System ist die Kraft auf die Person gleich der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$.
Das beschleunigte Koordinatensystem ist fest mit der Aufzugskabine verbunden. Dieses System beschleunigt mit $\boldsymbol{a}_\mathrm{s} = \boldsymbol{g}$ gegen das ruhende System. Deshalb wirkt auf die Person im beschleunigten System zusätzlich zur Gravitationskraft noch die Trägheitskraft
$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{g}$.

Für die Kraft im beschleunigten System der Aufzugskabine gilt

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t} = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{g} = 0 \,.$$

Der beschleunigte – also mitfallende – Beobachter spürt keine resultierende Kraft, er fühlt sich *kräftefrei*! – Auf dieselbe Weise entsteht die Kräftefreiheit in Raumstationen.

2.4.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme

In rotierenden Bezugssystemen treten zusätzlich zu den realen physikalischen Kräften weitere Trägheits- oder Scheinkräfte auf, die der mitbewegte Beobachter benötigt, um die Beschleunigung eines Körpers erklären zu können: die *Zentrifugalkraft* und die *Coriolis-Kraft* (G. G. Coriolis, 1792 bis 1843).
Fallen die Nullpunkte 0 des ruhenden Systems S und des mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierenden Systems S′ zusammen, dann sind die Abstände $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ vom Nullpunkt in beiden Koordinatensystemen gleich:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' &= x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \\ &= x'\,\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \,.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Dabei sind $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ die Einheitsvektoren des ruhenden Koordinatensystems und $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ und $\boldsymbol{k}'$ diejenigen des rotierenden.

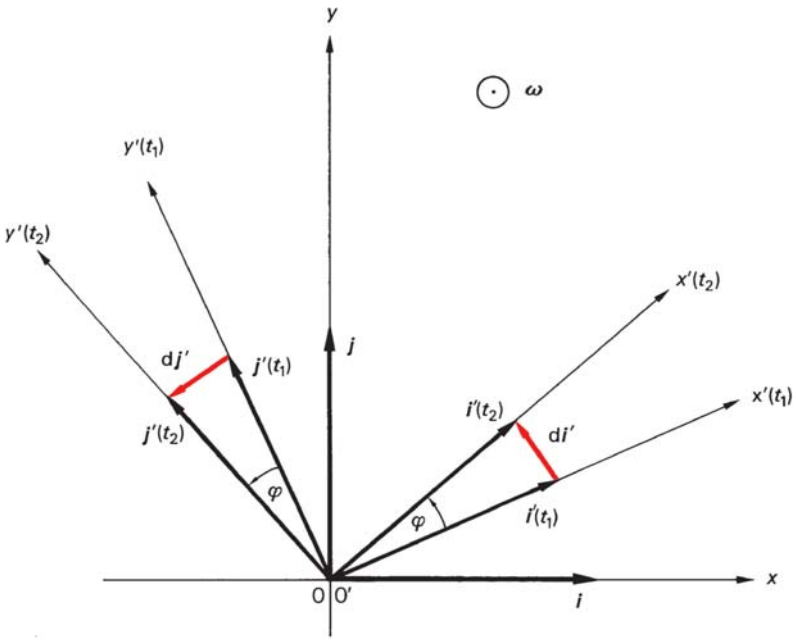


Abb. 2.22 Rotierendes Koordinatensystem

Abbildung 2.22 zeigt den grafisch leichter darstellbaren Fall einer Rotation, bei der die z- und z'-Achsen zusammenfallen und die z-Achse Rotationsachse ist.

Die Einheitsvektoren im rotierenden Koordinatensystem ändern ihre Richtung relativ zum ruhenden und sind zeitlich nicht konstant; es ist daher

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}' + x'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} .$$

Im rotierenden System wird die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'$ gemessen. Für die zeitlichen Änderungen der Einheitsvektoren gelten nach Abb. 2.22

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}' \qquad \text{und}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}' .$$

Entsprechend ist im dreidimensionalen Fall

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}' .$$

Zwischen der im ruhenden Koordinatensystem gemessenen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\boldsymbol{i} + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)\boldsymbol{j}$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ des rotierenden Systems besteht der Zusammenhang

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} . \qquad (2.37)$$

Eine nochmalige Differentiation der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ergibt die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$.

Wird diese Differentiation nach dem Muster der Differentiation von $\boldsymbol{r}$ zur Herleitung von (2.37) ausgeführt, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} . \qquad (2.38)$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ ist die Ableitung im Inertialsystem, $\mathrm{d}'\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ im rotierenden System. Der erste Teil in (2.38) beschreibt die Geschwindigkeitsänderung im rotierenden System, der zweite Teil kommt durch die Drehbewegung des Koordinatensystems S′ zustande. Gleichung (2.37) in (2.38) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,.\end{aligned}$$

In einem rotierenden Koordinatensystem nach Abb. 2.22 ist die Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,. \quad (2.39)$$

Wird der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ in eine Komponente $\boldsymbol{R}$ senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R} = 0$) und eine Komponente $\boldsymbol{A}$ parallel dazu ($\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} = 0$) zerlegt, so wird $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R} = -\omega^2\boldsymbol{R}$. Somit ist die Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega} + \omega^2\boldsymbol{R}\,. \quad (2.40)$$

Im gleichförmig rotierenden Bezugssystem treten also zwei zusätzliche Beschleunigungen auf, nämlich die *Coriolis-Beschleunigung*

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{c} = -2\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \quad (2.41)$$

senkrecht auf der Bewegungsrichtung $\boldsymbol{v}'$ und der Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ und die *Zentrifugalbeschleunigung*

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{zf} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega} = \omega^2\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{a}_\mathrm{zp} \quad (2.42)$$

senkrecht zur Drehachse. Die Zentrifugalbeschleunigung ist betragsmäßig gleich groß wie die Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_\mathrm{zp}$ nach (2.22), dieser aber entgegengesetzt gerichtet.

Beispiel

2.4-3 Wegen der Eigenrotation der Erde addiert sich zur Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}$ die ortsabhängige Zentrifugalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_\mathrm{zf}$. Deshalb ist die effektive Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}_\mathrm{eff}$ nach Betrag und Richtung abhängig von der geografischen Breite ε. Wie groß ist der Korrekturterm Δg für den Betrag der Fallbeschleunigung?

Lösung

Mit den Bezeichnungen in Abb. 2.23 gilt $R = r_\mathrm{E}\cos\varepsilon$ und mit (2.42) und (2.21)

$$a_\mathrm{zf} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}}\right)^2 r_\mathrm{E}\cos\varepsilon$$

mit T_E als der Periodendauer. Aus Abb. 2.23 folgt durch Anwendung des Kosinussatzes für die effektive Erdbeschleunigung

$$g_\mathrm{eff} = g\sqrt{1 + (a_\mathrm{zf}/g)^2 - 2(a_\mathrm{zf}/g)\cos\varepsilon}\,.$$

Der Korrekturterm für den Betrag der Erdbeschleunigung ist $\Delta g = g - g_\mathrm{eff}$. Mit $r_\mathrm{E} = 6\,370$ km und $T_\mathrm{E} = 23{,}93$ h (Sternentag) errechnet sich der Korrekturterm bei der mittleren geografischen Breite $\varepsilon = 50°$ der Bundesrepublik Deutschland zu $\Delta g\,(50°) = 0{,}014\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

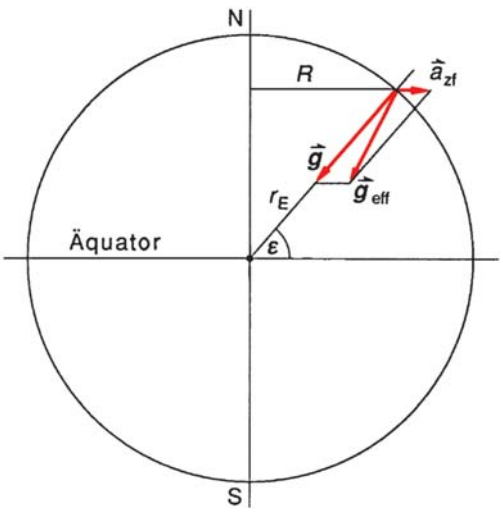


Abb. 2.23 Zu Beispiel 2.4-3

Ein Lot zeigt also nicht zum Massenmittelpunkt der Erde, sondern nach Abb. 2.23 in Richtung $\boldsymbol{g}_{\text{eff}}$.

Nach dem Newton'schen Grundgesetz führen die Beschleunigungen nach (2.41) und (2.42) im rotierenden Bezugssystem zu zwei Trägheitskräften, der *Zentrifugalkraft*

$$\boldsymbol{F}_{\text{zf}} = m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{\omega} = m\,\omega^2 \boldsymbol{R} \qquad (2.43)$$

und der *Coriolis-Kraft*

$$\boldsymbol{F}_{\text{C}} = 2m\,\boldsymbol{v}' \times \omega\,. \qquad (2.44)$$

Die Coriolis-Kraft hängt nicht vom Ort $\boldsymbol{r}'$ des materiellen Punktes ab und tritt immer auf, wenn der $\boldsymbol{\omega}$-Vektor nicht parallel zum Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}'$ verläuft. Die Coriolis-Kraft ist null, wenn die Relativbewegung parallel zur Drehachse erfolgt.

Alle mit der Erde starr verbundenen Koordinatensysteme sind wegen der Rotation um die Erdachse streng genommen keine Inertialsysteme. Relativbewegungen auf der Erdoberfläche erfolgen in einer Tangentialebene an die Erdkugel, wie Abb. 2.24 zeigt. Auf der Nordhalbkugel bewirkt die Coriolis-Kraft für alle nicht geführten Bewegungen eine Abweichung nach rechts.

Die Rotation der Erde lässt sich mit dem Foucault'schen Pendel nachweisen. Wegen der Coriolis-Kraft dreht sich die Schwingungsebene des Pendels im rotierenden System. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Erde unter dem schwingenden Pendel wegdreht, ist gleich der Azimutalkomponente ω_{a} der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung am Ort der geografischen Breite ε:

$$\omega_{\text{a}} = \frac{2\pi}{T_{\text{E}}} \sin\varepsilon\,.$$

Bei $\varepsilon = 50°$ beträgt die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{a}} = 11{,}5\,°/h$.

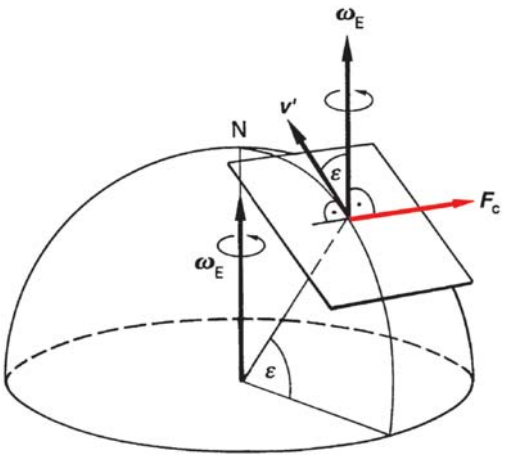


Abb. 2.24 Coriolis-Kraft F_c auf der Nordhalbkugel der Erde.
v' Geschwindigkeit, ε nördliche Breite, ω_E Winkelgeschwindigkeit

Auch bei atmosphärischen Strömungen macht sich die Coriolis-Kraft bemerkbar: Die Bahnen der Hoch- und Tiefdruckgebiete sind (spiralförmig) gekrümmt. Bei Drehbewegungen von Maschinenteilen mit großen Winkel- und Arbeitsgeschwindigkeiten kann sich die Coriolis-Kraft deutlich auf die Beanspruchung von Lagern und Führungen auswirken.

Im Vergleich zu den anderen, die Bewegung beeinflussenden Kräften, wie z. B. die Gravitationskraft, die Antriebskraft oder der Fahrwiderstand, ist die Coriolis-Kraft in der Regel vernachlässigbar.

Beispiel

2.4-4 Ein Fahrzeug mit der Masse $m = 1\,000$ kg fährt mit der Geschwindigkeit $v' = 72$ km/h von Süden nach Norden. Wie groß ist bei der geografischen Breite $\varepsilon = 50°$ Nord die Coriolis-Kraft und die Coriolis-Beschleunigung ($T_{\text{E}} \approx 24$ h)?

Lösung

Nach (2.44) ist die Coriolis-Kraft

$$F_{\text{c}} = 2\,m\,v'\omega_{\text{E}} \sin(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{\omega})$$
$$= 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot \sin 50°$$
$$= 2{,}2 \text{ N};$$

sie wirkt nach Osten.

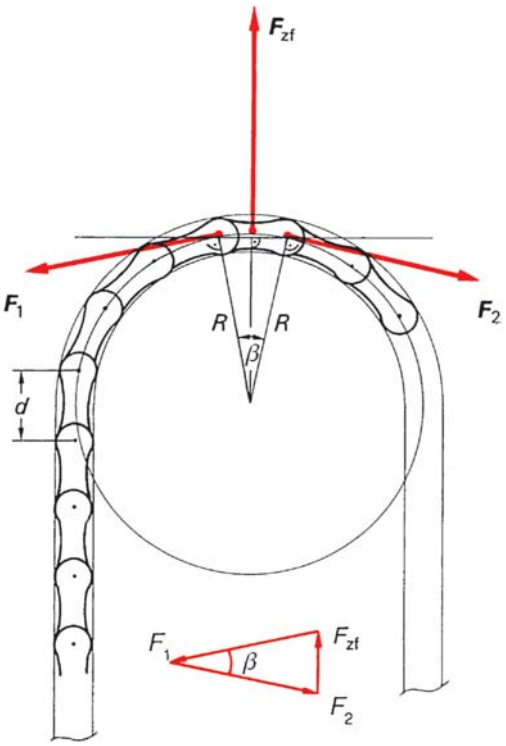


Abb. 2.25 Zu Ü 2.4-4

Aus (2.41) und (2.44) ergibt sich für die Coriolis-Beschleunigung $a_c = F_c/m = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

Zur Übung

Ü 2.4-1 An einem Ort der geografischen Breite $\varepsilon = 50°$ fällt ein Körper mit der Masse $m = 10$ kg mit der Geschwindigkeit $v' = 100$ m/s auf die Erdoberfläche. Berechnen Sie für den Aufprall nach Betrag und Richtung jeweils die Zentrifugalkraft und die Coriolis-Kraft.

Ü 2.4-2 Wie groß ist die Coriolis-Beschleunigung für ein Flugzeug, das horizontal über einen Ort der geografischen Breite $\varepsilon = 50°$ in jeweils eine der vier Himmelsrichtungen fliegt?

Ü 2.4-3 Um die Rotation der Erde zu demonstrieren, führt man in einem Bergwerksschacht folgenden Versuch aus: Man hängt ein langes Lot ($l = 50$ m) auf und markiert den Endpunkt des Lots auf einem horizontalen Messtisch. Danach lässt man vom Aufhängepunkt des Lots aus eine kleine Kugel fallen und beobachtet den Auftreffpunkt auf der Platte.

a) Wodurch ist die Richtung des Lots an einem Ort mit $\varepsilon = 50°$ nördlicher Breite bestimmt; b) In welche Himmelsrichtung wird die fallende Kugel abgelenkt, und wie weit entfernt ist der Auftreffpunkt der Kugel vom Endpunkt des Lots?

Ü 2.4-4 Bei einem Kettenantrieb entsprechend Abb. 2.25 werden die Kettengliederbolzen bei der Kettenumlenkung durch die Zentrifugalkraft $\boldsymbol{F}_{zf}$ belastet. Wie groß ist die daraus bedingte Zugkraft F, wenn das Kettenglied die Masse $m = 4$ g und den Bolzenabstand $d = 12{,}6$ mm hat, der Kettenradius $R = 116$ mm beträgt und sich das Kettenrad mit der Drehzahl $n = 3\,500$ min^{-1} dreht?

2.5 Impuls

2.5.1 Impuls eines materiellen Punktes

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ändert sich der Bewegungszustand eines Körpers unter dem Einfluss einer Kraft; seine Momentangeschwindigkeit erhöht oder erniedrigt sich. Nach der Newton'schen Formulierung (2.24) ist die Bewegungsgröße eines Körpers der *Impuls*:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \,. \tag{2.45}$$

Die abgeleitete Einheit des Impulses ist $1\ \mathrm{kgms^{-1}} = 1$ Ns.
Der Impuls $\boldsymbol{p}$ ändert sich unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}$ gemäß

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{2.24}$$

Die Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses.

Die Wirkung einer Kraft $\boldsymbol{F}$ auf einen Körper im Zeitintervall Δt wird als *Kraftstoß* bezeichnet.

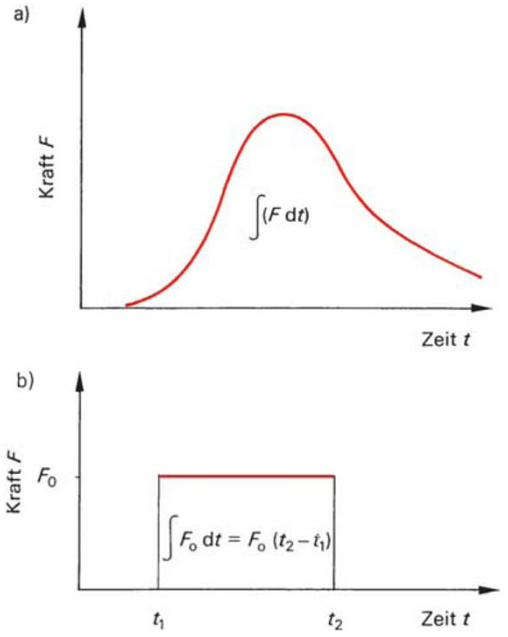


Abb. 2.26 Kraftstöße mit **a**) zeitabhängigem Kraftverlauf und **b**) zeitlich konstanter Kraft

Dieser führt zu einer Änderung des Impulses $\boldsymbol{p}$ eines materiellen Punktes mit der konstanten Masse m. Gleiche Kraftstöße führen zu gleichen Impulsänderungen; die Geschwindigkeitsänderungen sind jedoch unterschiedlich und hängen von der Masse des Körpers ab. Der *Kraftstoß*

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta\boldsymbol{p} \qquad (2.46)$$

ist gleich dem Zeitintegral der Kraft und gleich der Impulsänderung des materiellen Punktes. Im Allgemeinen hängt die wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ von der Zeit ab, wie es in Abb. 2.26 zum Ausdruck kommt. Ist die Kraft jedoch während der Kontaktzeit konstant, dann vereinfacht sich (2.46) zu

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t_2 - t_1) = \boldsymbol{F}\Delta t\,. \qquad (2.47)$$

Beispiel

2.5-1 Beim Minigolfspiel wird ein ursprünglich ruhender Ball der Masse $m = 0{,}1$ kg weggeschlagen. Der zeitliche Verlauf der vom Schläger auf den Ball ausgeübten Kraft ist näherungsweise eine Dreiecksfunktion entsprechend Abb. 2.27. Mit welcher Geschwindigkeit v_e bewegt sich der Ball fort?

Lösung

Nach (2.46) ist der ausgeübte Kraftstoß gleich der Impulsänderung. Weil der Ball anfangs in Ruhe war, ist der Anfangsimpuls null. Aus dem Endimpuls lässt sich bei bekannter Masse sofort die Endgeschwindigkeit angeben:

$$\int_0^{8\,\mathrm{ms}} F(t)\,\mathrm{d}t = mv_\mathrm{e} - 0\,.$$

Die Fläche unter der Dreiecksfunktion repräsentiert das Integral; also errechnet man

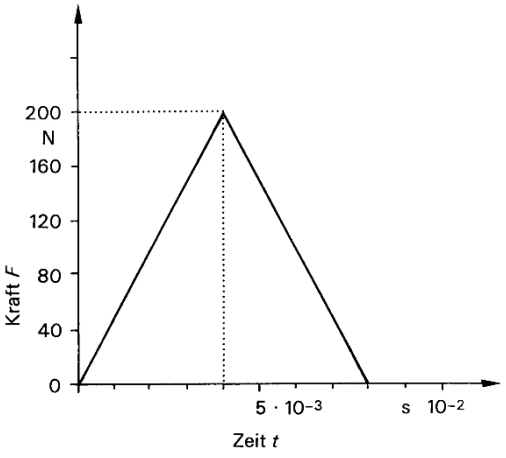


Abb. 2.27 Zu Beispiel 2.5-1

$$\int_0^{8\,\mathrm{ms}} F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 200\,\mathrm{N}\cdot 8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = 0{,}80\,\mathrm{N\,s},$$

$$v_\mathrm{e} = \frac{0{,}80\,\mathrm{kg\,m/s}}{0{,}1\,\mathrm{kg}} = 8{,}0\,\mathrm{m/s}\,.$$

2.5.2 Impuls eines Systems materieller Punkte

Bisher wurde ein einzelner *materieller Punkt* betrachtet. Kräfte, die auf ihn wirken, müssen notwendigerweise von außen kommen. Im Folgenden wird ein *System* betrachtet, das aus mehreren materiellen Punkten aufgebaut ist. Zu den Kräften, die von außen, also über die Systemgrenze, an den materiellen Punkten des Systems angreifen, kommen noch innere Kräfte, die zwischen den materiellen Punkten innerhalb des Systems wirken. Das System ist ein abgeschlossenes System, wenn nur innere Kräfte wirken.

2.5.2.1 Impulssatz

Es liege ein abgegrenztes System materieller Punkte vor, das insgesamt n Teilchen enthalte, deren Koordinaten $\boldsymbol{r}_\mathrm{k}(t)$ von einem beliebigen Koordinatennullpunkt 0 aus gemessen werden, wie es Abb. 2.28 verdeutlicht. Auf jeden Punkt k des Systems wirken eine *äußere* Kraft $\boldsymbol{F}^\mathrm{a}_\mathrm{k}$, die ihren Ursprung außerhalb des Systems hat, und *innere* Kräfte $\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_\mathrm{jk}$, die von der Wechselwirkung des k-ten materiellen Punktes mit allen übrigen materiellen Punkten j(j ≠ k) herrühren. Die Gesamtkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{k}$ auf

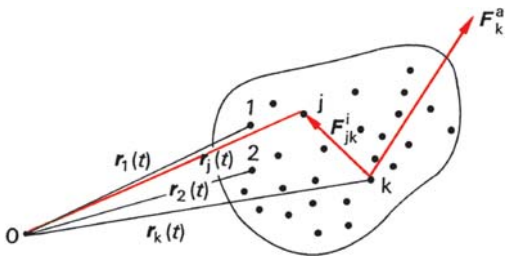


Abb. 2.28 Kräfte auf Punkt k in einem System materieller Punkte

den k-ten materiellen Punkt ist gleich seiner Impulsänderung $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\mathrm{k}/\mathrm{d}t$.
Die Bewegungsgleichungen für sämtliche n materiellen Punkte des Systems sind

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= \boldsymbol{F}^\mathrm{a}_1 + \quad +\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{21} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{31} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{41} + \ldots \\
&\quad + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{n1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t}\,, \\
\boldsymbol{F}_2 &= \boldsymbol{F}^\mathrm{a}_2 + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{12} + \quad +\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{32} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{42} + \ldots \\
&\quad + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{\mathrm{n}2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

und so fort;

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_k &= \boldsymbol{F}^\mathrm{a}_k + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{1k} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{2k} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{3k} + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{4k} + \ldots \\
&\quad + \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{nk} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_k}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

und so fort. Zusammenfassend ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}^\mathrm{a}_k + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_k}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.48}$$

Bei der Summation sind die nicht existierenden Kräfte $\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{kk}$ wegzulassen.
Nach dem dritten Newton'schen Axiom gibt es für jede auftretende innere Kraft $\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{jk}$ eine entsprechende Gegenkraft $\boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{kj}$. Diese beiden Kräfte kompensieren sich; deshalb vereinfacht sich das Gleichungssystem (2.48) erheblich. Die Gesamtsumme der inneren Kräfte verschwindet:

$$\sum_{\substack{k,j=1 \\ k\neq j}}^{n} \boldsymbol{F}^\mathrm{i}_{kj} = 0\,. \tag{2.49}$$

Werden die Summe der äußeren Kräfte zur resultierenden Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{a} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}^\mathrm{a}_k$ und die

Summe der Einzelimpulse zum Gesamtimpuls $\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k$ zusammengefasst, dann entspricht der *Impulssatz für ein System materieller Punkte*

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2.50}$$

völlig dem für einen einzelnen materiellen Punkt.

2.5.2.2 Massenmittelpunkt und Schwerpunktsatz

Der Impulssatz erhält eine besonders einfache Form, wenn für ein System materieller Punkte der *Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt* S eingeführt wird. Für ein System materieller Punkte ist der Ortsvektor dieses speziellen Punktes S

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \boldsymbol{r}_k(t)}{m} \,. \tag{2.51}$$

Hierbei ist $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$ die Gesamtmasse des Systems und $\boldsymbol{r}_k$ der Ortsvektor des einzelnen materiellen Punktes. Weisen Systeme aus gleichen Massenpunkten eine Symmetrieachse auf, dann liegt der Massenmittelpunkt auf dieser Achse.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ergibt sich durch die Differentiation von (2.51) zu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\mathrm{S}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_\mathrm{S}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{v}_k(t)}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k(t)}{m} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \,.$$

Bezogen auf die Schwerpunktsbewegung $\boldsymbol{v}_\mathrm{S}$ lässt sich der Impulssatz aus (2.50) umformen in den *Schwerpunktsatz* $\boldsymbol{F}_\mathrm{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{S}/\mathrm{d}t$ oder

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_\mathrm{S} \,. \tag{2.52}$$

Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems materieller Punkte bewegt sich so, als sei im Schwerpunkt die Gesamtmasse m des Körpers vereinigt und als griffen die äußeren Kräfte im Schwerpunkt an.

Wirken auf ein System von Massenpunkten keine äußeren Kräfte, dann bleibt der Massenmittelpunkt nach dem Newton'schen Trägheitsgesetz in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig geradlinig.

2.5.2.3 Impulserhaltungssatz

Wirkt auf ein System materieller Punkte keine resultierende äußere Kraft, ist also $\sum_{k=1}^{n} F_k^\mathrm{a} = 0$, dann ist nach (2.50) $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = 0$. Der Gesamtimpuls des Systems $\boldsymbol{p}$ ist konstant. Für die Summe der Einzelimpulse des Systems gilt der *Impulserhaltungssatz*

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \text{konstant} \tag{2.53}$$

$$\text{oder } m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n' \,. \tag{2.54}$$

Wirken äußere Kräfte, wie beispielsweise beim Stoß auf einer schiefen Ebene, so gilt der Impulserhaltungssatz – eingeschränkt auf die Zeitpunkte kurz vor und kurz nach dem Stoß –, wenn die Wirkung der äußeren Kräfte im Stoßintervall vernachlässigbar ist.

Beispiel

2.5-2 Ein Pkw mit der Masse $m_1 = 1{,}3\,\mathrm{t}$ fährt auf einer abschüssigen Straße mit dem Neigungswinkel $\beta = 5°$ auf einen stehenden Wagen mit der Masse $m_2 = 1\,\mathrm{t}$ auf. Nach dem Aufprall rutscht der gestoßene Wagen vollgebremst $s_2 = 8\,\mathrm{m}$ weit. Die Bremsspur des auffahrenden Wagens ist $s_1 = 5\,\mathrm{m}$ lang. Bei den

Straßenverhältnissen beträgt die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0{,}8$. Mit welcher Geschwindigkeit v_1 fuhr der Pkw auf, wenn ein gleichmäßig verzögerter Bremsvorgang angenommen wird?

Lösung

Aus den Bremsspurlängen werden die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' kurz nach dem Aufprall berechnet:

$$\text{Bremsverzögerung: } a_B = (F_R - F_H)/m = g(\mu_G \cos\beta - \sin\beta)$$

$$\text{Bremsweg: } s_B = v'^2/2a_B \,,$$

Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \sqrt{2s_1 a_B} = 8{,}3 \text{ m/s}; \quad v_2' = \sqrt{2s_2 a_B} = 10{,}6 \text{ m/s} \,.$$

Mit dem Impulserhaltungssatz nach (2.54) berechnet man die Auffahrgeschwindigkeit v_1:

$$v_1 = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1} = 16{,}4 \text{ m/s} = 59 \text{ km/h} \,.$$

2.5.3 Raketengleichung

Die Beschleunigung einer Rakete ist der besondere Bewegungsfall, bei dem die *Masse des Körpers*, der eine Bewegungsänderung erfährt, *nicht konstant* ist. Durch den Massenausstoß heißer Gase gemäß Abb. 2.29 wird die Schubkraft der Rakete erzeugt. In der Zeitspanne dt ändert sich die Raketenmasse m um dm, die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ändert sich um $d\boldsymbol{v}$.

Mit dem Impulssatz nach (2.50) lässt sich der Verlauf der Raketengeschwindigkeit, die *Raketengleichung*, ableiten. Die Impulsänderung

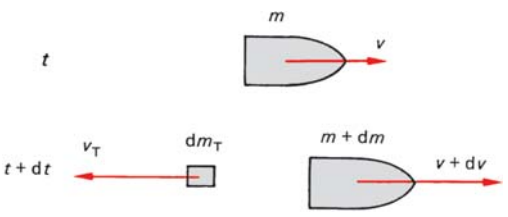


Abb. 2.29 Massen und Geschwindigkeiten von Rakete und Treibstoff zur Zeit t und $t + dt$

des Systems aus Rakete und Gas im Zeitintervall dt ist

$$d\boldsymbol{p} = [(m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) + dm_T \boldsymbol{v}_T] - m\boldsymbol{v}$$

oder mit $dm_T = -dm$

$$d\boldsymbol{p} = m\,d\boldsymbol{v} - dm[\boldsymbol{v}_T - (\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})] \,.$$

Mit der *Strahlgeschwindigkeit*

$$\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{v}_T - (\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) \,,$$

mit der sich das Treibgas relativ zur Rakete entfernt, lautet der Impulssatz

$$\boldsymbol{F}_a = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{v}_{rel}\frac{dm}{dt} \,.$$

Die für den Raketenantrieb charakteristische *Schubkraft* ist

$$\boldsymbol{F}_{schub} = \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_{rel} \,. \tag{2.55}$$

Die Bewegungsgleichung der Rakete hängt von der Schubkraft $\boldsymbol{F}_{schub}$ und den äußeren Kräften $\boldsymbol{F}_a$, wie beispielsweise den Gravitationskräften, ab:

$$m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_{schub} \,. \tag{2.56}$$

Mit folgenden Näherungen soll (2.56) integriert werden:

- Der Treibstoff wird im Zeitintervall $0 \leqq t \leqq t_B$ bis zur Brennschlusszeit t_B ausgestoßen;
- die Relativgeschwindigkeit v_{rel} ist während der Brennzeit konstant;
- der *Massenstrom* $\dot{m}$ der ausgestoßenen Treibgase ist konstant.

Ist m_0 die Anfangsmasse, bestehend aus Rakete und Treibstoff, und m_{leer} die Masse der

Tabelle 2.4 Daten der Mondrakete Saturn V mit dem Treibsatz der ersten Stufe

Startmasse m_0	$2{,}9 \cdot 10^6$ kg
Leermasse m_{leer}	$0{,}82 \cdot 10^6$ kg
Brennschlusszeit t_B	160 s
Relativgeschwindigkeit v_{rel}	$2{,}6 \cdot 10^3$ m s^{-1}
Massenstrom $\dot{m}$	$1{,}3 \cdot 10^4$ kg s^{-1}
Schub F_{schub}	$3{,}4 \cdot 10^7$ N

ausgebrannten Rakete, dann ist der Massenstrom

$$\dot{m} = \frac{m_0 - m_{\text{leer}}}{t_B}$$

und die Abnahme der Raketenmasse

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t \; . \tag{2.57}$$

In Tabelle 2.4 sind einige charakteristische Daten der Saturn-V-Rakete angegeben, mit der 1969 das amerikanische Apollo-Raumschiff die erste bemannte Mondlandung durchführte.

Die erreichbare *Endgeschwindigkeit* hängt linear von der Ausströmgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ ab. Bei *mehrstufigen Raketen* wird die ausgebrannte Stufe abgeworfen. Der Start der nächsten Stufe erfolgt mit der Endgeschwindigkeit der Vorstufe als Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$.

Erfolgt der Start der ersten Stufe der Rakete im Schwerefeld der Erde, dann ist als äußere Kraft die Gravitationskraft auf die Rakete zu berücksichtigen. Die Gravitationskraft ist der Schubkraft entgegengerichtet. Werden für die Startphase der Luftwiderstand und die Änderung der Fallbeschleunigung mit der Steighöhe vernachlässigt, rechnet man also mit $g = g_0 =$ konstant, dann ist die äußere Kraft $\boldsymbol{F}_a = m(t)\boldsymbol{g}_0$. Für den Betrag der Beschleunigung gilt

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} v_{\text{rel}} - g_0 \; . \tag{2.58}$$

Durch Integration ergibt sich für den Betrag der Geschwindigkeit

$$v(t) = v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) - g_0 t + v_0 \; . \tag{2.59}$$

Beim Start von der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ erhält man für die Brennschlusszeit t_B die Endgeschwindigkeit

$$v(t_B) = v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right) - g_0 \, t_B \; . \tag{2.60}$$

(Raketengleichung nach K. Ziolkowskij; 1857 bis 1935).

Durch eine weitere Integration folgt aus (2.59) die Höhe $h(t)$ der Rakete über der Erdoberfläche:

$$h(t) = \frac{v_{\text{rel}}(m_0 - \dot{m}\,t)}{\dot{m}} \cdot \left[\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}\,t} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}\,t}\right)\right] - \frac{1}{2} g_0 t^2 \; . \tag{2.61}$$

Bei Brennschluss t_B ist die Höhe

$$h_B = \frac{v_{\text{rel}} m_{\text{leer}}}{\dot{m}} \left[\frac{m_0}{m_{\text{leer}}} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right)\right] - \frac{1}{2} g_0 t_B^2 \; . \tag{2.62}$$

Mit der Geschwindigkeit $v(t_B)$ aus (2.60) erreicht die Rakete nach Brennschluss noch eine

Steighöhe $h_s = v^2(t_B)/2g_0$ (2.10). Der Bahnscheitel des senkrechten einstufigen Raketenaufstiegs liegt nach dieser Näherungsrechnung in der Höhe h_{total} über Startniveau gemäß

$$h_{total} = h_B + \frac{v^2(t_B)}{2g_0} . \qquad (2.63)$$

In Abb. 2.30 ist jeweils der Verlauf der Geschwindigkeit für den Fall, dass – wie im Weltraum – keine äußere Kraft wirkt ($g_0 = 0$) und für den Fall, dass der Start gegen die Erdgravitation erfolgt, wiedergegeben. Den angegebenen Zahlenwerten liegen die Daten der Startstufe der Saturn V-Rakete nach Tabelle 2.4 zugrunde.

Zur Übung

Ü 2.5-1 Auf einer ebenen Unterlage liegt eine Kugel (Masse $m = 2{,}0$ kg). Die Kugel wird parallel zur Unterlage mit einem Hammer angeschlagen. Die Kontaktzeit ist $t = 5$ ms, die mittlere Kraft $F = 100$ N. a) Wie groß sind Geschwindigkeit und Impuls der Kugel nach dem Stoß? b) Wie groß ist die Beschleunigung während der Stoßzeit?

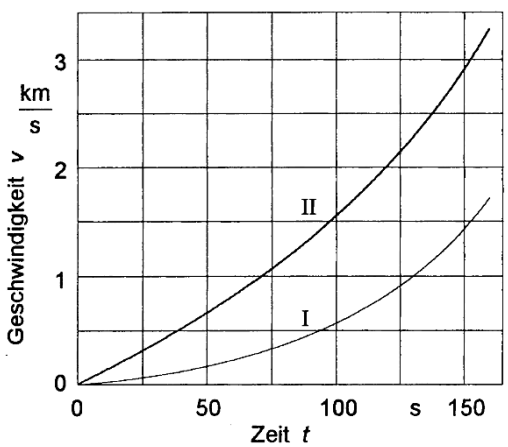


Abb. 2.30 Geschwindigkeit der Saturn-V-Rakete (1. Stufe) bei senkrechtem Start auf der Erde mit näherungsweise konstantem Schwerefeld (I) und Zündung im Weltraum ohne Einwirkung äußerer Kräfte (II)

Ü 2.5-2 Ein Auto hat die Masse $m = 1\,000$ kg. Es fährt mit $v = 50$ km/h geradeaus. Welche Impulsänderung $\Delta \boldsymbol{p}$ – nach Betrag und Richtung – muss aufgebracht werden, um eine Richtungsänderung von 120° zu bewerkstelligen, ohne den Betrag der Geschwindigkeit v zu ändern?

Ü 2.5-3 Die Mondmasse m_M beträgt etwa 0,0123 m_E (m_E = Erdmasse). Der Abstand zwischen Erdmittelpunkt und Mondmittelpunkt ist $R_{EM} = 3{,}8 \cdot 10^5$ km, der Erdradius $R_E = 6\,370$ km. Wo liegt der Massenmittelpunkt S des Systems Erde und Mond?

Ü 2.5-4 Beim spontanen radioaktiven Zerfall sendet ein U-238-Kern ein α-Teilchen gemäß folgender Reaktion aus:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} .$$

Die Geschwindigkeit des α-Teilchens wird zu $v_\alpha = 1{,}4 \cdot 10^7$ m/s gemessen. Welches ist die Geschwindigkeit v_{Th} des Rückstoßkerns Thorium?

Ü 2.5-5 Wie viel Treibstoff muss eine Einstufenrakete aufnehmen, damit sie nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs die erste kosmische Geschwindigkeit von $v = 7{,}9$ km/s erreicht? Die Leermasse der Rakete ist $m_{leer} = 1\,000$ kg, die Ausströmgeschwindigkeit gegen die Rakete ist $v_{rel} = 3\,000$ m/s, die Brennschlusszeit ist $t_B = 120$ s. Unterscheiden Sie zwischen einem „Start“ im Weltraum außerhalb des Graviationsbereichs eines Himmelskörpers und einem Start im Schwerefeld der Erde.

2.6 Arbeit und Energie

2.6.1 Arbeit

Wirkt eine *Kraft* $\boldsymbol{F}$ auf einen materiellen Punkt oder Körper und verschiebt ihn dabei um ein Wegelement $\Delta \boldsymbol{s}$, so hat die Kraft den Zustand des Körpers verändert, sie hat *Arbeit* verrichtet. Die *mechanische Arbeit* ist definiert als

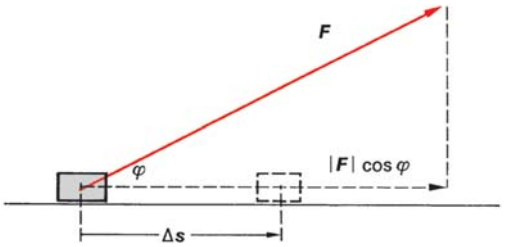


Abb. 2.31 Zur Definition der Arbeit

$$\Delta W = |\boldsymbol{F}|\,|\Delta \boldsymbol{s}|\cos(\boldsymbol{F}, \Delta \boldsymbol{s}) \qquad (2.64)$$

entsprechend Abb. 2.31 oder in differentieller Schreibweise als Skalarprodukt

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \qquad (2.65)$$

Die insgesamt längs eines Weges von $\boldsymbol{s}_1$ nach $\boldsymbol{s}_2$ von einer Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ verrichtete Arbeit ergibt sich durch Integration der Einzelbeiträge, wie Abb. 2.32 verdeutlicht:

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}W = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \qquad (2.66)$$

Nach der Definitionsgleichung (2.64) ist die Maßeinheit der Arbeit 1 Nm = 1 J (Joule).

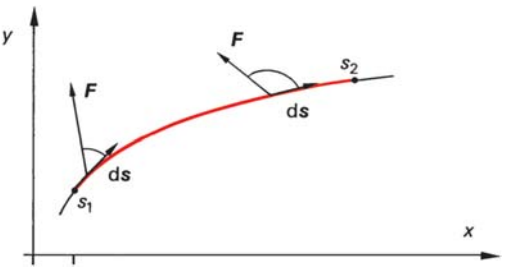


Abb. 2.32 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft $F(x, y)$ längs des Wegs von $s_1(x_1, y_1)$ nach $s_2(x_2, y_2)$

In Abb. 2.33 sind Fälle zusammengestellt, bei denen die Kraft $\boldsymbol{F}$ Arbeit gegen ortsunabhängige Kräfte verrichtet. Dazu zählen die im erdnahen Gravitationsfeld näherungsweise konstante Schwerkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ und die von ihr verursachte Hangabtriebskraft sowie die auf dem Verschiebungsweg konstante Festkörperreibungskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$. Mit aufgenommen ist die *Beschleunigungsarbeit* gegen die Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ der beschleunigten Masse (2.33):

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} -\left(-m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t) = \int_{v_1(s_1)}^{v_2(s_2)} m(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v})\,.$$

Die Integration zeigt, dass die Beschleunigungsarbeit nur von der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten abhängt:

$$W_{12} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)\,. \qquad (2.67)$$

Die Beschleunigungsarbeit ist null, wenn, wie bei der gleichförmigen Kreisbewegung, $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}$ senkrecht aufeinander stehen: sich der Geschwindigkeitsbetrag also nicht ändert.
Die Arbeit beim Dehnen und Stauchen einer Feder und beim Anheben eines Körpers gegen die Gravitationskraft über größere Strecken wird nicht mehr gegen konstante Kräfte geleistet. Abbildung 2.34 enthält für diese Fälle ortsabhängiger Kräfte die Integration von (2.66). Die Arbeit entspricht dabei der Fläche zwischen der Kraftkurve und der Wegachse innerhalb der Integrationsgrenzen.

Beispiel

2.6-1 Wie groß ist der Arbeitsaufwand beim Dehnen oder Stauchen einer idealen Feder?

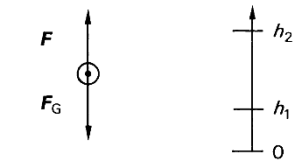
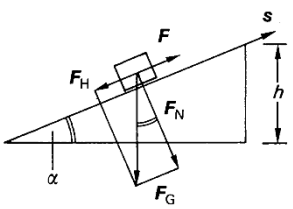
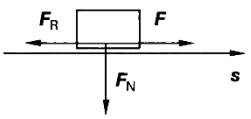
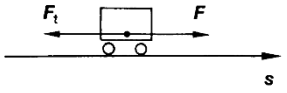
	Geometrie	erforderliche konstante Kraft	Weg	verrichtete Arbeit
Hubarbeit gegen Gewichtskraft F_G		$F = m\,g$	$s = h_2 - h_1 = h$	$W_{12} = m\,g\,h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Arbeit auf reibungsfreier schiefer Ebene gegen Hangabtriebskraft F_H		$F = m\,g\,\sin\alpha$	$s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$	$W_{12} = m\,g\,h$ nur abhängig von der Höhendifferenz
Festkörperreibungsarbeit gegen Reibungskraft F_R		$F = \mu\,F_N$ $= \mu\,m\,g$	$s = s_2 - s_1$	$W_{12} = \mu\,m\,g\,s$ Reibungszahl μ auf Weg konstant
Beschleunigungsarbeit ohne Reibung gegen Trägheitskraft F_t		$F = m\,a$	$s = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2\,a}$	$W_{12} = \frac{1}{2}\,m\,(v_2^2 - v_1^2)$ nur abhängig von Anfangs- und Endgeschwindigkeit

Abb. 2.33 Arbeit gegen ortsunabhängige Kräfte

Lösung

Nach (2.32) gilt als lineares Kraftgesetz für die Federauslenkung $F_{rück} = -kx$. Beim Stauchen oder Dehnen hält die Kraft F der rücktreibenden Systemkraft zu jedem Zeitpunkt das Gleichgewicht: $F = -F_{rück}$. Die aufzuwendende Arbeit W_{12} beim Dehnen von x_1 auf x_2 ist

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{x_1}^{x_2} (-)(-k\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

$\boldsymbol{x}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ sind parallel gerichtet, daher ergibt sich

$$W_{12} = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)\,. \qquad (2.68)$$

Die aufzuwendende *Verformungsarbeit* nimmt quadratisch mit der Auslenkung zu.

2.6.2 Leistung, Wirkungsgrad

Das Maß dafür, in welcher Zeitspanne eine Arbeit verrichtet wird, ist die *Leistung*

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}\,. \qquad (2.69)$$

Die Maßeinheit der Leistung ist $1\,\mathrm{N\,m\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{W}$ (Watt). Die Leistung hängt vom Zeitintervall Δt ab. Die *Momentanleistung* P ergibt sich mit (2.65) zu

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,. \qquad (2.70)$$

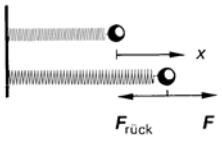
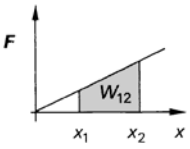
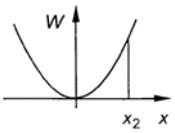
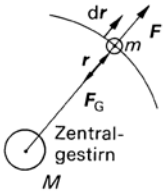
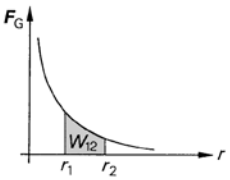
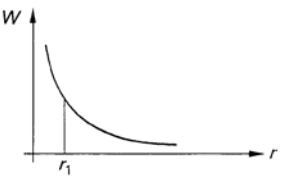
	System	Kraftgesetz	Arbeit
Verformungs-arbeit	Feder-Masse-System 	$F_{rück} = -k\,x$ 	$W_{12} = \frac{1}{2}\,k\,(x_2^2 - x_1^2)$ normiert: $W = 0$ für $x_1 = 0$ 
Hubarbeit gegen die Gravitations-kraft	Zentralgestirn und Satellit 	$F_G = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 	$W_{12} = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ normiert: $W = 0$ für $r_2 \to \infty$ 

Abb. 2.34 Arbeit gegen ortsabhängige Kräfte

Aus der über die Gesamtzeit t_g verrichteten Gesamtarbeit W_g errechnet sich die *mittlere Leistung*

$$P_m = \frac{W_g}{t_g}\,. \tag{2.71}$$

Leistungen von Antrieben misst man, indem die in der Zeitspanne abgegebene Arbeit definiert in messbare Reibungsarbeit oder Reibungswärme umgewandelt wird. Die abgegebene effektive Leistung P_{eff} eines Antriebs oder mechanischen Wandlers ist wegen der Reibungsverluste P_V kleiner als die zugeführte Nennleistung P_N. Das Kennzeichen für die Effektivität der Leistungswandler ist der *Wirkungsgrad*

$$\eta = \frac{P_{eff}}{P_N} = 1 - \frac{P_V}{P_N}\,. \tag{2.72}$$

Der Wirkungsgrad ist dimensionslos, der Wertebereich liegt zwischen $0 \leqq \eta \leqq 1$.
Stimmen die Zeitintervalle der Leistungszufuhr und Leistungsabgabe nicht überein, beispielsweise bei dem langsamen Anheben eines Rammbärs mit anschließendem raschem Aufprall, dann wird der Wirkungsgrad über das Verhältnis von Nutzarbeit W_{ab} zur zugeführten Arbeit W_{zu} definiert:

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{\int_0^{t_1} P_{eff}\,dt}{\int_0^{t_2} P_N\,dt}\,. \tag{2.73}$$

Werden mehrere Antriebe und Wandler hintereinandergeschaltet, dann ist der Gesamtwirkungsgrad der Anlage das Produkt aus den Einzelwirkungsgraden:

$$\eta_{\text{ges}} = \frac{W_{\text{ab},n}}{W_{\text{zu},1}} = \frac{W_{\text{ab},1}}{W_{\text{zu},1}} \cdot \frac{W_{\text{ab},2}}{W_{\text{ab},1}} \cdot \ldots \cdot \frac{W_{\text{ab},n}}{W_{\text{ab},n-1}} \quad \text{oder}$$

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \,. \tag{2.74}$$

Beispiel

2.6-2 Ein Förderkorb, dessen Masse einschließlich maximaler Nutzlast $m_1 = 1\,000$ kg beträgt und dessen Gegengewicht die Masse $m_2 = 450$ kg hat, fährt mit der Beschleunigung $a_1 = 1$ m/s^2 aufwärts, bis er die konstante Fördergeschwindigkeit $v_2 = 5$ m/s erreicht. Die gesamte Reibungskraft ist $F_R = 500$ N. Abbildung 2.35 verdeutlicht den Vorgang. Welche Spitzenleistung und welche Dauerleistung benötigt der Antrieb, wenn der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}9$ beträgt?

Lösung

Die Kraft F_1 an dem Umfang der Trommel während des Anfahrens ergibt sich aus

$$F_1 + m_2(g - a) = m_1(g + a) + F_R$$

zu

$$F_1 = m_1(g + a) - m_2(g - a) + F_R = 7\,450 \text{ N} \,.$$

Im Bewegungsabschnitt mit konstanter Fördergeschwindigkeit ist

$$F_2 = (m_1 - m_2)g + F_R = 6\,000 \text{ N} \,.$$

Die maximale Nennleistung während des Anfahrens beträgt

$$P_{\text{N,max}} = \frac{F_1 v_2}{\eta} = 41{,}4 \text{ kW} \,.$$

Die Dauer-Nennleistung bei der anschließenden gleichförmigen Bewegung des Förderkorbes ist

$$P_{\text{N}} = \frac{F_2 v_2}{\eta} = 33{,}3 \text{ kW} \,.$$

Antriebsaggregate müssen so ausgelegt werden, dass sie über die Dauerleistung hinaus kurzfristig eine wesentlich höhere Spitzenleistung aufbringen können.

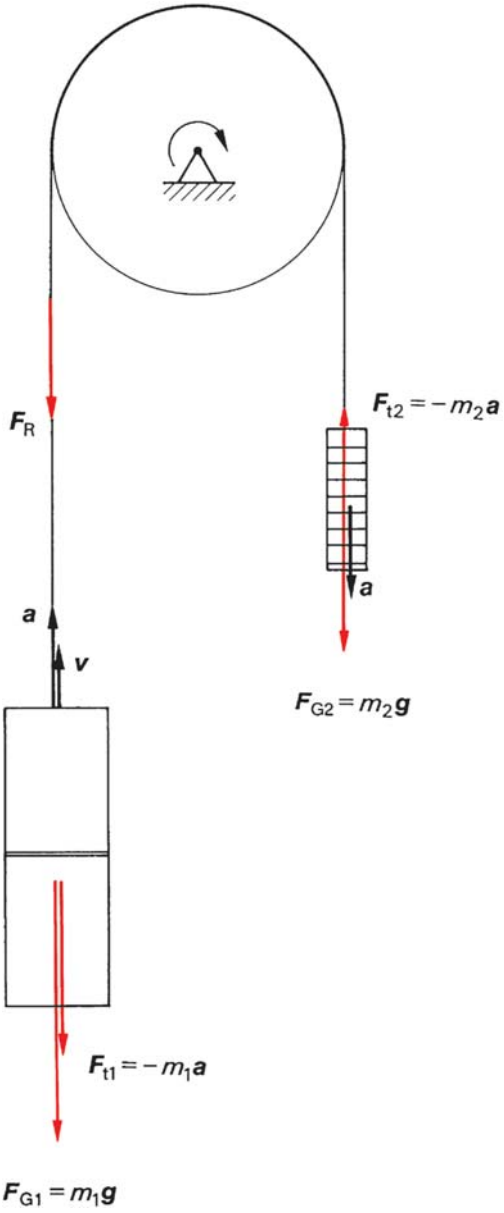


Abb. 2.35 Zu Beispiel 2.6-2

2.6.3 Energie

Führt man einem Körper *mechanische Arbeit* zu, dann ändert sich der physikalische Zustand des Körpers: Eine gespannte Feder kann einen an ihr befestigten Körper beschleuni-

gen, also Beschleunigungsarbeit verrichten; ein durch Arbeitsverrichtung beschleunigter Wagen kann eine schiefe Ebene bergauf fahren und damit Hubarbeit verrichten. Körper unterscheiden sich also dadurch, in welchem Maß ihnen Arbeit zugeführt wurde. Das Maß dafür ist die *Energie E.*

Durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit wird die Energie eines Körpers oder die Gesamtenergie eines Systems materieller Punkte erhöht oder erniedrigt.

Die Energie wird in der gleichen Maßeinheit 1 J angegeben wie die Arbeit, durch die sie verändert wird. Es gilt also der *Energiesatz der Mechanik:*

$$\Delta E = E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} = \Delta W \,. \qquad (2.75)$$

Die Energieanteile eines Körpers werden durch die Arbeit, die sie erzeugt haben, beschrieben und ergeben wie diese additiv die Gesamtenergie. Die mechanische Energie eines Körpers ist

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \,. \qquad (2.76)$$

Sie setzt sich zusammen aus der durch die Beschleunigungsarbeit W_{B} erzeugten kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2.77)$$

und der potentiellen Energie E_{pot}, in der die Energieanteile zusammengefasst sind, die nur von einer Ortskoordinate abhängen. Hierzu gehören die von der Verformungsarbeit W_{V} herrührende elastische Energie

$$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} k s^2 \qquad (2.78)$$

und die durch die Hubarbeit W_{H} erzeugte Lageenergie

$$E_{\text{Lage}} = mgh \,. \qquad (2.79)$$

Die Energieanteile hängen betragsmäßig davon ab, wo das Bezugsniveau $h = 0$ und der Ausgangszustand $s = 0$ liegen und auf welches Koordinatensystem die Geschwindigkeit v bezogen ist.

2.6.4 Energieerhaltungssatz

Die als Energie gespeicherte Arbeit muss nicht in der Arbeitsform abgegeben werden, in der sie aufgenommen wurde. Diese Abgabe ist auch in anderen Arbeitsformen möglich. Beim Bogenschießen wird beispielsweise die elastische Energie in Beschleunigungsarbeit des Pfeils und eventuell beim Schuss bergauf in Hubarbeit umgewandelt. Alle Naturerscheinungen gehorchen einem fundamentalen Gesetz, der *Erhaltung der Energie*:

In einem abgeschlossenen System bleibt der Energieinhalt konstant. Energie kann weder vernichtet werden noch aus nichts entstehen; sie kann sich in verschiedene Formen umwandeln oder zwischen verschiedenen Teilen des Systems ausgetauscht werden.

Es gibt kein *Perpetuum mobile erster Art*; d. h., es ist unmöglich, eine Maschine zu bauen, die dauernd Arbeit verrichtet, ohne dass ihr von

außen ein entsprechender Energiebetrag zugeführt wird (Abschn. 3.3.2).
Der Energieerhaltungssatz ist nicht beweisbar; er fasst die jahrhundertelangen Erfahrungen mit Energieumwandlungsexperimenten zusammen. In seiner allgemeinen Form beinhaltet er außer den mechanischen Energieformen der kinetischen und der potentiellen Energie auch thermische Energien, chemische Energien, elektrische und magnetische Feldenergien.
Bleiben in Systemen die nichtmechanischen Energien der Körper konstant, ist also in idealisierten mechanischen Systemen die Reibungsarbeit vernachlässigbar, dann gilt für die kinetische Energie und die potentielle Energie des Systems materieller Punkte der *Energieerhaltungssatz der Mechanik*

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant} \,. \tag{2.80}$$

In diesem Fall hängen die mechanischen Energien zu zwei Zeitpunkten t und t' folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^2 - v_2'^2\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{2}k_1\left(s_1^2 - s_1'^2\right) + \frac{1}{2}k_2\left(s_2^2 - s_2'^2\right) + \ldots \\ &\quad + m_1 g\left(h_1 - h_1'\right) + m_2 g\left(h_2 - h_2'\right) + \ldots \\ &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Im mechanischen Energieerhaltungssatz ist die potentielle Energie des Systems durch die Lagekoordinaten s oder h eindeutig bestimmt; sie hängt nicht vom Weg und den Wechselwirkungen auf diesem Weg ab. Die *elastische Kraft* und die *Gewichtskraft*, die die potentielle Energie bestimmen, werden als *konservative Kräfte* bezeichnet. Im Gegensatz dazu gilt (2.81) nicht mehr, wenn Reibungsvorgänge und nichtelastische Verformungen bewirken, dass der Energiezustand vom gewählten Weg abhängt. In dieser Weise vom Weg abhängige Kräfte sind *dissipative Kräfte.*

Zur Übung

Ü 2.6-1 Eine Stahlkugel (Masse m) fällt frei aus der Höhe h auf eine Stahlplatte und springt danach auf eine Höhe $h_1 = 0{,}9h$ zurück. a) Wie groß ist ihre Geschwindigkeit v_0 unmittelbar vor dem Aufprall? b) Wie groß ist die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Aufprall? c) Wie groß ist die Impulsänderung $\Delta \boldsymbol{p}$ der Stahlkugel nach Betrag und Richtung? d) Welcher Anteil der ursprünglichen kinetischen Energie wurde in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt?

Ü 2.6-2 Eine Feder (Federkonstante $k = 200\,\text{N/m}$) wird um $\Delta y = 15\,\text{cm}$ zusammengedrückt. Dann wird eine Kugel (Masse $m = 80\,\text{g}$) auf sie gelegt. Wie hoch springt die Kugel, wenn die Feder plötzlich entspannt wird?

Ü 2.6-3 Eine Schraubenfeder ist durch eine Kraft $F_1 = 50\,\text{N}$ gespannt. Wirkt zusätzlich eine Kraft $\Delta F = 30\,\text{N}$ an der Feder, wird diese um $\Delta l = 20\,\text{cm}$ verlängert. a) Wie groß ist die für diese Verlängerung erforderliche Arbeit? b) Wie groß ist die Gesamtenergie der gespannten Feder?

Ü 2.6-4 Bei großen Deformationen wird das Kraftgesetz einer realen Feder nicht-linear. Für eine Pufferfeder gilt $k(x) = k_1 + k_2 x^2$ mit $k_1 = 10^3\,\text{N/m}$ und $k_2 = 10^7\,\text{N/m}^3$. Wie weit wird diese Feder zusammengedrückt, wenn ein Körper, der die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 0{,}3\,\text{N m}$ hat, in x-Richtung aufprallt?

2.7 Stoßprozesse

2.7.1 Übersicht und Grundbegriffe

Bei einem Stoßprozess berühren sich zwei (oder auch mehrere) Körper kurzzeitig unter Änderung ihres jeweiligen Bewegungszustands, wie Abb. 2.36 verdeutlicht. Kennzeichnend ist die Einmaligkeit und die im Vergleich

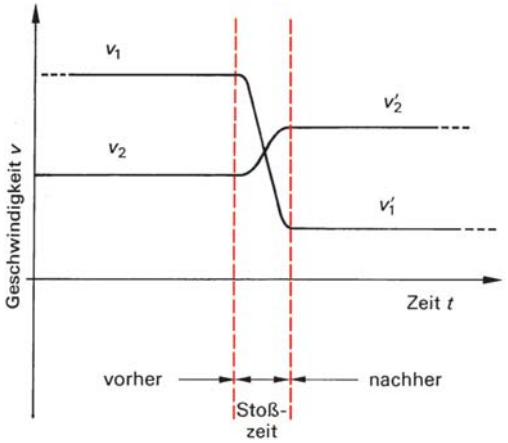


Abb. 2.36 Zeitlicher Verlauf des Stoßes zweier elastischer Körper

zur gesamten Beobachtungsdauer kurze Kontaktzeit der beteiligten Körper. In dieser Wechselwirkungszeit treten verhältnismäßig große Kräfte auf. Die Bewegung wenigstens eines der beteiligten Körper ändert sich abrupt.
Stoß-Beispiele sind Billard-, Tennis- oder Fußballstöße und Auto-Unfallversuche. Abbildung 2.37 zeigt ein Beispiel hierfür. Stoßprozesse treten auch bei atomaren Vorgängen auf. Bei Zusammenstößen zwischen Atomen und Molekülen treten an die Stelle der elastischen Kräfte der Mechanik elektrostatische Wechselwirkungskräfte. Eine Klassifikation der Stöße zwischen makroskopischen Körpern lässt sich nach den geometrischen Verhältnissen und den Änderungen der kinetischen Energie der Stoßpartner treffen. Abbildung 2.38 zeigt eine Übersicht.

2.7.2 Gerader, zentraler, elastischer Stoß

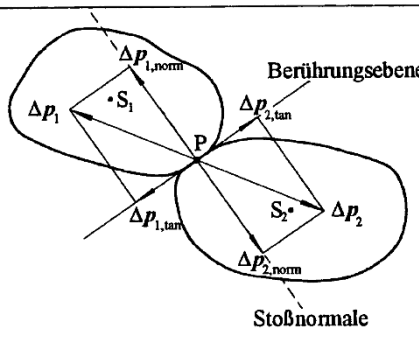
Für ein Zeitintervall kurz vor und kurz nach dem Stoß sind die Änderungen der potentiellen Energien der Stoßpartner und die Reibungsverluste vernachlässigbar gegenüber den kinetischen Energien; für den Stoßzeitraum ist das System abgeschlossen und ohne Einwirkung äußerer Kräfte. Zwischen den Geschwindigkeiten der Stoßpartner vor dem Stoß $\boldsymbol{v}_1$ sowie $\boldsymbol{v}_2$ und nach dem Stoß $\boldsymbol{v}_1'$ sowie $\boldsymbol{v}_2'$ besteht nach dem Impulserhaltungssatz gemäß (2.54) der Zusammenhang

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' \,. \qquad (2.82)$$

Die Vektoren können algebraisch addiert werden, weil der gerade zentrale Stoß eindimensional ist, wie Abb. 2.39 verdeutlicht. Die zweite



Abb. 2.37 Crash-Test-Zeitverlauf. Auffahrgeschwindigkeit 64 km/h, Zeitspanne seit dem Aufprall
a) 0 ms, **b**) 75 ms, **c**) 150 ms
Werkfoto: Daimler Chrysler AG



Im Berührpunkt P der beiden Stoßpartner lässt sich eine *Berührungsebene* (Tangentialebene) und senkrecht darauf die *Stoßnormale* konstruieren.

Ohne äußere Kräfte gilt für die Impulsänderungen (Kraftstöße) der beiden Stoßpartner:

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 = \int \boldsymbol{F}_{21}\,\mathrm{d}t = -\Delta \boldsymbol{p}_2 = \int \boldsymbol{F}_{12}\,\mathrm{d}t$$

Entsprechend gilt für die Komponenten:

$$\Delta p_{1,\text{tan}} = -\Delta p_{2,\text{tan}} \text{ und } \Delta p_{1,\text{norm}} = -\Delta p_{2,\text{norm}}$$

glatter Stoß	$\Delta p_{1,\text{tan}} = \Delta p_{2,\text{tan}} = 0$, tritt auf, wenn im Berührpunkt keine Reibungskraft wirksam wird
rauher Stoß	$\Delta p_{1,\text{tan}} = -\Delta p_{2,\text{tan}} \neq 0$, im Berührpunkt wirkt eine Reibungskraft
zentraler Stoß	Die Wirkungslinie der Kraftstöße $\Delta \boldsymbol{p}$ geht durch die beiden Schwerpunkte S_1 und S_2. Die Stoßpartner werden durch den Stoßvorgang nicht in Rotation versetzt. Homogene, glatte Kugeln stoßen stets zentral
exzentrischer (nicht zentraler) Stoß	Die Wirkungslinie der Kraftstöße $\Delta \boldsymbol{p}$ geht nicht durch die beiden Schwerpunkte S_1 und S_2; mindestens einer der Stoßpartner wird durch den Stoßvorgang in Rotation versetzt
gerader Stoß	Die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ der beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 bewegen sich parallel zur Stoßnormalen. Bei stoßenden Kugeln laufen die Schwerpunkte S_1 und S_2 vor und nach dem Stoß auf derselben Geraden
schiefer Stoß	Die Geschwindigkeit wenigstens eines der beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 besitzt eine Komponente in tangentialer Richtung: $\boldsymbol{v}_{1,\text{tan}}, \boldsymbol{v}_{2,\text{tan}} \neq 0$.
elastischer Stoß	Es tritt kein Verlust an kinetischer Energie auf
unelastischer Stoß	Ein Teil der kinetischen Energie wird in andere Energieformen umgewandelt

Abb. 2.38 Klassifikation der Stoßprozesse. Betrachtet werden nur Stöße, bei denen die Stoßpartner vor dem Stoß reine Translationsbewegungen ausführen

Bestimmungsgleichung ist der Energieerhaltungssatz nach (2.81):

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \,. \tag{2.83}$$

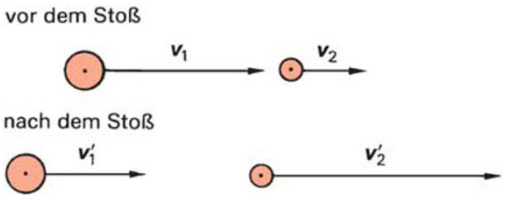


Abb. 2.39 Gerader, zentraler Stoß

Durch Umformung von (2.83) ergibt sich

$$m_1\left(v_1 + v_1'\right)\left(v_1 - v_1'\right) = m_2\left(v_2' + v_2\right)\left(v_2' - v_2\right)$$

und mit (2.82)

$$v_1 - v_2 = -\left(v_1' - v_2'\right) \,. \tag{2.84}$$

Vom Körper 2 aus gesehen, bewegt sich der Körper 1 nach dem Stoß mit derselben Relativgeschwindigkeit weg, mit der er vor dem Stoß auf den Körper 2 zugelaufen ist.

Setzt man (2.84) in (2.82) ein, so führt dies auf die Bestimmungsgleichungen für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad (2.85)$$

$$v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (2.86)$$

Sind die Massen der Stoßpartner gleich, so tauschen die beiden Körper Geschwindigkeit, Impuls und kinetische Energie aus; war vor dem Stoß der gestoßene Körper in Ruhe, so ist nach dem Stoß der stoßende Körper in Ruhe. Stößt ein schwerer Körper einen leichten, dann bewegen sich beide nach dem Stoß in der gleichen Richtung weiter. Ist dagegen die Masse des gestoßenen Körpers größer als die des stoßenden, so wird der stoßende Körper reflektiert und nach dem Stoß laufen die Körper entgegengesetzt auseinander. Kollidieren Körper extrem unterschiedlicher Massen – prallt beispielsweise ein Ball auf eine Wand –, dann wird beim elastischen Stoß der stoßende Körper vollständig reflektiert. Er behält seine kinetische Energie; der Impuls und die Geschwindigkeit sind nach dem Stoß entgegengesetzt zur Einfallsrichtung gerichtet.

Beispiel

2.7-1 Ein Neutron mit der Masse $m_1 = m_N$ stößt zentral auf einen ruhenden Atomkern mit der Masse $m_2 = Nm_N$. Die Kollision ist näherungsweise elastisch. Welcher Anteil f der kinetischen Energie des Neutrons wird auf den Atomkern übertragen?

Lösung

Die Energie des stoßenden Neutrons ist

$$E_{\text{kin, N vor}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2\,.$$

Beim Stoß wird die Energie ΔE übertragen:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right)\,.$$

Der Anteil f der übertragenen kinetischen Energie ist

$$f = \frac{\Delta E}{E_{\text{kin, N vor}}} = 1 - \frac{v_1'^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$
$$= \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4N}{(1 + N)^2}\,.$$

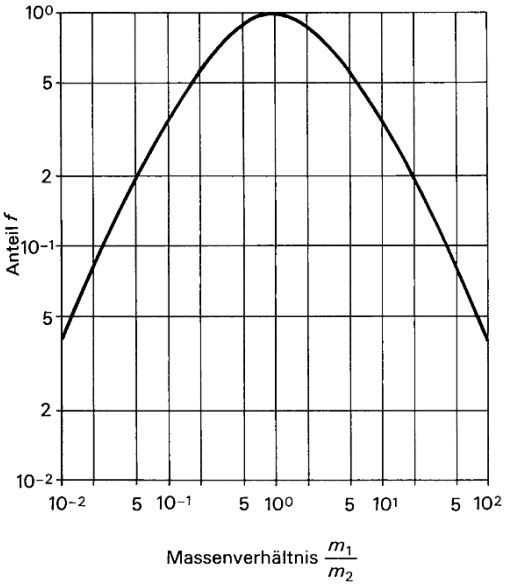


Abb. 2.40 Gerader, zentraler Stoß: Anteil f der Energieübertragung in Abhängigkeit vom Massenverhältnis der Stoßpartner

Der Anteil f der Energieübertragung bei einem geraden, zentralen, elastischen Stoß eines ruhenden Stoßpartners ist in Abhängigkeit vom Massenverhältnis $m_1{:}m_2$ in Abb. 2.40 aufgetragen. Der Energieübertrag ist umso höher, je geringer der Massenunterschied zwischen den Stoßpartnern ist. Zum Abbremsen schneller Neutronen in Kernreaktoren ist also Wasser (H_2O) oder schweres Wasser (D_2O) sehr viel effektiver als etwa eine Bleiabschirmung.

2.7.3 Gerader, zentraler, unelastischer Stoß

Geht beim Stoßvorgang kinetische Energie beispielsweise durch Reibungs- oder inelastische Verformungsarbeit verloren, dann muss der allgemeine Energiesatz nach (2.75) zur Berechnung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß herangezogen und der *Energieverlust* ΔW berücksichtigt werden:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \Delta W\,. \qquad (2.87)$$

Zusätzlich zum Impulserhaltungssatz nach (2.82) ist eine weitere Bestimmungsgleichung notwendig, um die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß und den Energieverlust ΔW berechnen zu können (Beispiel 2.5-2).
Besonders interessant ist der *unelastische Stoß*, bei dem die beiden Körper miteinander verkoppelt werden und sich nach dem *Stoß mit der gemeinsamen Geschwindigkeit*

$$v' = v_1' = v_2'$$

gemäß Abb. 2.41 bewegen. Der Impulserhaltungssatz dieses unelastischen Stoßes lautet

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \ ;$$

daraus folgt

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \ . \qquad (2.88)$$

Die für den elastischen Stoß gefundene (2.84) für die Geschwindigkeitsdifferenzen vor und nach dem Stoß

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2$$

gilt für den unelastischen Stoß nicht mehr. Vielmehr gilt für den Stoß mit Kopplung, der

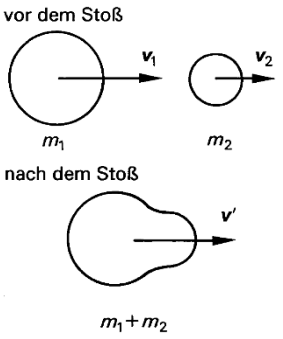


Abb. 2.41 Gerader, zentraler, unelastischer Stoß mit Kopplung (vollplastischer Stoß)

auch als *vollkommen plastischer* Stoß bezeichnet wird

$$v_2' - v_1' = 0 \ .$$

Es liegt nahe, den teilplastischen Stoß zu definieren, bei dem folgender Zusammenhang gilt:

$$v_2' - v_1' = \varepsilon (v_1 - v_2) \ . \qquad (2.89)$$

ε wird als *Stoßzahl* bezeichnet und kann folgende Werte annehmen:

$\varepsilon = 1$	elastischer Stoß
$\varepsilon = 0$	vollkommen plastischer Stoß
$0 < \varepsilon < 1$	teilweise plastischer Stoß

Die Stoßzahl kann experimentell bestimmt werden. Beispielsweise beträgt sie für Körper aus gehärtetem Stahl $\varepsilon = 0{,}95$; für Blei gilt $\varepsilon = 0$.
Der Verlust an kinetischer Energie ergibt sich zu

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - \varepsilon^2)(v_1 - v_2)^2 \ . \qquad (2.90)$$

Beispiel

2.7-2 Die Stoßzahl lässt sich aus Fallversuchen bestimmen. Dabei lässt man eine kleine Kugel aus der Fallhöhe h auf einen schweren ($m_2 \gg m_1$) ruhenden Körper fallen (Abb. 2.42). Wie groß ist die Stoßzahl ε, wenn die Fallhöhe $h = 70$ cm beträgt und die Zeitspanne zwischen dem *ersten* und dem zweiten Aufprall $\Delta t = 0{,}72$ s?

Lösung

Nach dem freien Fall kommt es zum ersten Aufprall nach der Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}378 \text{ s} \ .$$

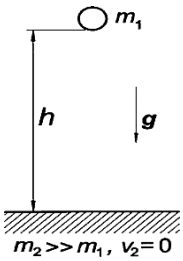


Abb. 2.42 Zu Beispiel 2.7-2: Bestimmung der Stoßzahl

Die Aufprallgeschwindigkeit der kleinen Kugel ist

$$v_1 = \sqrt{2gh} = gt_1$$

Nach (2.89) prallt die Kugel ab mit der Geschwindigkeit

$$v_1' = -\varepsilon v_1 \,,$$

dabei sind v_2 und v_2' jeweils null.
Die Zeitspanne bis zu einem erneuten Aufprall ist

$$\Delta t = \frac{2|v_1'|}{g} = \frac{2\varepsilon v_1}{g} = 2\varepsilon t_1 \,.$$

Damit wird die Stoßzahl

$$\varepsilon = \frac{\Delta t}{2t_1} = 0{,}95 \,.$$

2.7.4 Schiefe, zentrale Stöße

2.7.4.1 Elastische Stöße

Abbildung 2.43 skizziert die Lage der Stoßpartner für den Augenblick, in dem sie sich berühren. Die Verbindungslinie der beiden Massenmittelpunkte in diesem Augenblick ist die Stoßgerade; in Abb. 2.43 ist es die y-Achse. Ohne Reibung kann in die x-Richtung senkrecht zur Stoßgeraden keine Kraft übertragen werden. Die Komponenten der Impulse in x-Richtung sind vor und nach dem Stoß gleich:

$$m_1 v_{1x} = m_1 v_{1x}' \,, \qquad (2.91)$$
$$m_2 v_{2x} = m_2 v_{2x}' \,. \qquad (2.92)$$

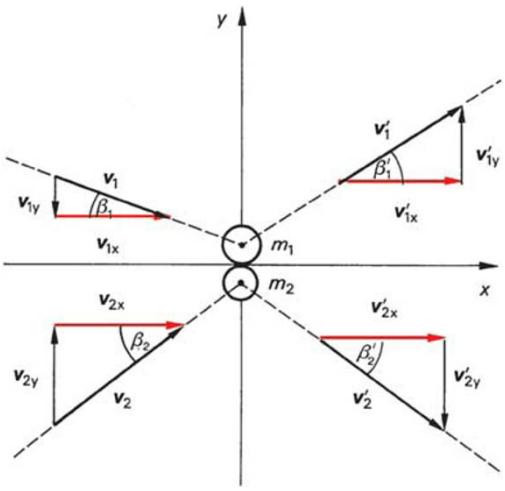


Abb. 2.43 Schiefer, zentraler, elastischer Stoß

Der Impulserhaltungssatz nach (2.54) in Richtung der Stoßgeraden ergibt eine weitere skalare Bestimmungsgleichung:

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \,. \qquad (2.93)$$

Beim elastischen Stoß entsteht kein Energieverlust; der Energieerhaltungssatz nach (2.81) lautet also

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) \qquad (2.94)$$
$$= \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2\right) \,.$$

Gleichungen (2.91) bis (2.94) sind vier Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Komponenten $v_{1x}', v_{1y}', v_{2x}'$ und v_{2y}' der Stoßpartner nach dem Stoß. Die Lösungen des Gleichungssystems sind in Tabelle 2.5 dargestellt.
Sind die Massen der beiden Stoßpartner gleich und ist der gestoßene Körper in Ruhe, dann folgt aus (2.94)

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \,. \qquad (2.95)$$

Tabelle 2.5 Schiefer, zentraler, elastischer Stoß

	Geschwindigkeiten vor dem Stoß	nach dem Stoß
Körper 1	v_{1x}	$v'_{1x} = v_{1x}$
Masse m_1	v_{1y}	$v'_{1y} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{1y} + 2m_2 v_{2y}}{m_1 + m_2}$
Körper 2	v_{2x}	$v'_{2x} = v_{2x}$
Masse m_2	v_{2y}	$v'_{2y} = \dfrac{2m_1 v_{1y} + (m_2 - m_1)v_{2y}}{m_1 + m_2}$

Die Geschwindigkeitsrichtungen der Stoßpartner stehen in diesem Fall nach dem Stoß senkrecht aufeinander. Erfolgt andererseits der schiefe, zentrale, elastische Stoß gegen eine Wand ($m_2 \gg m_1$), dann folgt aus Tabelle 2.5

$$\boldsymbol{v}_{1y} = -\boldsymbol{v}'_{1y} \,. \tag{2.96}$$

Der Tangens der Winkel $\tan\beta_1 = \tan(v_{1y}/v_{1x})$ und $\tan\beta'_1 = \tan(v'_{1y}/v'_{1x})$ sind gleich groß. Dies ist das Reflexionsgesetz für den schiefen elastischen Stoß eines Körpers an einer Wand:

$$\beta'_1 = \beta_1 \,. \tag{2.97}$$

Der Ausfallwinkel ist also gleich dem Einfallwinkel.

2.7.4.2 Inelastische Stöße

Wenn der Stoßvorgang nicht mehr elastisch erfolgt, dann gilt der Energieerhaltungssatz der Mechanik nicht mehr. Zwar liefert der Impulserhaltungssatz für die beiden kartesischen Koordinaten zwei skalare Gleichungen, aber es sind zusätzlich noch zwei geometrische Bedingungen für den Stoßvorgang notwendig. Diese können beobachtete Ablenkwinkel oder gemessene Geschwindigkeitsbeträge sein. Hat man die Geschwindigkeiten nach dem Stoßvorgang bestimmt, so kann man durch Vergleich der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß den Energieanteil ermitteln, der in nichtmechanische Energieformen umgesetzt wurde.

Ein grundlegendes Beispiel für einen inelastischen Stoß ist der *Franck-Hertz-Versuch* (Abschn. 8.2, Abb. 8.6). Gasatome nehmen beim Stoß mit Elektronen nur diskrete Energien auf und geben sie kurze Zeit später als Lichtquant ab.

Zur Übung

Ü 2.7-1 Im Weltraum, wo äußere Kräfte vernachlässigt werden dürfen, soll von einer Trägerrakete (Masse m, Geschwindigkeit v) eine Raumkapsel (Masse $m/2$) abgesprengt werden. Das nicht mehr gebrauchte Bruchstück (Masse $m/2$) soll dabei zur Ruhe kommen. Welcher Energiebetrag ist dem System zuzuführen?

Ü 2.7-2 Ein Eisenbahnwaggon (Masse $m_1 = 24\,000$ kg) rollt mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 3$ m/s auf geraden, ebenen Schienen. Er stößt mit einem zweiten Waggon (Masse $m_2 = 20\,000$ kg), der sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = 1{,}8$ m/s in derselben Richtung bewegt, zusammen.

a) Nehmen Sie an, die Waggons kuppeln beim Stoß zusammen. Welches ist die gemeinsame Endgeschwindigkeit v'? Welcher Betrag an Energie wurde in Wärme umgesetzt? b) Nehmen Sie an, der Zusammenstoß sei vollständig elastisch und die Waggons trennen sich dann wieder. Welches sind dann die Endgeschwindigkeiten v'_1 und v'_2 der beiden Waggons? c) Was ändert sich an den Antworten zu den Teilfragen a) und b), wenn sich die beiden Waggons anfangs aufeinander zu bewegen?

Ü 2.7-3 Ein Geschoss (Masse $m_1 = 20$ g) fliegt horizontal mit der Geschwindigkeit $v_1 = 200$ m/s. Es trifft auf einen als Pendel an einem langen Draht aufgehängten Holzklotz (Masse $m = 1{,}0$ kg) und durchschlägt ihn. Nachdem die Kugel aus dem Klotz ausgetreten ist, hat das Pendel eine Geschwindigkeit von $v_p = 2{,}0$ m/s.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit v'_1 des Geschosses nach Durchschlagen des Pendelklotzes? (Dabei darf

die Bewegung des Pendels in der Wechselwirkungszeit mit dem Geschoss vernachlässigt werden.) b) Ist der Zusammenstoß vollständig unelastisch? Welcher Anteil der kinetischen Energie wird in nichtmechanische Energien umgesetzt?

Ü 2.7-4 Ein Körper (Masse $m_1 = 50\,\text{g}$) hat eine Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\text{m/s}$. Er trifft auf ein ruhendes Objekt ($m_2 = 100\,\text{g}$). Nach dem Zusammenstoß ist die Geschwindigkeit des ersten Körpers auf $v_1' = 6\,\text{m/s}$ vermindert; er fliegt in eine Richtung, die um 45° gegen seine ursprüngliche Flugrichtung abweicht.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_2' – nach Betrag und Richtung – des zweiten Körpers nach dem Stoß? b) Wie viel Energie wird beim Stoß in nichtmechanische Energieformen umgesetzt?

2.8 Drehbewegungen

2.8.1 Drehmoment

Um einen materiellen Punkt oder einen Körper in Rotation um eine vorgegebene Drehachse zu versetzen, muss ein *Drehmoment* ausgeübt werden.

Das Drehmoment hängt gemäß Abb. 2.44 ab von *Betrag* und *Richtung* der *Kraft* $\boldsymbol{F}$ und dem *Abstand* $\boldsymbol{r}$ des Angriffspunkts der Kraft von der Drehachse. Die *Richtung* des Drehmoments steht senkrecht auf der von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ aufgespannten Ebene. Das Drehmoment ist definiert als Vektorprodukt aus dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ und der äußeren Kraft $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\,. \tag{2.98}$$

Ein Drehmoment hat seinen größten Wert, wenn der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ und die Kraft $\boldsymbol{F}$ senkrecht aufeinander stehen. Die Maßeinheit des Drehmoments ist 1 N m. Dies ist formal die gleiche Einheit, die auch Arbeit und Energie haben; im Gegensatz zu diesen skalaren Größen ist das Drehmoment jedoch eine Vektorgröße. Für die Berechnung von Gleichgewichten, besonders bei starren Körpern (Abschn. 2.9), spielt das Drehmoment eine zentrale Rolle.

2.8.2 Newton'sches Aktionsgesetz der Drehbewegung

2.8.2.1 Drehimpuls eines materiellen Punktes

Der momentane Ort eines materiellen Punktes der Masse m, der sich unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}$ auf einer Bahnkurve bewegt, wird durch den Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ vom Ursprung eines Inertialsystems aus beschrieben, wie aus Abb. 2.45 hervorgeht.

Seine Momentangeschwindigkeit ist $\boldsymbol{v}$, der Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Der materielle Punkt führt eine

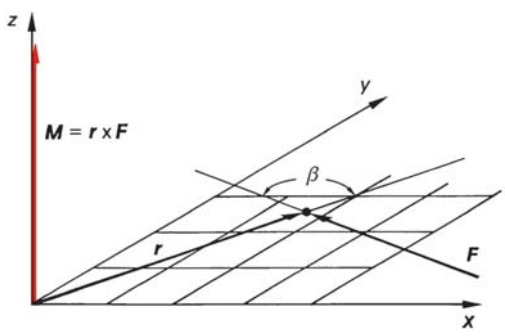


Abb. 2.44 Zur Definition des Drehmoments $\boldsymbol{M}$

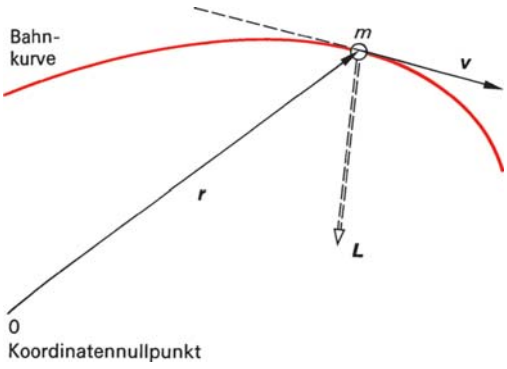


Abb. 2.45 Zur Definition des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$

Drehbewegung aus, wenn sein Impuls $\boldsymbol{p}$ eine Komponente senkrecht zum Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ des materiellen Punkts hat, das Vektorprodukt $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ also nicht verschwindet. Diese für die Drehbewegung charakteristische Größe wird als *Drehimpuls* $\boldsymbol{L}$ definiert:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \,. \tag{2.99}$$

Die Maßeinheit des Drehimpulses ergibt sich zu 1 N m s.
Für einen materiellen Punkt, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ auf einer Kreisbahn umläuft, ist die momentane Bahngeschwindigkeit nach Tabelle 2.1 gegeben durch $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ der Drehbewegung des materiellen Punktes ist somit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= m[(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}] \,.\end{aligned}$$

Weil $\boldsymbol{r}$ senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ steht, ist $(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$ und

$$\boldsymbol{L} = (mr^2)\boldsymbol{\omega} \,. \tag{2.100}$$

Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Drehbewegung. Die Proportionalitätskonstante ist das *Massenträgheitsmoment* J des materiellen Punktes im Abstand r von der Drehachse:

$$J = mr^2 \,. \tag{2.101}$$

Der Drehimpuls L als die *Bewegungsgröße der Drehbewegung* ergibt sich damit zu

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} \,. \tag{2.102}$$

Verglichen mit dem Impuls $\boldsymbol{p}$ der Translationsbewegung tritt beim Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ der Rotationsbewegung an die Stelle der Masse m das geometrieabhängige Massenträgheitsmoment J und an die Stelle der Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.

2.8.2.2 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Aus (2.99) folgt für die zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \,.$$

Die Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ und der Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ sind gleichgerichtet, ihr Vektorprodukt verschwindet. Nach dem Newton'schen Aktionsprinzip (2.24) ist die Impulsänderung $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ gleich der äußeren Kraft $\boldsymbol{F}$ auf die Masse m und somit ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} \,. \tag{2.103}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte auf den Körper.

Wirken keine äußeren Momente, dann bleibt der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ nach Betrag und Richtung konstant, der Drehimpuls des materiellen Punkts bleibt erhalten. Zentralkräfte, wie beispielsweise die Gravitationskraft (Abschn. 2.10), die dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ des materiellen Punktes entgegengesetzt gerichtet sind, üben auf diesen kein Drehmoment aus; der Bahndrehimpuls der Körper ist konstant. Wird das Massenträgheitsmoment durch eine Verkürzung des Abstands der Masse zur Drehachse vermindert, so erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers.
Auf einer Kreisbahn ist das Massenträgheitsmoment J eines materiellen Punktes konstant. Aus (2.102) folgt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\boldsymbol{\omega}) = J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \,,$$

und mit (2.103) und der Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$ ergibt sich das *dynamische Grundgesetz der Rotation:*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha} \,. \tag{2.104}$$

Wie bei der Newton'schen Grundgleichung (2.25) gilt:

> Die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ der Drehbewegung ist der Ursache, dem äußeren Drehmoment $\boldsymbol{M}$, proportional.

Die Integration von (2.103) ergibt den *Drehmomentenstoß:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t = \Delta\boldsymbol{L} \,. \tag{2.105}$$

Die Drehimpulsänderung $\Delta\boldsymbol{L}$ ist gleich dem Integral des von den äußeren Kräften ausgeübten Drehmoments. Ist das äußere Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 =$ konstant, dann ist die Drehimpulsänderung durch den Drehmomentenstoß $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_0\Delta t$.

2.8.3 Arbeit, Leistung und Energie bei der Drehbewegung

Ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$, das einen Körper um eine Achse in eine Drehbewegung versetzt, verrichtet Arbeit. Die Arbeit W bei der Rotationsbewegung ist nach Abb. 2.32

$$W = \int_{s_0}^{s_1} \boldsymbol{F}(s)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \boldsymbol{F}(\varphi)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}(\varphi))\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$$

oder

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \boldsymbol{M}(\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \,. \tag{2.106}$$

Ist das Drehmoment konstant, dann gilt

$$W = M(\varphi_1 - \varphi_0) \,.$$

Das aufzuwendende Drehmoment M ist proportional zum Drehwinkel φ bei der *Torsion von Körpern im elastischen Bereich* oder bei *Torsionsfedern.* Die Proportionalitätskonstante wird analog zum Hooke'schen Gesetz der longitudinalen Dehnung als *Drehfedersteifigkeit* k_t bezeichnet. Die Arbeit gegen das winkelabhängige Torsionsmoment ergibt sich aus der Integration von (2.106):

$$W = \frac{1}{2}k_\mathrm{t}\left(\varphi_1^2 - \varphi_2^2\right) \,. \tag{2.107}$$

Die Torsionsarbeit wird in der elastischen Verformung des deformierbaren Körpers gespeichert. Die sehr kleinen Richtmomente von Torsionsfäden ermöglichen es, aus der Drehwinkeländerung sehr kleine Energien, wie beispielsweise bei der Bestimmung der Gravitationskraft mit der Torsionswaage (Abschn. 2.10.2), zu messen. Aus (2.106) folgt für die *momentane Leistung* der Kraft, die das Drehmoment bewirkt,

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega} \,. \tag{2.108}$$

Durch die Arbeitszufuhr oder -abfuhr ändert sich die kinetische Energie eines im Abstand r um eine Drehachse rotierenden materiellen Punktes. Seine *Rotationsenergie* beträgt

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \qquad \text{oder}$$

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2 \,. \tag{2.109}$$

Nach dem Energiesatz (2.75) ändert die Arbeit der äußeren Kraft eines Drehmoments die Rotationsenergie. Mit (2.104) und (2.106) ergibt sich der Energiesatz für Drehbewegungen:

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} J\alpha \,\mathrm{d}\varphi = J \int_{t(\varphi_0)}^{t(\varphi_1)} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\omega \;\mathrm{d}t$$
$$= J \int_{\omega(\varphi_0)=\omega_0}^{\omega(\varphi_1)=\omega_1} \omega \,\mathrm{d}\omega$$

bzw.

$$W = \frac{1}{2}J\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) \,. \tag{2.110}$$

Die Differenz der Rotationsenergie in der End- und Anfangslage ist gleich der Arbeit, die von dem am Körper angreifenden, äußeren Drehmoment bei der Drehung des Körpers um eine feste Drehachse verrichtet wird.

2.8.4 Drehbewegungen von Systemen materieller Punkte

2.8.4.1 Drehimpulssatz

In einem System von N materiellen Punkten, deren Koordinaten von einem beliebigen Koordinatennullpunkt aus gemessen werden, wirken auf jeden materiellen Punkt k am Ort $\boldsymbol{r}_k(t)$ eine resultierende äußere Kraft $\boldsymbol{F}_k^{\text{a}}$ und innere Kräfte $\boldsymbol{F}_{jk}^{\text{i}}$, die von allen übrigen materiellen Punkten $j \neq k$ des Systems ausgehen. Der Drehimpulssatz (2.103) lautet dann für den materiellen Punkt k

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_k \times \left(\boldsymbol{F}_k^{\text{a}} + \sum_{j\neq k}^{N} \boldsymbol{F}_{jk}^{\text{i}}\right)$$
$$= \boldsymbol{M}_k^{\text{a}} + \sum_{j\neq k}^{N} \boldsymbol{M}_{jk}^{\text{i}} \,.$$

Es ergeben sich N Gleichungen für die materiellen Punkte des Systems. Werden diese summiert, dann verschwindet die Summe der Momente der inneren Kräfte:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\neq k}^{N} \boldsymbol{M}_{jk}^{\text{i}} = 0 \,.$$

Nach (2.98) und dem dritten Newton'schen Axiom $\boldsymbol{F}_{jk}^{\text{i}} = -\boldsymbol{F}_{kj}^{\text{i}}$ ergibt sich

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{21}^{\text{i}} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{12}^{\text{i}} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_{12}^{\text{i}} = 0 \,,$$

weil $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ parallel zu $\boldsymbol{F}_{12}^{\text{i}}$ ist, wie man in Abb. 2.46 erkennt. Werden die Drehimpulse der einzelnen materiellen Punkte zu einem Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{L}_k$ und die äußeren Momente zu einem resultierenden Gesamtdrehmoment $\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{M}_{\text{k}}^{\text{a}}$ zusammengefasst, dann folgt der Drehimpulssatz für ein System von materiellen Punkten:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \,. \tag{2.111}$$

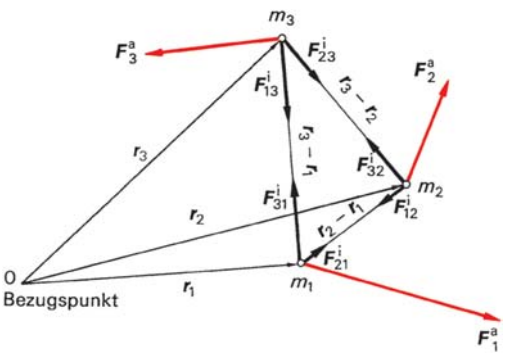


Abb. 2.46 Zum Drehimpulssatz: System aus drei materiellen Punkten

Der Drehimpulssatz für ein System entspricht formal völlig dem für einen einzelnen materiellen Punkt (2.103).

2.8.4.2 Drehimpulserhaltungssatz

Wirken auf ein System von N materiellen Punkten mit dem Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{L}_k$ keine äußeren Momente ($\boldsymbol{M}^a = 0$), dann ist nach dem Drehimpulssatz (2.111) die Drehimpulsänderung $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = 0$. Die Summe der Einzeldrehimpulse des Massensystems ist konstant und der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}$ bleibt nach Betrag und Richtung erhalten:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_N = \text{konstant} . \tag{2.112}$$

Verschwindet das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte auf ein System materieller Punkte, dann gilt der *Drehimpulserhaltungssatz.*

$$\begin{aligned} &J_1\boldsymbol{\omega}_1(t_1) + J_2\boldsymbol{\omega}_2(t_1) + \ldots + J_N\boldsymbol{\omega}_N(t_1) \\ &= J_1\boldsymbol{\omega}_1(t_2) + J_2\boldsymbol{\omega}_2(t_2) + \ldots + J_N\boldsymbol{\omega}_N(t_2) \end{aligned} \tag{2.113}$$

Beispiel

2.8-1 Eine Eiskunstläuferin dreht sich mit ausgebreiteten Armen mit der Drehfrequenz $n_0 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Zur Pirouette verkleinert sie ihr Massenträgheitsmoment von $J_0 = 6\,\mathrm{kg\,m^2}$ auf $J_1 = 1{,}2\,\mathrm{kg\,m^2}$ in der Zeit $\Delta t = 1{,}0\,\mathrm{s}$.
Wie groß ist die neue Drehfrequenz n_1 und die mittlere Leistung, die sie aufbringt?

Lösung

Bei Vernachlässigung der Reibung zwischen Schlittschuhen und Eis bleibt der Drehimpuls erhalten: $L_0 = L_1$ oder $n_0 J_0 = n_1 J_1$. Daraus folgt $n_1 = n_0 J_0/J_1 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$. Die mittlere Leistung ist

$$P_\mathrm{m} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{J_1\omega_1^2 - J_0\omega_0^2}{\Delta t} = 1{,}9\,\mathrm{kW} .$$

2.8.4.3 Energieerhaltungssatz

Wenn einem Systen materieller Punkte keine Arbeit zugeführt wird, bleibt die Energie der Rotationsbewegung konstant. Für das System gilt nach (2.110) der *Energieerhaltungssatz für die Rotationsenergie* der Massenpunkte:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} J_k \omega_k^2 = \text{konstant} . \tag{2.114}$$

Nur bei starren Körpern sind die Winkelgeschwindigkeiten der materiellen Punkte gleich; dann gilt für die Rotationsenergie die einfachere (2.130).

2.8.5 Analogie Translation und Rotation

Die mathematische Struktur der Bewegungsgleichungen und die Beziehungen für Arbeit und Energie der Rotationsbewegung entsprechen völlig denjenigen der Translationsbewegung. An die Stelle der Kraft $\boldsymbol{F}$, der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ und der Masse m in den Beziehungen für die Translation treten bei der Rotation die physikalischen Größen Drehmoment $\boldsymbol{M}$, Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ und Massenträgheitsmoment J. In Tabelle 2.6 sind die entsprechenden Beziehungen und Gleichungen einander gegenübergestellt.

Zur Übung

Ü 2.8-1 Ein Körper der Masse m fällt aus der Ruhe im Gravitationsfeld der Erde. Er bewegt sich vom Punkt A parallel zur y-Achse, wie Abb. 2.47 verdeutlicht. a) Wie groß ist das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ bezüglich des Koordinatenursprungs? b) Wie groß ist der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ bezüglich des Koordinatenursprungs in Abhängigkeit von der Zeit? c) Zeigen Sie, dass der Drehimpulssatz gilt, dass also $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ ist.

Ü 2.8-2 Vier gleiche Massen befinden sich an den Ecken eines Quadrats der Seitenlänge b gemäß

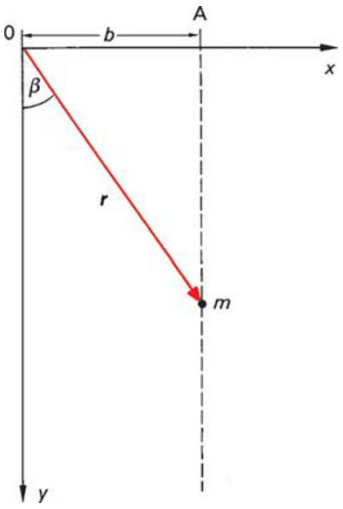


Abb. 2.47 Zu Ü 2.8-1

Abb. 2.48. Wie groß sind die vier Massenträgheitsmomente

a) J_A bezüglich einer Achse senkrecht zur Zeichenebene durch das Zentrum des Quadrats,
b) J_B bezüglich einer Achse senkrecht zur Zeichenebene durch einen Eckpunkt,
c) J_C bezüglich einer Achse in der Zeichenebene in einer Diagonalen und
d) J_D bezüglich einer Achse in der Zeichenebene längs einer Quadratseite?

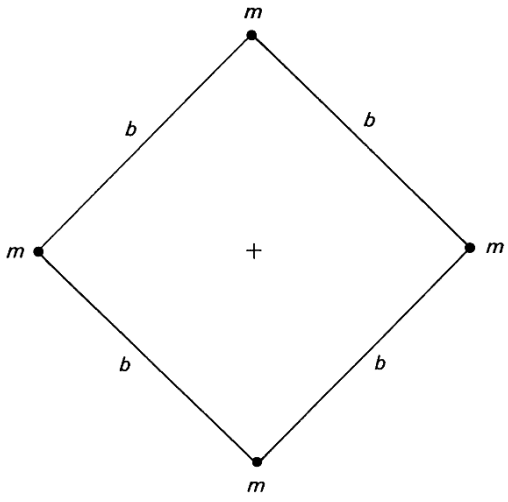


Abb. 2.48 Zu Ü 2.8-2

2.9 Mechanik starrer Körper

Ein starrer Körper ist ein System aus N einzelnen Massenpunkten, deren gegenseitige Abstände vollkommen unveränderlich sind. Auch unter dem Einfluss äußerer Kräfte soll der starre Körper seine Form nicht ändern. Obwohl ein solcher idealisierter Körper in der Natur nicht existiert, ist das Konzept des starren Körpers sehr hilfreich, um viele technische und physikalische Probleme auf einfache Weise und mit genügender Genauigkeit zu lösen.

2.9.1 Freiheitsgrade und Kinematik

Ein einzelner Massenpunkt benötigt zu seiner Lokalisierung in einem Koordinatensystem drei Angaben, d. h., ein Massenpunkt hat $f = 3$ *Freiheitsgrade*. Ein System von N voneinander unabhängigen Massenpunkten (etwa ein Gas) hat demnach $f = 3N$ Freiheitsgrade. Da aber bei einem starren Körper die Abstände zwischen den einzelnen Punkten fest sind, vermindert sich die Anzahl der Freiheitsgrade erheblich, und zwar auf sechs. Ein starrer Körper hat also $f = 6$ Freiheitsgrade. Die Kenntnis von sechs Größen reicht demnach aus, um die Lage und Orientierung eines starren Körpers im Raum eindeutig zu beschreiben. So kann in einem kartesischen Koordinatensystem ein Punkt des Körpers, beispielsweise der Massenmittelpunkt, mit Hilfe von drei Koordinaten festgelegt werden. Drehungen des Körpers um diesen Punkt sind durch weitere drei Winkel gegen die Koordinatenachsen vollständig definiert.
Die sechs Freiheitsgrade des starren Körpers lassen sich aufspalten in je drei Freiheitsgrade der Translations- und der Rotationsbewegung.

Bei einer Translation werden alle Punkte des starren Körpers um die gleiche Strecke parallel verschoben.

Tabelle 2.6 Analogie Translation und Rotation

Translation Größe, Formelzeichen	Einheit	Rotation Größe, Formelzeichen	Einheit
Weg s, $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	m	Winkel $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$	rad = 1
Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t}$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t^2}$	$\mathrm{m/s^2}$	Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$	$\mathrm{rad/s^2} = 1/\mathrm{s^2}$
Masse m	kg	Massenträgheitsmoment $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$	$\mathrm{kg\,m^2}$
Kraft $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{kgm/s^2} = \mathrm{N}$	Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$	Nm
Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	kg m/s = N s	Drehimpuls $\boldsymbol{L} = J\omega$	$\mathrm{kg\,m^2/s} = \mathrm{N\,m\,s}$
Federsteifigkeit $k = \left\lvert \frac{F}{s} \right\rvert$	N/m	Drehfedersteifigkeit $k_t = \left\lvert \frac{\boldsymbol{M}}{\varphi} \right\rvert$	N m/rad = N m
Arbeit $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	N m = J = Ws	Arbeit $\mathrm{d}W = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$	N m = J = W s
Spannarbeit $W = \frac{1}{2}ks^2$	J	Spannarbeit $W = \frac{1}{2}k_t\varphi^2$	$\mathrm{N\,m\,rad^2} = \mathrm{J}$
kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	J	kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$	J
Leistung $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}$	W = J/s	Leistung $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega}$	W = J/s

Abbildung 2.49a zeigt die Translation eines Körpers in der x, y-Ebene. Verschiebungen in der z-Richtung sind selbstverständlich ebenfalls möglich. Der Punkt P läuft auf der gestrichelten Bahnkurve. Die Bahnkurven der anderen Punkte des Körpers haben dieselbe Form, sie sind lediglich parallel verschoben.

Abbildung 2.49b zeigt die Rotation um den feststehenden Punkt P. Die Drehachse steht senkrecht zur Zeichenebene. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit verläuft parallel zur z-Achse (Abschn. 2.2.3). Aus Abb. 2.49c geht hervor:

Bei der Rotation eines starren Körpers rotieren sämtliche Massenpunkte mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit.

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus Translation und Rotation zusammen.

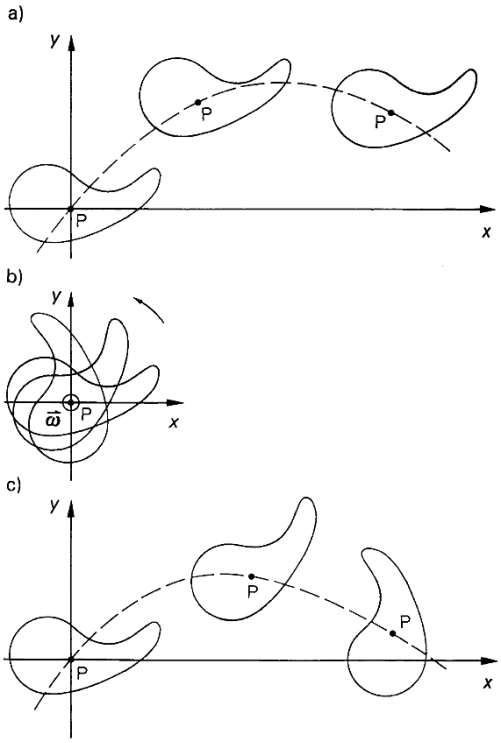


Abb. 2.49 Bewegung eines starren Körpers: **a**) Translation, **b**) Rotation, **c**) zusammengesetzte Bewegung

So entsteht z. B. die in Abb. 2.15 gezeigte Zykloide durch Überlagerung einer geradlinigen Translationsbewegung konstanter Geschwindigkeit mit einer Rotationsbewegung konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Beispiel

2.9-1 Ein Rad rollt entsprechend Abb. 2.50 auf einer ebenen Unterlage. Sein Radius beträgt $r = 0{,}28$ m. Die Geschwindigkeit des Mittelpunkts beträgt $v_M = 100$ km/h. Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Punkte A, B und C relativ zur Fahrbahn (s. auch Beispiel 2.2-5)?

Lösung

Die Geschwindigkeit der Punkte erhält man durch Überlagerung der gemeinsamen Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_M$ nach rechts mit einer Umfangsgeschwindigkeit, die jeweils tangential zum Kreis verläuft.

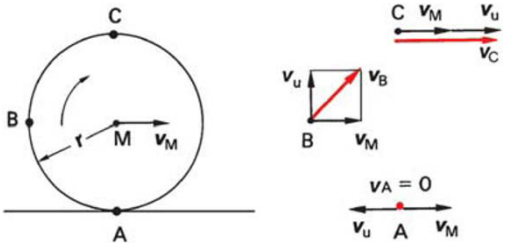


Abb. 2.50 Zu Beispiel 2.9-1: Abrollendes Rad

Der Betrag der Umfangsgeschwindigkeit ist für alle Punkte gleich, nämlich $v_U = \omega r$. Die Größe folgt aus der Forderung, dass die Geschwindigkeit des Punktes A, der mit der ruhenden Fahrbahn in Kontakt ist, null sein muss. Dies ist nur dann der Fall, wenn $v_M = v_U$ ist. Die Geschwindigkeit des Punktes B ist unter 45° nach oben gerichtet. Ihr Betrag ist $v_B = \sqrt{2} v_M = 141$ km/h. Die Geschwindigkeit des Punktes C ist $\boldsymbol{v}_C = 2\boldsymbol{v}_M = 200$ km/h.

2.9.2 Kräfte am starren Körper

Kräfte, die am starren Körper angreifen, sind *linienflüchtig*.

Diese Eigenschaft sei anhand von Abb. 2.51 erläutert. An einem starren Körper greift im Punkt P_1 die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ an. Im Punkt P_2, der auf der *Wirkungslinie* der Kraft F_1 liegt, werden nun die Kräfte $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_2'$ angebracht, die entgegengesetzt gleich groß sind ($\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_2' = 0$) und deshalb auf den Bewegungszustand des Körpers keinen Einfluss haben. $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ sollen gleich groß sein: $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$. Nun fasst man in Gedanken $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2'$ zusammen. Die beiden Kräfte haben zwar keine Resultierende, würden aber einen elastischen Körper (z. B. ein Gummiband) in die Länge ziehen. Da der

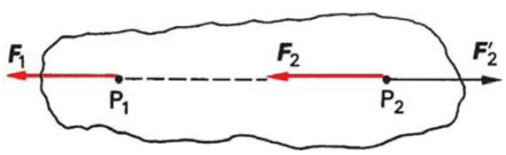


Abb. 2.51 Linienflüchtigkeit der Kraft am starren Körper

starre Körper keine Deformation erleidet, heben sich diese beiden Kräfte auf, ohne irgendeine Veränderung am Zustand des Körpers zu bewirken. Als einzige Kraft bleibt damit die Kraft $\boldsymbol{F}_2$ am Punkt P_2 übrig, welche die gleiche Wirkung hat wie die ursprüngliche Kraft $\boldsymbol{F}_1$ am Punkt P_1. Daraus folgt:

> Man darf bei einem starren Körper eine Kraft beliebig längs ihrer Wirkungslinie verschieben, ohne dass sich sein Bewegungszustand ändert.

Der Begriff des *Angriffspunktes* einer Kraft ist demnach beim starren Körper ohne Bedeutung. Jeder Punkt des Körpers längs der Wirkungslinie kann mit gleichem Recht als Angriffspunkt betrachtet werden.

Abbildung 2.52 zeigt, wie von zwei an verschiedenen Punkten A und B an einem starren Körper angreifenden Kräften, die in einer Ebene liegen, die Resultierende ermittelt wird. Im Schnittpunkt C der beiden Wirkungslinien wird die Resultierende $\boldsymbol{F}_R$ z. B. mit Hilfe des Kräfteparallelogramms ermittelt. Der Angriffspunkt der Resultierenden am starren Körper kann irgendwo längs ihrer Wirkungslinie angenommen werden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ an einem starren Körper angreifen, wobei die Wirkungslinien nicht auf einer Geraden liegen. Ein solches Kräftesystem, das in Abb. 2.53 gezeigt ist, nennt man ein *Kräftepaar.*

Die Resultierende eines solchen Kräftepaars ist null: $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. Aus dem Impulssatz für Systeme gemäß (2.50) folgt:

> Ein starrer Körper erfährt unter der Wirkung eines Kräftepaars keine Translationsbeschleunigung.

Mit anderen Worten: Wenn der Massenmittelpunkt des Körpers (Abschn. 2.5.2.2) in Ruhe ist, wird er diesen Zustand auch beibehalten, wenn ein Kräftepaar an ihm angreift.

Ein Kräftepaar versucht aber, den Körper in Rotation zu versetzen; es übt ein Drehmoment aus.

Die beiden Einzelkräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ haben bezüglich des willkürlich gewählten Nullpunkts 0 in Abb. 2.53 die Drehmomente

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \,.$$

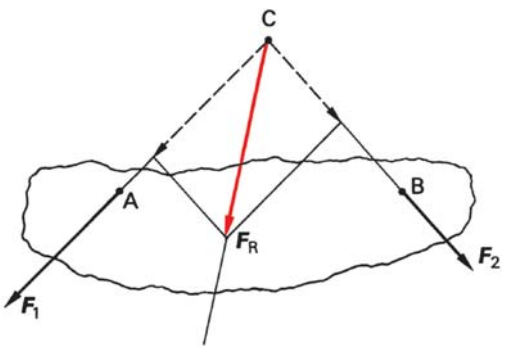


Abb. 2.52 Resultierende Kraft am starren Körper

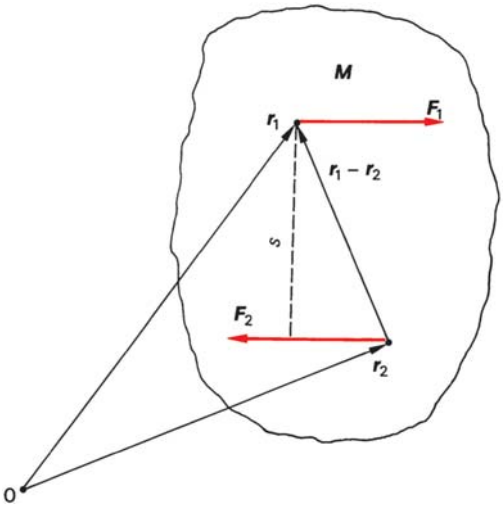


Abb. 2.53 Drehmoment eines Kräftepaars

Mit $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ folgt für das gesamte Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_1$ oder

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \,. \tag{2.115}$$

Der Vektor $\boldsymbol{M}$ steht senkrecht auf der Ebene, die von den Kräften aufgespannt wird. Er weist in Abb. 2.53 in die Zeichenebene hinein. Für den Betrag des Drehmoments gilt

$$M = sF \,; \tag{2.116}$$

dabei ist s der Abstand der beiden Wirkungslinien, F der Betrag der Kräfte: $F = |\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2|$. Das Drehmoment eines Kräftepaars ist nach (2.116) unabhängig von der Lage des Bezugspunkts 0. Es hängt nur von den Kräften selbst und deren gegenseitigem Abstand ab. Dies bedeutet:

> Das Kräftepaar darf auf dem starren Körper beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der Wirkung des ausgeübten Drehmoments etwas ändert.

Die Ebene, in der die Kräfte liegen, darf dabei nicht gekippt werden. Der Vektor $\boldsymbol{M}$ des Drehmoments ist auch nicht an einen bestimmten Punkt gebunden, sondern beliebig parallel verschiebbar. Man bezeichnet diesen Vektor deshalb als *freien* Vektor (im Gegensatz etwa zum *gebundenen* Vektor der Kraft oder dem *linienflüchtigen* Kraftvektor am starren Körper).

Wirkt ein Kräftepaar auf einen zunächst ruhenden, frei beweglichen starren Körper, dann wird dieser in Drehung versetzt; d. h., er erfährt eine Winkelbeschleunigung. Dabei rotiert der Körper um seinen Massenmittelpunkt; denn jener wird nach obigen Aussagen nicht beschleunigt, er ist also der einzige Punkt, der in Ruhe bleibt.

Soll ein starrer Körper in Ruhe bleiben (Grundaufgabe der Statik), dann muss das Drehmoment eines Kräftepaars durch ein anderes kompensiert werden, sodass insgesamt kein resultierendes Drehmoment übrig bleibt. Eine Translationsbeschleunigung des Körpers unterbleibt, wenn keine resultierende Kraft auf ihn wirkt. Diese Forderungen werden zusammengefasst in den *Gleichgewichtsbedingungen der Statik*:

$$\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{a} = 0 \,, \tag{2.117}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_\mathrm{a} = 0 \,. \tag{2.118}$$

> Ein starrer Körper ist im statischen Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Drehmomente null ist.

Beispiel

2.9-2 Der in Abb. 2.54 gezeigte Träger ist im Punkt A drehbar gelagert und wird im Punkt C von einer Kette gehalten. Im Punkt B greift unter 45° die Kraft $F = 500$ N an. Welche Lagerkräfte F_A und F_C werden durch F verursacht?

Lösung

Wenn an einem Körper nur drei Kräfte angreifen, müssen die Wirkungslinien aller Kräfte durch einen Punkt gehen, denn nur dann lässt sich nach (2.118) die Be-

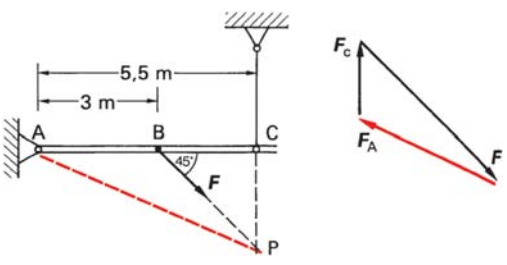


Abb. 2.54 Zu Beispiel 2.9-2: Belasteter Träger

dingung $\sum \boldsymbol{M}_a = 0$ erfüllen. Alle drei Kräfte dürfen bezüglich des gemeinsamen Schnittpunkts kein Drehmoment besitzen.

Da eine Kette nur Kräfte in Längsrichtung aufnehmen kann, ist die Wirkungslinie der Kettenkraft F_C durch die Verlängerung der Kette gegeben. Durch ihren Schnittpunkt P mit der Wirkungslinie von F muss auch die Wirkungslinie der Lagerkraft F_A gehen. Da nun die Richtungen der Kräfte bekannt sind, können die Beträge z. B. durch grafische Konstruktion eines Kraftecks ermittelt werden.

Aus dem Krafteck liest man mit einer entsprechenden Ungenauigkeit ab $F_A = 390\,\text{N}$ und $F_C = 190\,\text{N}$. Eine rechnerische Lösung des Problems durch systematische Anwendung von (2.117) und (2.118) ist ebenfalls möglich.

2.9.3 Schwerpunkt und potentielle Energie eines starren Körpers

Der Schwerpunkt S eines starren Körpers ist der Ort, an dem eine entgegengesetzt zur Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}$ wirkende Kraft $\boldsymbol{F}_S$ angreifen muss, damit dieser unter der Wirkung der Schwerkraft im statischen Gleichgewicht ist, wie Abb. 2.55 zeigt. Die Gleichgewichtsbedingungen der Statik nach (2.117) fordern das Kräftegleichgewicht zwischen den Gewichtskräften $\boldsymbol{F}_k = m_k\boldsymbol{g}$ der materiellen Punkte und der *Stützkraft* $\boldsymbol{F}_S$:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_S = 0\,;$$

$$\boldsymbol{F}_S = -\boldsymbol{g}\sum_{k=1}^{N} m_k = -m\boldsymbol{g}\,. \qquad (2.119)$$

Nach (2.118) gilt für das Drehmomentengleichgewicht bezüglich einer beliebigen Drehachse

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times m_k\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{F}_S = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\,\boldsymbol{r}_k - m\boldsymbol{r}_S\right) \times \boldsymbol{g} = 0\,.$$

Der Körper ist im statischen Gleichgewicht, wenn er am Ort

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{r}_k}{m} \qquad (2.120)$$

unterstützt wird. Der Schwerpunkt S eines starren Körpers ist also der bei der Bewegung eines Systems materieller Punkte nach dem Schwerpunktsatz (2.51) ausgezeichnete Ort. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Schwerpunktskoordinaten

$$x_S = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{m}\,,\quad y_S = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}{m}\,,$$
$$z_S = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k z_k}{m}\,. \qquad (2.121)$$

Bei starren Körpern mit kontinuierlicher Massenverteilung und homogener Dichte lässt sich die Schwerpunktskoordinate über das Volumenintegrale berechnen.

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{V}\iiint \boldsymbol{r}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

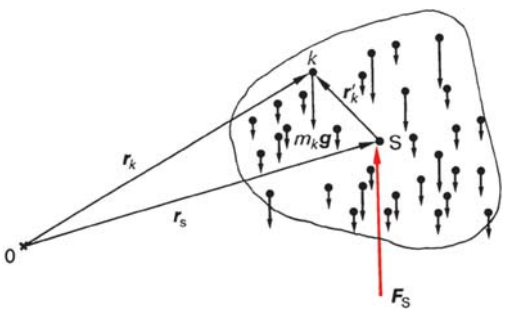


Abb. 2.55 Gleichgewicht eines starren Körpers

Bei homogenen symmetrischen Körpern liegt der Schwerpunkt auf den Symmetrieachsen.
Ein starrer Körper lässt sich nicht deformieren; der elastische Anteil der potentiellen Energie ist also null. *Ein starrer Körper hat als potentielle mechanische Energie nur die Lageenergie des Schwerpunkts.* Wird die z-Koordinate parallel zur Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}$ gelegt, dann gilt nach (2.121)

$$E_{\text{pot}} = \sum_{k=1}^{N} m_k\, g z_k = m g z_{\text{S}} \,. \qquad (2.122)$$

Die Höhe des Schwerpunkts S über dem Bezugsniveau bestimmt die potentielle Energie eines starren Körpers.
Die räumliche Änderung der potentiellen Energie bei der Auslenkung des Körpers aus der Gleichgewichtslage ist das Kennzeichen für die drei Gleichgewichtslagen starrer Körper. In Abb. 2.56 sind die Fälle des *stabilen, labilen und indifferenten Gleichgewichts* einander gegenübergestellt.

2.9.4 Kinetische Energie eines starren Körpers

Werden die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_k = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k(t)/\mathrm{d}t$ der materiellen Punkte eines Systems zerlegt in eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'_k = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k(t)/\mathrm{d}t$ relativ zum Schwerpunkt S und die Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\text{S}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\text{S}}(t)/\mathrm{d}t$ des Schwerpunktes, dann ist die kinetische Energie des Systems

$$E_{\text{kin}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\text{S}}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\text{S}}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\text{S}}(t)}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k(t)}{\mathrm{d}t} \,.$$

Der letzte Term ist der Gesamtimpuls der Massenpunkte im Schwerpunkt-Koor-

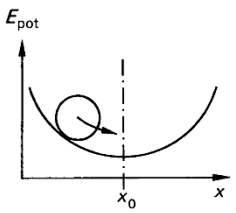
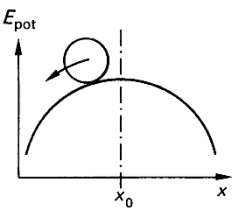
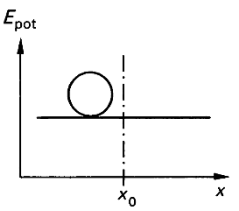
Gleichgewicht	stabil	labil	indifferent
Verlauf der potentiellen Energie in Richtung einer Koordinate x x_0 Ort der Gleichgewichtslage	Minimum 	Maximum 	konstant 
Reaktion auf eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage x_0	Körper kehrt zurück	Körper entfernt sich	Körper bleibt liegen
Schwerpunktslage S bei Verrückung aus der Gleichgewichtslage x_0	S wird angehoben	S senkt sich	S bleibt in gleicher Höhe

Abb. 2.56 Gleichgewichtslagen

dinatensystem S′, der nach der Schwerpunktsdefinition gemäß (2.120) null ist. Die kinetische Energie eines Systems materieller Punkte ist also die *Summe aus der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung* mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ und der Gesamtmasse $m = \sum_{k=1}^{N} m_k$ und *aus der kinetischen Energie der Bewegung relativ zum Schwerpunkt*:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k'^2 \,. \qquad (2.123)$$

Bei starren Körpern sind wegen der Konstanz der Abstände zwischen den Massenpunkten keine radialen Bewegungen relativ zum Schwerpunkt möglich, sondern nur Drehbewegungen um den Schwerpunkt (Abschn. 2.9.1). Die *kinetische Energie eines starren Körpers* setzt sich also zusammen aus dem Anteil $E_{\text{kin}}^{\text{trans}}$ der *Translation des Schwerpunkts* und dem Anteil $E_{\text{kin}}^{\text{rot}}$ der *Rotation der Massenpunkte um den Schwerpunkt*:

$$E_{\text{kin}}^{\text{ges}} = E_{\text{kin}}^{\text{trans}} + E_{\text{kin}}^{\text{rot}} \,. \qquad (2.124)$$

Nach (2.123) ist die *Translationsenergie des starren Körpers* mit der Gesamtmasse m

$$E_{\text{kin}}^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v_S^2 \,. \qquad (2.125)$$

Die Rotationsenergie eines starren Körpers, dessen Massenpunkte m_k, wie in Abb. 2.57 skizziert, um eine Achse durch den Punkt P mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω und der Umlaufgeschwindigkeit $v_{Pk} = \omega r_{Pk}$ rotieren, wobei der Punkt P sich mit der Momentangeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_P$ auf einer Bahnkurve bewegt, ist nach (2.123)

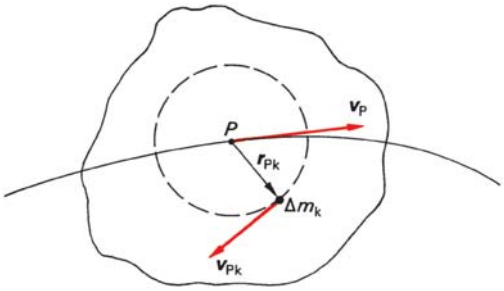


Abb. 2.57 Zur Berechnung der Rotationsenergie eines starren Körpers

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k r_{Pk}^2 \right) \omega^2 \,. \qquad (2.126)$$

Der Klammerausdruck wird analog zur Definitionsgleichung (2.101) als *Massenträgheitsmoment* J_P *des starren Körpers bezüglich der Drehachse* P bezeichnet:

$$J_P = \sum_{k=1}^{N} m_k r_{Pk}^2 \,. \qquad (2.127)$$

Für einen Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung geht die Summe in das Integral

$$J_P = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int_V \varrho(r) \, r^2 \, \mathrm{d}V \qquad (2.128)$$

über. Das Massenträgheitsmoment eines starren Körpers mit homogener Dichte wird über das Volumenintegral

$$J_P = \varrho \int_V \int \int r^2(x, y, z), \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \qquad (2.129)$$

berechnet. Die kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers um die Achse P mit dem Massenträgheitsmoment J_P ist also

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J_P \omega^2 \,. \qquad (2.130)$$

Gleichung (2.130) für den starren Körper stimmt mit (2.109) für die Rotationsenergie eines materiellen Punktes auf einer Kreisbahn exakt überein. Auch (2.102) für den Drehimpuls L eines einzelnen materiellen Punktes und das dynamische Grundgesetz nach (2.104) für die Drehbewegung eines Massenpunktes gelten für den starren Körper, wenn statt des Massenträgheitsmoments des materiellen Punktes auf einer Kreisbahn das Massenträgheitsmoment J_P des starren Körpers bezüglich der Drehachse P nach (2.127) eingesetzt wird.

Ein kräftefreier starrer Körper rotiert immer um den Schwerpunkt. Für die Berechnung der Rotationsenergie ist die Kenntnis des Massenträgheitsmoments J_S um die durch den Schwerpunkt gehende Rotationsachse erforderlich.

Beispiel

2.9-3 Bei einer Reibungskupplung gemäß Abb. 2.58 rotiert die Kupplungsscheibe ohne Antrieb mit der Drehzahl $n_1 = 3\,000\,\mathrm{min}^{-1}$, ihr Massenträgheitsmoment ist $J_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg\,m}^2$. Sie wird auf die anfangs stillstehende Scheibe mit dem Massenträgheitsmoment $J_2 = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m}^2$ gedrückt. Die Lager- und Luftreibung soll vernachlässigt werden. Wie groß ist die Drehzahl n' nach dem Kupplungsvorgang und welcher Anteil der ursprünglichen Rotationsenergie wurde in Wärme und Abriebarbeit umgesetzt?

Lösung

Ohne äußere Drehmomente gilt nach dem Drehimpulserhaltungssatz nach (2.113) $J_1 \omega_1 = J_1 \omega' + J_2 \omega'$. Mit $\omega = 2\pi n$ ergibt sich die Drehzahl nach dem Kupplungsvorgang:

$$n' = \frac{J_1}{J_1 + J_2} n_1 = 1\,667\,\mathrm{min}^{-1} \,.$$

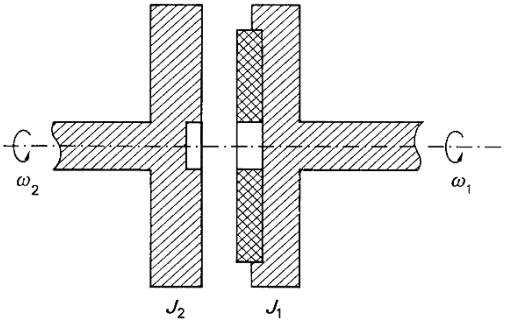


Abb. 2.58 Zu Beispiel 2.9-3

Die Verlustarbeit W_V ist nach dem Energiesatz (2.110)

$$W_V = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega'^2$$
$$= \frac{1}{2} J_1 (2\pi n_1)^2 \left[1 - \frac{J_1}{J_1 + J_2}\right] = 11\,\mathrm{kJ} \,;$$

der Verlustanteil beläuft sich auf

$$\frac{W_V}{\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2} = \frac{J_2}{J_1 + J_2} = 44\% \,.$$

Die Enddrehzahl n' und der Energieverlust W_V sind unabhängig von der Kupplungszeit. Während der Kupplungsdauer wird der Drehimpuls der Kupplungsscheibe verändert; das dabei am Kupplungsbelag auftretende Drehmoment ist nach (2.105) von der Kupplungsdauer abhängig und bestimmt die maximale Abriebkraft.

2.9.5 Massenträgheitsmomente starrer Körper

Das Massenträgheitsmoment hängt außer von der Masse selbst ganz wesentlich von der Form des Körpers und der Verteilung der Masse bezüglich der Drehachse ab. An einigen Beispielen soll die Berechnung mit Hilfe von (2.129) gezeigt werden.

1. Dünnwandiger Hohlzylinder, Massenträgheitsmoment bezüglich Rotationssymmetrieachse.

Ein Hohlzylinder wird dünnwandig genannt, wenn die Wandstärke s gegenüber seinem Ra-

dius r vernachlässigbar ist: $s \ll r$. Alle Masseteilchen haben dann praktisch den gleichen Abstand r von der Drehachse, sodass die Summation nach (2.127) ergibt

$$J = m r^2 \ . \qquad (2.131)$$

2. Dickwandiger Hohlzylinder, Massenträgheitsmoment bezüglich Rotationssymmetrieachse (Abb. 2.59).
Der dickwandige Hohlzylinder kann erzeugt werden durch Ineinanderstellen von unendlich vielen dünnwandigen Hohlzylindern, von denen in Abb. 2.59 einer rot eingezeichnet ist. Die Masse dieses Hohlzylinders der Dichte ϱ mit Radius r und Wandstärke $\mathrm{d}r$ ist $\mathrm{d}m = 2\pi r l \varrho \mathrm{d}r$. Sein Massenträgheitsmoment ist nach (2.131)

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}m\, r^2 = 2\pi l \varrho r^3 \mathrm{d}r \ .$$

Das Massenträgheitsmoment des dickwandigen Hohlzylinders erhält man durch Summation (Integration) der Massenträgheitsmomente aller dünnwandigen Hohlzylinder:

$$J = 2\pi l \varrho \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} r^3 \mathrm{d}r = 2\pi l \varrho \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}}$$

$$= \frac{1}{2} \pi l \varrho \left(r_\mathrm{a}^4 - r_\mathrm{i}^4 \right) \ .$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Masse des Körpers $m = \pi \left(r_\mathrm{a}^2 - r_\mathrm{i}^2 \right) l \varrho$ umgeschrieben werden zu

$$J = \frac{1}{2} m \left(r_\mathrm{a}^2 + r_\mathrm{i}^2 \right) \ .$$

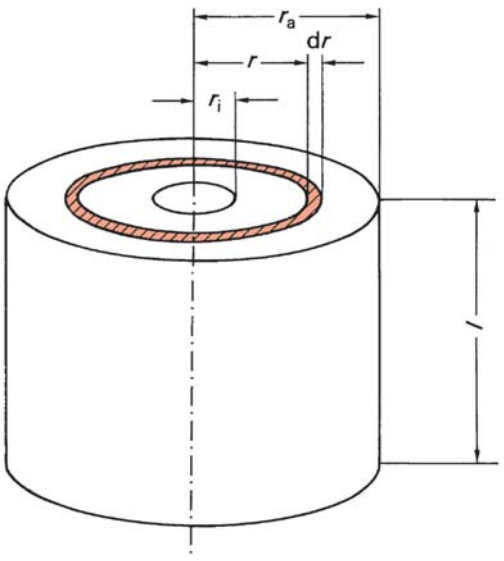


Abb. 2.59 Zum Massenträgheitsmoment des dickwandigen Hohlzylinders

3. Vollzylinder, Massenträgheitsmoment bezüglich Rotationssymmetrieachse.
Das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders mit dem Radius r und der Masse m folgt sofort aus obiger Gleichung für $r_\mathrm{i} = 0$ und $r_\mathrm{a} = r$:

$$J = \frac{1}{2} m r^2 \ .$$

Abbildung 2.60 zeigt eine Zusammenstellung von Massenträgheitsmomenten einiger Körper.

Beispiel

2.9-4 Ein Vollzylinder mit der Masse m und dem Radius r rollt eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel β hinab, wie in Abb. 2.61 verdeutlicht. Wie groß ist seine Beschleunigung?

Lösung

Vernachlässigt man die Rollreibungsverluste, so läuft der Vorgang unter Energieerhaltung ab. Wenn die Walze längs der schiefen Ebene den Weg s zurücklegt, nimmt ihre potentielle Energie um $\Delta E_\mathrm{pot} = mgh = mg\, s \sin\beta$ ab. Um den gleichen Betrag nimmt die Bewegungsenergie zu, die sich als Summe von Translationsenergie und Rotationsenergie bezüglich der Symmetrieachse darstellen lässt:

$$\Delta E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_\mathrm{S} \omega^2 .$$

Mit $\omega = v/r$ ergibt sich

$$mgs \sin\beta = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_\mathrm{S} \frac{v^2}{r^2} \qquad \text{oder}$$

$$v^2 = \frac{2mg\, s \sin\beta}{m + J_\mathrm{S}/r^2} = \frac{4}{3} gs \sin\beta \ .$$

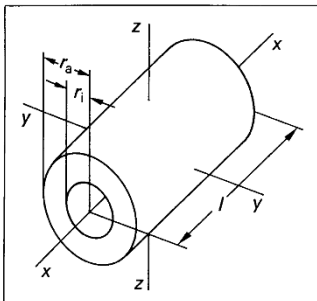
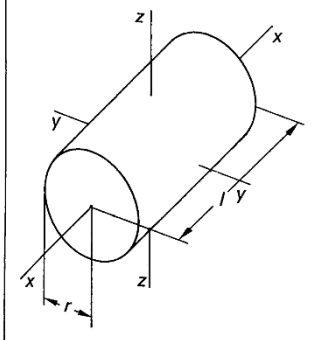
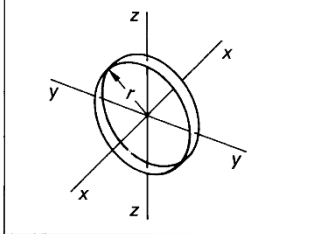
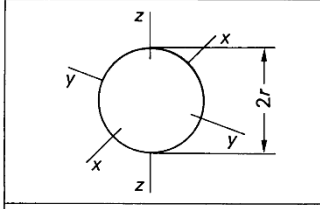
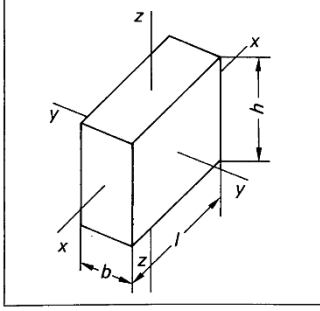
	Hohlzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m(r_a^2 + r_i^2)$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m\,(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$J_x = m\,r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m\,(2\,r^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m\,r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m\,r^2 + \frac{1}{12} m\,l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$J_x = \frac{1}{2} m\,r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m\,r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2} m\,r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12} m\,l^2$
	dünner Ring	$J_x = m\,r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{2} m\,r^2$
	Kugel massiv	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m\,r^2$
	dünne Kugelschale	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m\,r^2$
	Quader	$J_x = \frac{1}{12} m\,(b^2 + h^2)$ $J_y = \frac{1}{12} m\,(l^2 + h^2)$ $J_z = \frac{1}{12} m\,(l^2 + b^2)$

Abb. 2.60 Massenträgheitsmomente einiger Körper

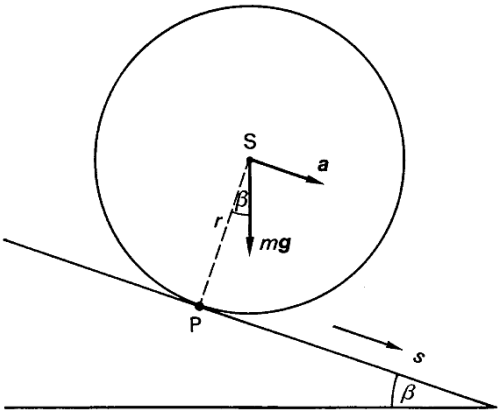


Abb. 2.61 Zu Beispiel 2.9-4: Walze auf schiefer Ebene

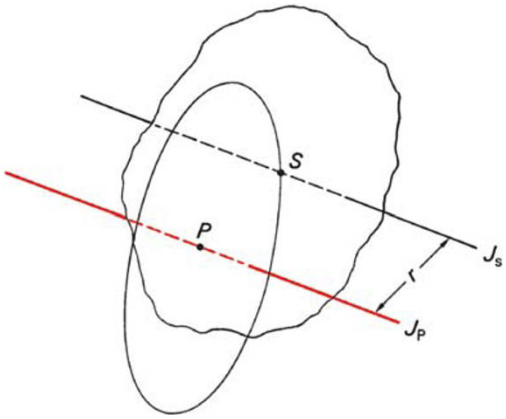


Abb. 2.62 Zum Steiner'schen Satz

Aus der für gleichmäßige Beschleunigung gültigen kinematischen Beziehung $v^2 = 2as$ folgt

$$a = \frac{2}{3} g \sin\beta \,.$$

Würde die Walze reibungsfrei abrutschen, ohne zu rotieren, dann wäre die Beschleunigung $a = g \sin\beta$.

Steiner'scher Satz

Die in Abb. 2.60 angegebenen Massenträgheitsmomente beziehen sich auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen. Aus diesen Massenträgheitsmomenten J_S lassen sich die Massenträgheitsmomente J_P bezüglich anderer Achsen schnell berechnen. Abbildung 2.62 zeigt einen starren Körper, der um eine Achse durch den Punkt P rotiert, die im Abstand r parallel zu einer Achse durch den Schwerpunkt S verläuft. Die Bewegungsenergie des Körpers ist nach (2.130) $E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_P \omega^2$.
Bewegung des Körpers, nämlich die Rotation um die Achse durch P, kann auch dargestellt werden als Translationsbewegung des Schwerpunkts und Rotation des Körpers um den Schwerpunkt. Interpretiert man die Bewegung auf diese Weise, dann setzt sich die kinetische Energie aus der Translationsenergie des Schwerpunktes (Masse m, Geschwindigkeit v_S) und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt zusammen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \,.$$

Mit $v_S = r\,\omega$ erhält man

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(mr^2 + J_S)\omega^2 .$$

Beide Betrachtungsweisen müssen selbstverständlich dieselbe Bewegungsenergie ergeben. Ein Vergleich mit (2.130) liefert daher

$$J_P = J_S + mr^2 \,. \qquad (2.132)$$

Diese Gleichung ist als *Steiner'scher Satz* (J. Steiner, 1796 bis 1863) bekannt. Aus dem Steiner'schen Satz folgt unmittelbar, dass für eine Schar paralleler Achsen das Trägheitsmoment minimal wird bezüglich der Achse, die durch den Schwerpunkt geht.
Die in Abb. 2.60 gezeigten Körper sind hochsymmetrisch. Für kompliziert geformte Gebilde lässt sich das Trägheitsmoment i. Allg. nicht mehr berechnen, sondern es muss experimentell bestimmt werden. Dazu eignen sich beispielsweise Drehschwingungen, bei denen die Schwingungsdauer vom Massenträg-

heitsmoment um die Drehachse abhängt (Abschn. 5.1).

Freie Achsen

Bestimmt man bezüglich aller Achsen durch den Schwerpunkt eines starren Körpers das Massenträgheitsmoment, dann stellt man fest, dass die Achsen mit dem größten und dem kleinsten Trägheitsmoment senkrecht aufeinander stehen. Diese beiden und die darauf senkrecht stehende dritte Achse werden als *Hauptträgheitsachsen* bezeichnet. Die Trägheitsmomente bezüglich dieser Achsen heißen *Hauptträgheitsmomente*. Bei rotationssymmetrischen Körpern (z. B. Zylinder, Scheibe und Ring) sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich. Alle zur Symmetrieachse senkrechten Achsen durch den Schwerpunkt haben das gleiche Trägheitsmoment. Bei einigen Körpern, deren Schwerpunkt Symmetriezentrum ist (z. B. Kugel, Würfel und Tetraeder), nimmt das Trägheitsmoment bezüglich jeder Achse durch den Schwerpunkt denselben Wert an.

Das Besondere an den Hauptträgheitsachsen ist, dass bei der Rotation eines Körpers um eine Hauptträgheitsachse keine Lagerreaktionen auftreten. Solche Drehachsen müssen also nicht im Raum fixiert werden; deshalb bezeichnet man sie als *freie Achsen*. Durch Hochwerfen eines quaderförmigen Kastens kann man sich leicht davon überzeugen, dass die Rotation um die Achsen mit dem kleinsten und größten Trägheitsmoment stabil, um die Achse mit dem mittleren dagegen labil ist. Abbildung 2.63 zeigt einige Körper, die um freie Achsen rotieren.

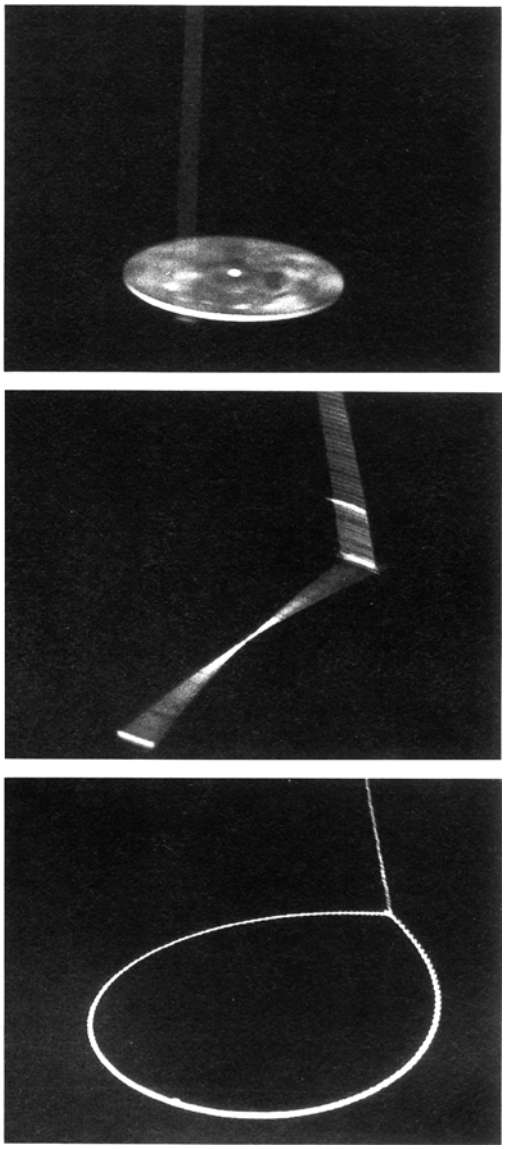


Abb. 2.63 Körper, die um freie Achsen (Symmetrieachsen mit größtem Massenträgheitsmoment) rotieren: **a**) Scheibe, **b**) Stab, **c**) Perlenkette

Das Auftreten der Lagerkräfte bei der Rotation um eine Achse, die nicht Hauptträgheitsachse ist, ist unmittelbar einleuchtend, wenn z. B. die Rotation einer Hantel nach Abb. 2.64 betrachtet wird. Vernachlässigt man die Masse des Stabes, dann greift an jeder Kugel eine Zentrifugalkraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{zf}}$ an, die versucht, die Kugel nach außen zu ziehen (d'Alembert'sches Prinzip). Das Kräftepaar der beiden Zentrifugalkräfte übt auf die Hantel das Drehmoment $\boldsymbol{M}_{\mathrm{zf}}$ aus, das versucht, die ganze Anordnung im Gegenuhrzeigersinn zu drehen. Von den Lagern

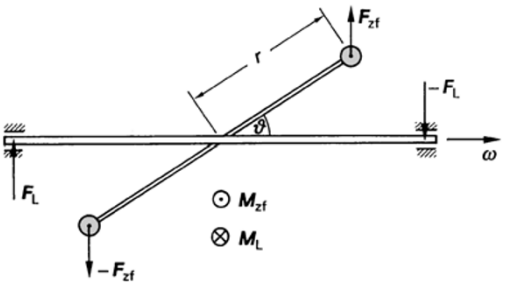


Abb. 2.64 Rotation einer Hantel

müssen daher die Lagerkräfte F_L auf die Welle ausgeübt werden, deren Drehmoment M_L das Kippmoment kompensiert. Für den Betrag des Drehmoments M_{zf} ergibt sich (s. *Ü 2.9-4*)

$$M_{zf} = 2mr^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, \omega^2 = mr^2\omega^2 \sin 2\vartheta\ .$$

Das Drehmoment und damit die erforderlichen Führungskräfte verschwinden für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90°$. In diesen Extremlagen rotiert die Hantel um eine Hauptträgheitsachse bzw. freie Achse.

Für den Maschinenbau ergibt sich hieraus die Konsequenz, dass alle schnell rotierenden Teile *ausgewuchtet* sein müssen, um unnötige Lagerbeanspruchungen zu vermeiden.

Trägheitstensor

Die Gleichung (2.102), $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$, für den Zusammenhang zwischen Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ suggeriert, dass die Richtung des Vektors $\boldsymbol{L}$ parallel ist zum Vektor $\boldsymbol{\omega}$. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn der rotierende Körper gewisse Symmetrieeigenschaften aufweist. Im Allgemeinen weisen $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ in verschiedene Richtungen.

Abbildung 2.65 zeigt einen unsymmetrischen starren Körper, der um die z-Achse rotieren soll. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit weist in z-Richtung. Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}_k$ eines beliebigen Massenpunktes m_k am Ort $\boldsymbol{r}_k$ beträgt

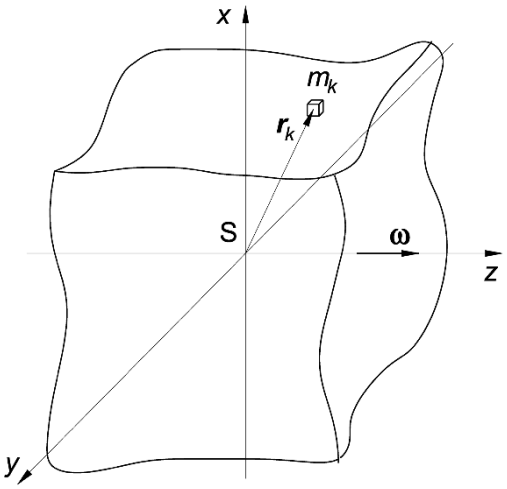


Abb. 2.65 Rotation eines starren Körpers um die z-Achse. Das x,y,z-Koordinatensystem ist körperfest, rotiert also mit

$$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{p}_k = m_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k = m_k \boldsymbol{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k)\ .$$

Führt man die beiden Vektorprodukte aus, so ergibt sich

$$\boldsymbol{L}_k = \omega\, m_k \begin{pmatrix} -x_k z_k \\ -y_k z_k \\ x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix}\ .$$

Der Drehimpuls des kompletten starren Körpers wird durch Summation über alle Massenpunkte berechnet:

$$\boldsymbol{L} = \omega \begin{pmatrix} -\sum m_k x_k z_k \\ -\sum m_k y_k z_k \\ \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \end{pmatrix}\ .$$

$\boldsymbol{L}$ hat gewöhnlich drei von Null verschiedene Komponenten, liegt also nicht parallel zum Vektor $\boldsymbol{\omega}$, der in z-Richtung schaut. Wenn der Körper rotiert, läuft $\boldsymbol{L}$ auf einem Kegelmantel um. Damit ist $\boldsymbol{L}$ nicht konstant und zur Führung des Körpers ist ein äußeres Drehmoment $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ erforderlich.

Der Zusammenhang zwischen den beiden zueinander verdrehten Vektoren $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ lässt

sich elegant beschreiben, wenn das Massenträgheitsmoment $\boldsymbol{J}$ als Tensor definiert wird:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} ,$$

mit den *Trägheitsmomenten*

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right) \quad \text{bzw.} \\ &\int_{\text{Vol}} \left(y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}m \, , \\ J_{yy} &= \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right) \quad \text{bzw.} \\ &\int_{\text{Vol}} \left(x^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}m \, , \\ J_{zz} &= \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \quad \text{bzw.} \\ &\int_{\text{Vol}} \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}m \end{aligned} \qquad (2.133)$$

und den *Deviations-* oder *Zentrifugalmomenten*

$$\begin{aligned} J_{xy} = J_{yx} &= -\sum m_k x_k y_k \text{ bzw. } -\int_{\text{Vol}} xy \, \mathrm{d}m \, , \\ J_{xz} = J_{zx} &= -\sum m_k x_k z_k \text{ bzw. } -\int_{\text{Vol}} xz \, \mathrm{d}m \, , \\ J_{yz} = J_{zy} &= -\sum m_k y_k z_k \text{ bzw. } -\int_{\text{Vol}} yz \, \mathrm{d}m \, . \end{aligned} \qquad (2.134)$$

Der Drehimpuls berechnet sich nun gemäß

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\omega},$$

wobei $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{\omega}$ nach den Regeln der Matrizenmultiplikation multipliziert werden. Für das Beispiel von Abb. 2.65 ergibt sich

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} J_{xz} \\ J_{yz} \\ J_{zz} \end{pmatrix} .$$

Die Deviationsmomente bewirken, dass der Körper mit einem äußeren Drehmoment stabilisiert werden muss. Wenn sie verschwinden, sind keine Lagermomente erforderlich und der Körper kann frei rotieren. Gewisse Symmetrieeigenschaften führen zum Verschwinden von Deviationsmomenten. Ist beispielsweise die z-Achse eine Rotatiossymmetrieachse, dann gilt $J_{xz} = J_{yz} = 0$ und der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{L}$ verläuft parallel zu $\boldsymbol{\omega}$. Es tritt also kein Kippmoment auf.

Für jeden Körper gibt es ein Koordinatensystem, so dass alle Zentrifugalmomente verschwinden. Der Trägheitstensor lautet dann

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\mathrm{III}} \end{pmatrix} .$$

Die Trägheitsmomente J_{I}, J_{II} und J_{III} sind die *Hauptträgheitsmomente*. Rotiert ein Körper um eine *Hauptträgheitsachse*, so ist $\boldsymbol{L}$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = 0$, es sind also keine Lagerreaktionen erforderlich.

Beispiel

2.9-5 Wie lautet der Trägheitstensor für die Hantel von Abb. 2.64 und welche Richtung hat der Vektor $\boldsymbol{L}$ des Drehimpulses? Die Zeichenebene sei die x,z-Ebene.

Lösung

Im gezeichneten Moment, in dem die Hantel in der Zeichenebene liegt, ist der Trägheitstensor

$$\boldsymbol{J} = 2mr^2 \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & 0 & -\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix} .$$

Der Drehimpulsvektor wird damit

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\omega} = 2mr^2\omega\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} .$$

$\boldsymbol{L}$ liegt in der Zeichenebene und steht senkrecht auf der Hantelachse. Bei der Rotation um die z-Achse läuft $\boldsymbol{L}$ auf einem Kegelmantel um. Das erforderliche Drehmoment müssen die Lagerreaktionen aufbringen (s. auch Ü 2.9-4).

Trägheitsellipsoid

Bestimmt man die Massenträgheitsmomente eines Körpers bezüglich verschiedener Achsen durch den Schwerpunkt und trägt in Polarkoordinaten jeweils in Achsenrichtung die Länge $R = const/\sqrt{J}$ ab, so liegen alle Endpunkte auf einem Ellipsoid (*Poinsot-Konstruktion*). Die Hauptachsen des Ellipsoids werden durch die Hauptträgheitsachsen gebildet. Aus dem Trägheitsellipsoid kann das Massenträgheitsmoment bezüglich willkürlicher Schwerpunktsachsen grafisch oder analytisch bestimmt werden. Bei rotationssymmetrischen Körpern ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid. Bei hochsymmetrischen Körpern wie Kugel, Würfel, Tetraeder usw. bekommt es Kugelform. Diese Körper haben keine Deviationsmomente.

2.9.6 Kreisel

Jeder starre Körper, der eine Drehbewegung ausübt, ist ein Kreisel. Symmetrische Kreisel sind starre Körper, bei denen zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind. Diese Bedingung erfüllen alle auf einer Drehmaschine hergestellten Teile, aber auch andere, beispielsweise quadratische Scheiben. Beim *abgeplatteten* Kreisel (z. B. Scheibe) ist das Trägheitsmoment um die *Figurenachse* größer, beim *verlängerten* Kreisel (z. B. Stab) kleiner als die äquatorialen Trägheitsmomente.

Kräftefreier Kreisel, Nutation

Ein Kreisel, der in seinem Schwerpunkt unterstützt wird und in allen Raumrichtungen drehbar ist, wird *kräftefreier* Kreisel genannt. Technisch kann dies z. B. durch eine kardanische Aufhängung entsprechend Abb. 2.66 realisiert werden. Da auf einen solchen Kreisel von außen kein Drehmoment ausgeübt werden kann, muss nach dem Drehimpulserhaltungssatz der Vektor $\boldsymbol{L}$ des Drehimpulses in einem Inertialsystem seine Richtung beibehalten. Rotiert der Kreisel so, dass seine Figurenachse und die Drehimpulsachse zusammenfallen, dann bleibt auch die Richtung der Figurenachse im Raum fest. Der freie Kreisel kann an seinem äußeren Rahmen beliebig bewegt werden, ohne dass sich die einmal eingestellte Richtung verändert. Dieser Effekt wird beim *Kurskreisel* zur Navigation ausgenutzt. Bei modernen Geräten weicht die Achse von der eingestellten Richtung um weniger als 0,1 °/h ab. Versetzt man einem kräftefreien Kreisel einen kurzzeitigen Schlag, dann ändert sich der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ um $\Delta\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{M}(t)\,\mathrm{d}t$, bleibt

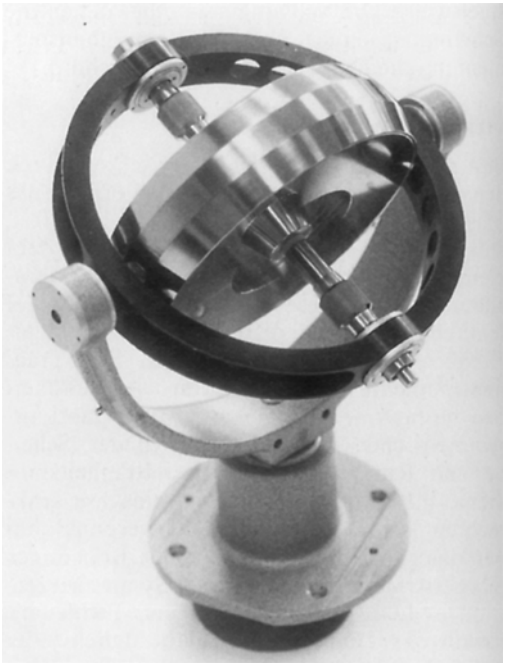


Abb. 2.66 Kräftefreier symmetrischer Kreisel in kardanischer Aufhängung

dann aber wieder konstant nach Größe und Richtung. Die Folge des Schlages aber ist, dass der Kreisel eine Taumelbewegung ausführt, die als *Nutation* bezeichnet wird.

Die Nutationsbewegung kann nach Abb. 2.67 anschaulich so erklärt werden, dass zwei Kegel aufeinander abrollen, wobei die Kegelspitzen im festgehaltenen Schwerpunkt des Kreisels liegen. Der *Rastpolkegel*, dessen Achse die Drehimpulsachse ist, steht fest im Raum. Der *Gangpolkegel* ist mit dem Kreisel fest verbunden und wälzt sich auf dem Rastpolkegel ab. Die Figurenachse als Achse des Gangpolkegels läuft damit auf dem rot gestrichelten *Nutationskegel* um. Die momentane Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ des Kreisels ist die Berührungslinie der beiden Kegel. Sie steht ebenfalls nicht fest im Raum, sondern läuft auf der Oberfläche des Rastpolkegels um die Drehimpulsachse $\boldsymbol{L}$. Abbildung 2.67 skizziert die Verhältnisse des abgeplatteten Kreisels. Beim verlängerten Kreisel rollt der Gangpolkegel mit seiner Außenseite auf dem Rastpolkegel ab.

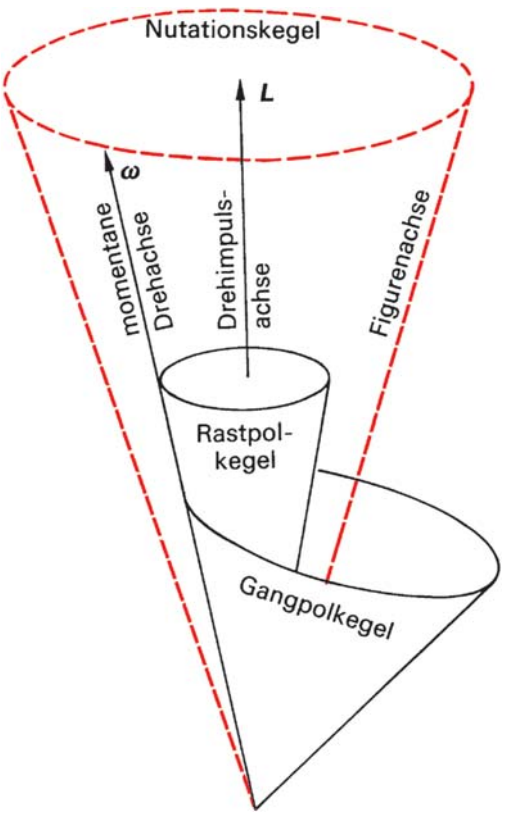


Abb. 2.67 Nutationsbewegung eines abgeplatteten Kreisels

Präzession

Abbildung 2.68a zeigt einen rotierenden Kreisel, der an einer Leine unsymmetrisch aufgehängt ist. Während ein nicht rotierender starrer Körper bei dieser Art der Aufhängung sofort herunterfallen würde, dreht sich der rotierende Kreisel um den Aufhängepunkt, wobei die horizontale Lage der Kreiselachse erhalten bleibt. Diese höchst erstaunliche Bewegung wird als *Präzession* bezeichnet.

Die Ursache der Präzession ist das Drehmoment, das infolge der unsymmetrischen Aufhängung auf den Kreisel ausgeübt wird. Abbildung 2.68b zeigt, dass das Kräftepaar aus Gewichtskraft und Stützkraft ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ erzeugt, das in der Horizontalebene liegt und auf dem Vektor $\boldsymbol{L}$ des Drehimpulses senkrecht steht. Ein solches Drehmoment kann aber den Betrag des Drehimpules nicht ändern, sondern nur seine Richtung, wie Abb. 2.68c zeigt. Innerhalb einer kurzen Zeitspanne Δt ändert sich der Drehimpuls um $\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\Delta t$. Der neue Drehimpuls $\boldsymbol{L}(t + \Delta t)$ steht wieder senkrecht zum ebenfalls kreisenden Drehmoment $\boldsymbol{M}(t + \Delta t)$. Unter der Wirkung des Drehmoments $\boldsymbol{M}$ läuft daher die Spitze des Drehimpulsvektors $\boldsymbol{L}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einem Kreis. Dies ist völlig analog zur Kreisbewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit, wobei die Zentripetalkraft auch immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht und sich nur deren Richtung, nicht aber deren Betrag ändert.

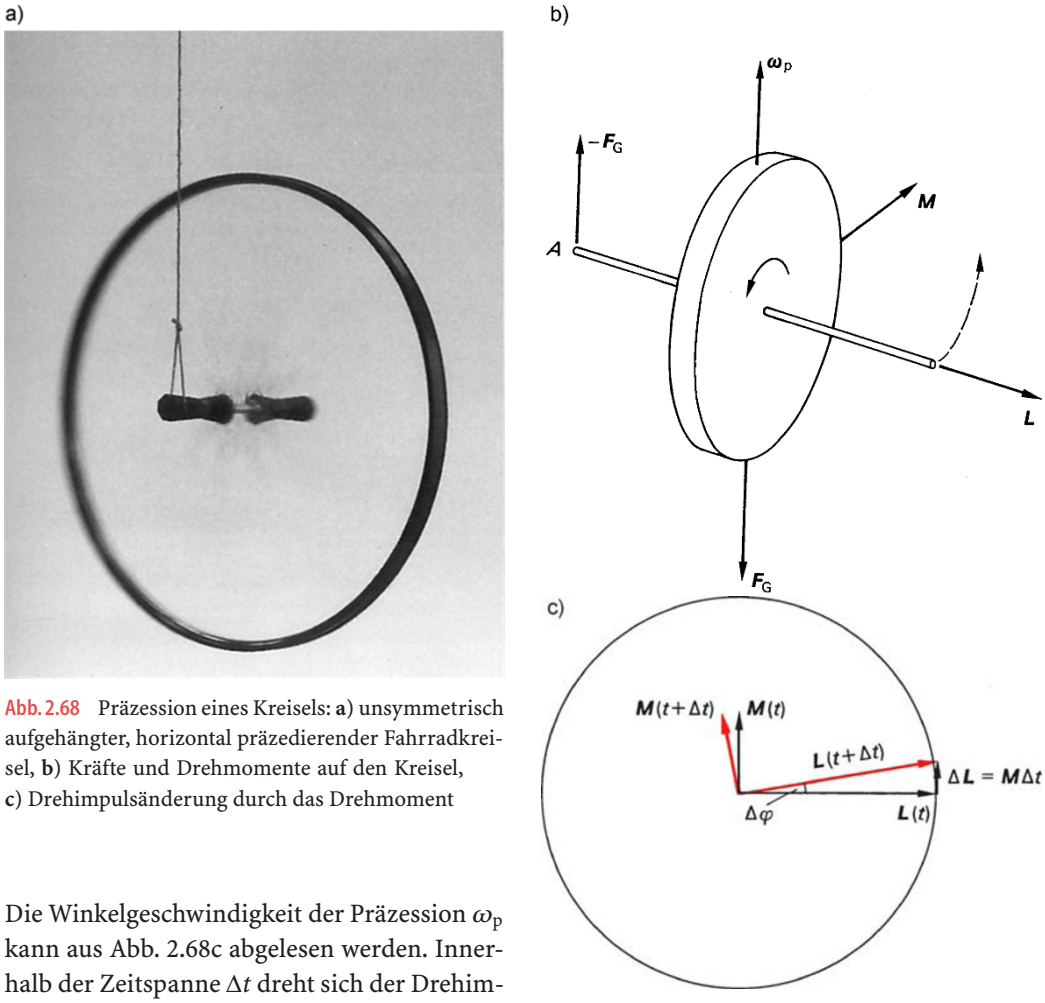


Abb. 2.68 Präzession eines Kreisels: **a**) unsymmetrisch aufgehängter, horizontal präzedierender Fahrradkreisel, **b**) Kräfte und Drehmomente auf den Kreisel, **c**) Drehimpulsänderung durch das Drehmoment

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p kann aus Abb. 2.68c abgelesen werden. Innerhalb der Zeitspanne Δt dreht sich der Drehimpulsvektor um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{M\Delta t}{L} .$$

Dann ist aber die Winkelgeschwindigkeit $\omega_p = \Delta\varphi/\Delta t$ oder

$$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} . \qquad (2.135)$$

Die Richtung, in der die Kreiselachse wandert, wird durch den *Satz vom gleichsinnigen Parallelismus* festgelegt:

> Ein Kreisel verhält sich unter dem Einfluss einer Störung (Drehmoment, Zwangsdrehung) so, dass er versucht, die Richtung seines Drehimpulsvektors auf kürzestem Wege gleichsinnig parallel zum Vektor der Störung einzustellen.

Kreiselmomente

Erzwingt man bei einem rotierenden Kreisel von außen her eine Richtungsänderung der Drehachse, dann müssen die Lager bei die-

ser künstlichen Präzession Kräfte und Momente aufnehmen. Die Kenntnis des wirkenden Drehmoments ist wichtig bei rotierenden Maschinenteilen, deren Drehachse einer Richtungsänderung unterzogen wird.
In Abb. 2.69 ist eine rotierende Scheibe gezeigt, die um die Hochachse gedreht wird. Nach dem Satz vom gleichsinnigen Parallelismus versucht der Vektor $\boldsymbol{L}$, sich parallel zum Vektor $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{p}$ der erzwungenen Präzession einzustellen. Die Kreiselachse drückt also im hinteren Lager nach unten und im vorderen nach oben. Entsprechend reagieren die Lager auf den Kreisel mit den eingezeichneten Lagerkräften $\boldsymbol{F}_\mathrm{L}$. Das Drehmoment $\boldsymbol{M}$, das der Kreisel auf die Lager ausübt, ergibt sich sofort durch Umkehr von (2.135):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{\omega}_\mathrm{p} \,. \tag{2.136}$$

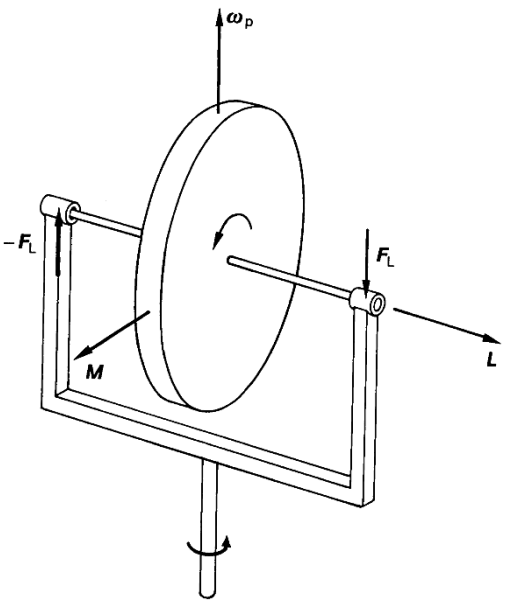


Abb. 2.69 Kreiselmoment bei einer erzwungenen Präzession

Von den zahlreichen Anwendungen des Kreisels seien einige Beispiele aus der Navigation kurz beschrieben.

Kreiselhorizont

Bei einem Flugzeug, das in oder über den Wolken fliegt, braucht der Pilot zur Orientierung einen künstlichen Horizont. Ein einfaches Lot, das in der Kanzel aufgehängt ist, erfüllt diesen Zweck nicht, da es bei einem Kurvenflug nicht in Richtung der Vertikalen, sondern in Richtung der Resultierenden aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft weist (Scheinlot).
Der freie Kreisel, der in Richtung der Horizontalen eingestellt wird, kann für eine bestimmte Zeit den Horizont darstellen. Da er aber aufgrund technischer Unzulänglichkeit mit der Zeit auswandert, wurden Geräte entwickelt, die selbsttätig Abweichungen von der Horizontalrichtung ausgleichen. Bei einer Methode bedient man sich des *Kreiselpendels*, bei dem ein Kreisel etwas außerhalb des Schwerpunktes unterstützt wird. Infolge des Schweremoments führt der Kreisel langsame Präzessionsbewegungen um die Vertikale aus. Im Gegensatz zu einem einfachen Lot, das alle Schwankungen des Flugzeugs relativ rasch mitmacht, hat ein Kreiselpendel eine sehr große Schwingungsdauer (bis zu einer Stunde) und mittelt daher aus allen Richtungen die Vertikalrich-

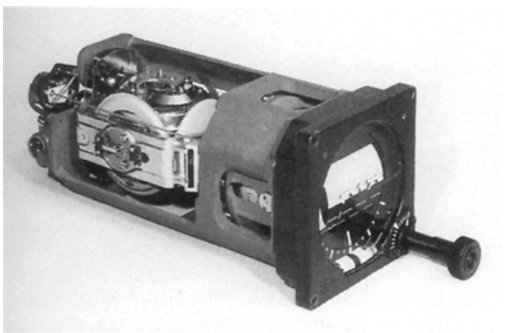


Abb. 2.70 Kreiselhorizont. Werkfoto: Bodenseewerk

tung heraus. Abbildung 2.70 zeigt eine technische Ausführung des Kreiselhorizonts.

Kreiselkompass

Der Kreiselkompass ist ein *gefesselter* Kreisel, dessen Achse sich nur in einer Horizontalebene bewegen kann. Häufig wird dies dadurch erreicht, dass das Rotorgehäuse in einer Flüssigkeit schwimmt. Im Gegensatz zu einem freien Kreisel, der seine Achsenrichtung in einem Inertialsystem konstant hält, muss der gefesselte Kreisel die Erdrotation mitmachen. Die Kreiselachse erfährt also eine Zwangsdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$. Das auftretende Kreiselmoment dreht die Kreiselachse nach dem Satz vom gleichsinnigen Parallelismus so, dass der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{L}$ und die Richtung der Zwangsdrehung $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$ parallel werden.

Wie Abb. 2.71 zeigt, gelingt dies vollkommen für einen Kreiselkompass, der am Äquator Ä aufgestellt ist. Befindet sich der Kreisel auf einem beliebigen Breitenkreis am Punkt P, dann kann sich sein Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$ einstellen; denn die Kreiselachse ist ja an eine Tangentialebene zur Erde gefesselt. Immerhin ist eine Optimierung der Lage dann erreicht, wenn die Kreiselachse tangential zu einem Meridian eingestellt ist, d. h., wenn sie nach Norden weist. Befindet sich der Kreisel am Nord- oder Südpol *N* bzw. *S*, dann steht $\boldsymbol{L}$ immer senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$. Jede Richtung der Kreiselachse ist gleich ungünstig; der Kreisel hat keine Vorzugsrichtung.

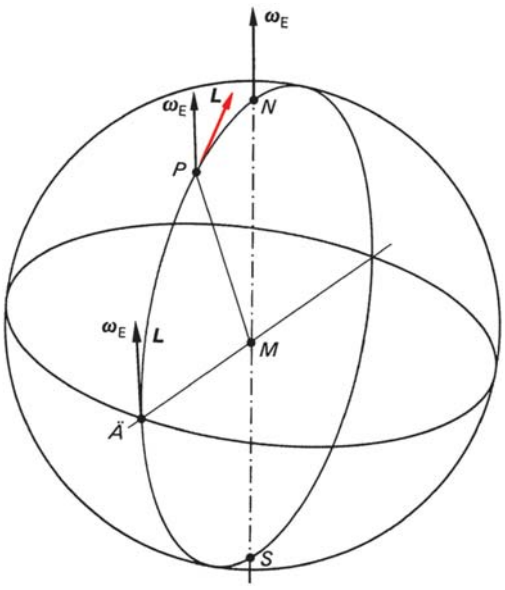


Abb. 2.71 Einstellung des Kreiselkompasses in Nordrichtung.

Der Kreiselkompass versagt also wie der magnetische Kompass an den Polen. U-Boote, die sich unter dem Packeis des Nordpols befinden, bedienen sich aus diesem Grund der *Trägheitsnavigation*, die hier nicht erläutert sei.

Auf fahrenden Schiffen oder Flugzeugen zeigt der Kreiselkompass nicht exakt nach Norden, er weist einen *Fahrtfehler* (Missweisung) auf. Fährt ein Schiff auf einem Meridian nach Norden, dann entspricht dieser Bewegung eine zusätzliche Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{Z}$, die vektoriell zu $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$ addiert wird. Der Kreiselkompass versucht dann, seine Achse parallel zur resultierenden Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R}$ einzustellen, was zu einem Anzeigefehler in westlicher Richtung führt. Bei einer Bewegung auf einem Breitenkreis ist die zusätzliche Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{Z}$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$, sodass kein Fehler entsteht. Der Fahrtfehler muss rechnerisch korrigiert werden.

Wendekreisel

Der Wendekreisel dient dazu, Drehungen und Drehgeschwindigkeiten zu messen. Soll z. B. die Drehung eines Schiffes um eine vertikale Achse gemessen werden, dann wird ein Kreisel so eingebaut, dass seine Achse horizontal liegt. Die horizontale Lage wird z. B. durch Federn erzwungen. Bei einer Drehung des Schiffs wird nach dem Satz vom gleichsinnigen Parallelismus der Kreisel versuchen, seine Achse

senkrecht zu stellen. Dies wird aber durch die Federn verhindert. Der Kreisel nimmt deshalb eine Schräglage ein, bei der das von der Drehung verursachte Kreiselmoment vom rücktreibenden Moment der Federn im Gleichgewicht gehalten wird. Der Ausschlag des Kreisels ist damit porportional zur Drehgeschwindigkeit des Schiffs. Geräte mittlerer Qualität sind in der Lage, Drehgeschwindigkeiten bis herab zu 0,01 °/h nachzuweisen. Der Drehwinkel wird von integrierenden Wendekreiseln gemessen.

Optische Faserkreisel bzw. *Laserkreisel* enthalten keine rotierenden Teile, sind also im Grunde keine Kreisel. Mit Hilfe des *Sagnac-Effekts* (G. M. M. Sagnac, 1869 bis 1928) werden Drehungen eines Systems gegenüber einem Inertialsystem nachgewiesen. Laserkreisel erreichen die vorgenannte Genauigkeit bei einer Winkelauflösung von 2 Winkelsekunden; sie werden bereits in der Luftfahrt eingesetzt.

Zur Übung

Ü 2.9-1 Lösen Sie das Problem von Beispiel 2.9-2 rechnerisch.

Ü 2.9-2 Eine starre Hantel besteht aus zwei Kugeln mit jeweils der Masse $m = 2\,\text{kg}$, die durch einen runden Stab mit dem Durchmesser $d_S = 10\,\text{mm}$ verbunden sind. Der Abstand der beiden Kugelmittelpunkte beträgt $l = 1\,\text{m}$. Kugeln und Stab bestehen aus Stahl der Dichte $\varrho = 7{,}85\,\text{kg/dm}^3$. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich einer Achse, die auf der Stabachse senkrecht steht und durch den Schwerpunkt geht, wenn die Stabmasse und die Ausdehnung der Kugeln a) vernachlässigt, b) nicht vernachlässigt werden?

Ü 2.9-3 Zur experimentellen Bestimmung des Massenträgheitsmoments eines Rades wird ein Faden über dieses gelegt, an dem zwei Körper mit den Massen $m_1 = 1\,\text{kg}$ und $m_2 = 1{,}5\,\text{kg}$ befestigt sind. Das Rad ist reibungsfrei gelagert, sein Radius beträgt $r = 30\,\text{cm}$. Man beobachtet, dass die Körper in der Zeit $t = 2\,\text{s}$ aus dem Stand den Höhenunterschied $h = 1\,\text{m}$ zurücklegen. a) Berechnen Sie die Beschleunigung a, mit der sich die angehängten Körper bewegen. b) Bestimmen Sie die Kraft im Faden jeweils über den Körpern 1 und 2. c) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Rades bezüglich seiner Drehachse?

Ü 2.9-4 Für die rotierende Hantel in Abb. 2.64 soll das Drehmoment auf die Lager berechnet werden. Zeichnen Sie die Funktion $M(\vartheta)$ auf. Für welchen Winkel wird das Drehmoment maximal?

Ü 2.9-5 Wie groß ist bei einem rollenden dünnwandigen Zylinder das Verhältnis Translations- zu Rotationsenergie?

Ü 2.9-6 Ein langer dünner Stab mit der Masse $m = 1{,}4\,\text{kg}$ und der Länge $l = 1{,}8\,\text{m}$ ist an einem Ende drehbar gelagert. Er wird aus waagrechter Lage losgelassen. a) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α und die Beschleunigung a_S des Schwerpunktes zu Beginn der Bewegung? b) Wie groß ist die Auflagerkraft zu Beginn der Bewegung? c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω geht der Stab durch die vertikale Lage?

Ü 2.9-7 Ein Rad mit dem Radius $r = 20\,\text{cm}$ und der Masse $m = 20\,\text{kg}$ rollt nach Abb. 2.61 eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\beta = 15°$ hinab. Aus dem Stand legt es nach $t = 2\,\text{s}$ den Weg $s = 2{,}9\,\text{m}$ zurück. a) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt? b) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient zwischen Rad und Unterlage mindestens sein, damit das Rad nicht rutscht?

Ü 2.9-8 Ein rotierendes Rad (Masse $m = 2\,\text{kg}$, Massenträgheitsmoment $J_S = 300\,\text{kg}\,\text{cm}^2$, Drehzahl $n_0 = 2\,800\,\text{min}^{-1}$, Radius $r = 15\,\text{cm}$) wird auf den horizontalen Fußboden aufgesetzt. Infolge Reibung zwischen Rad und Unterlage wird das Rad beschleunigt. a) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit, die sich einstellt, nachdem der Rutschvorgang abgeschlossen ist? b) Wie lange rutscht das Rad, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Rad und Unterlage $\mu = 0{,}2$ beträgt?

Ü 2.9-9 Ein schwerer Kreisel sei wie in Abb. 2.68 einseitig aufgehängt. Die Kreiselachse verlaufe nicht waagerecht sondern schließe mit der Vertikalen den Winkel ϑ ein. Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p nicht vom Winkel ϑ abhängt.

2.10 Gravitation

2.10.1 Beobachtungen

Bewegungen der Gestirne oder Erscheinungen am Himmel haben die Menschen schon immer fasziniert und zu einer Erklärung herausgefordert. Die Geschichte des Verstehens der Bewegungen am Firmament, der *Himmelsmechanik*, ist verknüpft mit berühmten Namen und Theorien.

Claudius Ptolemäus (um 100 bis 160 n. Chr.) begründete im 2. Jahrhundert das geozentrische Weltsystem, das philosophisch die Sonderstellung der Erde hervorhob. Eine richtige, wenn auch komplizierte Beschreibung der Planetenbahnen war durch Epizykeln möglich. Dieses Weltbild galt als Glaubenssatz über 14 Jahrhunderte lang.

Nikolaus Kopernikus (1473 bis 1543) konnte mit dem heliozentrischen Weltsystem, das die Sonne in den Mittelpunkt stellte, die Bewegung der Planeten einfacher beschreiben.

Tycho de Brahe (1546 bis 1601) lieferte als letzter großer Astronom ohne Fernrohr exaktes Beobachtungsmaterial über die Bewegung der Gestirne.

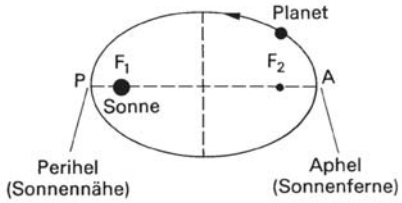
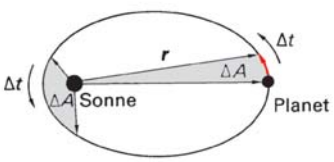
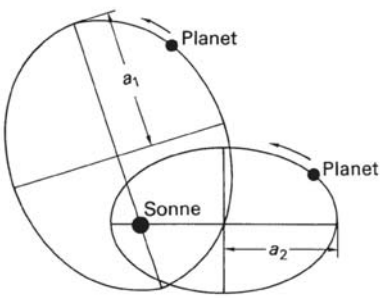
Kepler'sche Gesetze	Beobachtung
1. Kepler'sches Gesetz (Astronomia nova 1609)	Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamem Brennpunkt die Sonne steht. 
2. Kepler'sches Gesetz (Astronomia nova 1609)	Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant}.$ 
3. Kepler'sches Gesetz (Harmonices mundi 1619)	Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1 und a_2: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$ 

Abb. 2.72 Die Kepler'schen Gesetze

Johannes Kepler (1571 bis 1630) leitete aus der Analyse der Braheschen Messdaten des Mars drei empirische Gesetzmäßigkeiten über die Bewegung der Planeten her. Sie sind in Abb. 2.72 aufgeführt und erläutert.

Isaac Newton (1643 bis 1727) stellte die allgemeinen Bewegungsgesetze für mechanische Systeme und das Gravitationsgesetz (Abschn. 2.10.2) auf. Damit konnte er die Kepler'schen Gesetze herleiten.

Albert Einstein (1879 bis 1955) entwickelte 1915 die allgemeine Relativitätstheorie, die die Newton'sche Gravitationstheorie als Näherung enthält. Damit konnten die mit der Newton'schen Mechanik nicht erklärbare Periheldrehung der Merkurbahn und die Krümmung von Lichtstrahlen unter dem Einfluss der Gravitation erklärt werden.

Die aus diesen Beobachtungen und Theorien bestimmten Bahndaten und Planetenkenngrößen sind in Tabelle 2.7 zusammengestellt. Simulationen der Bewegungen am Himmel vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels werden in Planetarien mit aufwändigen dreidimensionalen Projektionstechniken dargestellt; Abb. 2.73 vermittelt einen Eindruck von dieser optomechanischen Spitzentechnik.



Abb. 2.73 Planetariumsprojektor Zeiss-Modell Universarium VIII mit Faseroptiken. Foto: Planetarium Jena

Tabelle 2.7 Planetendaten des Sonnensystems

Planet	große Bahnhalbachse a in m	Umlaufzeit T in s	numerische Exzentrizität der Ellipsenbahn ε	Radius / Erdradius	Masse / Erdmasse	mittlere Dichte ϱ in kg m^{-3}	Fallbeschleunigung $g_{\text{Äquator}}$ in m s^{-2}	Rotationsdauer in s	Anzahl der Monde
				Erdradius $r_E = 6{,}371 \cdot 10^6$ m	Erdmasse $m_E = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg				
Merkur	$5{,}79 \cdot 10^{10}$	$7{,}60 \cdot 10^6$	0,206	0,383	0,055	$5{,}4 \cdot 10^3$	3,7	$5{,}07 \cdot 10^6$	0
Venus	$1{,}08 \cdot 10^{11}$	$1{,}94 \cdot 10^7$	0,0067	0,950	0,815	$5{,}2 \cdot 10^3$	8,9	$2{,}10 \cdot 10^7$	0
Erde	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	$3{,}16 \cdot 10^7$	0,017	1,00	1,00	$5{,}5 \cdot 10^3$	9,78	$8{,}62 \cdot 10^4$	1
Mars	$2{,}28 \cdot 10^{11}$	$5{,}94 \cdot 10^7$	0,093	0,532	0,107	$3{,}9 \cdot 10^3$	3,7	$8{,}86 \cdot 10^4$	2
Jupiter	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	$3{,}74 \cdot 10^8$	0,048	10,97	317,8	$1{,}3 \cdot 10^3$	23	$3{,}57 \cdot 10^4$	17
Saturn	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	$9{,}29 \cdot 10^8$	0,054	9,46	95,2	$0{,}69 \cdot 10^3$	8,7	$3{,}84 \cdot 10^4$	18
Uranus	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	$2{,}64 \cdot 10^9$	0,047	3,98	14,5	$1{,}3 \cdot 10^3$	8,6	$6{,}21 \cdot 10^4$	20
Neptun	$4{,}50 \cdot 10^{12}$	$5{,}17 \cdot 10^9$	0,0086	3,87	17,1	$1{,}6 \cdot 10^3$	11	$5{,}80 \cdot 10^4$	8

2.10.2 Newton'sches Gravitationsgesetz

Aus der Modellvorstellung elliptischer Planetenbahnen, als Kepler'sche Gesetze in Abb. 2.72 zusammengestellt, leitete Newton eine Beziehung über die gegenseitige Anziehung zweier Körper, die *Gravitation*, her und verallgemeinerte dies auf die Wechselwirkung zwischen allen materiellen Körpern.

Zwischen zwei beliebigen materiellen Punkten mit den Massen m_1 und m_2 wirkt eine anziehende Kraft, die *Gravitationskraft* $\boldsymbol{F}_G$, die dem Abstandsvektor $\boldsymbol{r}_{12}$ der materiellen Punkte entgegengerichtet ist, wie Abb. 2.74 verdeutlicht. Der Betrag der Gravitationskraft ist

$$|\boldsymbol{F}_G| = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \,. \tag{2.137}$$

Die Proportionalitätskonstante G, die *Gravitationskonstante*, hat den Wert

$$G = (6{,}673 \pm 0{,}010) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \,.$$

Die Gravitationskonstante wird mit der Gravitationsdrehwaage nach Abb. 2.75 bestimmt. Aus Symmetriegründen gilt (2.137) auch für homogene Kugeln, wenn r der Abstand des Mittelpunktes ist. Durch Verlagerung der Kugeln mit den Massen m_2 von den Lagen

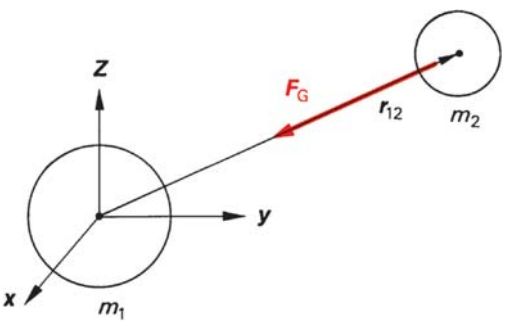


Abb. 2.74 Massenanziehung, Gravitation

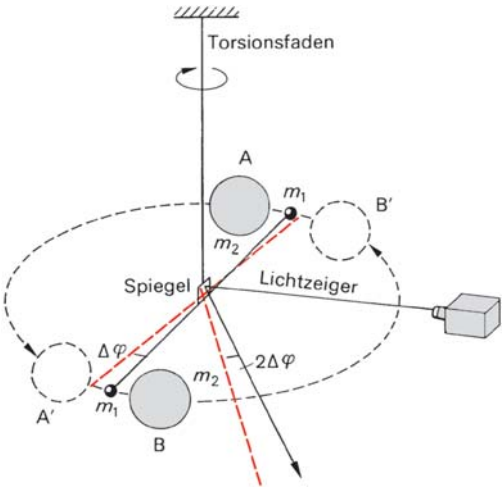


Abb. 2.75 Prinzip der Cavendish'schen Gravitationsdrehwaage

A und B in die Lagen A′ und B′ wird die Richtung der Gravitationskraft auf die kleinen Probemassen m_1 umgekehrt, wodurch diese ein Drehmoment auf den Torsionsfaden ausüben. Die Probemassen m_1 drehen sich dadurch um den Drehwinkel $\Delta\varphi$, bis erneut das rücktreibende Torsionsmoment des Torsionsfadens das Drehmoment der Gravitationskraft zwischen den Massen m_1 und m_2 kompensiert. Durch eine Lichtzeigeranordnung wird der sehr kleine Drehwinkel $\Delta\varphi$ messbar.

Ein Vergleich der Gravitationskraft nach (2.137) mit der Gewichtskraft nach (2.28) ergibt, dass die *Fallbeschleunigung g auf der Erdoberfläche* durch die Gravitation der Erdmasse m_E und den Erdradius r_E bestimmt wird:

$$g = G\frac{m_E}{r_E^2} \,. \tag{2.138}$$

Aus (2.138) lässt sich mit Hilfe des Zahlenwerts der Gravitationskonstante und dem bekannten

Erdradius $r_E = 6\,370$ km die Erdmasse zu $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg berechnen.

Nach der Newton'schen Gravitationstheorie ist die Zentralkraft, die die Planeten auf den elliptischen Bahnen um die Sonne hält, die Massenanziehung der Planetenmasse durch die Sonnenmasse. Daraus folgt direkt das dritte Kepler'sche Gesetz (Beispiel 2.10-1).

Die Gravitationskraft der Sonne auf die Planeten wirkt parallel zum Radiusvektor und übt daher auf die Planetenbewegung kein Drehmoment aus, der Drehimpuls ist auf der Planetenumlaufbahn konstant. In der Bahnebene ist die Hälfte des Produkts $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ gerade die vom Radiusvektor überstrichene Fläche

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}| \,.$$

Der Flächensatz ($\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ = konstant) des zweiten Kepler'schen Gesetzes veranschaulicht geometrisch die Drehimpulserhaltung

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = m_p \left| \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right| = 2m_p \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

auf der Planetenbahn. Das erste Kepler'sche Gesetz folgt aus dem Energieerhaltungssatz auf der Planetenbahn nach (2.80). Die Herleitung über die Kegelschnittgleichung ist mathematisch recht umständlich.

Beispiel

2.10-1 Ableitung des dritten Kepler'schen Gesetzes für kreisförmige Planetenbahnen (Mitbewegung der Sonne wird vernachlässigt).

Lösung

Wie die Werte der numerischen Exzentrizität in Tabelle 2.7 ausweisen, haben die meisten Planetenbahnen unseres Sonnensystems Werte von ungefähr null und können daher in guter Näherung als Kreisbahnen beschrieben werden. Für eine gleichförmige Kreisbewegung eines Planeten mit der Masse m_p muss die Gravitationskraft die Zentripetalkraft aufbringen. Bezeichnet man die Masse des Zentralgestirns, der Sonne, mit m_S, den Bahnradius der Planeten mit r_p und die Umlaufzeit mit T_p, dann gilt nach (2.31) für die Zentripetalkraft

$$|\boldsymbol{F}_{zp}| = m_p r_p \omega_p^2 = m_p r_p \frac{4\pi^2}{T_p^2} \,.$$

Die Gravitationskraft zwischen Sonne und Planet ist nach (2.137)

$$F_G = G\frac{m_S m_p}{r_p^2} \,.$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$m_p r_p \frac{4\pi^2}{T_p^2} = G\frac{m_S m_p}{r_p^2} \,.$$

Das dritte Kepler'sche Gesetz lautet (nach der Herleitung in Beispiel 2.10-1)

$$\frac{r_p^3}{T_p^2} = \frac{G\, m_S}{4\,\pi^2} = \text{konstant} \,. \qquad (2.139)$$

Die Konstante ist unabhängig von der Masse m_p des Planeten. In die Konstante geht nur die Masse m_S des Zentralgestirns, der Sonne, ein. Sie ist für alle Planeten eines Sonnensystems gleich. (2.139) gilt auch für den Umlauf von Monden oder Satelliten um Planeten; die Konstante wird dann durch die Planetenmasse bestimmt und beträgt beispielsweise bei der Erde $1{,}01 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m^3/s^2}$.

Gleichung (2.139) gilt auch für elliptische Bahnen; als Radius ist die große Halbachse der Ellipsenbahn einzusetzen. Abbildung 2.76 zeigt in doppellogarithmischer Auftragung die Gültigkeit des dritten Kepler'schen Gesetzes am Beispiel der Planeten der Sonne. Aus den Absolutwerten der Gerade kann die Sonnenmasse zu $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg $\sim 300\,000 m_E$ ermittelt werden.

2.10.3 Hubarbeit und potentielle Energie

Wird ein Körper der Masse m_2 von einem Körper der Masse m_1, beispielsweise der Erde, wegtransportiert oder angehoben, so ist gegen die Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_G$ durch eine äußere

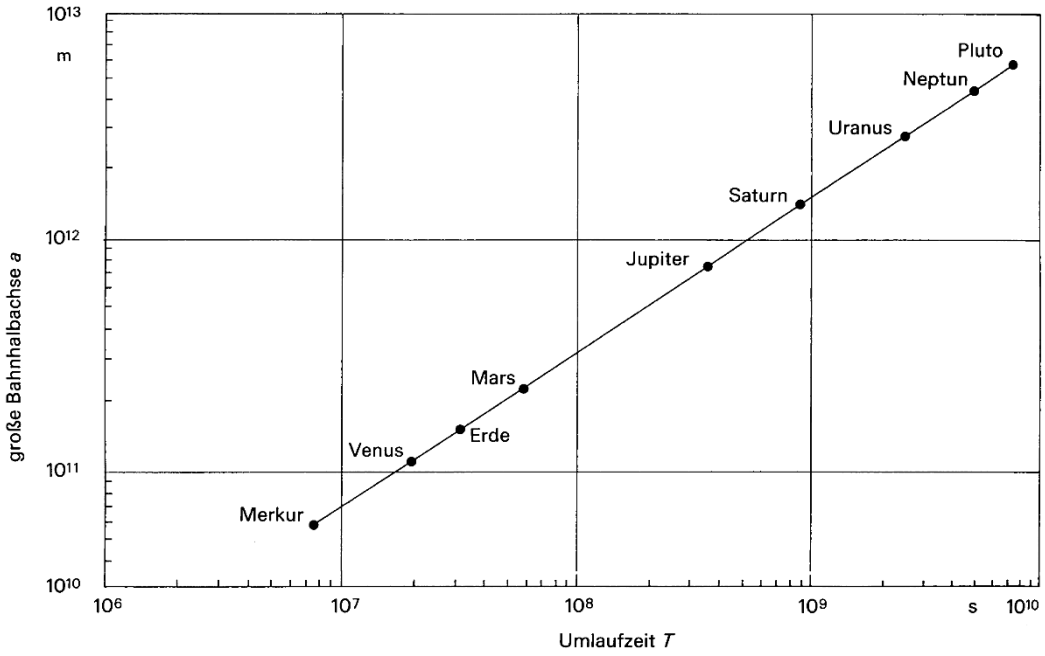


Abb. 2.76 Planeten des Sonnensystems: Zusammenhang zwischen der großen Halbachse der Planetenbahn und der Umlaufzeit

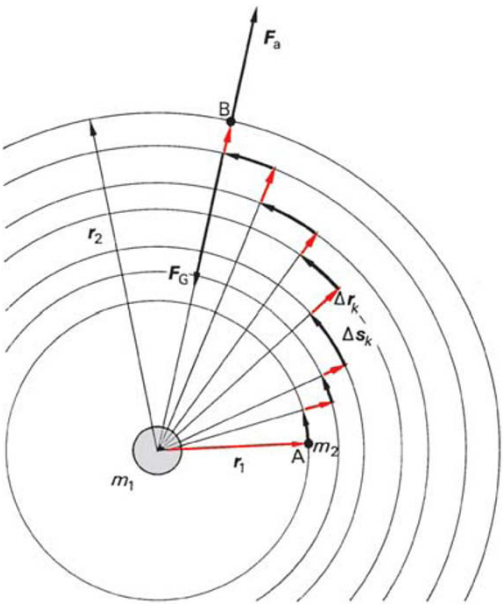


Abb. 2.77 Hubweg gegen die Schwerkraft: Zerlegung in radiale Wegelemente $\Delta \boldsymbol{r}$ und Kugelschalen-Wegelemente $\Delta \boldsymbol{s}_k$

Kraft $\boldsymbol{F}_a$ Arbeit zu verrichten. Abbildung 2.77 erläutert dies. Die erforderliche *Hubarbeit* ist nach (2.64)

$$W_{AB} = \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k + \sum_k \boldsymbol{F}_{ak} \cdot \Delta \boldsymbol{s}_k \,.$$

Alle Wegelemente Δs_k auf Kugelschalen um den Massenmittelpunkt von m_1 verlaufen senkrecht zur Richtung der Gravitationskraft; die Arbeit auf diesen Teilwegen ist null. Die aufzuwendende Hubarbeit ist, wenn man zu infinitesimalen Wegstücken übergeht,

$$W_{AB} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} G\, m_1\, m_2 \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \,.$$

Daraus erhält man

$$W_{AB} = G\, m_1\, m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \,. \qquad (2.140)$$

Die Hubarbeit des Körpers mit der Masse m_2 gegen die Gravitationskraft der Masse m_1 hängt nur vom Abstand r_1 und r_2 der Orte vom Massenmittelpunkt von m_1 ab, nicht aber vom Weg. Diese Hubarbeit wird nach dem Energiesatz (2.75) als potentielle Energie des Körpers mit der Masse m_2, bezogen auf die Masse m_1, gespeichert. Das Bezugsniveau für die potentielle Energie einer Masse m_2 unter der Massenanziehung der Masse m_1 wird mit $r = \infty$ so gewählt, dass die Masse m_2 die Gravitationskraft der Masse m_1 nicht mehr spürt. Wird von diesem Bezugsniveau aus m_2 auf m_1 zubewegt, dann wird Arbeit frei; die potentielle Energie, die zur Umwandlung in andere Energiearten verwendet werden kann, vermindert sich und ist

$$E_{\text{pot}} = \int_{\infty}^{r} G m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r} \,. \tag{2.141}$$

Gleichungen (2.139) bis (2.141) gelten nicht nur für Massenpunkte, sondern auch für ausgedehnte Körper mit Kugelform. Die Radien sind dabei die Abstände der Massenmittelpunkte. Im Innern von Systemen aus materiellen Punkten kommen innere Kräfte dazu; die Gravitationskraft stimmt nicht mehr mit (2.137) überein.

Die potentielle Energie einer Masse m_0, die von mehreren Massen m_1 bis m_N angezogen wird, setzt sich additiv aus den Einzelanteilen nach (2.141) zusammen:

$$E_{\text{pot}} = -G\frac{m_0 m_1}{r_1} - G\frac{m_0 m_2}{r_2} - \ldots - G\frac{m_0 m_N}{r_N} \,.$$

Die Kenngröße, die sich am Ort $\boldsymbol{r}(x_0, y_0, z_0)$ der Masse m_0 summiert, ist das *Gravitationspotential* φ_{G} der Einzelmassen m_1 bis m_{N}:

$$\varphi_{\text{G}} = -\sum_{k=1}^{\text{N}} G\frac{m_k}{r_k} \,. \tag{2.142}$$

Flächen im Raum, auf denen das Gravitationspotential einer Massenverteilung konstant ist, werden als *Äquipotentialflächen* bezeichnet; die Äquipotentialfläche einer Zentralmasse ist eine Kugelschale um deren Massenmittelpunkt. Ist das Gravitationspotential φ_{G} an einem Ort $\boldsymbol{r}$ bekannt, so beträgt die potentielle Energie einer Masse m_0 an diesem Ort

$$E_{\text{pot}} = m_0\, \varphi_{\text{G}}(\boldsymbol{r}) \,. \tag{2.143}$$

Die Gravitationskraft auf m_0 an diesem Ort ergibt sich aus der Umkehrung von (2.65) zu

$$F_{\text{G}}(\boldsymbol{r}) = -m_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_{\text{G}}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}r} = m_0 \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) \,. \tag{2.144}$$

Der *Gradient des Gravitationspotentials* am Ort $\boldsymbol{r}$ wird als *Gravitationsfeldstärke* $\boldsymbol{g}$ definiert. Der Vergleich mit der Beziehung für die Schwerkraft nach (2.28) zeigt, dass Betrag und Richtung der Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}$ an einem Ort die Gravitationsfeldstärke angeben. Ist der räumliche Verlauf der Fallbeschleunigung aus Experimenten oder Simulationsrechnungen bekannt, dann kann über eine Integration von (2.144) der Verlauf der potentiellen Energie berechnet werden.

2.10.4 Satellitenbahnen

Die Bahnen künstlicher Satelliten, die um die Erde laufen, werden durch dieselben Kepler'schen Gesetze beschrieben, wie sie von der Pla-

netenbewegung bekannt sind. Satellitenbahnen sind also Ellipsen (Spezialfall: Kreise), wobei die Erde in einem Brennpunkt der Ellipse steht.

Praktisch realisierbare Bahnen haben Höhen von 200 km bis 10^6 km und Umlaufdauern von 88 min bis etwa 4 Monate. Niedrigere Bahnen sind nicht möglich wegen Reibungsverlusten in der Atmosphäre. Höhere Bahnen werden zu sehr gestört von der Sonne und anderen Planeten. Die mehr als 24 Satelliten des *Global Positioning System* (*GPS*) laufen auf sechs Kreisbahnen, die um 56° gegen die Äquatorebene geneigt sind, in einer Höhe von 20 200 km.

Von besonderer Bedeutung für die Datenübertragung sind *geostationäre Satelliten* oder *Synchronsatelliten*. Sie sollen über einem definierten Punkt der Erde still stehen. Man kann sich leicht klar machen, dass dies nur möglich ist für Kreisbahnen in der Äquatorebene. In welcher Höhe ein Satellit platziert werden muss, damit er sich synchron mit der Erde dreht, folgt aus dem dritten Kepler'schen Gesetz. Nach (2.139) gilt für den Abstand r_S, den der Satellit vom Erdmittelpunkt haben muss

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{G m_E T_E^2}{4\pi^2}} .$$

Mit der Periodendauer der Erdrotation (siderische Umlaufzeit, Sterntag) $T_E = 86\,163$ s ergibt sich $r_S = 42\,161$ km. Subtrahiert man davon den mittleren Erdradius $r_E = 6\,371$ km, so ergibt sich eine Höhe von $h = 35\,790$ km über der Erdoberfläche.

Kosmische Geschwindigkeiten

Die erforderliche Geschwindigkeit eines Körpers, der von der Erdoberfläche abgeschossen wird und eine bestimmte Bahn erreichen soll, wird als kosmische Geschwindigkeit bezeichnet.

Die *erste kosmische Geschwindigkeit* v_{k1} ist die Geschwindigkeit, die ein Körper haben muss, der sich auf einer Kreisbahn direkt an der Erdoberfläche bewegen soll. Diese Bahn mit Radius r_E ist natürlich praktisch nicht realisierbar, sondern nur von theoretischem Interesse. Aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen Gravitations- und Zentrifugalkraft

$$G\frac{m_S m_E}{r_E^2} = \frac{m_S v_{k1}^2}{r_E} \qquad \text{folgt}$$

$$v_{k1} = \sqrt{\frac{G m_E}{r_E}} = \sqrt{g\, r_E} = 7{,}91\ \frac{\text{km}}{\text{s}} .$$

Die *zweite kosmische Geschwindigkeit* v_{k2} ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper abgeschossen werden muss, um den Anziehungsbereich der Erde zu verlassen. Sie kann mithilfe des Energieerhaltungssatzes berechnet werden: $E_{kin,E} + E_{pot,E} = E_{kin,\infty} + E_{pot,\infty}$. Mit der Definition der potentiellen Energie nach (2.141) ergibt sich

$$\frac{1}{2} m_S v_{k2}^2 - G\frac{m_S m_E}{r_E} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$v_{k2} = \sqrt{2\frac{G m_E}{r_E}} = \sqrt{2}\, v_{k1} = 11{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}} .$$

Beispiel

2.10-2 Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit, um den Mond zu verlassen? Die Mondmasse ist $m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, der Mondradius ist $r_M = 1\,738$ km.

Lösung

Die Fluchtgeschwindigkeit ist nach obiger Gleichung

$$v_{k2} = \sqrt{2\frac{G m_M}{r_M}} = 2{,}38\ \frac{\text{km}}{\text{s}} .$$

Massereiche Sterne können am Ende ihrer Entwicklungsgeschichte kollabieren und zu einem *schwarzen Loch* werden. Sie besitzen ein derart starkes Gravitationsfeld, dass nicht einmal Licht (Photonen) aus Bereichen inner-

halb eines kritischen Radius, des so genannten *Schwarzschild-Radius* (Karl Schwarzschild, 1873 bis 1916) entweichen kann. Die Größe dieses *Ereignishorizonts* findet man, indem für die Fluchtgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit c gesetzt wird:

$$r_S = \frac{2Gm}{c^2} .$$

Zur Übung

Ü 2.10-1 In welcher Höhe h über der Erdoberfläche hat die Fallbeschleunigung den Wert $g_h = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$? (Der Erdradius ist $r_E = 6371$ km.)

Ü 2.10-2 Zwischen Erde und Mond gibt es einen geometrischen Ort, an dem sich die Gravitationskräfte auf einen Körper der Masse m gerade aufheben. Wo liegt dieser „neutrale Punkt"? Radius der Mondbahn: $r_{E,M} = 384\,000$ km, Mondmasse $m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

Ü 2.10-3 Ein künstlicher Satellit läuft in einer Flughöhe $h = 1000$ km auf einer Kreisbahn um die Erde (Erdradius $r_E = 6371$ km). a) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit v des Satelliten? b) Wie groß ist seine Umlaufzeit T? c) Welche spezifische Arbeit w (auf die Masse $m = 1$ kg bezogen) ist aufzuwenden, um den Satelliten in diese Bahn zu bringen? d) Welcher Anteil f dieser spezifischen Arbeit entspricht der kinetischen Energie des Satelliten?

Ü 2.10-4 Ein Meteor kommt ohne Anfangsgeschwindigkeit in den Anziehungsbereich der Sonne und fällt auf diese zu. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Meteors, wenn er

a) sich im Bahnabstand der Erde von der Sonne befindet?
b) an einem Ort mit halbem Erdbahnradius ist?
c) an der Sonnenoberfläche unverglüht ankäme?

(Sonnenmasse $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg; Sonnenradius $r_S = 696\,000$ km; Erdbahnradius $r_{SE} = 150 \cdot 10^6$ km.)

Ü 2.10-5 Der mittlere Abstand des Jupiter-Mondes Jo vom Planeten Jupiter beträgt $4{,}216 \cdot 10^5$ km; seine Umlaufzeit ist $T = 1$ d 18 h 27 min. Berechnen Sie aus diesen Angaben die Masse m_J des Planeten Jupiter.

2.11 Mechanik deformierbarer fester Körper – Elastomechanik

Beim Einsatz von Werkstoffen in Maschinen sind die Reaktionen auf äußere Kraft- bzw. Momenteinwirkungen außerordentlich wichtig. Gehen die Form- oder Gestaltänderungen fester Körper nach Beendigung der äußeren Kraft- bzw. Momentenwirkungen wieder vollständig zurück, so finden *reversible Verformungsprozesse* statt, die *elastisch* sind. Bleiben dagegen Formänderungen zurück, dann haben *irreversible Verformungsprozesse* stattgefunden und es sind *plastische Verformungen* aufgetreten.

2.11.1 Elastische Verformung

Spannungen

Die Kenngröße für die Beanspruchung von Festkörperteilchen ist die *Spannung* S. Sie ist der Quotient aus der Teilkraft $\mathrm{d}F$ und dem Flächenelement $\mathrm{d}A$, wie Abb. 2.78 zeigt:

$$S = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} . \qquad (2.145)$$

In der Praxis mechanischer Beanspruchungen wird die Spannung in der Maßeinheit

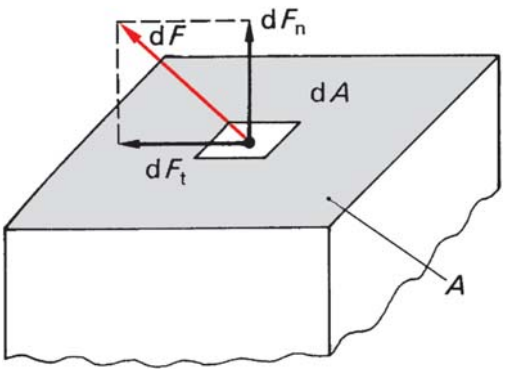


Abb. 2.78 Zur Definition der Spannung

N/mm² gemessen; es ergeben sich dann handliche Maßzahlen. Wird nach Abb. 2.78 die Teilkraft dF in ihre Normalkomponente dF_n und ihre Tangentialkomponente dF_t zerlegt, dann ergeben sich eine *Normalspannung* σ und eine *Schubspannung* τ (Tangentialspannung):

$$\sigma = \frac{dF_n}{dA}\,, \tag{2.146}$$

$$\tau = \frac{dF_t}{dA}\,. \tag{2.147}$$

In einem würfelförmigen Körperelement lässt sich, wie Abb. 2.79 zeigt, der *Spannungszustand* vollständig beschreiben durch

- *drei Normalspannungen* $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und
- *sechs Schubspannungen* $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Dabei gibt der erste Index die Schnittebene und der zweite die Wirkungsrichtung an; z. B. liegt τ_{xy} in der x-Ebene und wirkt in der y-Richtung. Da aus Symmetriegründen $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ist, wird der Spannungszustand durch die Angabe von drei Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und drei Schubspannungen $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ vollständig beschrieben.

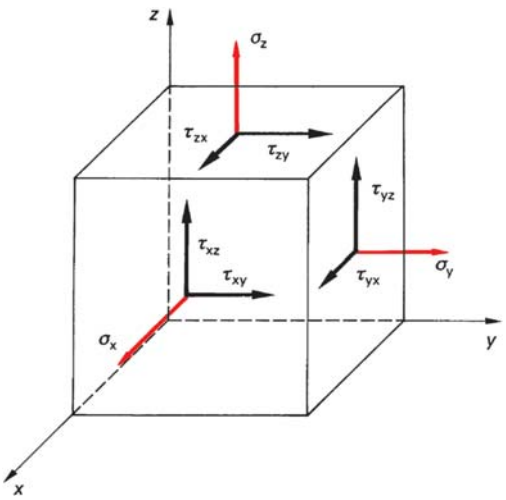


Abb. 2.79 Dreiachsiger Spannungszustand. σ Normalspannung, τ Schubspannung

Verformungen

Wirken auf einen Körper äußere Kräfte bzw. äußere Momente ein, so erfährt er Verformungen. Grundsätzlich sind zwei Verformungsmöglichkeiten denkbar, die *Dehnung* ε und die *Schiebung* γ. Für die *Dehnung* gilt allgemein

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}\,. \tag{2.148}$$

Dabei bleiben die rechten Winkel am Körperelement erhalten. Mit *Schiebung* oder *Scherung* wird eine *Winkeländerung* bezeichnet:

$$\text{Schiebung } \gamma = \text{Winkeländerung } \gamma\,. \tag{2.149}$$

In diesem Fall bleiben die Kantenlängen l_0 des Körperelementes gleich, und es ergibt sich ein Abweichungswinkel γ vom rechten Winkel (ausgedrückt im Bogenmaß).
In der Praxis werden üblicherweise *vier Verformungsarten unterschieden*. Abbildung 2.80 zeigt die Unterschiede, Kenngrößen und Gesetzmäßigkeiten.

Dehnung

Im elastischen Bereich ist die Längenänderung Δl proportional zur Normalkraft F_n. Mit der Definition der Dehnung ε als relative Längenänderung $\varepsilon = \Delta l/l$ (2.148) und (2.146) für die Zug- bzw. Druckspannung $\sigma = dF_n/dA$ ergibt sich das *Hooke'sche Gesetz* (R. Hooke, 1635 bis 1703) für die elastische Verformung:

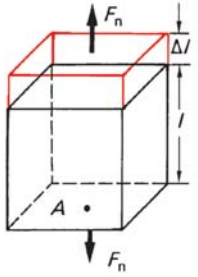
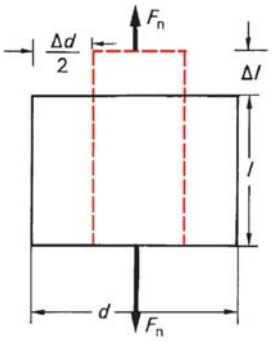
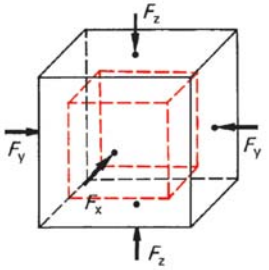
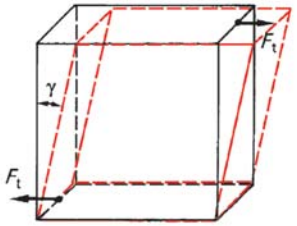
Verformungsart	Dehnung	Querdehnung	allseitige Kompression	Scherung
Kenngröße	Elastizitätsmodul E	Querdehnungszahl oder Poisson-Zahl μ	Kompressionsmodul K	Schubmodul (Torsionsmodul) G
Skizze				
Gesetzmäßigkeit	$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = E\,\varepsilon$ (Hookésches Gesetz)	$\frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta l}{l}$ $\varepsilon_q = -\mu\,\varepsilon$ $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu)$ $0 < \mu < 0{,}5$	$\frac{\Delta V}{V} = 3\,\varepsilon(1-2\mu)$ $-\frac{\Delta p\,V}{\Delta V} = K$ $\frac{1}{K} = \kappa$ (Kompressibilität)	$\tau = \frac{F_t}{A} = G\,\gamma$
Zusammenhang			$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$	$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$

Abb. 2.80 Verformungsarten

$$\sigma = E\,\varepsilon\,. \tag{2.150}$$

Der Proportionalitätsfaktor ist der *Elastizitätsmodul E*, der im allgemeinen Fall die Normalspannungsänderung $\mathrm{d}\sigma$, bezogen auf die Dehnungsänderung $\mathrm{d}\varepsilon$, beschreibt und zeitabhängig sein kann:

$$E(\sigma, t) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\,. \tag{2.151}$$

Der Elastizitätsmodul ist eine Werkstoffkenngröße, die für praktische Zwecke meist in der Maßeinheit N/mm^2 oder GN/m^2 geschrieben ist. Tabelle 2.8 enthält einige Festigkeitskennzahlen. – In (2.151) sind *Zugspannungen positiv* und *Druckspannungen negativ* einzusetzen.

Querdehnung

Die angreifende Normalkraft F_n verursacht außer der Längenänderung Δl auch eine materialspezifische Dickenänderung Δd. Die Querdehnung ε_q ist die relative Dickenänderung:

$$\varepsilon_\mathrm{q} = \frac{\Delta d}{d}\,. \tag{2.152}$$

Die Querdehnung ist der Dehnung proportional, sodass gilt

$$\varepsilon_\mathrm{q} = -\mu\,\varepsilon\,. \tag{2.153}$$

Der Proportionalitätsfaktor μ wird als *Querdehnungszahl* oder *Poissonzahl* (S. D. Poisson, 1781 bis 1840) bezeichnet. Ihr Wert ist immer positiv, aber kleiner als 0,5. Das Minuszeichen in (2.153) kennzeichnet die Gegenläufigkeit von Längenänderung und Dickenänderung. Die bei der Querkontraktion auftretende Volumendifferenz ΔV errechnet sich für einen achsensymmetrischen, prismatischen Stab aus der Differenz zwischen dem Volumen nach der Verformung V' und dem ursprünglichen Volumen V_0 zu

$$\Delta V = V' - V_0 = (d + \Delta d)^2 (l + \Delta l) - d^2 l\,.$$

Die Summenglieder höherer Ordnung sind gegenüber den Gliedern erster Ordnung vernachlässigbar. Somit ergibt sich

$$\Delta V = d^2 \Delta l + 2\,d\,l\,\Delta d\,.$$

Für die relative Volumenänderung eines stabförmigen Körpers unter eindimensionaler Zugbeanspruchung gilt

Tabelle 2.8 Kennzahlen für die Festigkeit einiger Werkstoffe

Werkstoff	Elastizitäts-Modul E in GN/m^2	Querdehnungszahl μ	Kompressions-Modul K in GN/m^2	Schub-Modul G in GN/m^2	Bruchdehnung ε_B	Zug- bzw. Druckfestigkeit σ_B in GN/m^2
Eis	9,9	0,33	10	3,7		
Blei	17	0,44	44	5,5 bis 7,5		0,014
Al (rein)	72	0,34	75	27	0,5	0,013
Glas	76	0,17	38	33		0,09
Gold	81	0,42	180	28	0,5	0,14
Messing (kaltverf.)	100	0,38	125	36	0,05	0,55
Kupfer (kaltverf.)	126	0,35	140	47	0,02	0,45
V2A-Stahl	195	0,28	170	80	0,45	0,7

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{d^2\Delta l}{d^2 l} + \frac{2\,d\,l\,\Delta d}{d^2 l} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d}\,.$$

Man erhält also

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon\,(1 - 2\mu)\,. \qquad (2.154)$$

Der Volumenunterschied ist für positive Spannungen definitionsgemäß positiv; nach (2.154) ist daher $1 - 2\mu > 0$ und $0 < \mu \leqq 0{,}5$.

Allseitige Kompression

Wenn ein Körper einer allseitigen isotropen Druckbeanspruchung $\sigma = -\Delta p$ unterliegt, dann ist die Volumenänderung nach (2.154)

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\,\varepsilon\,(1 - 2\mu)\,. \qquad (2.155)$$

Mit $\varepsilon = \sigma/E$ und $\sigma = -\Delta p$ erhält man

$$-\frac{\Delta p V}{\Delta V} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = K\,.$$

Analog zum Elastizitätsmodul E beschreibt der *Kompressionsmodul*

$$K = -\frac{\Delta p V}{\Delta V} \qquad (2.156)$$

die erforderliche Druckänderung bezogen auf die relative Volumenänderung; er ist immer positiv. In der Praxis wird K meist in MN/m^2 angegeben. Zwischen den Kenngrößen der elastischen Verformung besteht der Zusammenhang

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}\,. \qquad (2.157)$$

Die relative Volumenänderung $\Delta V/V$ eines Körpers bei einer isotropen Druckänderung Δp ist die *Kompressibilität*

$$\varkappa = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} = \frac{1}{K}\,. \qquad (2.158)$$

Beispiel

2.11-1 Ein Draht aus Federstahl ($E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2) hat einen Durchmesser $d = 1{,}5$ mm und ist $l = 3$ m lang. Er wird um 5 mm verlängert. Zu berechnen sind die Dehnung ε, die Zugspannung σ_z und die Zugkraft F_z.

Lösung

Für die Dehnung gilt $\varepsilon\,\Delta l/l = 1{,}67 \cdot 10^{-3} = 0{,}17\%$. Die Zugspannung ist $\sigma_z = E\,\varepsilon = 333$ N/mm^2, und die Zugkraft beträgt $F_z = \sigma_z A = 333{,}33 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 589$ N.

Scherung

Wirken Querkräfte F_t parallel zur Oberfläche auf einen Körper, dann erfährt dieser eine Scherung um den *Scherwinkel* γ (Abb. 2.80). Diese Beanspruchungsart ruft also eine Gestaltsänderung des Körpers hervor. Zwischen der Schubspannung $\tau = F_t/A$ und dem Scherwinkel γ gilt der dem *Hooke'schen Gesetz* analoge Zusammenhang

$$\tau = G\,\gamma\,. \qquad (2.159)$$

Der Proportionalitätsfaktor wird *Schubmodul* G genannt. Er ist ein Maß für die *Gestaltelastizität* fester Körper. (In (2.159) ist der Scherwinkel γ im Bogenmaß einzusetzen.) Analog zum Elastizitätsmodul E nach (2.151) ist der Schubmodul

$$G(\tau, t) = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma} \qquad (2.160)$$

das Verhältnis der Schubspannung zum Scherwinkel.
Zwischen Elastizitätsmodul E, Querdehnungszahl μ und Schubmodul G besteht der Zusammenhang

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \,. \tag{2.161}$$

Durch Umformen ergibt sich $E/2G = 1 + \mu$. Da μ zwischen 0 und 0,5 liegt, ergibt sich für den Schubmodul ein Bereich von

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2} \,. \tag{2.162}$$

Diese Beziehungen gelten nur für isotrope Werkstoffe. Konstruktionswerkstoffe sind meist quasiisotrope Werkstoffe. Für anisotrope Einkristalle müssen dagegen die Richtungsabhängigkeiten der Kenngrößen berücksichtigt werden.
Die in diesem Abschnitt aufgezeigten Zusammenhänge zwischen Normalspannungen σ und Dehnungen ε bzw. Schubspannungen τ und Schiebungen γ gestatten die *allgemeine Formulierung des Hooke'schen Gesetzes für alle drei Raumrichtungen*. Alle möglichen Belastungsfälle können hieraus errechnet werden. Tabelle 2.9 vermittelt eine Übersicht.

Elementare Belastungsfälle

Abbildung 2.81 zeigt die vier elementaren Belastungsfälle *Zug* bzw. *Druck*, *Scherung*, *Biegung* und *Torsion*, ihre zugehörigen Normal- und Schubspannungen, Dehnungen und Schiebungen sowie einige Beispiele. Daraus ist ersichtlich, dass bei reinem Zug bzw. Druck sowie reiner Biegung keine Schubspannungen und Schiebungen vorhanden sind, während bei reiner Scherung bzw. Torsion keine Normalspannungen und Dehnungen auftreten. In der Praxis treten diese vier elementaren Belastungsfälle kombiniert auf. Dann können sie unter Verwendung von Tabelle 2.9 und Abb. 2.81 ermittelt werden.

Hauptspannungen

Als *Hauptspannungen* werden die Normalspannungen σ bezeichnet, für die *keine Schubspannungen* auftreten. Die *Hauptspannungsrichtung* nennt man *Hauptachse*. Ein Spannungszustand ist demnach vollständig beschrieben, wenn alle drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und deren Hauptachsen bekannt sind. Häufig treten Beanspruchungen an Bauteiloberflächen auf, in denen die Hauptachsen 1, 2 und 3 mit den Koordinatenachsen x, y und z zusammenfallen. Für diese Fälle lassen sich die gesuchten Hauptspannungen durch ein *grafisches Verfahren nach Mohr* (C. O. Mohr, 1835 bis 1918) ermitteln. Es ergeben sich

Tabelle 2.9 Räumliche Spannungszustände

	Normalspannung σ	Dehnung ε	Schubspannung τ	Schiebung γ
x-Komponente	$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_x + \frac{\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\right)$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$	$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$
y-Komponente	$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_y + \frac{\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\right)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x))$	$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$	$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$
z-Komponente	$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_z + \frac{\mu\,\varepsilon}{1-2\mu}\right)$	$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y))$	$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$

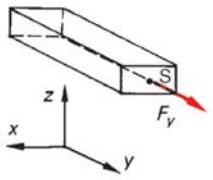
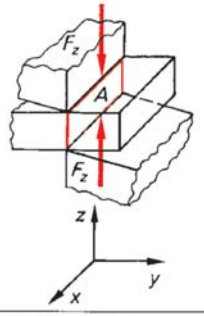
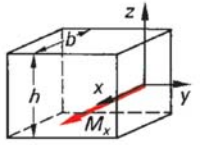
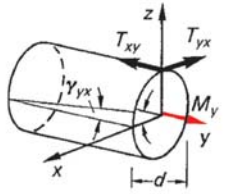
Belastungsfall	Zug bzw. Druck	Scherung	Biegung	Torsion
Skizze	Zug: F_y positiv Druck: F_y negativ 		 $J_x = \frac{b\,h^3}{12}$	 $J_y = \frac{\pi\,d^4}{32}$
Bemerkung	Kraft F_y greift im Flächenschwerpunkt S des Querschnitts A an	Meist tritt Scherung in Verbindung mit Biegung auf	reines Biegemoment M_x	reines Torsionsmoment M_y
Normalspannung σ	$\sigma_y = \frac{F_y}{A}$ $\sigma_x = \sigma_z = 0$	0	$\sigma_{y(z)} = -\frac{M_x}{J_x} z$ sonst $\sigma = 0$	0
Schubspannung τ	0	$\tau_{yz} = -\frac{F_z}{A}$ $\tau_{zy} = \frac{F}{A}$ sonst $\tau = 0$	0	$\tau_{xy} = -\frac{M_y}{J_y} z$ $\tau_{yx} = \frac{M_y}{J_y} z$ sonst $\tau = 0$
Dehnung ε	$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$ $\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	0	$\varepsilon_{y(z)} = \frac{\sigma_{y(z)}}{E}$ $\varepsilon_{x(z)} = \varepsilon_{z(z)} = -\mu \frac{\sigma_{y(z)}}{E}$	0
Schiebung γ	0	$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$ sonst $\gamma = 0$	0	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ sonst $\gamma = 0$
Beispiele	Seile, Ketten, Zugstäbe, Stützen, Kolbenstangen, Druckspindeln	Scherglieder, Nieten	Kragbalken, Achsen	Torsionsstäbe

Abb. 2.81 Vier elementare Belastungsfälle

drei Kreise, die *Mohr'schen Spannungskreise*. Wenn jedoch in allen Ebenen x, y und z von null verschiedene Schubspannungen auftreten, dann versagt diese Methode. Die gesuchten Hauptspannungen müssen dann durch aufwändigere mathematische Verfahren errechnet werden.

Um die Gleichung für den Mohr'schen Spannungskreis aufzustellen, wird ein Bauteil mit einer Zugkraft F_x beansprucht. Deshalb ist die Normalspannung σ_x bereits Hauptspannung, wie Abb. 2.82 zeigt. Wird eine Ebene A^+ betrachtet, die um den Winkel φ verdreht ist, dann kann die Zugkraft F_x in eine Komponente F_n senkrecht zur Ebene A^+ und in eine Komponente F_t tangential dazu zerlegt werden. Es gelten $F_\mathrm{n} = F_x \cos\varphi$ und $F_\mathrm{t} = F_x \sin\varphi$. Damit ergeben sich für die bezüglich der Ebene $A^+ = A/\cos\varphi$ wirkende Normalspannung σ_φ bzw. die Schubspannung τ_φ

$$\sigma_\varphi = \frac{F_\mathrm{n}}{A^+} = \frac{F}{A}\cos^2\varphi = \sigma_x \cos^2\varphi \qquad \text{oder} \tag{2.163}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos(2\varphi)) \qquad \text{und} \tag{2.164}$$

$$\tau_\varphi = \frac{F_\mathrm{t}}{A^+} = \frac{F}{A}\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{\sigma_x}{2}\sin(2\varphi)\,. \tag{2.165}$$

In dem skizzierten Fall gilt für die Hauptspannungsrichtung $\tau_\varphi = 0$, weil $\varphi = 0$ ist.

Die maximale Schubspannung τ_max tritt für $\sin(2\varphi) = 1$ auf. Aus dieser Bedingung folgt $2\varphi = 90°$ oder $\varphi = 45°$. Für diesen Winkel wird nach (2.165) die maximale Schubspannung $\tau_\mathrm{max} = -\sigma_x/2$. Die zugehörige Normalspannung beträgt ebenfalls $\sigma = \sigma_x/2$. Werden aus (2.164) und (2.165) unter Berücksichtigung von $\sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi) = 1$ die Winkelfunktionen eliminiert, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen σ_φ und τ_φ:

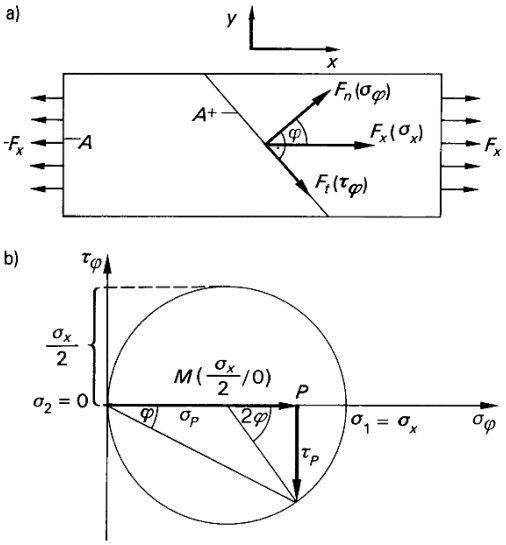


Abb. 2.82 Zur Herleitung des Mohr'schen Spannungskreises

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 . \tag{2.166}$$

Diese Gleichung beschreibt den *Mohr'schen Spannungskreis* in der σ_φ-τ_φ-Ebene mit dem Radius $r = (\sigma_x/2)$ und dem Mittelpunkt $(\sigma_x/2/0)$ (Abb. 2.82 b). Der Spannungskreis zeigt die Normal- bzw. Schubspannungen, die an einem um den Winkel φ verschobenen Flächenelement wirken, wenn die Normalspannung σ_x bereits Hauptspannung ist.

Beispiel

2.11-2 Gegeben sei folgender Spannungszustand (dreiachsige Zugbeanspruchung):

$$\sigma_x = 10\ \mathrm{N/mm^2}\,, \quad \tau_{xy} = -20\ \mathrm{N/mm^2}\,, \quad \tau_{xz} = 0\,,$$
$$\sigma_y = 30\ \mathrm{N/mm^2}\,, \quad \tau_{yx} = 20\ \mathrm{N/mm^2}\,, \quad \tau_{yz} = 0\,,$$
$$\sigma_z = -15\ \mathrm{N/mm^2}\,, \quad \tau_{zx} = 0\,, \quad \tau_{zy} = 0\,.$$

Gesucht sind die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 sowie die Winkelabstände der Hauptachsen 1, 2 und 3 von den Raumachsen x, y und z.

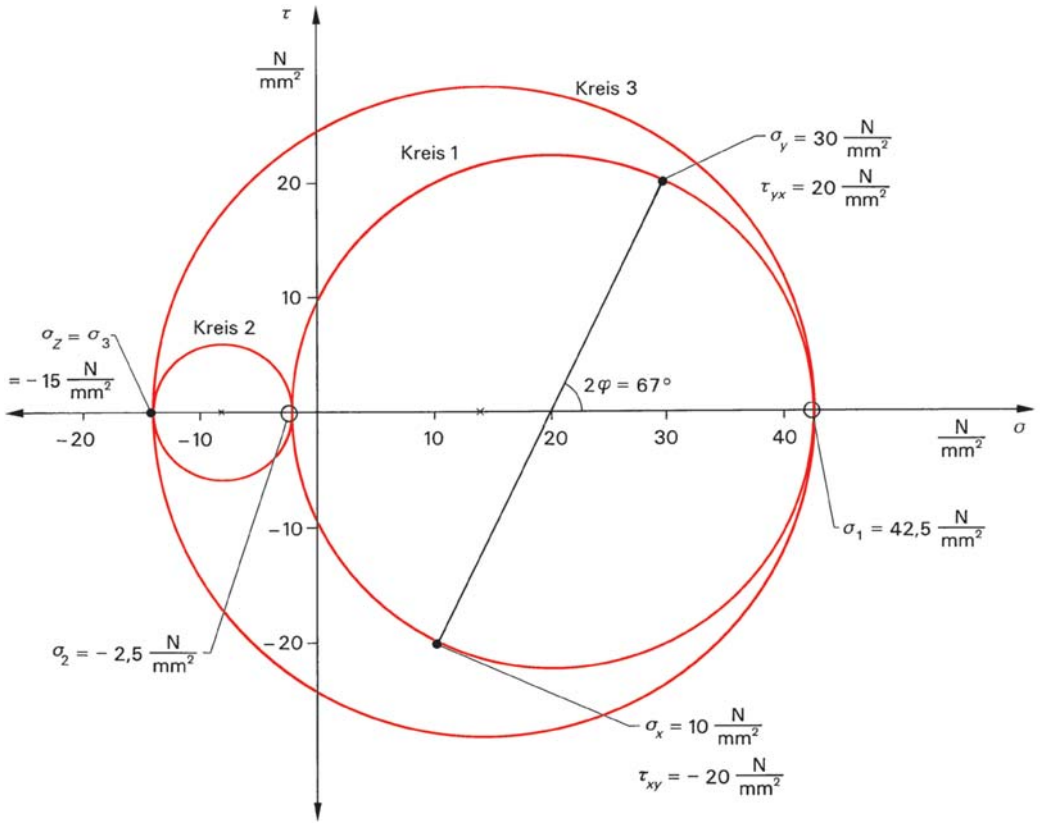


Abb. 2.83 Mohr'sche Spannungskreise für Beispiel 2.11-2

Lösung

Zur Lösung wird das grafische Verfahren nach Mohr angewandt. Die Mohr'schen Spannungskreise werden gemäß Abb. 2.83 konstruiert.

a) Es werden alle Angaben der Normal- bzw. Schubspannungen in das σ-τ-Diagramm eingezeichnet (schwarze Punkte in Abb. 2.83).
b) Die Punkte (σ_x/τ_{xy}) und (σ_y/τ_{yx}) müssen auf einem Kreis liegen. Ihre Verbindungsgerade ist der Durchmesser dieses Kreises, der die σ-Achse im Mittelpunkt M_1 schneidet. Damit kann der Kreis 1 gezeichnet werden.
c) Der Mohr'sche Spannungskreis 1 liefert als Schnittpunkte mit der σ-Achse ($\tau = 0$) die Werte $\sigma_1 = 42{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$ und $\sigma_2 = -2{,}5\ \mathrm{N/mm^2}$ für die Hauptspannungen (weiße Punkte in Abb. 2.83).
d) Die beiden anderen Kreise 2 und 3 lassen sich eindeutig konstruieren.
e) Zwischen der Hauptachse 1 und der y-Ebene liegt der Winkel $2\varphi = 67°$ oder $\varphi = 33{,}5°$.

Elastische Energie

Bei der Längen- bzw. Volumenänderung von Körpern wird Arbeit verrichtet. Nach der Definitionsgleichung für die Arbeit $W = \int F\,\mathrm{d}l$ gilt wegen $F = \sigma A$ und $\mathrm{d}l = l\varepsilon$

$$W = \int \sigma A l\,\mathrm{d}\varepsilon = V \int \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon\,; \qquad (2.167)$$

hierin ist V das Ausgangsvolumen. Ist die Verformung völlig elastisch, so wird die Verformungsarbeit als potentielle Energie im Körper gespeichert und bei der Entlastung wieder freigesetzt.

2.11.2 Plastische Verformung

Bei der plastischen Verformung wird nur ein Teil der Verformungsenergie wiedergewonnen und der Körper bleibt deformiert. Abbildung 2.84 zeigt die *Hysteresekurve* einer *elastisch-plastischen Verformung*. Ihr Verlauf ist analog zur magnetischen Hysterese $B = f(H)$ (Abschn. 4.4.4.2, Abb. 4.110). Wird der Körper erstmalig elastisch verformt, dann durchläuft er die Kurve OP. Bei Verringerung der Spannung wird eine andere Kurve durchlaufen. Ist der Körper völlig spannungsfrei, so bleibt eine *Restdehnung* ε_{01} übrig, die nur durch einen entgegengesetzten Druck aufgehoben werden kann. Wird der Druck nach dem Höchstwert Q wieder zurückgenommen, so bleibt der Körper um ε_{02} gestaucht, sodass es eines Zugs bedarf, um ihn wieder in die Ausgangslage zu bringen. Die Arbeit, die während eines Spannungs-Dehnungs-Zyklus im Körper bleibt, ist

$$W = V\left(\int_P^Q \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon + \int_Q^P \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon\right) = V\oint \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon\,. \tag{2.168}$$

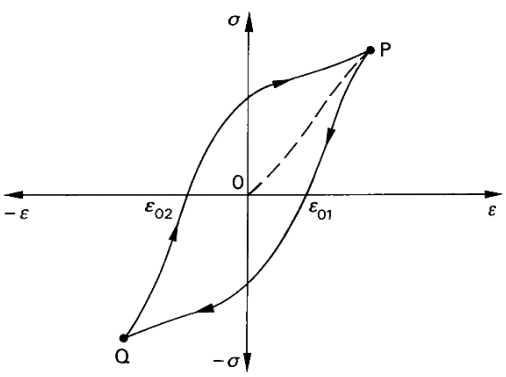


Abb. 2.84 Mechanische Hysterese

Die *Verlustenergiedichte* $w^* = W/V = \oint \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon$ der plastischen Verformung entspricht der *Fläche der Hysteresekurve* im Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

In dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm lassen sich unter Zugbeanspruchung mehrere Bereiche unterscheiden. In Abb. 2.85 sind diese anhand des Spannungs-Dehnungs-Diagramms von Federstahl 55 Si7 erläutert:

- *elastischer Bereich* (0 bis El): Es gilt das *Hooke'sche Gesetz*, d. h., die Verformung geht bei Entlastung wieder zurück;
- *elastisch-plastischer Bereich* (El bis Pl): Nach der Entlastung geht die Dehnung nicht mehr vollständig zurück, ein Teil der Verformung bleibt;

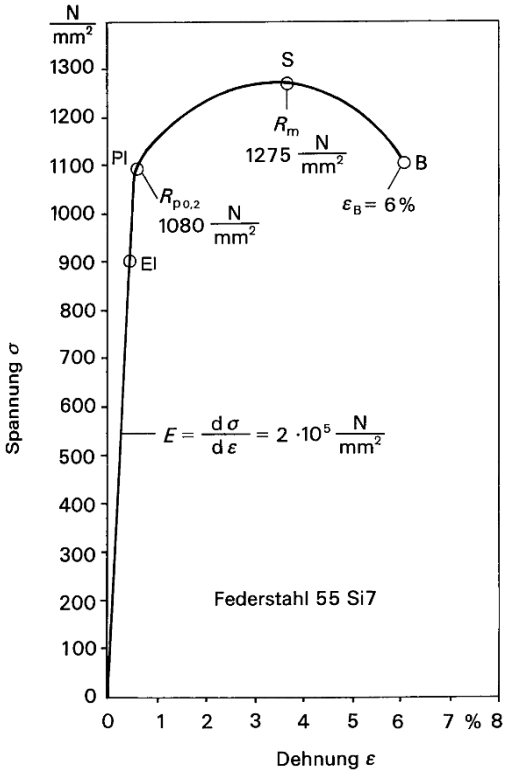


Abb. 2.85 Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Zugversuchs für den Federstahl 55 Si7

- *plastischer Bereich* (Pl bis S): Nach der Entlastung bleibt die Dehnung näherungsweise erhalten, der Körper ist verformt;
- *Bruchpunkt* B: Bei dieser Spannung bricht das Material.

Zur Messung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs für metallische Werkstoffe wird der *Zugversuch nach DIN EN 10 002* durchgeführt. Abbildung 2.86 zeigt eine Universal-Prüfmaschine.

Beim Zugversuch sind zwei unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Verläufe zu unterscheiden, wie Abb. 2.87 zeigt. Entweder erfolgt der Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich *monoton* oder *nicht monoton*. Erfolgt der Übergang stetig (Abb. 2.87a), dann wird als Dehngrenze R_p diejenige Spannung herangezogen, die zu einer bestimmten plastischen (bleibenden) Dehnung ε_r geführt hat. Üblich ist die 0,2%-*Dehngrenze* $R_{p0,2}$. Eine Parallele zur Hooke'schen Geraden (gestrichelte Linie) schneidet die Spannungs-Dehnungs-Kurve im Punkt mit der Ordinate $R_{p0,2}$. In Abb. 2.85 ist $R_{p0,2} = 1\,080\ \mathrm{N/mm^2}$.



Abb. 2.86 Prüfmaschine für den Zugversuch nach DIN EN 10002. Werkfoto: Zwick/Röll

Die Spannung, die zur Höchstzugkraft gehört, ist die *Zugfestigkeit* R_m. In Abb. 2.85 ist $R_m = 1\,275\ \mathrm{N/mm^2}$. Die Zugfestigkeit reiner Metalle beträgt $R_m = 10$ bis $R_m = 20\ \mathrm{N/mm^2}$ (z. B. Blei), diejenige hochfester Stähle $R_m = 2\,500$ bis $R_m = 4\,500\ \mathrm{N/mm^2}$. Die sehr häufig im Maschinenbau eingesetzten Bau- und Vergütungsstähle haben eine Zugfestigkeit zwischen $R_m = 400\ \mathrm{N/mm^2}$ und $R_m = 1\,200\ \mathrm{N/mm^2}$. Bleibt bei zunehmender Dehnung die Zugkraft erstmalig gleich oder fällt sie ab, dann ist die *Streckgrenze* erreicht.

Beim nicht monotonen Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich wird eine *obere Streckgrenze* R_{eH} und eine *untere Streckgrenze* R_{eL} unterschieden (Abb. 2.87b).

Aus der Spannungs-Dehnungs-Kurve lässt sich auch der *Elastizitätsmodul E* nach (2.151) ableiten. Er ist die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve im Ursprung. In Abb. 2.85 ist $E = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{N/mm^2}$. Eine weitere Werkstoffkenngröße ist die *Bruchdehnung* ε_B, also die Dehnung im Bruchpunkt B. In Abb. 2.85 ist $\varepsilon_B = 6\%$.

Die plastische Verformung hinterlässt keine Volumenänderung ($\Delta V = 0$). Dies bedeutet, dass die Querdehnungszahl nach (2.155) $\mu = 0{,}5$ beträgt. Für diese reinen Gestaltsänderungen sind also nur Schubspannungen verantwortlich. Sie bringen ganze Kristallebenen entlang bestimmter Gitterbaufehler (*Versetzungen*, Abschn. 9.1.3.2) zum Abgleiten, ohne dass sich das Kristallgitter geändert hat. Die aus den Zugversuchen errechneten Materialkennwerte müssen unter gleichen Versuchsbedingungen (DIN EN 10 002) stattfinden. Hierzu zählen die Versuchstemperatur (z. B. 18 °C bis 25°C) und die im Zugversuch gefahrene Zug-

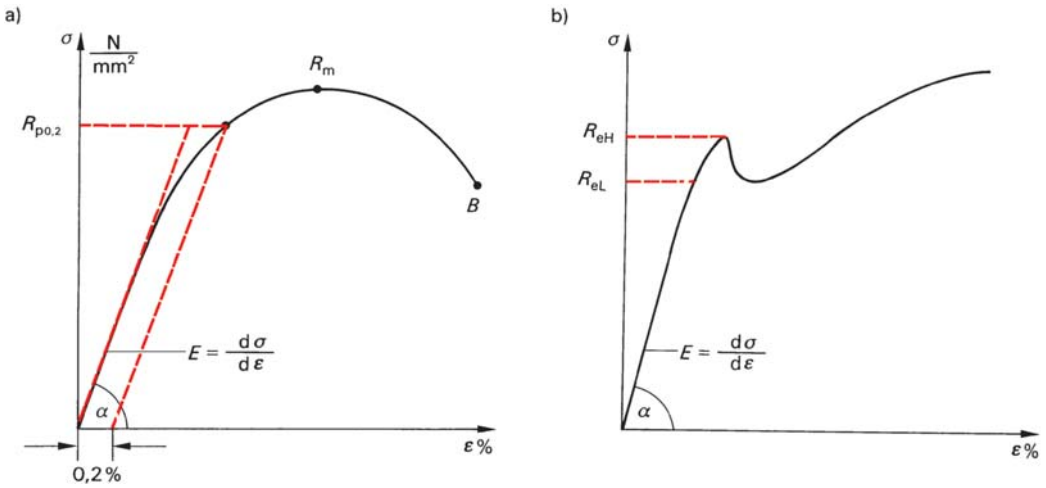


Abb. 2.87 Spannungs-Dehnungs-Verläufe bei Zugversuchen mit **a**) stetigem Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich und **b**) unstetigem Übergang

geschwindigkeit zwischen den Spannungswerten 10 N/mm^2 und 30 N/mm^2.

2.11.3 Härte fester Körper

Die *Härte* eines Stoffs ist der Widerstand gegen das Eindringen eines anderen Körpers. Am häufigsten werden in der Materialprüfung zur Härtebestimmung metallischer Werkstoffe *statische Eindring-Härteprüfverfahren* eingesetzt. Dabei drückt man einen Probekörper mit einer Prüfkraft F stoßfrei in einer bestimmten Zeit in das zu prüfende Material und misst den Eindruck oder bestimmt die Eindringtiefe. In Abb. 2.88 sind die drei wichtigsten Verfahren, das

- *Brinell-Verfahren*,
- *Vickers-Verfahren* und
- *Rockwell-Verfahren*

vergleichend gegenübergestellt und das Messprinzip, die Auswertungsformeln und die Anwendungsgebiete aufgezeigt. Wichtig ist die Angabe der Prüfbedingungen beim Dokumentieren der Härtegrade.

Brinell-Verfahren (HB) nach DIN EN 50 351
Hierbei wird eine Kugel aus gehärtetem Stahl oder Hartmetall mit einer Prüfkraft F in die Oberfläche des zu prüfenden Werkstoffs gedrückt und der Durchmesser d der Eindrückkalotte gemessen. Der Quotient aus Prüfkraft F und eingedrückter Oberfläche A ist der *Brinell-Härtewert* HB. Er wird nach (2.169) in Abb. 2.88 errechnet. Der Faktor 0,102 rechnet die SI-Krafteinheit N in kp um (1 N $\widehat{=}$ 0,102 kp). Durch diesen Kunstgriff bleiben die alten Härtewerte unverändert. Letztendlich bedeutet dies jedoch, dass unverständlicherweise die Einheit kp/mm^2 künstlich beibehalten wird. In Abb. 2.88 sind die Prüfbedingungen angegeben. Dieses Härteprüfverfahren wird nur für weiche Werkstoffe angewandt.

Vickers-Verfahren (HV) nach DIN EN ISO 8 495
Hierbei wird statt einer harten Kugel eine Diamantpyramide mit einer quadratischen Grundfläche mit einer Prüfkraft F (Kleinlastbereich 1,96 N bis 49 N, Normallastbereich 49 N bis 980 N) in den zu prüfenden Werkstoff gedrückt und der Eindruck

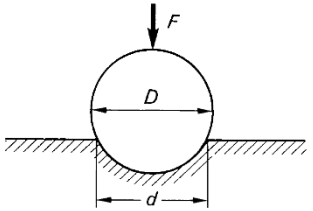
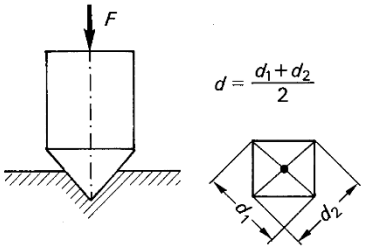
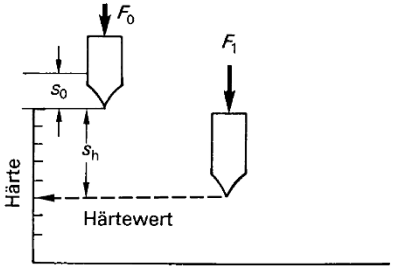
Bezeichnung	Brinell-Verfahren DIN EN 50 351	Vickers-Verfahren DIN EN ISO 8495	Rockwell-Verfahren DIN EN 50 103	
Messprinzip	 *D:* Durchmesser der Prüfkugel *d:* Durchmesser des Kugeleindrucks			
Berechnung	$HB = 0{,}102 \frac{F}{A} = \frac{0{,}102 \cdot 2F}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$ (2.169)	$HV = 0{,}102 \frac{F}{A} = 0{,}189 \frac{F}{d^2}$ (2.170)	Rockwell-B (HRB)	Rockwell-C (HRC)
			$F_0 = 98$ N 2 µm je Härteeinheit $F_1 = 883$ N Prüfkörper: Stahlkugel ($D = \frac{1}{16}'' \approx 1{,}5875$ mm)	$F_0 = 98$ N 2 µm je Härteeinheit $F_1 = 1373$ N Prüfkörper: Diamantkegel Kegelwinkel 120° Bezugshärtewert 100
Angabe der Prüfbedingung	280 HB 2,3/160/20 $D = 2{,}3$ mm, $F = \frac{160\text{ N}}{0{,}102} = 1568$ N, $t = 20$ s	700 HV 50/30 $F = \frac{50\text{ N}}{0{,}102} = 490$ N, $t = 30$ s	———	
Bemerkung	vergleichbare Härtewerte für $0{,}2\,D < d < 0{,}7\,D$	HB ≈ 0,95 HV für $F > 49$ N und Belastungsgrad (Brinell) $0{,}102 \frac{F}{D^2}$ von 30 bis 4 070 HV	automatische Härtemessung	
Anwendungsgebiete	weiche Werkstoffe (max. 450 HB)	weiche Werkstoffe ($1{,}96 < F < 49$ N) (z. B. Blei 3 HV) harte Werkstoffe ($49 < F < 980$ N) (z. B. Hartmetall 1500 HV)	mittelharte Werkstoffe (zwischen 35 HRB und 100 HRB)	gehärtete und angelassene Stähle (zwischen 20 HRC und 70 HRC)

Abb. 2.88 Härteprüfverfahren

$d = (d_1 + d_2)/2$ ermittelt. Die Auswertung erfolgt nach (2.170). Der Faktor 0,102 rührt wie bei der Formel zur Errechnung der Brinell-Härte (2.169) von der Umrechnung von N in kp her. Diese Härteprüfmethode ist für weiche und harte Werkstoffe einsetzbar. Die Brinell-Härte kann näherungsweise 1:1 in die Vickers-Härte umgerechnet werden. Nach DIN EN ISO 18 265 kann man die Zugfestigkeit R_m für Stahl aus der Vickers-Härte nach der Beziehung $R_m \approx 3{,}38\,\text{HV}$ als ersten Anhaltspunkt abschätzen.

Rockwell-Verfahren (HR) nach DIN EN 50 103

Hierbei wird die Härte aus der Eindringtiefe eines Probekörpers direkt ermittelt. Eine Prüfvorkraft F_0 (98 N) stellt einen sicheren Kontakt zum Prüfling her und erzeugt die Eindringtiefe s_0, die die Bezugsskala darstellt. Durch mindestens viermal so große Prüfkräfte wird die Eindringtiefe s_h bestimmt, aus der an einer Skala der Härtewert direkt abgelesen werden kann.

In der Praxis werden zwei Varianten eingesetzt, das *Rockwell-B-Verfahren* (HRB) und das *Rockwell-C-Verfahren* (HRC). Beide Verfahren benutzen die Prüfvorkraft $F_0 = 98\,\text{N}$ und legen den Härtemaßstab auf 2 µm je Härteeinheit fest. Der große Vorteil bei der Härtemessung nach Rockwell ist die Automatisierbarkeit der Methode. Ein Nachteil ist die im Vergleich zum Brinell- und Vickers-Verfahren geringere Messgenauigkeit.

Obwohl die Härtewerte nach Brinell, Vickers und Rockwell auf unterschiedliche Weise ermittelt werden, können die Härtegrade innerhalb bestimmter Bereiche ineinander umgerechnet werden. Die Vickers-Härte ist der Bezugsmaßstab, weil diese Methode das ganze Härtespektrum von weich bis extrem hart überdeckt. Die Härtevergleichstabellen sind in DIN 50 150 genormt.

Zur Übung

Ü 2.11-1 Ein Stahlstab der Länge $l = 1{,}5\,\text{m}$ rotiert um eine Achse, die senkrecht zur Stabachse durch ein Stabende geht. Bei welcher Drehzahl reißt der Stab? ($R_m = 450\,\text{N/mm}^2$).

Ü 2.11-2 Ein Rundstab mit dem Durchmesser d und Länge l besitzt einen Elastizitätsmodul E. Wenn er in Längsrichtung gezogen wird, verlängert er sich wie eine Feder, es muss also das Hooke'sche Gesetz $F = ks$ gelten nach (2.32). a) Von welchen physikalischen Größen hängt die Federkonstante k ab? b) Welchen Durchmesser muss ein Stahlstab mit $E = 200\,\text{GN/m}^2$ und Länge $l = 1\,\text{m}$ haben, wenn seine Federkonstante $k = 1\,\text{MN/m}$ sein soll? c) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Stab um 0,5% zu verlängern? d) Wie groß ist die relative Volumenänderung des Stabes, wenn die Poissonzahl $\mu = 0{,}3$ beträgt?

2.12 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase-, Hydro- und Aeromechanik

Die Hydro- und Aeromechanik beschreibt Zustände und Bewegungen von *Flüssigkeiten* und *Gasen*. *Flüssigkeiten* sind kaum zusammendrückbar (*inkompressibel*), aber ihre Moleküle lassen sich leicht gegeneinander bewegen (*unbestimmte Gestalt*). *Gase* haben dagegen weder eine bestimmte Gestalt, noch ein bestimmtes Volumen (*kompressibel*). Sind die Flüssigkeiten oder Gase in *Ruhe*, so gelten die Gesetze der *Hydro-* und *Aerostatik*. *Bewegen* sich Flüssigkeiten oder Gase, gelten die Gleichungen der *Hydro-* und *Aerodynamik*.

In der *Hydrostatik* sind der *Kolbendruck*, der *Schweredruck* und der *Auftrieb* von Bedeutung, in der *Aerostatik* der Zusammenhang zwischen Druck und Volumen (*Boyle-Mariottesches Gesetz*) sowie die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe (*Barometrische Höhenformel*).

In der *Hydro-* und *Aerodynamik* unterscheidet man *ideal-reibungsfreie*, *laminare* und *turbu-*

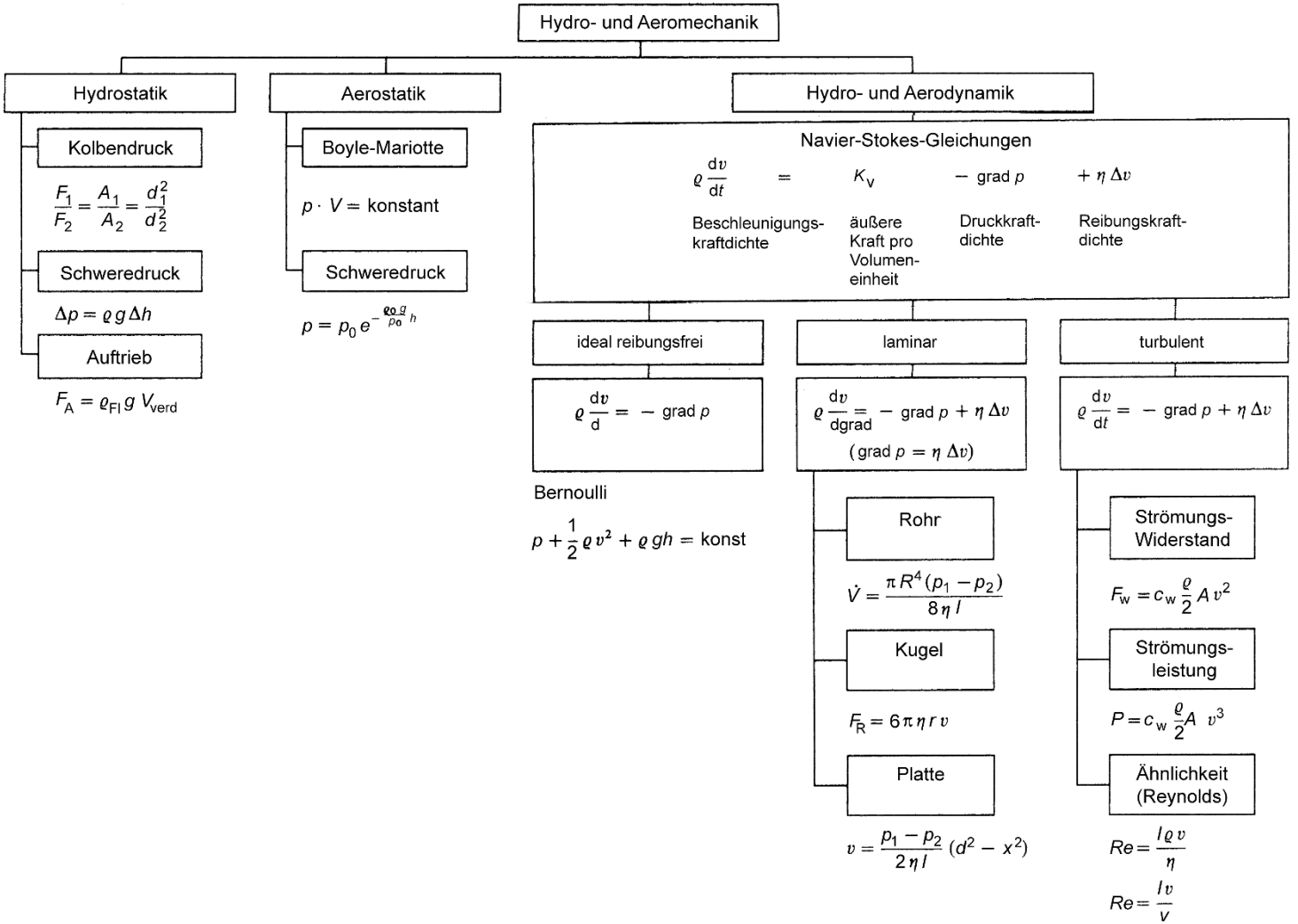


Abb. 2.89 Übersicht über die Hydro- und Aerodynamik

lente Strömungen. Ihnen liegen die Newton'schen Gesetze der Flüssigkeitsbewegung zugrunde, die in der *Navier-Stokes-Gleichung* zusammengefasst sind, wie Abb. 2.89 ausführlich zeigt. Bei den ideal-reibungsfreien Flüssigkeiten und Gasen gilt die *Bernoulli'sche Gleichung*, bei den *laminaren Strömungen* sind die Strömungsverhältnisse für Rohre, Kugeln und Platten von Bedeutung. Bei den *turbulenten* Strömungen treten Wirbel auf, die zum Strömungswiderstand führen und eine *Strömungsleistung* erfordern. Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung wird durch die *Reynolds-Zahl* bestimmt, die aus *Ähnlichkeitsgesetzen* berechnet wird.

2.12.1 Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik) und ruhende Gase (Aerostatik)

2.12.1.1 Druck

Aufgrund der leichten Verschiebbarkeit der Moleküle in Flüssigkeiten und Gasen wirken sich Kräfte auf Flüssigkeits- und Gasvolumina im Grenzfall unendlich langsamer Veränderungen (statischer Grenzfall) sofort auf das Gesamtvolumen aus. Es kommt zu einem einheitlichen Zustand in den Flüssigkeiten und Gasen, der durch den Druck p beschrieben wird. Dieser ist definiert als Quotient aus der Kraft $\mathrm{d}F$, die senkrecht auf ein Flächenelement $\mathrm{d}A$ der Begrenzungsfläche wirkt:

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \,. \tag{2.171}$$

Durch die Vereinbarung, dass, wie in Abb. 2.90 gezeigt, $\mathrm{d}F$ die Kraftkomponente senkrecht zur Begrenzungsfläche $\mathrm{d}A$ ist, wird die Kraftrichtung festgelegt. Der Druck ist also eine skalare physikalische Größe mit der Maßeinheit $1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{Pa}$. Die Druckmaßeinheit ist nach dem französischen Physiker *Pascal*

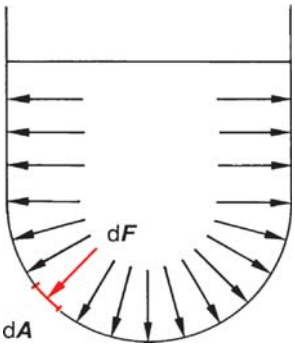


Abb. 2.90 Zur Definition des Drucks

(B. Pascal, 1623 bis 1662) benannt. Eine weitere spezielle SI-Einheit für den Druck ist $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$. Der irdische Luftdruck liegt bei $p \approx 1\ \mathrm{bar}$.

Abbildung 2.91 zeigt die zur Druckmessung eingesetzten Messgeräte (*Manometer*), deren Anwendungsgebiete und einzelne Manometerbauformen. Im Wesentlichen gibt es vier Arten: Flüssigkeits-, Kolben- und Federmanometer sowie elektrische Druckmesser. Die *Flüssigkeitsmanometer* eignen sich zur Messung geringer Druckdifferenzen, und die *Kolbenmanometer* sind robuste Messgeräte. Weil sie einfach gebaut, robust und preiswert sind, sind die *federelastischen Manometer* am weitesten verbreitet (z. B. das *Aneroid-Barometer* zur Messung des barometrischen Drucks). Bei den *elektrischen Druckmessern* wird die mechanische Druckenergie durch verschiedene Effekte direkt in elektrische Energie umgewandelt. Sie werden zur Messung sehr kleiner oder sehr großer Drücke sowie zur Druckverfolgung bei schnell wechselnden Druckverteilungen hoher Frequenzen eingesetzt. Sie haben den Vorteil, dass ihre elektrischen Ausgangssignale direkt zur Steuerung und Regelung weiterverarbeitet werden können. Bei der Auswahl eines geeigneten Manometers sind vor allem folgende Punkte zu berücksichtigen:

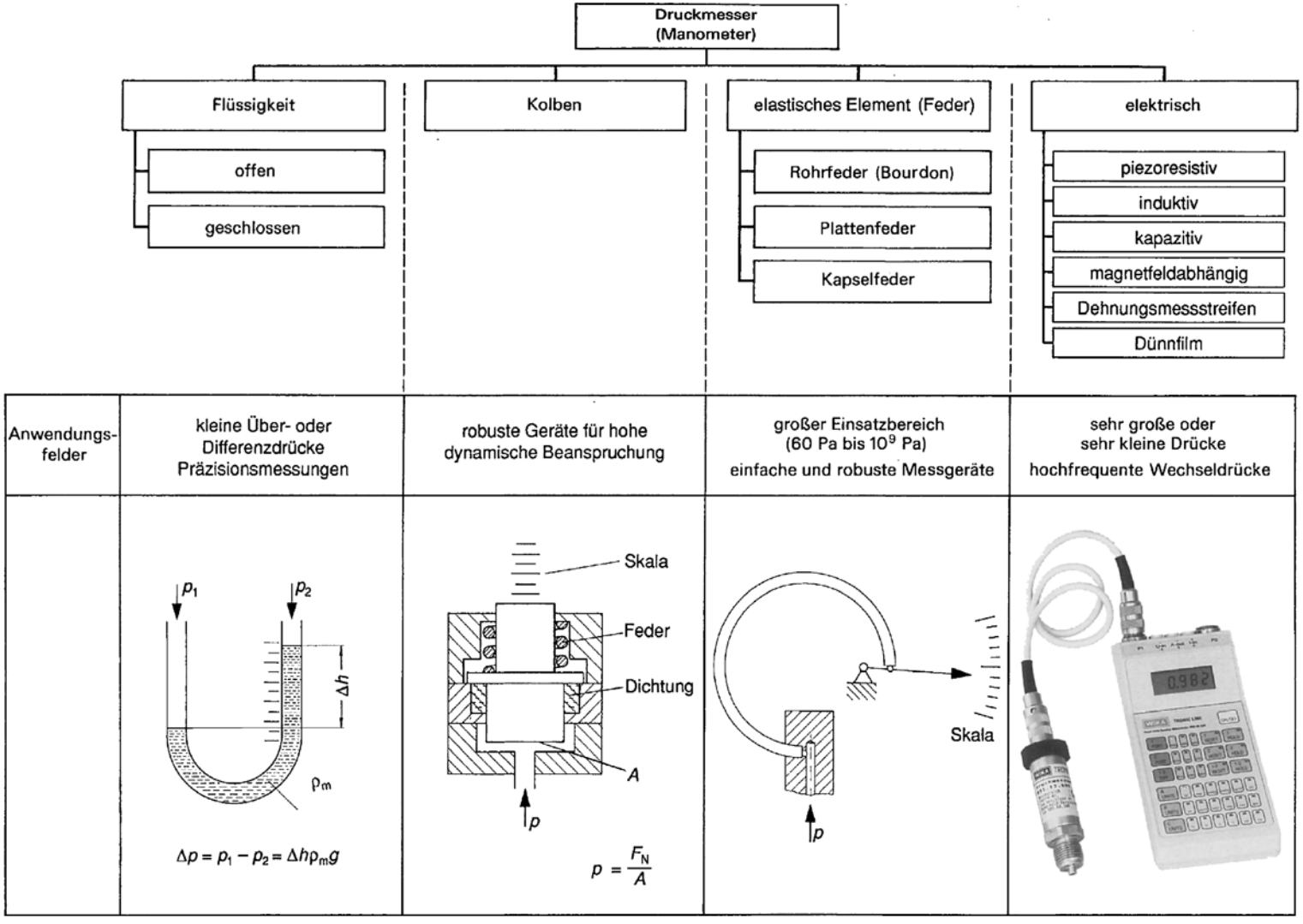


Abb. 2.91 Druckmesser (Werkfotos: Alexander Wigand GmbH)

- Aggregatszustand des Messstoffs
- Druck, Temperatur und weitere Stoffeigenschaften des Messstoffs sowie
- Beeinflussung des Zeitverhaltens der Messeinrichtung durch die Messanordnung.

Empfehlungen für eine messtechnisch sinnvolle Druckbestimmung sind in der *VDI/VDE-Richtlinie 3512, Blatt 3* (Messanordnungen für Druckmessungen) enthalten.

2.12.1.2 Kompressibilität

Druckerhöhungen bewirken bei Flüssigkeiten und Gasen eine Volumenabnahme. Näherungsweise ist die relative Volumenänderung $\Delta V/V$ proportional zur Druckänderung Δp:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\varkappa \Delta p \,. \tag{2.172}$$

Die *Kompressibilität* κ mit der Maßeinheit Pa^{-1} ist die Proportionalitätskonstante; das Minuszeichen kennzeichnet die gegenläufigen Änderungen von Volumen und Druck. Wegen der Volumenänderung erfolgt auch eine Änderung der Dichte $\varrho = m/V$ der Flüssigkeiten und Gase. Es gilt

$$\Delta\varrho = -m\frac{\Delta V}{V^2} = -\varrho\frac{\Delta V}{V}$$

und damit

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \varkappa\Delta p \,. \tag{2.173}$$

Die Kompressibilität κ der Flüssigkeiten ist im Vergleich zu den Werten bei Gasen sehr klein. Die Eigenschaft von Flüssigkeiten, leicht verschiebbar und *näherungsweise inkompressibel* zu sein, wird in der Technik zur räumlichen Kraftübertragung ausgenützt (*Hydraulik*). Abbildung 2.92 zeigt als Anwendung dieses Effekts die *hydraulische Presse*. Diese hat zwei bewegliche Kolben mit unterschiedlichen Quer-

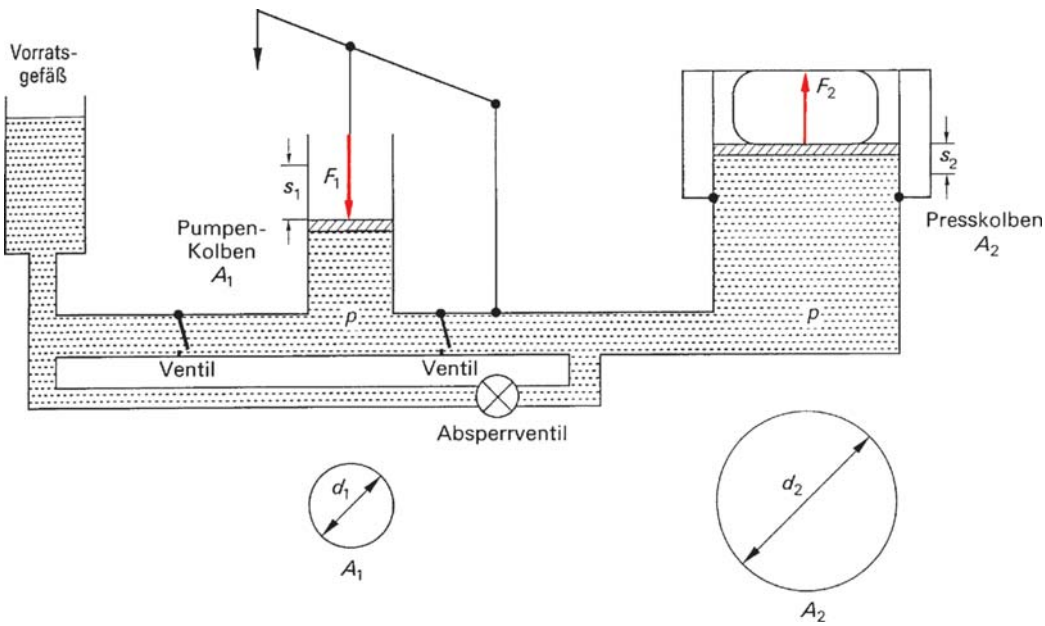


Abb. 2.92 Hydraulische Presse, schematisch

schnittsflächen A_1 und A_2. Die Rückschlagventile ermöglichen wiederholte Pumpstöße auf den Presskolben: Durch Öffnen des Absperrventils kann der Presskolben wieder zurückgefahren werden. Wird der Pumpenkolben durch eine Kraft F_1 reibungsfrei um die Wegstrecke s_1 verschoben, so drückt das verschobene Volumen den Presskolben mit einer Kraft F_2 um die Wegstrecke s_2 nach oben. Wegen der Gleichheit des Volumens (Inkompressibilität der Flüssigkeiten) gilt $A_1 s_1 = A_2 s_2$.

Ferner muss die am Pumpenkolben aufgewandte Arbeit $W_1 = F_1 s_1$ gleich der am Presskolben frei werdenden Arbeit $W_2 = F_2 s_2$ sein. Es gilt $F_1 s_1 = F_2 s_2$. Durch Division erhält man

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \text{oder} \qquad p_1 = p_2 = p \,.$$

Für die Kraft F_2 am Presskolben folgt

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \,.$$

Dies bedeutet, dass die Kraft F_2 im Presskolben um das Verhältnis $A_2{:}A_1$ größer ist als die Pumpkraft F_1. Für kreisförmige Kolben mit den Durchmessern d_1 und d_2 ergibt sich

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\mathrm{d}_1^2}{d_2^2} \,. \tag{2.174}$$

Weitere Hydraulikanwendungen sind *Flüssigkeitsbremsen, hydraulische Hebebühnen* oder *Druckwandler.* Abbildung 2.93 zeigt das Prinzip. Wird die Kraft auf zwei Kolben unterschiedlicher Fläche konstant gehalten, so treten Druckunterschiede auf ($p_1 < p_2$).

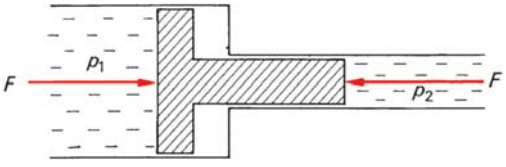


Abb. 2.93 Druckwandlung

Gase sind sehr kompressibel. Für ideale Gase kann die isotherme Kompressibilität $\kappa_{\text{id. Gas}}$ aus der Zustandsgleichung (Abschn. 3.1.5, (3.20)) berechnet werden:

$$\kappa_{\text{id. Gas}} = \frac{1}{p} \,. \tag{2.175}$$

Sie hängt nur vom Gasdruck und nicht von der Gasart ab.

Die in komprimierten Gasen gespeicherte mechanische Arbeit lässt sich wegen der leichten Verschiebbarkeit der Gasmoleküle in einem Gasvolumen an jeder Stelle entnehmen. Komprimierte Gase, vor allem *Pressluft*, werden in Maschinenanlagen als Energieträger für Arbeitsprozesse und Steuerungen eingesetzt (*Pneumatik*). Die Expansionsvorgänge, besonders bei pneumatischen Regelungen, erfolgen dabei im Allgemeinen so schnell, dass die Arbeitsabgabe *isentrop* erfolgt (Abschn. 3.3.4.4).

2.12.1.3 Volumenausdehnungskoeffizient

Temperaturänderungen ΔT ändern ebenfalls das Volumen von Flüssigkeiten und Gasen. Die relative Volumenänderung $\Delta V/V_0$ ist näherungsweise proportional zur Temperaturänderung:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta \vartheta \,. \tag{2.176}$$

γ ist der Volumenausdehnungskoeffizient; seine Maßeinheit ist K^{-1}. In der Technik wird als Bezugsvolumen das Volumen V_0 bei $\vartheta_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ angesetzt. Beträgt bei $\vartheta_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ die Dichte $\varrho_0 = m/V_0$, so ändert sie sich infolge der temperaturbedingten Volumenänderung. Bezogen auf das Volumen

$$V = V_0 + \Delta V = V_0(1 + \gamma \Delta \vartheta)$$

ist die Dichte

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \Delta\vartheta} \,. \qquad (2.177)$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient der Flüssigkeiten ist klein im Vergleich zu dem von Gasen (Abschn. 3.1.4). Für alle idealen Gase ist er gleich und beträgt $\gamma = 1/T_0 = 1/273{,}15\ \mathrm{K}^{-1} = 0{,}00366\ \mathrm{K}^{-1}$.

2.12.1.4 Schweredruck

Durch die Gewichtskraft der Moleküle wird in tieferen Schichten von Flüssigkeiten und Gasen die Kraft auf die Begrenzungsfläche des Flüssigkeits- oder Gasvolumens erhöht. In größeren Tiefen ist der Druck in der Flüssigkeit oder im Gas um den *Schweredruck* erhöht. Die Druckerhöhung $\mathrm{d}p$ bei einer kleinen Zunahme $\mathrm{d}y$ der Tiefe der Flüssigkeits- oder Gassäule beträgt

$$\mathrm{d}p = \varrho g \,\mathrm{d}y \,. \qquad (2.178)$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeits- oder Gasschicht in der Tiefe y.

Schweredruck in Flüssigkeiten

Wegen der Schwerkraft wirkt auf eine Fläche zusätzlich zu einem äußeren Druck p_a die Gewichtskraft F_G der über dieser Fläche liegenden Flüssigkeitssäule, wie Abb. 2.94 zeigt. Diese Gewichtskraft beträgt $F_\mathrm{G} = mg = \varrho A\, y\, g$. Für den Flüssigkeitsdruck am Ende der Säule ergibt sich durch Integration von (2.178)

$$p_{y_0} = \varrho\, g\, y_0 \,. \qquad (2.179)$$

Dies bedeutet, dass der Schweredruck von Flüssigkeiten lediglich von der Füllhöhe, nicht aber von der Form des Gefäßes abhängt. Man spricht hierbei vom *hydrostatischen Paradoxon.*

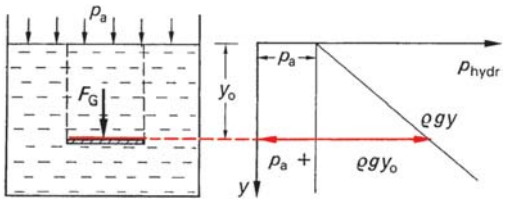


Abb. 2.94 Zum Schweredruck in einer Flüssigkeit

Die Summe von äußerem Druck p_a und Schweredruck p_y wird *hydrostatischer Druck* p_hydr genannt. Die Abhängigkeit des hydrostatischen Drucks von der Tiefe y (Abb. 2.94) ergibt sich aus

$$p_\mathrm{hydr} = p_\mathrm{a} + \varrho\, g\, y \,. \qquad (2.180)$$

Wie (2.180) zeigt, kann zur Druckmessung die Höhe einer Flüssigkeitssäule verwendet werden (*Flüssigkeitsmanometer*). Der Schweredruck von 10 m Wasser beträgt nach (2.179) etwa 1 bar = 10^5 Pa.

Der Schweredruck auf eine seitliche Fläche A_s wird *Seitendruck* genannt. Da der Schweredruck proportional zur Tiefe y zunimmt, greift die resultierende Kraft F_s nicht im Flächenschwerpunkt S, sondern in einem tiefer gelegenen Punkt, dem Druckmittelpunkt S′ an, wie Abb. 2.95 verdeutlicht. Zur Berechnung der seitlich wirkenden Kraft wird die Fläche in Teilflächenstücke $\mathrm{d}A$ unterteilt. Die Seitenkraft $\mathrm{d}F_\mathrm{s}$ innerhalb einer Teilfläche $\mathrm{d}A$ beträgt $\mathrm{d}F_\mathrm{s} = \varrho\, g\, y\, \mathrm{d}A$. Für die gesamte Seitenkraft gilt dann

$$F_\mathrm{s} = \int_{y_1}^{y_2} \varrho g y \,\mathrm{d}A = \varrho\, g \int_{y_1}^{y_2} y \,\mathrm{d}A \,.$$

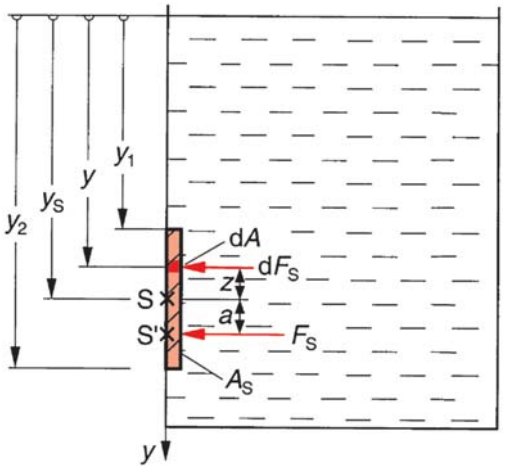


Abb. 2.95 Seitendruck in einer Flüssigkeit

Das Integral $\int_{y_1}^{y_2} y\,\mathrm{d}A$ wird *statisches Moment* $M_s = y_s A_s$ genannt. (y_s ist die Tiefe vom Flüssigkeitsspiegel bis zum Schwerpunkt S.) Somit gilt für die *Seitendruckkraft*

$$F_s = \varrho g y_s A_s \,. \tag{2.181}$$

Weil das Moment der Seitendruckkraft F_s bezüglich S übereinstimmen muss mit der Summe (Integral) der Einzelmomente, gilt

$$F_s a = -\int_{z=y_s-y_2}^{z=y_1-y_s} zrg(y_s - z)\,\mathrm{d}A \,, \qquad \text{oder}$$

$$y_s A_s a = -y_s \int_{y_s-y_2}^{y_1-y_s} z\,\mathrm{d}A + \int_{y_s-y_2}^{y_1-y_s} z^2\,\mathrm{d}A \,.$$

Das erste Integral ist null, das zweite ist das *Flächenträgheitsmoment* I_s der Fläche A_s bezüglich S:

$$I_s = \int_{A_s} z^2\,\mathrm{d}A \,. \tag{2.182}$$

Damit ergibt sich für den *Druckmittelpunktabstand*

$$a = \frac{I_s}{y_s A_s} \,. \tag{2.183}$$

Die Seitendruckkräfte können besonders am Fuß von Staudämmen erhebliche Werte erreichen und erfordern deshalb in diesem Bereich große Staudammquerschnitte.

Beispiel

2.12-1 Ein $b = 2$ m breites und $h = 3$ m hohes seitliches Loch in einer Schleusenwand wird von einer Platte verschlossen, deren Schwerpunkt 10 m unter dem Wasserspiegel ($\varrho = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3) liegt. Berechnet werden sollen die Seitendruckkraft F_s und der Abstand a des Schwerpunkts vom Angriffspunkt der resultierenden Seitenkraft F_s.

Lösung

Für die Seitendruckkraft F_s gilt nach (2.181)

$$F_s = \varrho g y_s A_s = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3\ \mathrm{N} = 5{,}89 \cdot 10^5\ \mathrm{N} \,.$$

Dieser Wert zeigt, wie außerordentlich groß die Seitendruckkräfte sind. Den Druckmittelpunktsabstand a erhält man nach (2.183): $a = I_s/(y_s A_s)$ mit dem Flächenträgheitsmoment $I_s = b h^3/12$. Somit errechnet man

$$a = \frac{bh^3}{12}\,\frac{1}{h_s bh} = \frac{h^2}{120} = 7{,}5\ \mathrm{cm} \,.$$

Schweredruck in Gasen

Der Schweredruck eines Gases errechnet sich aus der über einer Bezugsebene stehenden Gassäule. Da die Gase durch die Wirkung der Erdanziehungskraft komprimiert werden, nimmt die Dichte des Gases mit zunehmender Höhe ab. Aus diesem Grund kann (2.178) nur für eine kleine Höhendifferenz dh gültig sein, innerhalb derer die Dichte annähernd konstant ist. Bei einer Höhenzunahme dh über Meereshöhe nimmt die Höhe der Gassäule und damit der hydrostatische Druck um

$\mathrm{d}p = -\varrho g\,\mathrm{d}h$ ab. Unter der Voraussetzung einer konstanten Temperatur *(Boyle-Mariotte'sches Gesetz*, Abschn. 3.1.5, (3.15)) gilt für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte $\varrho = (\varrho_0 p)/p_0$. Somit gilt

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0 g}{p_0} \int_0^h \mathrm{d}h \qquad \text{bzw.}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\varrho_0 g}{p_0} h \qquad \text{oder}$$

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} h} \qquad \text{und}$$

$$\varrho = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} h}\,. \qquad (2.184)$$

Dies ist die *barometrische Höhenformel.* Sie zeigt, dass der Schweredruck eines Gases mit steigender Höhe h über dem Ausgangsniveau exponentiell abfällt, und gilt, wenn in jeder Höhe dieselbe Temperatur ϑ herrscht.

Für die Normatmosphäre nach DIN 5450 ist für eine Lufttemperatur $\vartheta = 0\,^\circ\mathrm{C}$, $p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa und $\varrho_0 = 1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}$. Somit beträgt der Exponent in der barometrischen Höhenformel $\varrho_0 g/p_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^{-1}}$. Abbildung 2.96 zeigt die Druckabhängigkeit von der Höhe h für Luft. Zum besseren Vergleich ist der Druck normiert als p/p_0 aufgetragen. Werden die errechneten Werte in die barometrische Höhenformel eingesetzt, so gilt für Luft

$$p = 1{,}01325 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}256 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^{-1}} h}\,. \qquad (2.185)$$

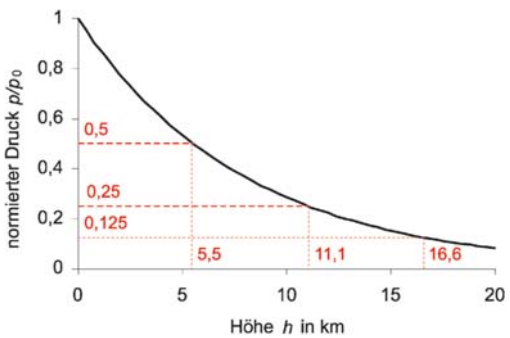


Abb. 2.96 Barometrische Höhenformel für Luft nach (2.185)

Die Höhe, bei der der Ausgangspunkt nur noch halb so groß ist ($p = p_0/2$, Halbwertshöhe), beträgt $h_{1/2} = 5{,}54\,\mathrm{km}$. Dies bedeutet, dass der Luftdruck nach $h = 5{,}54\,\mathrm{km}$ auf die Hälfte abnimmt (Abb. 2.96).

Die internationale Höhenformel berücksichtigt die Temperaturabnahme mit steigender Höhe. Sie ist bis zur *Tropopause* ($h = 11\,\mathrm{km}$) gültig und lautet

$$p = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\left(1 - \frac{6{,}5}{288\,\mathrm{km}} h\right)^{5{,}255}\,. \qquad (2.186)$$

Mit der Temperaturkorrektur ergibt sich für den Dichteverlauf in der Erdatmosphäre

$$\varrho = 1{,}2255\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\left(1 - \frac{6{,}5}{288\,\mathrm{km}} h\right)^{4{,}255}\,. \qquad (2.187)$$

Der Luftdruck in Meereshöhe beträgt im Jahresdurchschnitt $p = 101\,325$ Pa (*Normdruck*). Der aktuelle Luftdruck ist zusätzlich noch von der jeweiligen Temperatur und der Wetterlage abhängig. Otto von Guericke (1602 bis 1686) bewies 1654 die Wirkung des Luftdrucks durch sein Experiment mit den *Magdeburger Halbkugeln.* Er pumpte zwei Halbkugelschalen (Halbmesser $r = 21\,\mathrm{cm}$) mit einer selbsterfundenen Luftpumpe nahezu luftleer. Der äußere Luftdruck presste deshalb die beiden Halbku-

geln mit einer Kraft $F = p_0 \pi r^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^4$ N zusammen. Diese Kraft war so groß, dass acht Pferde an jeder Seite die Kugel nicht auseinanderziehen konnten.

2.12.1.5 Auftrieb

Wegen des Schweredrucks von Flüssigkeiten und Gasen sind alle in Flüssigkeiten und Gasen eingetauchte Körper leichter als außerhalb dieser Medien (*Archimedisches Prinzip*) (Archimedes, 287 bis 212 v. Chr.). Diese Erscheinung wird *Auftrieb* genannt. Abbildung 2.97 zeigt einen in eine Flüssigkeit oder ein Gas eingetauchten Körper. Da sich die Seitenkräfte F_{s1} und F_{s2} gegenseitig aufheben, bleibt wegen der Höhendifferenz $h_2 - h_1$ eine Kraftdifferenz $F_2 - F_1$ auf die Unterfläche bestehen, die gleich der Auftriebskraft F_A ist. Wenn die Dichte ϱ_{fl} der Flüssigkeit oder des Gases konstant ist, beträgt die Auftriebskraft

$$F_A = F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) = A\varrho_{fl} g(h_2 - h_1) \,.$$

Da $A(h_2 - h_1)$ das Volumen des Körpers bzw. das durch den eingetauchten Körper verdrängte Flüssigkeitsvolumen V_{verd} ist, gilt

$$F_A = \varrho_{fl} g V_{verd} = m_{verd} g = F_{G,\,verd} \tag{2.188}$$

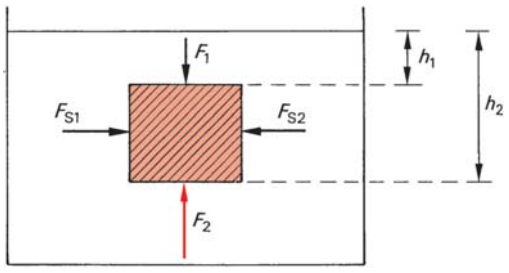


Abb. 2.97 Zur Entstehung der Auftriebskraft

mit m_{verd} bzw. $F_{G,\,verd}$ als der Masse bzw. der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeits- oder Gasvolumens. Die Auftriebskraft F_A ist demnach gleich der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeits- bzw. Gasvolumens. Sie hängt nur vom Volumen des eingetauchten Körpers bzw. von der verdrängten Flüssigkeitsmenge, nicht aber von seinem Gewicht ab. Bei gleichem Eintauchvolumen erfährt also ein Stück Holz dieselbe Auftriebskraft wie ein Stück Blei.

Je nach dem Gewicht F_G des eingetauchten Körpers sind drei Fälle zu unterscheiden:

$F_G < F_A$: Der Körper *schwimmt.*

$F_G = F_A$: Der Körper *schwebt.*

$F_G > F_A$: Der Körper *sinkt.*

Durch die Wirkung ihrer Auftriebskraft können die Dichten von festen Körpern und Flüssigkeiten bestimmt werden. Dabei ist es erforderlich, dass die Gewichtskräfte des festen Körpers in Luft ($F_{G,L}$) und nach dem Eintauchen in eine Flüssigkeit ($F_{G,E}$) gemessen werden, z. B. durch eine *hydrostatische Waage*. Der Gewichtsunterschied $F_{G,L} - F_{G,E}$ ist gleich der Auftriebskraft:

$$F_{G,L} - F_{G,E} = F_A = \varrho_{fl} V g \,.$$

Wird für das Volumen des festen Körpers $V = m/\varrho_K$ gesetzt und das Gewicht des festen Körpers durch $F_{G,L} = mg$ ausgedrückt, ergibt sich

$$F_{G,L} - F_{G,E} = \varrho_{fl} \frac{m}{\varrho_K} g = \frac{\varrho_{fl}}{\varrho_K} F_{G,L} \,. \tag{2.189}$$

Bei bekannter Dichte ϱ_{fl} der Flüssigkeit lässt sich die Dichte ϱ_K des festen Körpers berechnen:

$$\varrho_K = \varrho_{fl} \frac{F_{G,L}}{F_{G,L} - F_{G,E}} = \frac{\varrho_{fl}}{1 - \frac{F_{G,E}}{F_{G,L}}} \,. \quad (2.190)$$

Ist dagegen die Dichte des festen Körpers bekannt, so ergibt sich die Dichte der Flüssigkeit gemäß

$$\varrho_{fl} = \varrho_K \left(1 - \frac{F_{G,E}}{F_{G,L}}\right) \,. \quad (2.191)$$

In Flüssigkeiten verschiedener Dichten taucht ein schwimmender Körper unterschiedlich tief ein. Aus der Bestimmung der Senktiefe wird durch Benutzung von *Senkwaagen* oder *Aräometern* in der Praxis häufig die Dichte von Flüssigkeiten ermittelt.

Bei einem schwimmenden Körper können sich *Stabilitätsprobleme* ergeben, wie Abb. 2.98 zeigt. Die Gewichtskraft F_G greift im Schwerpunkt des Körpers S_K und die Auftriebskraft F_A im Schwerpunkt S_{Fl} an. Im Gleichgewichtszustand fallen die Wirkungslinien der beiden Kräfte zusammen, sodass kein Drehmoment M wirksam werden kann. Wird der Körper gedreht, so gibt es einen Schnittpunkt zwischen der Symmetrielinie des Körpers und der Auftriebskraft F_A. Er wird *Metazentrum* M^* genannt. Der Abstand zwischen den beiden Schwerpunkten S_K und S_{fl} ist der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$. Liegt das Metazentrum M^* über dem Körperschwerpunkt S_K, dann wird der Körper vom Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_A$ in die Gleichgewichtslage zurückgedreht (*stabile Lage*, Abb. 2.98b). Befindet sich das Metazentrum M^* unterhalb des Körperschwerpunktes S_K, so kippt der Körper wegen des Momentes $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_A$ um (*instabile Lage*, Abb. 2.98c).

2.12.1.6 Grenzflächeneffekte

Kräfte, die zwischen gleichartigen Atomen oder Molekülen eines Stoffes wirken, werden

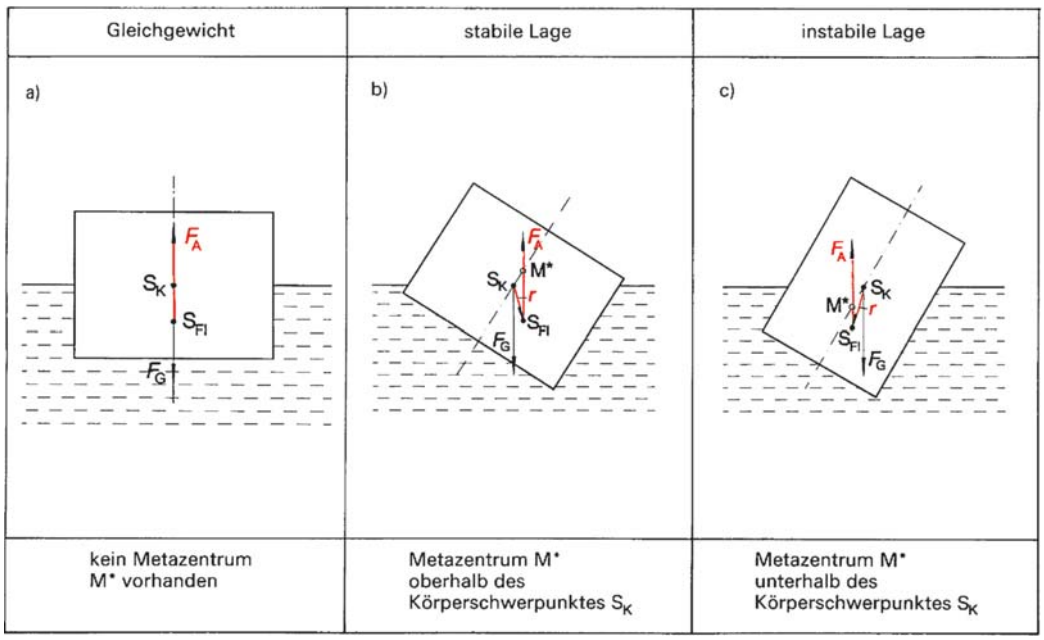


Abb. 2.98 Stabilität schwimmender Körper

Kohäsionskräfte (*Zusammenhangskräfte*) genannt. Sie sind elektrischen Ursprungs und werden auch *van der Waals'sche Kräfte* genannt (Abschn. 9.1.1.1). Kohäsionskräfte treten in festen Körpern und Flüssigkeiten auf. Bei Gasen ist ihre Wirkung erst kurz oberhalb der Siedepunkte feststellbar; die Kohäsionskräfte verursachen die Abweichungen vom idealen Gasverhalten und den Übergang zum realen Gas (Abschn. 3.4). Die Kohäsionskräfte sind allgemein wesentlich stärker als die Gravitationskräfte.

Wirken zwischen den Molekülen zweier verschiedener Stoffe Anziehungskräfte, so werden sie *Adhäsionskräfte* (*Anhangskräfte*) genannt. Sie können zwischen festen Körpern, festen Körpern und Flüssigkeiten sowie zwischen festen Körpern und Gasen (*Adsorption*) wirken.

Oberflächenspannung

Die zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirkenden Kohäsionskräfte heben sich im Innern der Flüssigkeit auf, da jedes Molekül allseitig von gleichartigen Molekülen umgeben ist, wie Abb. 2.99 zeigt. An der Oberfläche fehlen die nach außen gerichteten Kräfte. Deshalb entsteht eine resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}$ ins Innere der Flüssigkeit. Um Moleküle gegen diese Kraft an die Oberfläche zu bringen, muss die Arbeit W verrichtet werden. Aus diesem Grund haben auch Moleküle an der Oberfläche einer Flüssigkeit eine potentielle Energie, die *Oberflächenenergie* genannt wird.

Wird die Arbeit $\mathrm{d}W$ zur Oberflächenvergrößerung auf die Oberflächenänderung $\mathrm{d}A$ bezogen, so ergibt sich die *Oberflächenspannung*

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A} \,. \tag{2.192}$$

Die Einheit ist $1\ \mathrm{J/m^2} = 1\ \mathrm{kg/s^2} = 1\ \mathrm{N/m}$.

Da ein System immer den Zustand kleinstmöglicher potentieller Energie einnimmt, sind *Flüssigkeitsoberflächen* stets *Minimalflächen*; z. B. besitzt die Kugel die kleinste Oberfläche unter allen Körpern gleichen Volumens.

Die Oberflächenspannung wird häufig mit einem beweglichen Bügel nach Abb. 2.100 gemessen. Ein Drahtbügel der Länge l wird in die Flüssigkeit getaucht und mit einer Kraft F herausgezogen. Dabei bildet sich zwischen den Eckpunkten ABCD eine dünne Flüssigkeitshaut. Werden die Kraft F, bei der die Flüssigkeitshaut reißt, und der Weg Δs gemessen, so kann die Oberflächenspannung berechnet werden. Es gilt nach (2.192)

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2 l \Delta s} = \frac{F}{2l} \,. \tag{2.193}$$

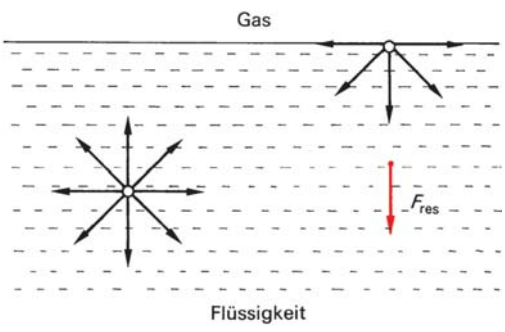


Abb. 2.99 Kohäsionskräfte in Flüssigkeiten

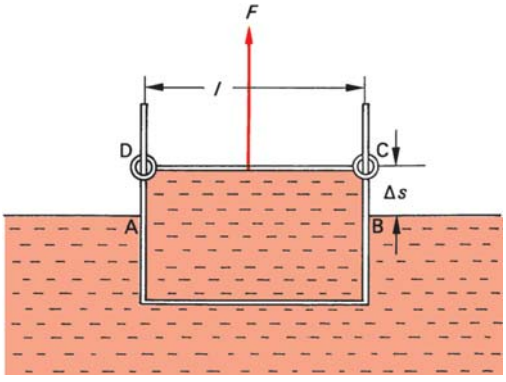


Abb. 2.100 Zur Messung der Oberflächenspannung

Hierbei ist $2l$ die *gesamte Randlänge* der Flüssigkeitshaut an der Vorder- und Rückseite des Bügels. Aus (2.193) wird ersichtlich, dass die Oberflächenspannung als eine auf eine Randlinie bezogene Oberflächenkraft verstanden werden kann.

Beispiel

2.12-2 Es ist der Oberflächendruck p in einer Flüssigkeitskugel (oder einer Gaskugel innerhalb einer Flüssigkeit) bei bekannter Oberflächenspannung σ und dem Kugelradius r zu bestimmen ($\sigma = 30 \cdot 10^{-3}$ N/m, $r = 1{,}8$ cm). Was wird geschehen, wenn zwei Seifenblasen unterschiedlicher Radien miteinander verbunden werden?

Lösung

Wird der Kugelradius r um $\mathrm{d}r$ vergrößert, so wird auch die Oberfläche A um $\mathrm{d}A$ größer. Somit gilt für die hierfür aufzuwendende Arbeit

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{auf}} = F\,\mathrm{d}r = pA\,\mathrm{d}r = p4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Andererseits errechnet man nach (2.192) für die Vergrößerung der Oberflächenenergie

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_{\mathrm{ob}} &= \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma(4\pi(r+\mathrm{d}r)^2 - 4\pi r^2)\\ &= \sigma(4\pi r^2 + 8\pi r\,\mathrm{d}r + 4\pi\,\mathrm{d}r^2 - 4\pi r^2)\,.\end{aligned}$$

Weil $\mathrm{d}r^2 \ll 2r\,\mathrm{d}r$ ist, kann der Ausdruck $4\pi\,\mathrm{d}r^2$ vernachlässigt werden und man erhält $\mathrm{d}W_{\mathrm{ob}} = \sigma 8\pi r\,\mathrm{d}r$. Da die aufzuwendende Arbeit $\mathrm{d}W_{\mathrm{auf}}$ zur Vergrößerung der Oberflächenenergie $\mathrm{d}W_{\mathrm{ob}}$ verwendet wurde, müssen beide gleich groß sein, sodass also $\mathrm{d}W_{\mathrm{auf}} = \mathrm{d}W_{\mathrm{ob}}$ ist. Aus $p4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \sigma 8\pi r\,\mathrm{d}r$ folgt der Oberflächendruck

$$p = \frac{2\sigma}{r}. \qquad (2.194)$$

In diesem Beispiel ist

$$p = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{1{,}8 \cdot 10^{-2}}\,\mathrm{N/m^2} = 3{,}33\,\mathrm{N/m^2}\,.$$

Aus (2.194) ist ersichtlich, dass der Druck p mit abnehmendem Radius r größer wird. Deshalb wird der höhere Druck der kleineren Seifenblase die größere Seifenblase aufblasen. Dadurch wird die größere Seifenblase größer und die kleinere kleiner werden; die größere Seifenblase „schluckt" also die kleinere.

Kapillarität

Bei der Berührung eines Flüssigkeitstropfens mit einer festen Unterlage können gemäß Abb. 2.101 zwei Extremfälle auftreten:

- *vollkommene Benetzung*: Die Adhäsionskräfte sind größer als die Kohäsionskräfte. Deshalb wird sich die Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers ausbreiten;
- *unvollkommene Benetzung*: Die Adhäsionskräfte sind wesentlich kleiner als die Kohäsionskräfte. Deshalb wird sich die Flüssigkeit tropfenförmig zusammenziehen.

Es wirken die *Grenzflächenspannungen* σ_{13} zwischen gasförmiger (1) und fester Phase (3), σ_{12} zwischen gasförmiger (1) und flüssiger (2) und σ_{23} zwischen flüssiger (2) und fester Phase (3). Der Winkel zwischen der festen Phase und der Flüssigkeitsoberfläche ist α. Wie aus Abb. 2.101 hervorgeht, müssen die waagrechten Spannungskomponenten gleich groß sein, damit sich die Flüssigkeit nicht verschiebt:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} + \sigma_{12}\cos\alpha \qquad \text{oder}$$

$$\sigma_{12}\cos\alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23}\,. \qquad (2.195)$$

Hinsichtlich der Benetzung gilt:

$0 \leqq \alpha \leqq \pi/2$: vollkommene Benetzung (z. B. Wasser/Glas $\alpha \approx 0°$).

$\pi/2 < \alpha \leqq \pi$: keine Benetzung (z. B. Quecksilber/Glas $\alpha = 140°$).

Benetzungsvorgänge sind beispielsweise wichtig für die Wirksamkeit von Waschmitteln, Herstellung von Emulsionen oder bei der Schwimmaufbereitung von Erzen. Benetzungserscheinungen spielen auch eine Rolle, wenn enge Röhrchen (*Kapillaren*) in Flüssigkeiten getaucht werden. Wie Abb. 2.101 zeigt, tritt der Fall ein, dass in der Kapillare

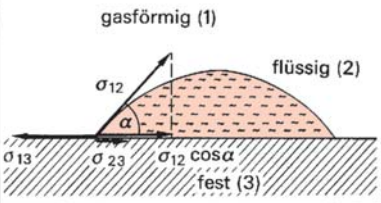
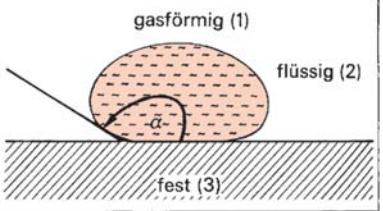
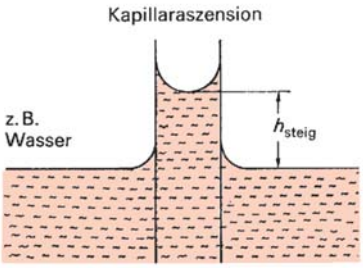
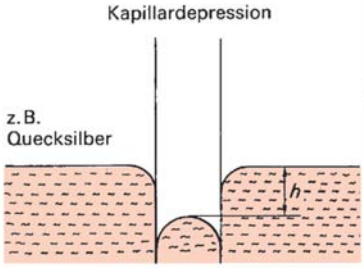
Benetzungsform	Benetzung	keine Benetzung
Ursache	Adhäsionskräfte ≫ Kohäsionskräfte	Adhäsionskräfte ≪ Kohäsionskräfte
Wirkung	Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers	Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen
Skizze (Die Pfeile symbolisieren die aufgrund der Grenzflächenspannungen auftretenden Kräfte)		
Gleichung	$\sigma_{12}\cos\alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23}$	
Randwinkel	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$
Kapillarität		

Abb. 2.101 Benetzung

die Flüssigkeit um die Höhe h höher (*Kapillaraszension* oder *kapillare Hebung*) oder tiefer steht (*Kapillardepression* oder *kapillare Senkung*). Diese Erscheinung wird allgemein *Kapillarität* genannt.

Im Folgenden ist die Kapillaraszension (kapillare Hebung) von Interesse. Die von der Oberflächenspannung σ herrührende Kraft F_σ und die Gewichtskraft der angehobenen Flüssigkeitssäule F_G müssen gleich groß sein: $F_\sigma = F_G$. Mit

$$F_\sigma = \sigma l = \sigma 2\pi r \quad \text{und}$$
$$F_G = m_{fl} g = V\varrho g = \pi r^2 h\varrho g$$

ergibt sich

$$\sigma 2\pi r = \pi r^2 h\varrho g\,.$$

Bei nicht vollständiger Benetzung ist die Steighöhe h vom Randwinkel α abhängig, sodass $\sigma = \sigma_{12}\cos\alpha$ gesetzt werden muss. Dann ist

$$\sigma_{12}\cos\alpha 2\pi r = \pi r^2 h\varrho g\,.$$

Somit gilt für die kapillare Steighöhe

$$h_{steig} = \frac{2\sigma_{12}\cos\alpha}{\varrho g r}\,. \qquad (2.196)$$

Diese Formel liefert für nicht benetzende Flüssigkeiten ($\pi/2 < \alpha \leqq \pi$) negative Steighöhen. Sie zeigt ferner, dass die kapillare Hebung bzw. Senkung umso größer ist, je kleiner der Radius der Kapillare ist.

Die Kapillarwirkung ist für das Aufsteigen von Flüssigkeiten in allen porösen Körpern verantwortlich, beispielsweise in Pflanzenfasern, Dochten oder Mauersteinen.

Zur Übung

Ü 2.12-1 In ein teilweise mit Wasser gefülltes U-Rohr mit der Querschnittsfläche $A = 1\ \text{cm}^2$ werden in einen Schenkel 4,8 g einer zweiten, wasserunlöslichen Flüssigkeit eingefüllt. Der Spiegel dieser Flüssigkeit liegt um den Abstand $a = 1{,}2$ cm über dem Wasserspiegel des anderen Schenkels. Wie groß ist die Dichte ϱ der Flüssigkeit?

Ü 2.12-2 Eine Schiffsladung wird im Hafen gelöscht. Es passiert ein Unfall, bei dem die entladenen Güter ins Wasser fallen, das Schiff durch einen umstürzenden Kran leck geschlagen wird und sinkt. Hebt oder senkt sich der Wasserspiegel, a) wenn die Güter in das Wasser fallen, b) wenn das Schiff untergeht?

Ü 2.12-3 Die Wassermenge eines Teiches kann durch einen Schieber abgelassen werden. Dieser hat eine Masse $m = 120$ kg, er ist $h = 1{,}5$ m hoch und $b = 2$ m breit. Mit welcher Öffnungskraft muss der Schieber zunächst betätigt werden, wenn das Wasser bis zum oberen Schieberrand steht (Reibungszahl zwischen Führungsschiene und Schieber $\mu = 0{,}45$)? Wie groß ist diese, nachdem der Schieber 60 cm hochgezogen wurde?

Ü 2.12-4 Ein Wassertropfen mit dem Radius $r_\text{W} = 0{,}1$ cm wird in Tröpfchen mit dem Radius $r_\text{T} = 10^{-5}$ cm zerstäubt. Auf das Wievielfache erhöht sich die Oberflächenenergie?

2.12.2 Fluide – strömende Flüssigkeiten (Hydrodynamik) und Gase (Aerodynamik)

Strömende Flüssigkeiten und Gase sind Gegenstand der *Strömungsmechanik*. Diese beschreibt den Transport von Massen (Flüssigkeiten oder Gasen) aufgrund der Schwerkraft oder von Druckdifferenzen unter Berücksichtigung der Molekülreibung. In der *Hydrodynamik* werden die *inkompressiblen* und in der *Aerodynamik* die *kompressiblen* Strömungen untersucht. Auch Gase sind näherungsweise inkompressibel, wenn ihre Strömungsgeschwindigkeit höchstens ein Drittel der Schallgeschwindigkeit beträgt. Die Strömungsmechanik kann je nach Berücksichtigung der molekularen Reibung in die *Strömung idealer Flüssigkeiten und Gase* und in die *Strömung realer Flüssigkeiten und Gase* eingeteilt werden.

2.12.2.1 Strömungsfeld

Die strömenden Masseteilchen weisen eine räumliche Geschwindigkeitsverteilung auf; es liegt ein *Strömungsfeld* vor (zum Feldbegriff s. Abschn. 4.3.1). Das Strömungsfeld ist ein *Vektorfeld:* Es beschreibt die Geschwindigkeitsvektoren der transportierten Masseteilchen an jedem Ort für jeden Augenblick. Es kann *ortsabhängig* (*inhomogen*) oder *ortsunabhängig* (*homogen*) und *zeitabhängig* (*instationär*) oder *zeitunabhängig* (*stationär*) sein. Abbildung 2.102 zeigt die divergierenden Feldlinien des Strömungsfeldes (*Stromlinien*) eines Diffusors. Die Tangenten an die Stromlinien des Strömungsfeldes beschreiben in jedem Raumpunkt die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Von den Stromlinien zu unterscheiden sind die *Bahnlinien* einer Strömung,

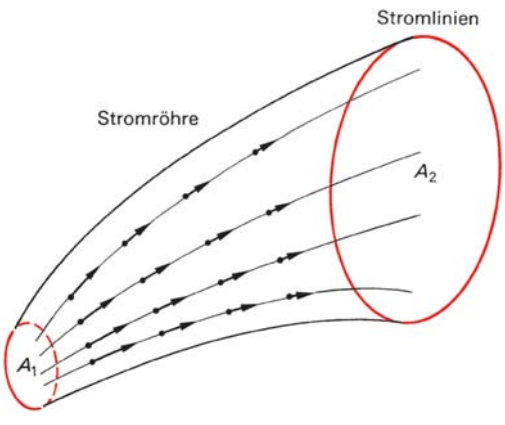


Abb. 2.102 Stromlinien in einer Stromröhre

welche die tatsächliche Bewegung der Masseteilchen während der Strömung beschreiben. Die Bahnlinien können durch Farbstoffe, Rauch- oder Schwebeteilchen (z. B. Bärlappsamen) sichtbar gemacht werden. Im instationären Zustand ändert sich das Stromlinienbild von Augenblick zu Augenblick: Bis das Masseteilchen auf seiner Bahn einen Ort erreicht, hat sich die Geschwindigkeit an diesem Ort gegenüber dem vorhergehenden Augenblick schon geändert. Nur in stationären Strömungsfeldern fallen Bahnlinien und Stromlinien zusammen.

Abbildung 2.102 zeigt die Stromlinien in einem geschlossenen Raumgebiet (Stromröhre). Je größer die Anzahl der Stromlinien ist, die eine senkrechte Fläche durchströmen, desto höher ist die Stromdichte durch diese Fläche. In Abb. 2.102 ist die Stromdichte durch die Fläche A_1 höher als durch die Fläche A_2. Strömen aus einer Stromröhre mehr Teilchen heraus, als hineinfließen, dann befindet sich in der Stromröhre eine *Quelle,* im umgekehrten Falle eine *Senke.* Fließen gleich viele Teilchen aus der Stromröhre heraus wie hineinfließen, so ist die Stromröhre *quellen-* und *senkenfrei.*

Die Darstellung der Ursache des Massentransports durch eine Feldgröße, welche die Wechselwirkung des Masseteilchens mit der Umgebung beschreibt, ist ein allgemeines *Konzept der Physik*. Wie aus Abb. 2.103 hervorgeht, unterscheidet sich die Beschreibung des Massentransports als Folge des Gefälles (*Gradienten*) des Strömungspotentials mathematisch nicht von derjenigen des Wärmetransports bei einem Temperaturgradienten oder des Ladungstransports bei einem elektrischen Potentialgradienten. Ist die jeweilige Transportgröße (Masse, Wärmemenge, Ladung) in einem abgegrenzten Raumteil konstant, existieren in diesem Feldbereich also keine Quellen oder Senken der Transportgröße, so gilt für die jeweilige *Feldstärke* $\boldsymbol{E}$ die *Kontinuitätsgleichung,* nämlich $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$, welche die Massenerhaltung, die Wärmeerhaltung oder die Ladungserhaltung beschreibt. Die Verknüpfung der Kontinuitätsgleichung mit der Felddefinitionsgleichung führt in allen Fällen von Abb. 2.103 zu einer gleichartigen Differentialgleichung für die Potentialfunktion φ, die den räumlichen Verlauf des Geschwindigkeitspotentials, der Temperatur oder des elektrischen Potentials beschreibt. Für das jeweilige Transportproblem ist also diese Differentialgleichung für die Potentialfunktion, die sogenannte *Laplace-Gleichung* (P. Laplace, 1749 bis 1827), unter den geometrischen Randbedingungen des Transportproblems zu lösen:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,. \qquad (2.197)$$

Die Mathematik hat dafür in der *Potentialtheorie* eine Vielzahl an Lösungswegen und Lösungen entwickelt. Experimentell kann die räumliche Potentialverteilung dreidimensional im *elektrolytischen Trog* gemäß Abb. (2.104) oder zweidimensional auf *Leitfähigkeitspapier* bestimmt werden. Dazu werden die Geometrien der Transportwege als Elektroden in einem Elektrolyten (z. B. Wasser) bzw. auf Spezialpapier aufgezeichnet, durch das Anlegen einer elektrischen Spannung an die Elektroden die Randbedingungen festgelegt und der Verlauf der elektrischen Spannung und damit das Potentialfeld gemessen.

Abbildung 2.105 zeigt die Stromlinien eines Strömungsfeldes bei einer plötzlichen Querschnittsveränderung, wie man sie mittels eines automatischen Äquipotentiallinienschreibers (Abb. 4.54, Abschn. 4.3.4) aufzeichnen kann. Werden die Randbedingungen der Temperatur bzw. des Drucks durch proportionale elektrische Spannungen nachgebildet, so können im elektrolytischen Trog auch Probleme des *Mas-*

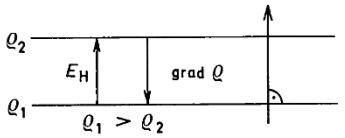
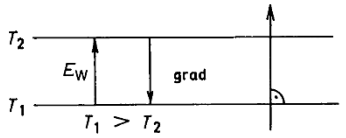
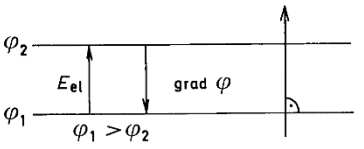
Gebiet	Hydrodynamik	Wärmelehre	Elektrizitätslehre
Voraussetzungen	Strömung ist inkompressibel und reibungsfrei.	Die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist isotrop und konstant. Wärmequelle und -senke liegen außerhalb des betrachteten Raumes.	Die elektrische Leitfähigkeit des Materials ist isotrop und konstant. Spannungsquelle und -senke liegen außerhalb des betrachteten Raumes.
Transportgröße Φ	Masse Φ_H	Wärme Φ_W	Ladung Φ_{el}
Transportflussdichte $j = \frac{\text{Transportgröße } \Phi}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$	$j_H = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$	$j_W = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$	$j_{el} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$
Ursache: Transport-feldstärke $\boldsymbol{E}$	Gradient der Dichte ϱ $\boldsymbol{E}_H = -\,\mathbf{grad}\,\varrho$ 	Gradient der Temperatur T $\boldsymbol{E}_W = -\,\mathbf{grad}\,T$ 	Gradient des elektrischen Potentials φ $\boldsymbol{E}_{el} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi$ 
Kontinuitäts-gleichung	$\operatorname{div} \boldsymbol{E}_H = \frac{\partial E_{H,x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{H,y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{H,z}}{\partial z} = 0$	$\operatorname{div} \boldsymbol{E}_W = \frac{\partial E_{W,x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{W,y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{W,z}}{\partial z} = 0$	$\operatorname{div} \boldsymbol{E}_{el} = \frac{\partial E_{el,x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{el,y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{el,z}}{\partial z} = 0$
Zusammenhang zwischen Feldstärke und Transportflußdichte in isotropen Medien	$\boldsymbol{j}_H = \frac{1}{\varrho_H} \boldsymbol{E}_H = D \cdot \boldsymbol{E}_H$ (ϱ_H: spez. Diffusionswiderstand, D: Diffusionskoeffizient)	$\boldsymbol{j}_W = \frac{1}{\varrho_T} \boldsymbol{E}_W = \lambda \boldsymbol{E}_W$ (ϱ_T: spez. Wärmedurchlasswiderstand, λ: Wärmeleitfähigkeit)	$\boldsymbol{j}_{el} = \frac{1}{\varrho_{el}} \boldsymbol{E}_{el} = \varkappa \boldsymbol{E}_{el}$ (ϱ_{el}: spez. elektrischer Widerstand, $\varkappa$: elektrische Leitfähigkeit)
Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{E}_H = -\operatorname{div} \mathbf{grad}\,\varrho = 0$ $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} = 0$	$\Delta\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{E}_W = -\operatorname{div} \mathbf{grad}\,T = 0$ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$	$\Delta\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{E}_{el} = -\operatorname{div} \mathbf{grad}\,\varphi = 0$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Abb. 2.103 Vergleich der Felder in der Hydrodynamik mit den Feldern in der Wärmelehre und in der Elektrizitätslehre

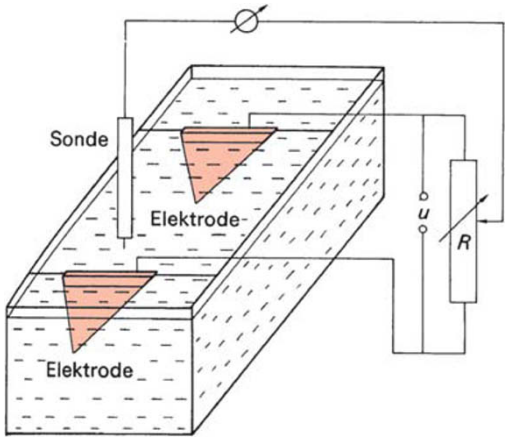


Abb. 2.104 Elektrolytischer Trog (schematisch)

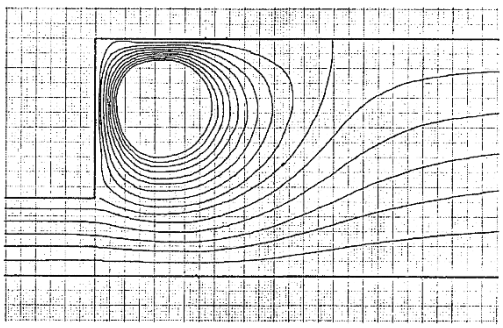


Abb. 2.105 Stromlinien bei plötzlicher Querschnittsveränderung (Auftreten eines Eckenwirbels)

sentransports (z. B. Stauzonen) oder des *Wärmetransports* (z. B. Wärmebrücken) analysiert werden.

Ist die Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$ ermittelt, können durch *Gradientenbidung* die räumliche Feldstärkeverteilung bestimmt und damit die zur Feldstärke proportionalen Transportflussdichten, nämlich die Massenstromdichte j_H, die Wärmestromdichte j_W und die elektrische Stromdichte j_{el} berechnet werden.

2.12.2.2 Grundgleichungen idealer (reibungsfreier) Strömungen

Ideale Gase sind Gase, deren Kohäsion vernachlässigbar klein ist, und ideale Flüssigkeiten sind inkompressibel. Die Strömungen idealer Gase und idealer Flüssigkeiten sind definitionsgemäß reibungsfrei.

Kontinuitätsgleichung (Durchflussgleichung)

Für den Vektor der Massenstromdichte gilt nach Abb. 2.103

$$\boldsymbol{j} = \varrho \boldsymbol{v} \,. \tag{2.198}$$

Im allgemeinen Fall wird weder die Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ konstant sein (keine parallele Stromlinien), noch die Fläche A senkrecht durchströmt werden, wie aus Abb. 2.106 hervorgeht. Der Anteil des Massenstroms $\mathrm{d}\dot{m}$, der ein kleines Flächenelement $\mathrm{d}A$ durchströmt, beträgt (mit dem Winkel α zwischen dem Strömungsgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ und dem Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ des Flächenelements, der senkrecht auf der Fläche $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ steht)

$$\mathrm{d}\dot{m} = |\boldsymbol{j}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{A}| \cos\alpha = \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \,. \tag{2.199}$$

Dies bedeutet: Der Anteil des Massestroms $\mathrm{d}\dot{m}$ ist gleich dem Skalarprodukt aus der Massestromdichte $\boldsymbol{j}$ und dem Flächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$. Durch Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt sich der gesamte, durch die Ober-

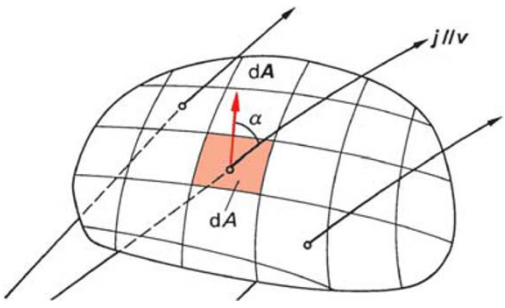


Abb. 2.106 Zur Kontinuitätsgleichung

fläche des eingeschlossenen Volumens ein- und austretende Massenstrom (analog zum elektrischen Fluss ψ, (4.131) in Abschn. 4.3.6.1:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \oint_0 \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_0 \varrho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}\,. \quad (2.200)$$

Drei Fälle treten auf:
Quelle: Das Integral ist > 0;
Senke: Das Integral ist < 0 und
Quellenfreiheit: Das Integral ist $= 0$.
Quellen- bzw. Senkenfreiheit bedeutet, dass der Massenstrom durch ein Volumenelement konstant bleibt. Für eine solche stationäre Strömung existiert eine Kontinuitätsgleichung; sie ergibt sich aus (2.200) für $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t =$ konstant durch Integration zu

$$\dot{m} = \varrho_1 v_1 A_1 = \varrho_2 v_2 A_2 = \varrho v A = \text{konstant}\,. \quad (2.201)$$

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist die Dichte ϱ konstant. Für diese und Gasströmungen mit vernachlässigbaren Druckunterschieden geht (2.201) in

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\varrho} = Av = \text{konstant} \quad (2.202)$$

über. Der Volumenstrom $\dot{V}$, das Produkt aus der Querschnittsfläche A und der Strömungsgeschwindigkeit $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, ist entsprechend Abb. 2.107 konstant.

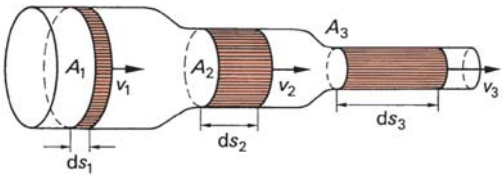


Abb. 2.107 Konstanz des Volumenstroms in einer Stromröhre (stationäre Strömung)

Bernoulli-Gleichung

Um ein Flüssigkeitsvolumen $\Delta V_1 = A_1 \Delta s_1$ durch die Querschnittsfläche A_1 in die Strömungsröhre einzubringen, muss bei dem dort herrschenden Druck p_1 die Arbeit $W_1 = p_1 \Delta V_1 = p_1 A_1 \Delta s_1$ aufgebracht werden. Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit tritt bei A_2 dann ein gleich großes Volumen $\Delta V_2 = \Delta V_1 = \Delta V$ aus und verrichtet die Arbeit $W_2 = p_2 \Delta V_2 = p_2 A_2 \Delta s_2$. Hat das Flüssigkeitsvolumen am Ort der Querschnittsfläche A_1 die potentielle Energie $\varrho \Delta V_1 g h_1$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2}\varrho \Delta V v_1^2$ sowie bei A_2 die potentielle Energie $\varrho \Delta V g h_2$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2}\varrho \Delta V v_2^2$, so gilt nach dem Energieerhaltungssatz bei vernachlässigbarer Reibung gemäß Abb. 2.108a

$$\Delta W = \left(\frac{1}{2}\varrho \Delta V v_1^2 + \varrho \Delta V g h_1\right) - \frac{1}{2}\left(\varrho \Delta V v_2^2 + \varrho \Delta V g h_2\right)\,.$$

Mit $\Delta W = p_2 \Delta V - p_1 \Delta V$ folgt daraus

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \quad (2.203)$$

oder allgemein

$$\underbrace{p}_{\substack{\text{statischer}\\ \text{Druck}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\varrho v^2}_{\substack{\text{dynamischer}\\ \text{Druck}\\ \text{(Staudruck)}}} + \underbrace{\varrho g h}_{\substack{\text{geodätischer}\\ \text{Druck}}} = p_{\text{ges}} = \text{konstant}\,. \quad (2.204)$$

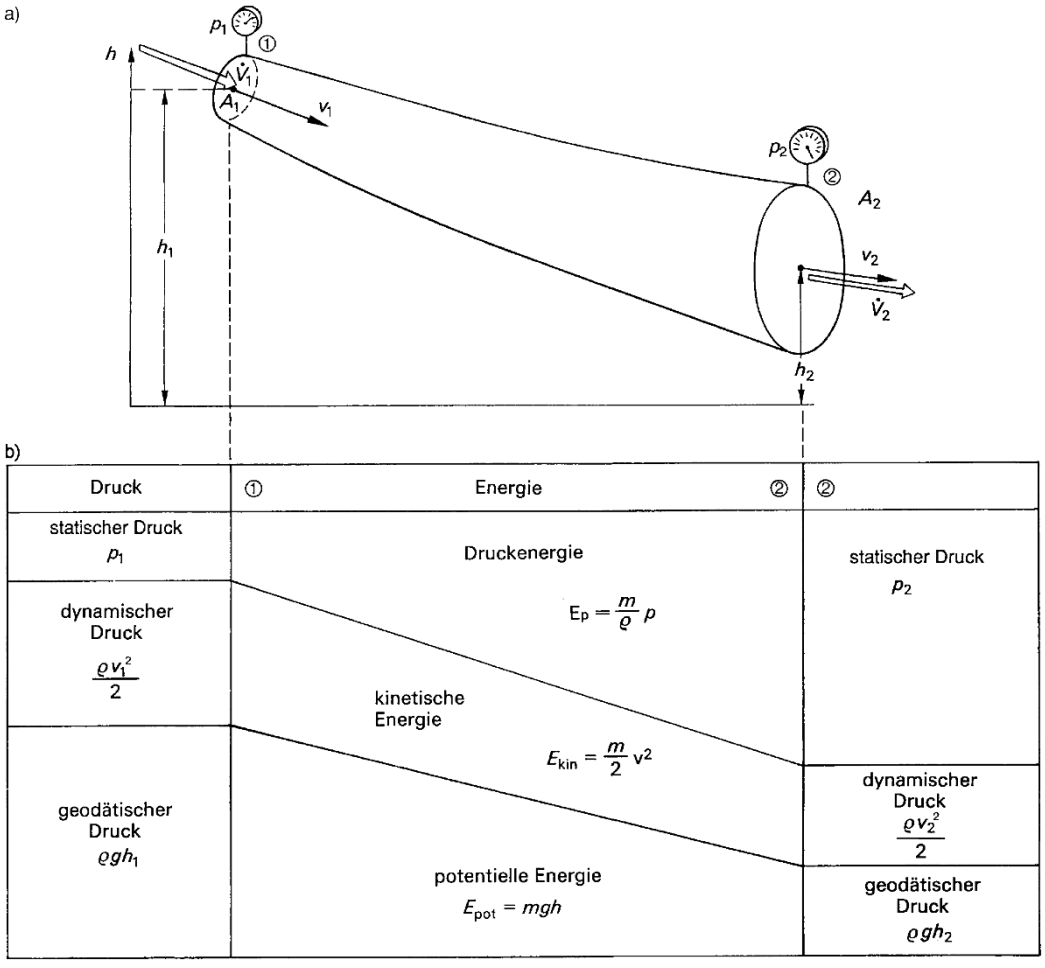


Abb. 2.108 Zur Bernoulli-Gleichung: **a**) Stromröhre, **b**) Druck- und Energieverlauf

Diese Gleichung wird nach ihrem Entdecker *Bernoulli-Gleichung* genannt (D. Bernoulli, 1700 bis 1782). Sie besagt, dass an jedem Ort für eine Stromlinie die Summe aus statischem, geodätischem und dynamischem Druck (Staudruck) konstant ist.

Analog zur Energieerhaltung ist in Abb. 2.108b an der Seite die *Druckerhaltung* nach der *Bernoulli-Gleichung* aufgezeigt. Aus Abb. 2.108a ist erkennbar, dass an Punkt ② wegen der größeren Fläche A_2 die Durchströmgeschwindigkeit v_2 kleiner und damit auch die kinetische Energie bzw. der dynamische Druck geringer ist als in Punkt ①. Zudem ist die Lage des Punktes ② tiefer, sodass auch der geodätische Druck abnimmt. Da aber die Summe aller Drücke konstant sein muss, hat dies zur Folge, dass der statische Druck p_2 stark zunehmen muss.

Während der geodätische Druck ϱgh und der Betriebsdruck p bereits aus der Mechanik der ruhenden Flüssigkeiten und Gase bekannt sind (*hydrostatischer Druck*, (2.180) in Abschn. 2.12.1.4), tritt der *dynamische Druck* (*Staudruck*) nur in *strömenden Medien* auf.

Anwendungen der Kontinuitäts- und der Bernoulli-Gleichung

Druck- und Volumenstrommessung

Abbildung 2.109 zeigt die Wirkungsweise von *Druckmessern*, deren Messgrößen sowie die Berechnungsgleichungen.

Die *Drucksonde* misst durch radiale Öffnungen im Mantel der Sonde (parallel zu den Stromlinien) den *statischen Druck* p_{stat}. Bei den Drucksonden wird meist ein piezoelektrischer Drucksensor eingesetzt. Den *statischen Druck* p_{stat} und den *Staudruck* p_{dyn} misst das *Pitot-Rohr* (H. Pitot, 1695 bis 1771), das eine axiale Bohrung hat. Das *Prandtl'sche Staurohr* (L. Prandtl, 1875 bis 1953) ist eine Kombination von Drucksonde und Pitot-Rohr. Es misst den Differenzdruck zwischen Gesamtdruck und statischem Druck, d. h. den *dynamischen Druck* bzw. den *Staudruck* p_{dyn} direkt. Sind Druck und Dichte konstant, dann eignet sich das *Prandtl'sche Staurohr* auch zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit v. Für reibungsfreie Strömungen ergibt sich aus (2.204)

$$v = \sqrt{\frac{2\,p_{dyn}}{\varrho}}\,. \tag{2.205}$$

Mit dem *Prandtl'schen Staurohr* werden lokale Strömungsgeschwindigkeiten ermittelt. Soll der Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche A nach (2.202) berechnet werden, dann muss durch Ausmessen des Strömungsgeschwindigkeitsprofils über die Querschnittsfläche die mittlere Strömungsgeschwindigkeit abgeschätzt werden.

Besser geeignet zur Volumenstrommessung sind die *Drosselgeräte* nach DIN EN ISO 5167, mit denen man direkt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v_m misst. In Drosselgeräten wird durch Düsen oder Blenden der Strömungsquerschnitt vermindert – Abb. 2.110 zeigt drei Ausführungen – und aus der Differenz der statischen Drücke vor und im Bereich der Drosselstelle die mittlere Strömungsgeschwindigkeit berechnet. Mit Berücksichtigung der Reibungsarbeit W_R und der Kompressionsverluste W_K am Drosselgerät lautet die Beziehung für ein Volumenelement ΔV

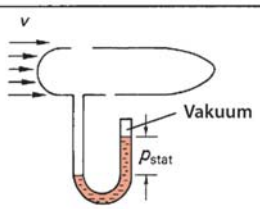
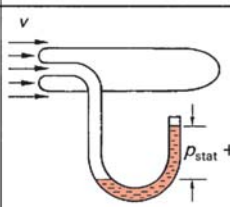
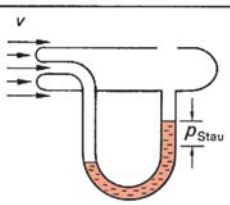
Bezeichnung	Drucksonde	Pitot-Rohr	Prandtl'sches Staurohr
Skizze			 Differenzmessung von Pitot-Rohr und Drucksonde
Messgröße	statischer Druck	statischer Druck und Staudruck	Staudruck, Strömungsgeschwindigkeit
Berechnungs-Formel	$p = p_{stat}$	$p_{ges} = p_{stat} + \frac{\varrho v^2}{2}$	$p_{ges} = p_{stat} + p_{dyn}$ $p_{dyn} = p_{ges} - p_{stat} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ $v = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{ges} - p_{stat})}{\rho}}$ $= \sqrt{\frac{2 \cdot p_{dyn}}{\rho}}$

Abb. 2.109 Messung des Drucks und des Volumenstroms

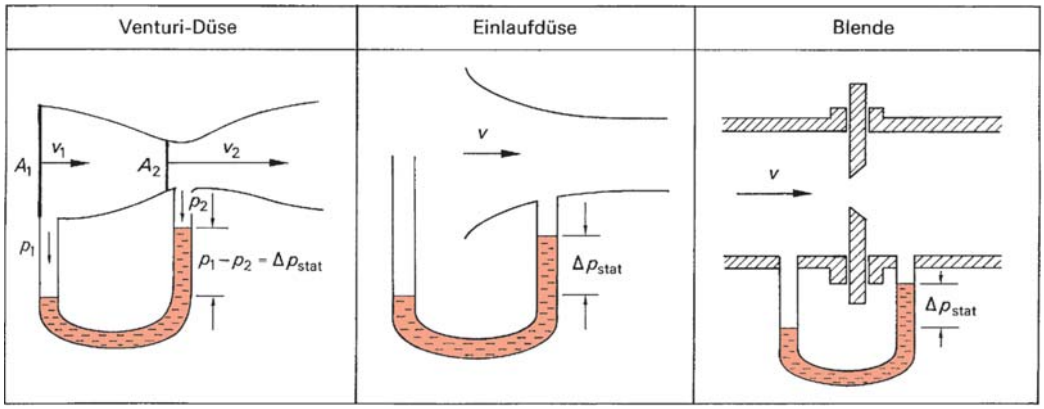


Abb. 2.110 Drosselgeräte nach DIN EN ISO 5167

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho_2 v_2^2 + \frac{W_R}{\Delta V} + \frac{W_K}{\Delta V} \,. \tag{2.206}$$

Die *Kompressionsarbeit* W_K ist abhängig vom Isentropenexponenten $\varkappa = c_p/c_v$ (Abschn. 3.3.3), bei inkompressiblen Medien aber vernachlässigbar. Die *Reibungsverluste* W_R der Flüssigkeit oder des Gases an der Grenzschicht des Drosselgeräts können auch zur Entstehung von Wirbeln führen. Die Verlustanteile in (2.206) werden mit Hilfe der *Expansionszahl* ε und der *Durchflusszahl* α auf die kinetische Energie der Strömung im Drosselgerät bezogen:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\frac{W_K}{\Delta V}}{\frac{1}{2}\varrho_2 v_2^2}} \,, \tag{2.207}$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{\frac{W_R}{\Delta V}}{\frac{1}{2}\varrho_2 v_2^2}} \,. \tag{2.208}$$

Werden (2.207) und (2.208) in (2.206) eingesetzt und die quadratischen Glieder der Verluste vernachlässigt, dann ergibt sich der Staudruck

$$\frac{1}{2}\varrho_2 v_2^2 = \alpha^2\varepsilon^2 \left(p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\varrho_1 v_1^2\right)$$

und mit (2.201) die Strömungsgeschwindigkeit an der Drosselstelle:

$$v_2 = \alpha\varepsilon \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{A_2^2}{A_1^2}\alpha^2\varepsilon^2\right)}} \,. \tag{2.209}$$

Somit beträgt der Volumenstrom

$$\dot{V} = A_2 v_2 = \alpha\varepsilon A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{A_2^2}{A_1^2}\alpha^2\varepsilon^2\right)}} \,. \tag{2.210}$$

Das *Korrekturfaktorprodukt* $\alpha\varepsilon$ ist abhängig von der Drosselgerätebauweise und von der Stärke des Volumenstroms. Es muss auf einer Eichstrecke bestimmt werden; für *Normdrosselgeräte* ist $\alpha\varepsilon$ in DIN EN ISO 5167 tabelliert.

Das *Venturi-Rohr* wird häufig zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten eingesetzt. Bei ihm ist in weiten Volumenstrombereichen $\alpha\varepsilon = 1$; allerdings ist beim Venturi-Rohr, besonders bei der Messung von Gasströmen, der Wirkdruck $p_1 - p_2$ im Vergleich zu den anderen Drosselgeräten klein. Blenden in Gasströmungen liefern einen hohen, leicht messbaren Wirkdruck. Bei Blenden ist $\alpha\varepsilon < 1$ und stark strömungsabhängig.

Ausfließen von Flüssigkeiten aus Gefäßen

Ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß entsprechend Abb. 2.111 habe in der Höhe h unterhalb des Flüssigkeitsspiegels ein Loch, das so klein ist, dass der Flüssigkeitsspiegel beim Ausströmen kaum sinkt ($v_1 \ll v_2$). Für das Niveau 1 und das Niveau 2 ist der statische Druck gleich dem Luftdruck p_0. Nach der Bernoulli-Gleichung (2.204) gilt

$$\varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} + p_0 = \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_0 \,.$$

Daraus folgt

$$v_2 = \sqrt{2gh} \,. \tag{2.211}$$

Die Ausflussgeschwindigkeit v_2 ist gleich der Geschwindigkeit des freien Falls irgendeines Körpers (auch der Flüssigkeitssäule) aus der Höhe h (Abb. 2.111b). Dies wurde bereits von E. Torricelli (1608 bis 1647) festgestellt.

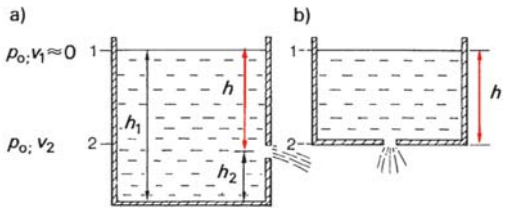


Abb. 2.111 Zum Torricelli'schen Ausflussgesetz

Nach (2.201) erhält man den *Massenstrom* aus $\dot{m} = \varrho A v$ oder

$$\dot{m} = \varrho A \sqrt{2gh} \,. \tag{2.212}$$

In der Praxis sind weit geringere Werte für die Ausflussgeschwindigkeit v_2 oder den Massenstrom $\dot{m}$ festzustellen. Dies ist auf zwei Einflüsse zurückzuführen:

- *Flüssigkeitsreibung*: Die Flüssigkeitsreibung wird durch die *Geschwindigkeitsziffer* φ berücksichtigt (für Wasser beträgt $\varphi \approx 0{,}97$);
- *Verengung des austretenden Strahls* (Kontraktion): Am Ausflussloch tritt eine Einschnürung des austretenden Flüssigkeitsstrahls ein, sodass sich der Ausflussquerschnitt verkleinert. Der Grad der Einschnürung wird durch die *Kontraktionszahl* α berücksichtigt, die von der Ausflussform abhängt (für scharfkantige Ausflussöffnungen $\alpha \approx 0{,}61$).

Das Produkt aus beiden Einflussgrößen ist die *Ausflusszahl*

$$\mu = \varphi\alpha \,. \tag{2.213}$$

Mit der Ausflusszahl μ müssen die Werte für die Ausflussgeschwindigkeit v_2 (2.211) und den Massenstrom $\dot{m}$ (2.212) multipliziert werden, um realistische Ergebnisse zu erzielen (z. B. für Wasser bei scharfkantiger Ausflussöffnung $\mu = \varphi\,\alpha = 0{,}59$).

Saugeffekt von Strömungen

Wie Abb. 2.112 zeigt, nimmt (bei gleichbleibendem geodätischem Druck) mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit v der Betriebsdruck p nach der Bernoulli-Gleichung ab. Dies führt zu *Saugeffekten* bei Strömungen.

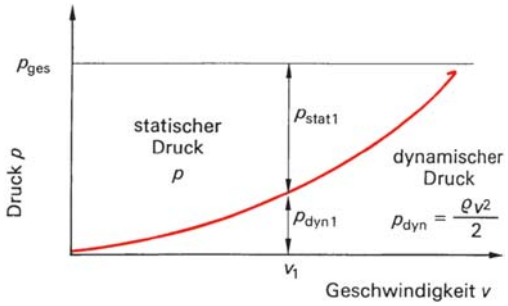


Abb. 2.112 Statischer und dynamischer Druck in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (Bernoulli-Gleichung).

- *Zerstäuber*: Durch ein waagrechtes Rohr strömt Luft. Die Strömungsgeschwindigkeit nimmt im Punkt A in Abb. 2.113 wegen der Einengung des Rohrs zu, sodass auch der dynamische Druck an der Stelle A zunimmt und sich der Betriebsdruck im Steigrohr vermindert. Der Luftdruck p_0 wirkt auf die Flüssigkeit im Steigrohr, die im Luftstrahl zerstäubt wird.
- *Wasserstrahlpumpe*: Durch eine Düse wird der Wasserstrahl eingeschnürt, sodass am Punkt A in Abb. 2.114 eine höhere Strömungsgeschwindigkeit auftritt (höherer dynamischer Druck). Der dadurch verminderte statische Druck bewirkt, dass Luftteilchen in der Umgebung angesaugt werden. Einen angeschlossenen Rezipienten kann man auf diese Weise leerpumpen. Die untere Grenze der Wirksamkeit der Wasserstrahlpumpe wird durch den Dampfdruck des Wassers gesetzt; bei Raumtemperatur liegt der Grenzwert bei $p \approx 2{,}7 \cdot 10^3$ Pa.
- *Hydrodynamisches (aerodynamisches) Paradoxon*: Ein Flüssigkeits- oder Gasstrahl, der gemäß Abb. 2.115 gegen eine bewegliche Platte gerichtet ist, drückt diese nicht weg, sondern zieht sie an. Der statische

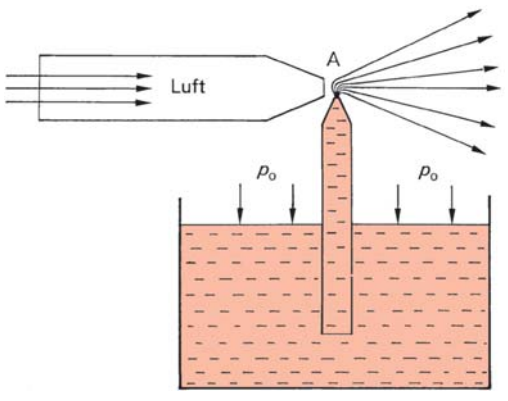


Abb. 2.113 Prinzip des Zerstäubers

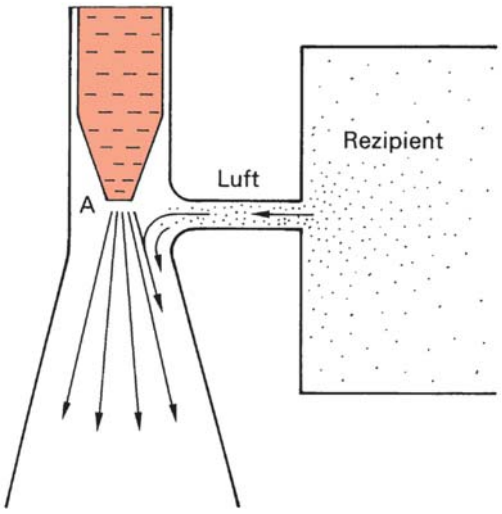


Abb. 2.114 Prinzip der Wasserstrahlpumpe

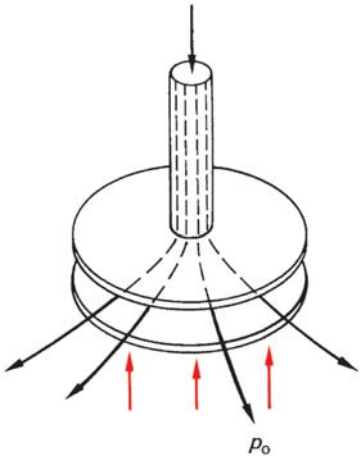


Abb. 2.115 Hydrodynamisches Paradoxon

Druck p_{stat} nimmt an der Plattenoberfläche ab, sodass der äußere Druck p_0 die bewegliche Platte an den Strahl presst. Dieser Effekt kann leicht nachvollzogen werden, wenn ein spritzender Gartenschlauch in einen sich füllenden Eimer getaucht wird. Wird der Schlauch in Richtung des Eimerbodens geführt, so wird er kurz vor dem Boden direkt an den Eimerboden gepresst. Mit diesem Effekt ist auch erklärbar, weshalb sich dicht nebeneinander fahrende Fahrzeuge anziehen können.

– *Magnus-Effekt*: Rotiert ein Zylinder in einer strömenden Flüssigkeit oder in Gas entsprechend Abb. 2.116, so nimmt die Strömungsgeschwindigkeit an der Oberseite zu. Weil dadurch der statische Druck an der Oberseite kleiner wird als an der Unterseite, erfährt der Zylinder eine senkrecht zur Strömung wirkende, Magnus-Effekt genannte Kraft $\boldsymbol{F}$ (H. G. Magnus, 1802 bis 1870).

Beispiel

2.12-3 In einer Stahlflasche befindet sich Gas unter dem Druck p_{Gas}. Der äußere Druck beträgt p_0. Wie groß ist die Ausströmgeschwindigkeit v_{aus} beim Öffnen des Ventils?

Lösung

Nach der Bernoulli-Gleichung (2.204) gilt im vorliegenden Fall $p_{Gas} = \varrho v_{aus}^2/2 + p_0$. Daraus ergibt sich das Ausströmgesetz nach *Bunsen*:

$$v_{aus} = \sqrt{\frac{2(p_{Gas} - p_0)}{\varrho}} \,. \tag{2.214}$$

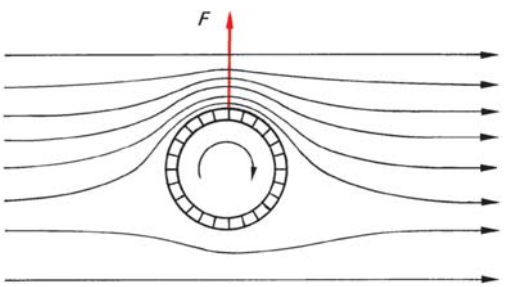


Abb. 2.116 Magnus-Effekt

Strömungsimpuls

Geschwindigkeitsänderungen strömender Medien bewirken Impulsänderungen, die nach dem *Impulssatz* (Abschn. 2.5.2.1) Kräfte ergeben. Solche Kräfte treten in der Strömungslehre vor allem beim Verzögern oder Beschleunigen der Medien sowie beim Umlenken auf. Der Impulssatz wird im Folgenden auf reibungsfreie, inkompressible Medien und stationäre Strömungen beschränkt. Der Vorteil bei der Anwendung des Impulssatzes ist, dass nur die Strömungsverhältnisse beim Eintritt in und Austritt aus dem Strömungsraum bekannt sein müssen, um die Kraftwirkungen zu bestimmen, nicht aber die Strömungsvorgänge im Inneren des Strömungsraumes. Der Impulssatz lautet nach (2.50)

$$\sum \boldsymbol{F}_a = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \,.$$

Darin ist der Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Mit der Dichte $\varrho = m/V$ kann für den Impuls in strömenden Medien geschrieben werden

$$\boldsymbol{p} = \varrho V \boldsymbol{v} \,. \tag{2.215}$$

In inkompressiblen, stationären Strömungen sind Dichte und Geschwindigkeit konstant. Dann gilt für die Impulsänderung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{v} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \,. \tag{2.216}$$

Der Impulssatz für einen beliebigen Strömungsraum lautet damit

$$\sum \boldsymbol{F}_a = \sum \varrho \boldsymbol{v} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \,. \tag{2.217}$$

$\sum \boldsymbol{F}_a$ äußere Kräfte, die an den Grenzen des Strömungsraums von au-

ßen angreifen (z. B. Druck- oder Schwerekräfte),

$\sum \varrho \boldsymbol{v} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ Impulskräfte, die an den Grenzen des Strömungsraums nach außen wirken.

Das Vorzeichen ist beim *Eintritt* in den Strömungsraum *positiv* und beim *Verlassen negativ*. Bei der Anwendung des Impulssatzes ist folgende Vorgehensweise zweckmäßig:

- Abgrenzen des Systems (Strömungsraums) und Festlegen des Ein- und Austritts des Strömungsraums;
- Ermitteln der Querschnitte, der Strömungsgeschwindigkeiten und Drücke am Ein- und Austritt;
- Bestimmen der äußeren Kräfte und der Impulskräfte sowie
- Ermitteln der resultierenden Kraft (grafisch und analytisch).

Der Impulssatz spielt bei Wasserkraftmaschinen wegen der Strahlablenkung eine wichtige Rolle. Ein Strahl, der aus einer Düse austritt, wird an einer Wand so umgelenkt, dass er parallel zur Wand abströmt. Wird der Strahl wie in Abb. 2.117 senkrecht auf eine Platte gerichtet, so gilt für die Kraft in x-Richtung $F_x = \varrho v \, \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ und wegen $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = Av$

$$F_x = \varrho v^2 A \, . \tag{2.218}$$

Bewegt sich die Wand mit der Geschwindigkeit u in Strahlrichtung, dann nimmt die Kraft ab (Abb. 2.117b):

$$F_x = \varrho A (v - u)^2 \, . \tag{2.219}$$

Je nach Form der Wand und Auftreffwinkel des Strahls ergeben sich unterschiedliche Kräfte bzw. Drehmomente.

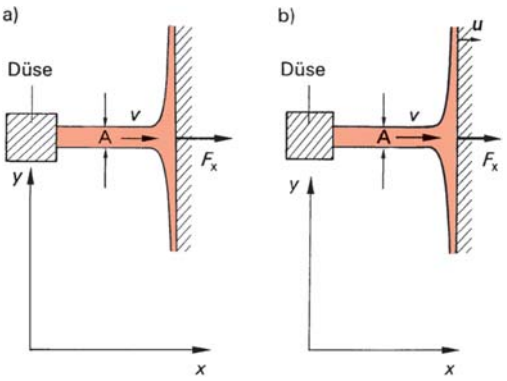


Abb. 2.117 Zum Impulssatz in der Hydrodynamik: Wasserstrahl aus einer Düse **a)** auf eine feststehende Platte, **b)** auf eine mit der Geschwindigkeit u bewegte Platte

Beispiel

2.12-4 Ein Rohrkrümmer von 90° hat einen Durchmesser (Nennweite) $d = 10\,\mathrm{cm}$. Bei einem äußeren Druck $p = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ fließen $\dot{V} = 0{,}2\,\mathrm{m^3/s}$ Wasser hindurch. Der Krümmer ist am Eintritt und am Austritt an ein gerades Rohrstück angeflanscht. Berechnet werden sollen die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}$ auf den Krümmer und die Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Schr}}$ auf die Flanschschrauben entsprechend Abb. 2.118.

Lösung

Die Geschwindigkeiten am Ein- und Austritt sind $v_1 = v_2 = v$.

Kräfte am Eintritt ① (in Strömungsrichtung):

Druckkraft $F_{\mathrm{p1}} = p_1 A = p_1 \frac{\pi d^2}{4}$,

Impulskraft $F_{\mathrm{I1}} = \varrho v \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \varrho A v^2 = \varrho v^2 \frac{\pi d^2}{4}$.

Kräfte am Austritt ② (gegen die Strömungsrichtung):

Druckkraft $F_{\mathrm{p2}} = p_2 A = p_2 \frac{\pi d^2}{4}$,

Impulskraft $F_{\mathrm{I2}} = \varrho v^2 \frac{\pi d^2}{4}$.

Nach dem Kräftedreieck in Abb. 2.118b ist

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{F_{\mathrm{res}}}{2} \frac{1}{\varrho v^2 \frac{\pi d^2}{4} + p_1 \frac{\pi d^2}{4}} \, .$$

Daraus folgt

$$F_{\mathrm{res}} = \frac{\pi d^2}{2} (p_1 + \varrho v^2) \sin \frac{\alpha}{2} \, . \tag{2.220}$$

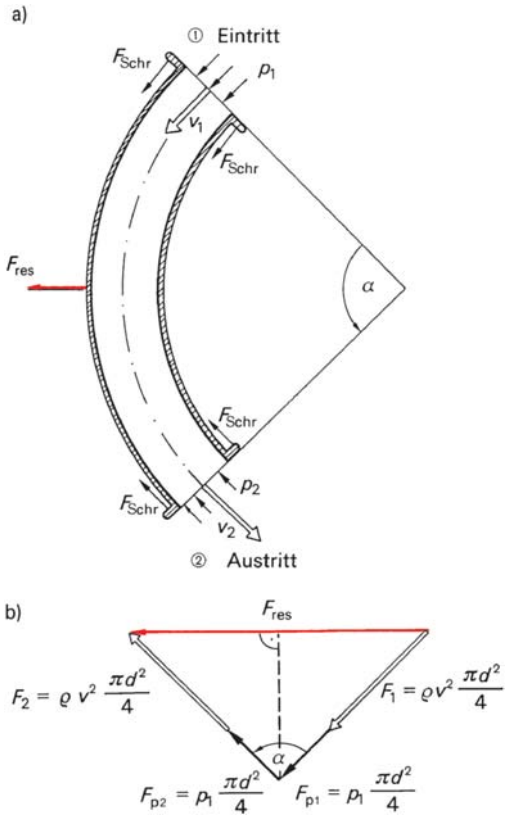


Abb. 2.118 Beispiel 2.12-4 Kräfte in einem durchströmten Rohrkrümmer

Man erhält mit $v = 4\dot{V}/d^2\pi = 25{,}46$ m/s, $\varrho = 10^3$ kg/m^3 und $\alpha = 90°$
$F_{res} = 12{,}76$ kN.
Die Kraft $\boldsymbol{F}_{Schr}$ auf die Flanschschrauben ist gleich der Summe aus der Druckkraft $\boldsymbol{F}_p$ und der Impulskraft $\boldsymbol{F}_I$:

$$\boldsymbol{F}_{Schr} = \boldsymbol{F}_{p_1} + \boldsymbol{F}_{I1} = \frac{\pi d^2}{4}(p_1 + \varrho v^2) = 9{,}0\ \text{kN}\ .$$

Strömungs-Drehimpuls

Ein Masseteilchen $\mathrm{d}m$, das sich gemäß Abb. 2.119 im Abstand r von einem Bezugspunkt D mit der Geschwindigkeit v bewegt, besitzt bezüglich D den Drehimpuls

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}m\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

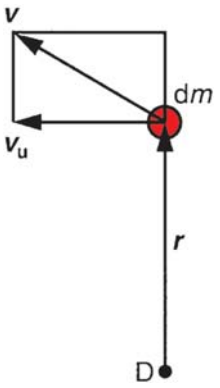


Abb. 2.119 Zum Drehimpulssatz

Mit der Umfangsgeschwindigkeit v_u gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}m\, r\, v_u$$

Nach dem Drehimpulssatz (2.103) ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses mit einem auftretenden Moment verknüpft:

$$M = \dot{m}\, r\, v_u\ . \qquad (2.221)$$

Das in einer Turbine dem Laufrad vorgeschaltete *Leitrad* in Abb. 2.120 steht fest. In ihm wird

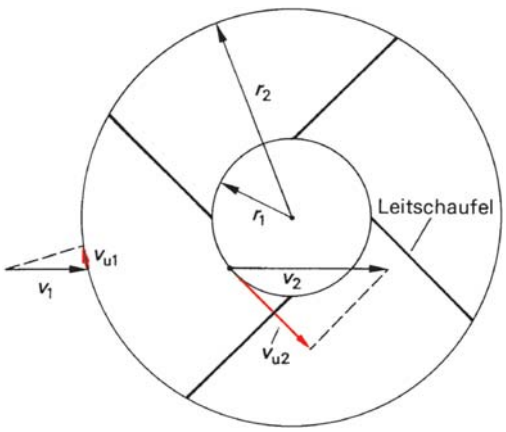


Abb. 2.120 Turbinenleitrad, schematisch

die Strömung von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2 beschleunigt. Das auf die Leitschaufeln ausgeübte Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ist die Differenz aus Austrittsmoment M_2 und Eintrittsmoment M_1. Es ergibt sich aus der Änderung des Drehimpulses L.
Maßgebend sind die Komponenten der Geschwindigkeiten in Umfangsrichtung v_{u2} bzw. v_{u1}. Nach (2.221) ist

$$M = \varrho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(v_{u2} r_2 - v_{u1} r_1) \,. \qquad (2.222)$$

Bei Pumpen ist das feststehende Leitrad dem Laufrad zur Druckerhöhung nachgeschaltet. Deshalb sind die Komponenten der Umfangsgeschwindigkeiten v_{u2} kleiner als v_{u1}, sodass nach (2.222) ein verzögerndes Moment auftritt.
In Abb. 2.121 sind die Strömungsverhältnisse für radiale Laufräder in Turbinen und Pumpen vergleichend gegenübergestellt. Hierin sind

- u Umfangsgeschwindigkeit am Laufrad ($u = \omega r$),
- v relative Strömungsgeschwindigkeit des Mediums,
- c absolute Strömungsgeschwindigkeit des Fluidums, bezogen auf die ruhende Umgebung,
- c_m Mediankomponente von c,
- c_u Umfangskomponente von c.

Für die Berechnung des Drehmomentes $\boldsymbol{M}$ ist die *absolute Strömungsgeschwindigkeit am Umfang* c_u von Bedeutung. Aus dem Geschwindigkeitsdiagramm am Eintritt bzw. am Austritt lässt sich durch Messen der Umlaufgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ des Laufrades und der relativen Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Mediums über Vektoraddition die absolute Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ ermitteln. Diese lässt sich in eine Komponente, die in die Mitte weist (*Mediankomponente* c_m) und eine Komponente, die am Umfang angreift (c_u), zerlegen. Daraus ergibt sich nach (2.222) das Drehmoment für eine Turbine:

$$M = \varrho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2) \,. \qquad (2.223)$$

Bei Pumpen werden die Indizes im Klammerausdruck vertauscht. Die Leistung des Laufrades kann aus $P = M\omega$ ermittelt oder aus der Fallhöhe H_F der Turbine und dem Volumenstrom $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ errechnet werden:

$$P = M\omega = \varrho g H_F \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (2.224)$$

Wird diese Gleichung nach der Fallhöhe H_F umgestellt und für M (2.223) eingesetzt ($\omega = v/r$), dann ergibt sich die *Euler'sche Gleichung* für die Turbine:

$$H_F = \frac{1}{g}(c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2) \,. \qquad (2.225)$$

(Für Pumpen werden die Indizes in dem Klammerausdruck vertauscht.) Als Folge von Verlusten wird die wirkliche Fallhöhe $H_{F,\,real}$ einer Turbine kleiner, die wirkliche Förderhöhe $H_{F,\,real}$ einer Pumpe größer sein, als sich aus (2.225) ergibt.
Ist eine Strömung drehimpulsfrei, gilt für die Turbine $c_{u2} = 0$, für die Pumpe $c_{u1} = 0$. Für die Fallhöhe H_{FT} einer Turbine bzw. die Förderhöhe H_{FP} einer Pumpe ergibt sich dann

$$H_{FT} = \frac{1}{g} c_{u1} u_1 \qquad \text{bzw.}$$
$$H_{FP} = \frac{1}{g} c_{u2} u_2 \,. \qquad (2.226)$$

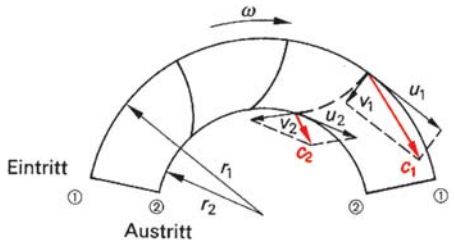
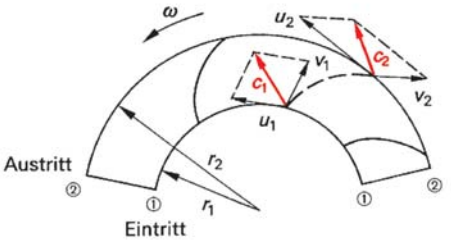
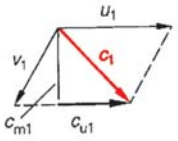
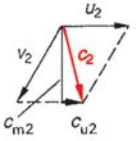
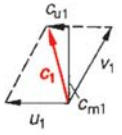
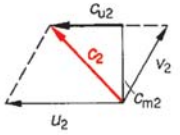
Strömungsmaschine	Turbine		Pumpe	
Strömungsverhältnisse am Laufrad				
Geschwindigkeitsdiagramm	Eintritt ①	Austritt ②	Eintritt ①	Austritt ②
				
Drehmoment M	$M = \varrho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} (c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2)$		$M = \varrho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} (c_{u2} r_2 - c_{u1} r_1)$	
Laufradleistung P	$P = M \omega = \varrho g H_F \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$		———	
Euler'sche Gleichung für die Fallhöhe bzw. Förderhöhe H_F	$H_F = \frac{1}{g} (c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2)$		$H_F = \frac{1}{g} (c_{u2} u_2 - c_{u1} u_1)$	
Euler'sche Gleichung für drehimpulsfreie Strömung	$H_F = \frac{1}{g} c_{u1} u_1$		$H_F = \frac{1}{g} c_{u2} u_2$	

Abb. 2.121 Strömungsverhältnisse in den Laufrädern von Turbinen und Pumpen

Beispiel

2.12-5 Eine Förderpumpe (Radialkreiselpumpe) hat einen Laufraddurchmesser $d = 250$ mm und läuft mit einer Drehzahl $n = 2\,950\ \text{min}^{-1}$. Die absolute Austrittsgeschwindigkeit ist $c_2 = 35$ m/s, und der Winkel zwischen c_2 und der Umfangsgeschwindigkeit u_2 beträgt 30°. Berechnet werden soll die Förderhöhe bei drehimpulsfreier Strömung (unter Vernachlässigung der Reibung).

Lösung

Nach (2.226) gilt für die Förderhöhe bei drehimpulsfreier Anströmung

$$H_{\text{FP}} = \frac{1}{g} c_{\text{u}2} u_2 \ .$$

Es ist $u_2 = \omega r_2 = 2\pi \cdot n \cdot r_2$ und $c_{\text{u}2} = c_2 \cdot \cos(30°)$; somit erhält man

$$H_{\text{FP}} = \frac{1}{g} c_2 \cdot \cos(30°) 2\pi\, n\, r_2 = 119{,}3\ \text{m} \ .$$

Zur Übung

Ü 2.12-5 Zur Messung des Volumenstroms in einer horizontalen Wasserzuführung ($\varrho = 1\ \text{kg/dm}^3$) mit einem Rohrdurchmesser $d_{\text{R}} = 10$ cm wird ein Venturi-Rohr eingebaut, das an einer Verengung einen Durchmesser $d_{\text{V}} = 7{,}5$ cm aufweist. Es wird ein Volumenstrom $\dot{V} = 2$ l/s gemessen. Welcher Druckunterschied wird angezeigt ($\alpha\varepsilon = 1$)?

Ü 2.12-6 Durch ein Rohr mit einem Durchmesser $d = 40$ mm fließt bei einem Druck $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa Wasser mit einer Geschwindigkeit $v = 4$ m/s. Welcher Druck entsteht, wenn der Rohrdurchmesser an einer Stelle wegen Verkalkung nur noch 65% des ursprünglichen Durchmessers beträgt?

Ü 2.12-7 Ein Behälter ist immer mit Wasser bis zur Höhe $h = 4$ m gefüllt. An der Seite ist $h' = 4$ cm vom Boden entfernt eine Ausströmöffnung mit einem Durchmesser $d = 2$ cm angebracht. Welcher Wasserstrom fließt aus der Öffnung, wenn a) keine Reibung berücksichtigt wird, b) die Geschwindigkeitsziffer $\varphi = 0{,}97$ und die Kontraktionszahl $\alpha = 0{,}82$ ist sowie c) zusätzlich zu a) ein Überdruck $\Delta p = 2 \cdot 10^5$ Pa wirkt?

Ü 2.12-8 In einem Wasserkraftwerk steht eine Turbine, die einen Volumenstrom $\dot{V} = 10\ \text{m}^3/\text{s}$ verarbeitet. Die Druckleitung hat einen Durchmesser $d = 1{,}2$ m und einen Druck $p = 6 \cdot 10^5$ Pa. Berechnet werden sollen a) die Geschwindigkeit des Wassers im Druckrohr, b) die Geschwindigkeit des austretenden Wasserstrahls, wenn der Druck an der Düsenöffnung noch $p = 1{,}1 \cdot 10^5$ Pa beträgt und c) die Höhendifferenz zwischen Turbine und Oberfläche des Sees, aus dem das Wasser in die Turbine fließt.

Ü 2.12-9 Ein Prandtl-Rohr ist mit Alkohol gefüllt ($\varrho = 0{,}9\ \text{kg/dm}^3$) und wird in ein Flugzeug eingebaut. Es zeigt eine Höhendifferenz $\Delta h = 20$ cm. Wie groß ist die Flugzeuggeschwindigkeit, wenn die Dichte der Luft $1{,}27\ \text{kg/m}^3$ beträgt?

2.12.2.3 Strömungen realer Flüssigkeiten und Gase

Laminare Strömung und innere Reibung

In diesem Abschnitt werden, wie im vorigen, die inkompressiblen Flüssigkeiten und Gase unter dem Begriff *Fluide* zusammengefasst. Zwischen den Molekülen eines Fluidums wirken *Kohäsionskräfte* (Abschn. 2.12.1.6). Aus diesem Grund treten bei der Strömung zwischenmolekulare Reibungskräfte auf, deren Wirkung *innere Reibung* genannt wird.

Zwischen zwei Platten der Dicke d befinde sich eine Flüssigkeit, wie Abb. 2.122a zeigt. Die untere Platte 1 ist in Ruhe ($v = 0$), während die obere Platte 2 mit der konstanten Geschwindigkeit $v = v_0$ nach rechts bewegt wird. Da somit die obere Flüssigkeitsschicht die Geschwindigkeit v_0 hat und die untere keine Geschwindigkeit aufweist, entsteht in der Flüssigkeitsschicht ein Geschwindigkeitsgefälle $0 \leqq v \leqq v_0$. Da dieses nicht, wie in Abb. 2.122a gezeichnet, linear zu sein braucht, wird ein differentielles Geschwindigkeitsgefälle $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ definiert. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten (*Laminate*) mit verschiedenen Geschwindigkeiten übereinander hinweg, ohne sich zu vermischen (Abb. 2.122), wird diese Strömung als *laminare Strömung* bezeichnet.

Das durch die Reibung verursachte Übereinandergleiten der Flüssigkeitsschichten kann auch

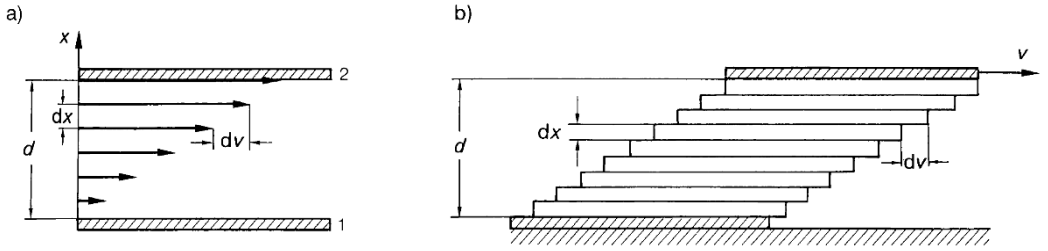


Abb. 2.122 Zum Newton'schen Reibungsgesetz: **a**) lineares Geschwindigkeitsgefälle, **b**) Abgleiten der Flüssigkeitsschichten

bei einem durch eine Scherkraft verschobenen Papierstoß beobachtet werden, wobei die einzelnen Papierbögen die Flüssigkeitsschichten sind. Die Reibungskraft F_R, die notwendig ist, um eine Platte der Fläche A mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur ruhenden Wand zu verschieben, ist proportional zur Fläche A und zum Geschwindigkeitsgefälle $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$:

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}}x\,. \tag{2.227}$$

Mit F_R/A als der Schubspannung τ gilt auch

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{2.228}$$

Dieses Gesetz wird nach seinem Entdecker *Newton'sches Reibungsgesetz* genannt. Der Proportionalitätsfaktor η ist die *dynamische Viskosität* (Zähigkeit). Sie hat die Einheit $\mathrm{N\,s/m^2} = \mathrm{Pa\,s}$ (Pascalsekunde).
Der Kehrwert der dynamischen Viskosität η ist die *Fluidität:*

$$\varphi = \frac{1}{\eta} \tag{2.229}$$

mit der Einheit $\mathrm{m^2/(N\,s)}$. Das Verhältnis der dynamischen Viskosität η zur Dichte ϱ des Mediums wird als *kinematische Zähigkeit* ν bezeichnet:

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}\,; \tag{2.230}$$

ihre Einheit ist $\mathrm{m^2/s}$. Die dynamische Viskosität η ist ein Materialwert, der stark temperatur- und druckabhängig ist. Die Temperaturabhängigkeit kann näherungsweise mit

$$\eta = A\,\mathrm{e}^{\frac{b}{T}} \tag{2.231}$$

beschrieben werden. Hierbei sind A und b empirisch ermittelte Konstanten. Die dynamische Viskosität von Gasen ist sehr viel geringer als die von Flüssigkeiten, unabhängig vom Gasdruck und nimmt mit steigender Temperatur proportional zur steigenden mittleren Geschwindigkeit der Gasmoleküle zu.
Stoffe, für die das Newton'sche Reibungsgesetz (2.228) nicht gilt, wie beispielsweise für Fette, werden *nichtnewton'sche Substanzen* genannt. Sie sind Sonderfälle, für die alle folgenden Überlegungen nicht gelten.

Anwendung des Reibungsgesetzes

Laminare Rohrströmung

Bei einer laminaren Strömung durch ein Rohr haftet die Flüssigkeit am Rand und bewegt

sich in der Mitte am schnellsten. Die Strömung kann zusammengesetzt gedacht werden aus dünnen Hohlzylindern, die reibungsbehaftet aneinander vorbeigleiten. Abbildung 2.123 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung in einer Rohrströmung. Ein Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r gleitet am angrenzenden Hohlzylinder (rot) ab. An der Grenzfläche ist die Druckkraft F_p gleich der Reibungskraft F_R: $F_p = F_R$. Aus

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \qquad \text{bzw.}$$

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta\, 2\pi\, r\, l \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

ergibt sich

$$r\,\mathrm{d}r = -\frac{2\eta l}{(p_1 - p_2)}\,\mathrm{d}v\,.$$

Durch Integration wird daraus

$$r^2 = -\frac{4\eta l}{(p_1 - p_2)}v + C\,.$$

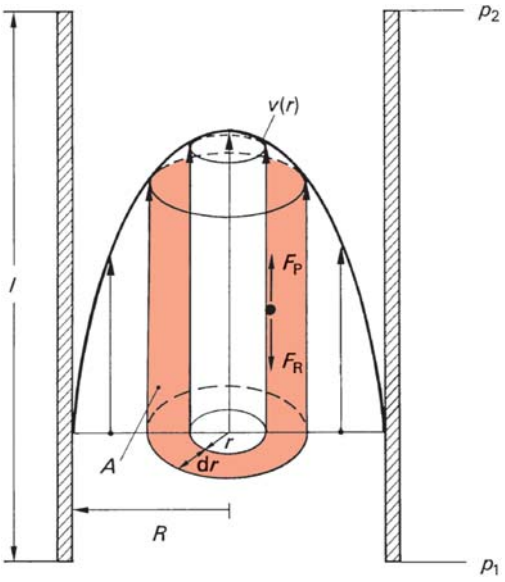


Abb. 2.123 Laminare Rohrströmung nach dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz

Mit der Randbedingung, dass bei $r = R$ die Strömungsgeschwindigkeit $v = 0$ ist, erhält man die Integrationskonstante $C = R^2$ und es gilt

$$r^2 = -\frac{4\eta l}{(p_1 - p_2)}v + R^2\,.$$

Wird diese Gleichung nach der Strömungsgeschwindigkeit v aufgelöst, so ergibt sich das *Hagen-Poiseuille'sche Gesetz* (G. Hagen, 1797 bis 1884; J. L. M. Poiseuille, 1799 bis 1869):

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,. \qquad (2.232)$$

Gleichung (2.232) beschreibt einen *parabelförmigen Verlauf* der Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius. Der Massenstrom $\mathrm{d}\dot{m}$ errechnet sich nach (2.200) aus $\mathrm{d}\dot{m} = \varrho v(r)\,\mathrm{d}A = 2\pi\varrho v(r) r\,\mathrm{d}r$. Wird $v(r)$ nach dem Hagen-Poisseuille'schen Gesetz eingesetzt und integriert, dann resultiert

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_0^R \frac{\varrho\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l}(R^2 - r^2) r\,\mathrm{d}r$$

oder

$$\dot{m} = \frac{\varrho\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\eta l}\,. \qquad (2.233)$$

Mit $\dot{m} = \varrho\dot{V}$ ergibt sich der Volumenstrom $\dot{V}$ des Durchflusses durch das Rohr:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\eta l}\,. \qquad (2.234)$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Volumenstrom bzw. der Massenstrom durch Vergrößerung des Radius ($\dot{V} \sim R^4$) wesentlich mehr gesteigert werden kann als durch die Erhöhung der

Druckdifferenz ($\dot{V} \sim (p_1 - p_2)$). Beispielsweise wird bei der Verdoppelung des Rohrradius R das Durchflussvolumen 16-mal größer. Ferner folgt aus dieser Gleichung, dass bei konstantem Querschnitt A der Druckabfall $(p_1 - p_2)$ proportional zur Rohrlänge l ist:

$$(p_1 - p_2) \sim l \,. \tag{2.235}$$

Aus der Bedingung, dass die Reibungskraft F_R gleich der an den Rohrenden wirkenden Druckkraft F_p ist, lässt sich die Reibungskraft

$$F_R = F_p = (p_1 - p_2)A = (p_1 - p_2)\pi R^2$$

bestimmen. Wird $p_1 - p_2$ aus (2.234) eingesetzt, so ergibt sich

$$F_R = 8\eta l \frac{\dot{V}}{R^2} \,.$$

Der Volumenstrom $\dot{V}$ hängt über die Beziehung $\dot{V} = \pi R^2 v_m$ mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v_m zusammen, sodass für die Reibungskraft F_R gilt

$$F_R = 8\pi\, \eta l v_m \,. \tag{2.236}$$

Beispiel

2.12-6 In einem Warmwasserrohr verringert sich infolge von Kalkablagerungen der Rohrdurchmesser um 20%. Berechnet werden soll die prozentuale Änderung des Massenstroms $\dot{m}$.

Lösung

Nach (2.233) verhält sich

$$\frac{\dot{m}_{Kalk}}{\dot{m}_0} = \frac{R^4_{Kalk}}{R^4_0} = \frac{0{,}8^4}{1^4} = 0{,}41 \,.$$

Bei dieser Verringerung des Rohrdurchmessers durch Verkalken bleiben also nur noch 41% des ursprünglichen Warmwasserstroms erhalten.

Laminare Umströmung

Durch eine ähnliche Rechnung wie für das *Hagen-Poiseuille'sche Gesetz* ergibt sich für die Reibungskraft bei der laminaren Umströmung einer Kugel das *Stokes'sche Reibungsgesetz* (C. G. Stokes, 1819 bis 1903):

$$F_R = 6\pi\eta r v \tag{2.237}$$

mit v als der Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Flüssigkeit und r als dem Radius der Kugel.

Durch Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit v einer Kugel in einem Rohr konstanten Querschnitts kann die dynamische Viskosität η bestimmt werden. Abbildung 2.124 zeigt das in der Praxis weit verbreitete *Höppler-Kugelfallviskosimeter*. Die Reibungskraft F_R errechnet sich aus der Differenz zwischen der Gewichtskraft F_G und der Auftriebskraft F_A zu $F_R = F_G - F_A$. Aus

$$6\pi\eta r v = \varrho_K V_K g - \varrho_{Fl} V_{Fl} g$$

folgen mit dem Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$

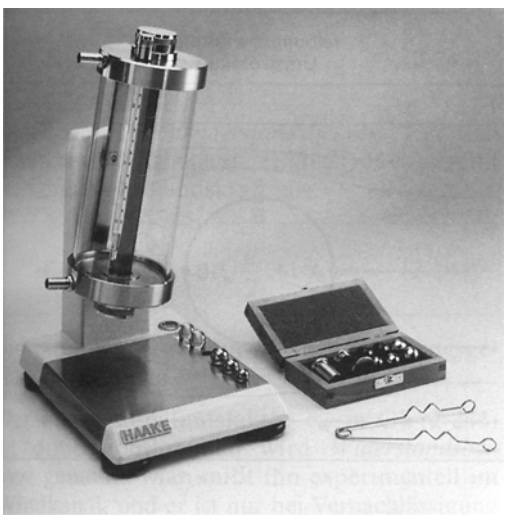


Abb. 2.124 Höppler-Kugelfallviskosimeter. Werkfoto: Haake

$$v = \frac{2gr^2(\varrho_K - \varrho_{Fl})}{9\,\eta} \quad \text{und} \tag{2.238}$$

$$\eta = \frac{2gr^2(\varrho_K - \varrho_{Fl})}{9\,v}\,. \tag{2.239}$$

Bernoulli-Gleichung bei Newton'scher Reibung

Die Reibungskraft verursacht in der Stromröhre (Abb. 2.102) einen Druckverlust p_V und vermindert dadurch die Druckdifferenz $p_1 - p_2$. Wird die Bernoulli-Gleichung (2.203) um den Druckverlust erweitert, so ergibt sich

$$\varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 = \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2 + p_V\,. \tag{2.240}$$

In der Praxis wird der Druckverlust oft als Verlusthöhe h_V angegeben:

$$p_V = \varrho\, g\, h_V\,. \tag{2.241}$$

Die Verlusthöhe h_V ist diejenige Höhe, um die der Zufluss angehoben werden muss, um am Ausfluss aus der Stromröhre denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erzeugen.
Für die Verlusthöhe h_V in geraden Rohrleitungen mit konstantem Querschnitt gilt das Rohrwiderstandsgesetz

$$h_V = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}\,. \tag{2.242}$$

Hierin sind

- l Länge der Rohrleitung,
- d Durchmesser des Rohres,
- v Strömungsgeschwindigkeit,
- g = 9,81 m/s^2 Fallbeschleunigung.

Der dimensionslose Proportionalitätsfaktor λ ist die *Rohrreibungszahl*. Sie ist stark abhängig von der Oberflächenrauigkeit und der Reynoldszahl.

Umströmen von Körpern

Während bei der *laminaren Strömung* die Geschwindigkeitsvektoren der Flüssigkeitsteilchen parallel verlaufen, ändern sich in der *turbulenten Strömung* die Geschwindigkeitsvektoren ständig nach Richtung und Größe. Streng genommen ist eine *turbulente* Strömung deshalb immer *instationär*. Als stationär wird sie angesehen, wenn die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit von der Zeit unabhängig ist.
Eine *Wirbelbildung* tritt auf, wenn sich die Flüssigkeitsschichten ablösen. Die Entstehung von Wirbeln kann modellmäßig erklärt werden. Abbildung 2.125a zeigt den reibungsfreien Idealfall. Während an den Punkten A und C die Strömungsgeschwindigkeit $v = 0$ und deshalb nach der Bernoulli-Gleichung der statische Druck maximal ist, wird an den Punkten B und D die Geschwindigkeit am größten ($v = v_{max}$) und deshalb der Druck am geringsten. Ohne Wirkung einer Reibungskraft werden die Flüssigkeitsteilchen von A nach B beschleunigt und durch die zunehmende Druckkraft von B nach C auf $v = 0$ wieder abgebremst; Entsprechendes gilt für den Weg ADC. Unter der Wirkung von Reibungskräften werden die Flüssigkeitsteilchen *vor* dem Punkt C zur Ruhe kommen. Die Reibungskraft wird sie zwingen, ihre Richtung zu ändern. Dadurch treten *Wirbel* auf, die nach dem Drehimpulserhaltungssatz (Abschn. 2.8.4) *paarweise* auftreten (Abb. 2.125b). Die Widerstandskraft F_W setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Dies verdeutlicht Abb. 2.126.

- *Reibungswiderstandskraft* F_R (z. B. längs einer überströmten Platte, Abb. 2.126a). Dies

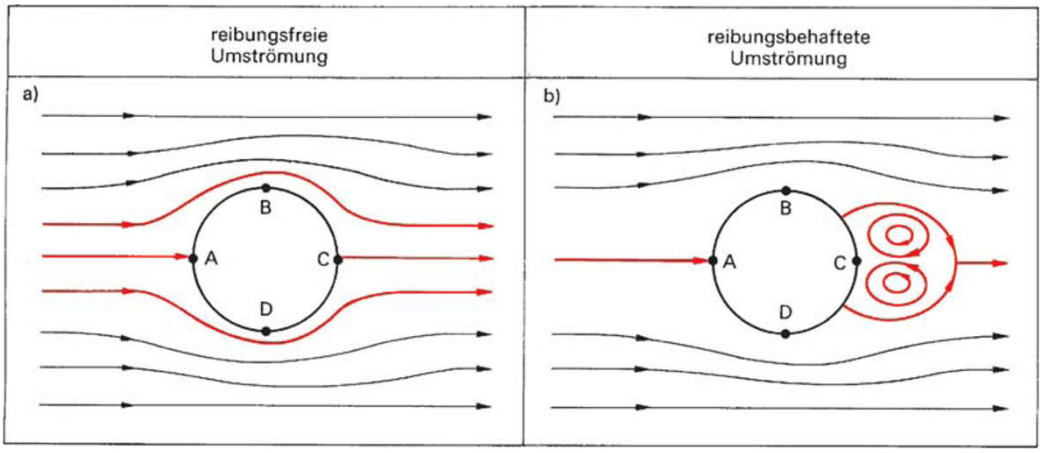


Abb. 2.125 Umströmung von zylindrischen Körpern

ist die bei der Strömung wirkende Reibungskraft. Nach einer bestimmten „Lauflänge" entlang der Platte wird die Grenzschicht der Strömung turbulent. Der Umschlag in Turbulenz hängt von der Form der Plattenvorderkante, aber auch von der Rauigkeit der Oberfläche ab.

– *Druckwiderstandskraft* F_D (z. B. quer angeströmte Platte, Abb. 2.126b). Beispielsweise bilden sich auf der Rückseite einer quer angeströmten Platte Wirbel, in denen sich die Flüssigkeitsteilchen sehr schnell bewegen. Nach der Bernoulli-Gleichung hat dies einen verminderten statischen Druck zur Folge. Dadurch entsteht eine Druckdifferenz vor und hinter der Platte. Die dieser Druckdifferenz entsprechende Kraft ist die *Druckwiderstandskraft*. Sie tritt auch bei Umlenkungen und Querschnittsveränderungen auf. Sie ist proportional zum Staudruck und zur angeströmten Stirnfläche A, d. h. dem in Strömungsrichtung wirkenden Profil:

$$F_D = c_D \frac{\varrho}{2} v^2 A \,. \tag{2.243}$$

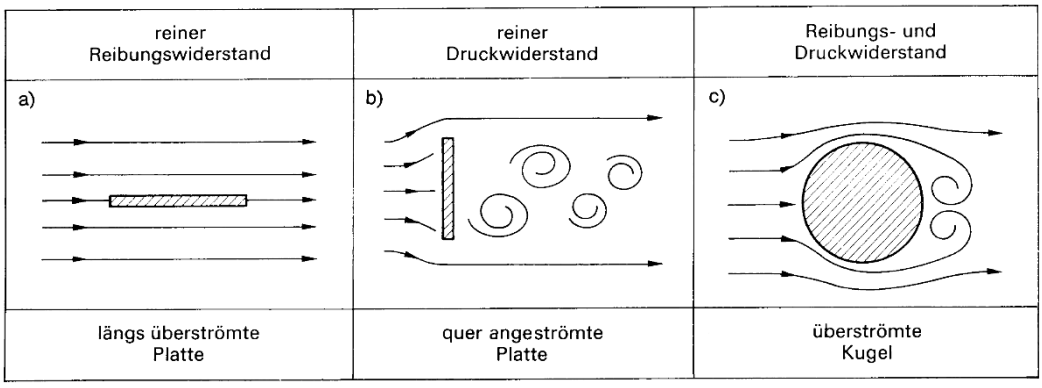


Abb. 2.126 Widerstände bei Strömungen



Abb. 2.127 PKW (Audi A6) mit dem Widerstandsbeiwert $c_W = 0{,}30$ im Windkanal. Werkfoto: Audi

c_D ist der *Druckwiderstandsbeiwert*. Für den gesamten Widerstand (Abb. 2.126c) ergibt sich die Widerstandskraft aus

$$F_W = F_R + F_D = c_w \frac{\varrho}{2} A v^2 \,. \qquad (2.244)$$

Sie nimmt quadratisch mit der Strömungsgeschwindigkeit zu.

Der Proportionalitätsfaktor c_W in (2.244) ist dimensionslos und wird *Widerstandsbeiwert* genannt. Man misst ihn experimentell im Windkanal, und er ist nur bei Vernachlässigung der Reibungswiderstandskraft konstant, d. h. bei hohen Anströmgeschwindigkeiten. Abbildung 2.127 zeigt einen Pkw im Strömungskanal. In Abb. 2.128 sind einige Widerstandsbeiwerte c_W für unterschiedliche Anströmgeometrien zusammengestellt. Ein Körper in *Stromlinienform* mit $c_W = 0{,}055$ zeigt den geringsten Widerstandsbeiwert. Diese Geometrie hat die Besonderheit, dass der Druckabfall entlang des Körpers so langsam stattfindet, dass keine Wirbel auftreten können. In der Praxis würden bei Fahrzeugen dadurch allerdings sehr lange Heckteile notwendig werden. Um sie zu verkürzen und trotzdem günstige c_W-Werte zu erreichen, wird das Strömungsprofil nur schwach verjüngt und dann plötzlich senkrecht mit einer Abrisskante begrenzt. Die störende Reibungswirkung von Wirbeln kann auch dadurch gemildert werden, dass die Wirbel durch Schlitze an der Oberfläche abgesaugt werden. Die Leistung, die gegen eine turbulente Strömung aufgebracht werden muss, errechnet sich wegen $P = Fv$ zu

$$P = c_W \frac{\varrho}{2} A v^3 \,. \qquad (2.245)$$

Die Strömungsleistung nimmt also mit der dritten Potenz der Anströmgeschwindigkeit zu. (Bei der Verdopplung der Anströmgeschwindigkeit z. B. verachtfacht sich die Strömungsleistung.)

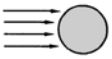
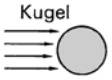
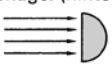
Körper	Widerstandsbeiwert c_W
Platte 	$Re > 10^3$ 1,1 bis 1,3
langer Zylinder 	$Re > 5 \cdot 10^5$ $c_w = 0,35$ $5 \cdot 10^2 < Re < 5 \cdot 10^5$ $c_w = 1,2$
Kugel 	$Re > 10^6$ $c_w = 0,18$ $10^3 < Re < 10^5$ $c_w = 0,45$
Halbkugel (vorn) 	mit Boden 0,42 ohne Boden 0,34
Halbkugel (hinten) 	mit Boden 1,17 ohne Boden 1,34
Kegel mit Halbkugel 	0,16 bis 0,2
Halbkugel mit Kegel 	0,07 bis 0,09
Stromlinienkörper 	0,055

Abb. 2.128 Widerstandsbeiwerte unterschiedlicher Körper

Bei der Umströmung von Körpern bildet sich eine *Grenzschicht D* aus, innerhalb der die Strömungsgeschwindigkeit von $v = 0$ auf den vollen Wert ansteigt. Wie Abb. 2.129 am Beispiel eines umströmten Profils zeigt, bildet sich zunächst eine *laminare Grenzschicht* aus. In diesem Bereich werden die Teilchen beschleunigt. Bei der weiteren Strömung entlang der Platte nimmt der Strömungsdruck zu, sodass wegen der jetzt beginnenden Verzögerung der strömenden Teilchen eine Wirbelbildung einsetzt. Es entsteht auf einer laminaren Grenzschicht eine *turbulente Strömung*.

Der Begriff *Grenzschicht* wurde von L. Prandtl (1875 bis 1957) in die Strömungslehre eingeführt. Die Grenzschichtdicke D_l der laminaren Strömung nimmt mit zunehmender Länge des Profils proportional zu $\sqrt{l}$ zu. Sie ist umso dünner, je kleiner die Viskosität ist. Die Grenzschichtdicke D_l kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

Wird eine Platte der Fläche A und der Länge l mit der konstanten Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeitsschicht gezogen, dann muss nach (2.227) die Reibungskraft

$$F_R = 2\eta A \frac{v}{D_l}$$

aufgebracht werden. Die zu beiden Seiten der Platte mitgenommene Flüssigkeit der Masse

$$m \approx 2AD_l\varrho$$

bewegt sich im Mittel mit der halben Geschwindigkeit der Platte und erfährt in der Zeitspanne $\Delta t = l/v$ einen Impulszuwachs von

$$\Delta p = m\frac{v}{2} \approx 2AD_l\varrho\frac{v}{2}\,.$$

Nach dem Newton'schen Grundgesetz (2.24) gilt

$$F_R = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\eta A\frac{v}{D_l} \approx \frac{2AD_l\varrho v/2}{l/v}\,.$$

Für die Grenzschichtdicke D_l ergibt sich daraus:

$$D_l \approx \sqrt{2\frac{\eta l}{\varrho v}} = \sqrt{2\frac{vl}{v}}\,. \qquad (2.246)$$

Für die turbulente Strömung sind die Vorgänge wegen der Wirbelbildung komplizierter. Gleichungen zur Berechnung der Dicke der Grenzschicht einer laminaren Strömung D_l und der einer turbulenten Strömung D_t sind für eine ebene Platte in Abb. 2.129 aufgeführt.

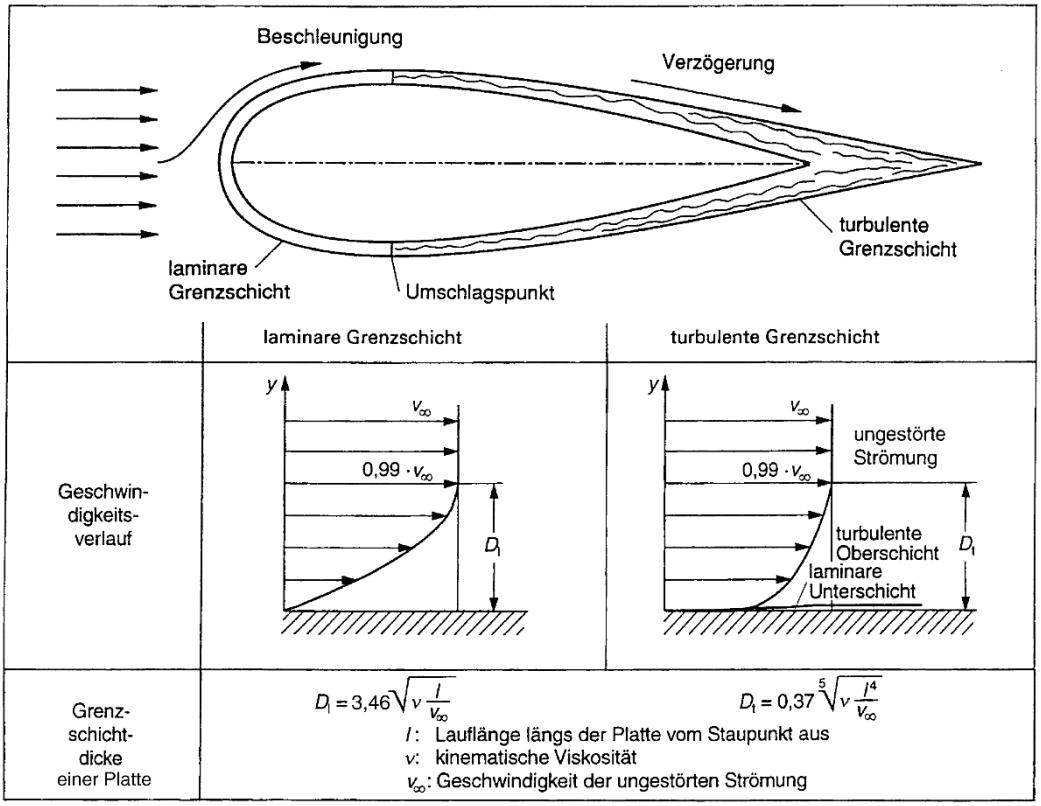


Abb. 2.129 Laminare und turbulente Grenzschichtbildung bei der Umströmung von Körpern

Ähnlichkeitsgesetze

Um Vorgänge der Strömungsmechanik im Labormaßstab studieren und um strömungsmechanische Anlagen, z. B. Wasserkraftwerke, entwerfen zu können, werden im verkleinerten Maßstab Modelle angefertigt. Damit man richtige Aussagen erhält, muss das Modell dem Original ähnlich sein. Wie Abb. 2.130 zeigt, muss für strömungsmechanische Modelle *Ähnlichkeit* in zwei Bereichen vorliegen:

- *Geometrische Ähnlichkeit*: Modell und Original müssen in ihren geometrischen Abmessungen proportional sein (Länge, Fläche und Volumen). Ein besonderes Problem ist die Abbildung der Oberflächenrauigkeit;
- *hydromechanische Ähnlichkeit*: Modell und Original müssen in ihren hydromechanischen Eigenschaften proportional sein (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Dichte, Viskosität und kinematische Zähigkeit).

Nach O. Reynolds (1842 bis 1912) ist die *hydrodynamische Ähnlichkeit* erreicht, wenn eine dimensionslose Zahl, die nach ihm benannte *Reynoldszahl Re*, von Original und Modell *übereinstimmen*.

Reynoldszahl Re

Die Reynoldszahl lässt sich anschaulich aus den Geschwindigkeitsverhältnissen zweier umströmter ähnlicher Körper nach Abb. 2.131 herleiten. Körper A hat die Dicke L_A und eine Grenzschichtdicke von D_A. Wird der Körper A um einen konstanten geometrischen Faktor

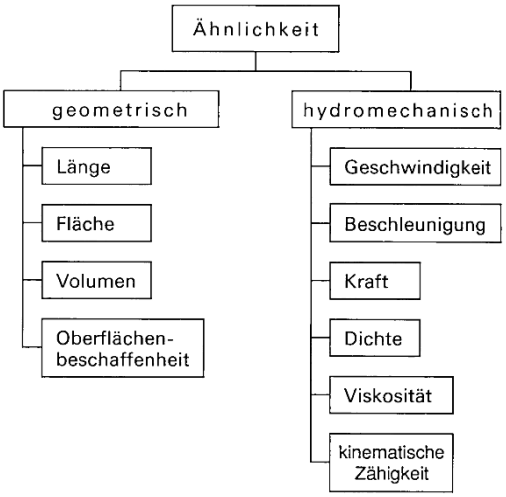


Abb. 2.130 Geometrische und hydromechanische Ähnlichkeit.

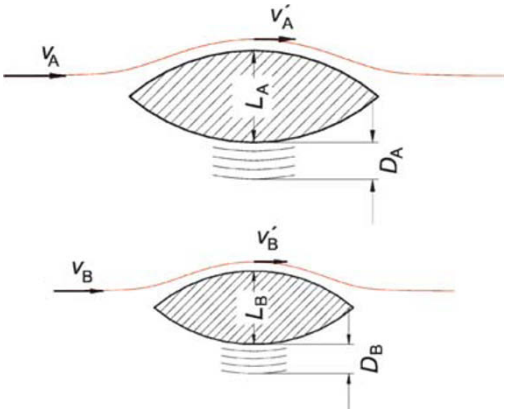


Abb. 2.131 Strömungsverhältnisse um ähnliche Körper

verkleinert, dann entsteht eine entsprechende Geometrie für den Körper B.

Wegen der Kontinuitätsgleichung (2.201) bleiben die Geschwindigkeitsverhältnisse gleich, wenn gilt: $v'_A/v_A = v'_B/v_B$. Damit ändern sich auch die Verhältnisse der anderen Größen entsprechend, sodass für die Grenzschichtdicken D und die charakteristischen Längen L gilt: $D_A/D_B = L_A/L_B$. Mit (2.246) für die Grenzschichtdicke D erhält man:

$$\sqrt{\frac{\eta_A L_A \varrho_B v_B}{\varrho_A v_A \eta_B L_B}} = \frac{L_A}{L_B} \,. \tag{2.247}$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{v_A L_A \varrho_A}{\eta_A} = \frac{v_B L_B \varrho_B}{\eta_B} \,.$$

Der Ausdruck $vL\varrho/\eta$ ist die dimensionslose *Reynoldszahl* Re. Es gilt also:

$$\mathrm{Re} = \frac{vL\varrho}{\eta} = \frac{vL}{\nu} \tag{2.248}$$

Hierbei ist v die Strömungsgeschwindigkeit und L eine charakteristische Länge. Diese wird durch den Versuchsaufbau bestimmt, mit dem die Reynoldszahl gemessen wird (z. B. ein Rohr- oder Kugeldurchmesser oder die Länge einer Platte). η ist die dynamische, ν die kinematische Viskosität. Durch den Zusammenhang mit der Viskosität ist die Reynoldszahl temperatur- und bei Gasen auch druckabhängig.

Bei einer laminaren Strömung ist $\mathrm{Re} < \mathrm{Re_{krit}}$ mit $\mathrm{Re_{krit}}$ als der *kritischen Reynoldszahl*. Die Strömung ist turbulent, wenn $\mathrm{Re} > \mathrm{Re_{krit}}$ ist. Der Umschlag der beiden Zustände (bei $\mathrm{Re_{krit}}$) ist nicht sprunghaft und hängt beispielsweise auch von der Störfreiheit an der Einlaufstelle ab.

Tabelle 2.10 zeigt die kritischen Reynoldszahlen und die Widerstandsbeiwerte für ein kreisrundes Rohr, eine Kugel und eine Platte im Laminarbereich. (Für ein kreisrundes Rohr wird statt c_W üblicherweise die Rohrreibungszahl λ verwendet, s. (2.242).)

Bei turbulenten Strömungen spielt die *Oberflächenrauigkeit* k eine wichtige Rolle. Sie hängt sehr von der Bearbeitung der Werkstückoberfläche ab. Die Rauigkeitswerte dieser Oberflächen werden ermittelt, indem man ihre Strömungswiderstände vergleicht mit denen,

Tabelle 2.10 Kritische Reynoldszahl Re_{krit} sowie Rohrreibungszahl λ bzw. Widerstandsbeiwert c_W (bei $Re \ll Re_{krit}$) für verschiedene Strömungsgeometrien

	Re_{krit}	λ; c_W
kreisrundes Rohr	2 320	$\lambda = \frac{64}{Re}$
Kugel	$1{,}7 \cdot 10^5$ bis $4 \cdot 10^5$	$c_W = \frac{24}{Re}$
Platte (längs angeströmt)	$3{,}2 \cdot 10^5$ bis 10^6	$c_W = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re}}$

die künstlich erzeugte Sandrauigkeiten verursachen. In Abb. 2.132 ist für Rohre das Rohrreibungszahl-(λ), -Reynoldszahl-(Re)-Diagramm dargestellt. Es ist doppeltlogarithmisch ausgeführt und zeigt vier Bereiche:

- *Laminarer Bereich* (schräg abwärts geneigte Gerade für $\lambda = 64/Re$; $Re < 2\,320$);
- *turbulenter Bereich* ($Re > 2\,320$) und zwar für
  - *hydraulisch glatte Rohre* ($k = 0$; Kurve a; $\lambda = f(Re)$) und für
  - *hydraulisch raue Rohre* (Bereich II; $\lambda = f(k/D)$) sowie das
  - *Übergangsgebiet* (Bereich I; $\lambda = f(Re, k/D)$).

Der in der Praxis wichtige Bereich ist in Abb. 2.132 hervorgehoben. Tabelle 2.11 zeigt den Zusammenhang zwischen der Rohrreibungszahl λ bzw. dem Widerstandsbeiwert c_W

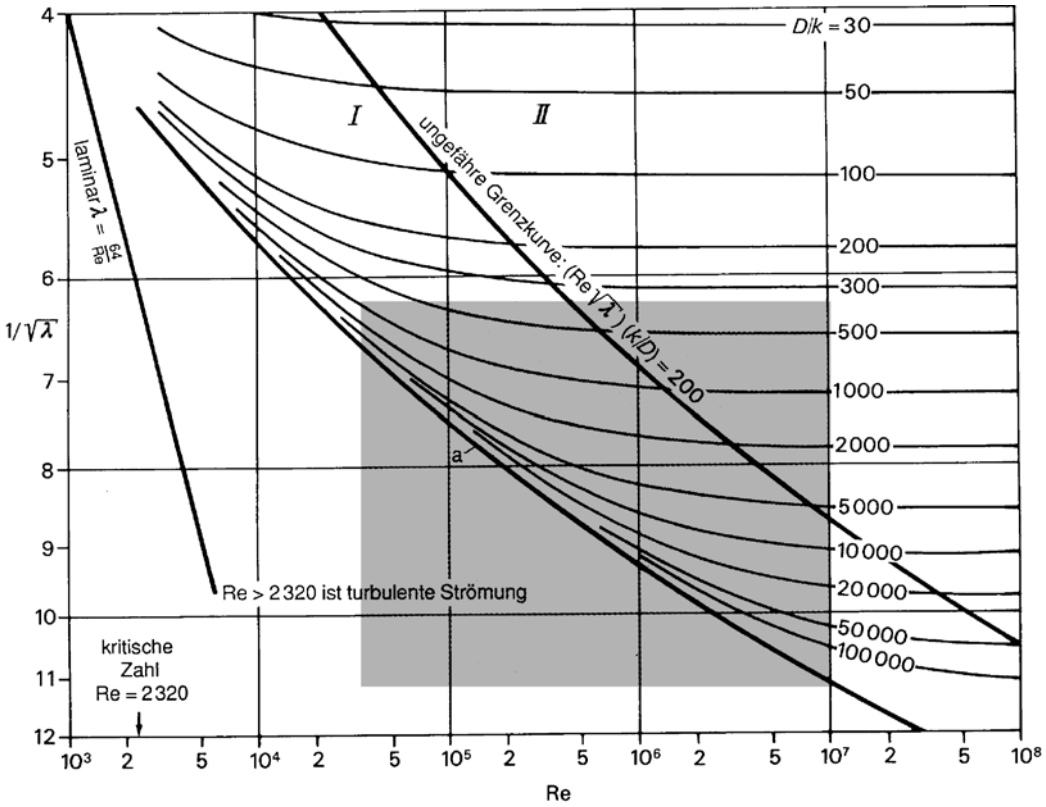


Abb. 2.132 Rohrreibungszahl-(λ)-Reynoldszahl-(Re)-Diagramm: k Rauigkeit, D Rohrdurchmesser, k/D relative Rauigkeit (aus: Wärmetechnische Arbeitsmappe, VDI-Verlag 1980)

Tabelle 2.11 Rohrreibungszahl λ und Widerstandsbeiwert c_W für Rohre mit dem Durchmesser D und Platten mit der Länge l in Abhängigkeit von der Rauigkeit k und der Reynoldszahl Re.

	laminare Grenzschicht	turbulente Grenzschicht		
		hydraulisch glatt	hydraulisch rau	Übergangsgebiet
Rohre	$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$ (2.249)	Blasius $\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ (2.250) $(2\,320 < \mathrm{Re} < 10^5)$ Prandtl/Karman $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\left(\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{2{,}31}\right)$ (2.251) $c_W \approx \frac{0{,}309}{(\lg(\mathrm{Re}/7)^2)}$	Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\left(\frac{D}{k}\right) + 1{,}14$ (2.252)	Colebrook $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + 0{,}27\frac{k}{D}\right)$ (2.253)
Platten	$c_W = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ (2.254)	$c_W = \frac{0{,}0745}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}}}$ (2.255)	Voraussetzung: $\mathrm{Re}\frac{k}{l} \geqq 100$ $c_W = \frac{0{,}418}{\left(2 + \lg\left(\frac{l}{k}\right)\right)^{2{,}53}}$ (2.256)	c_W aus empirischen Tabellenwerken

und der Reynoldszahl Re für Rohre und Platten in diesen vier Strömungsgebieten.

Beispiel

2.12-7 Das Modell eines Pkw wird im Maßstab 1:10 im Windkanal erprobt. Berechnet werden soll die Anblasgeschwindigkeit v_2, wenn die Strömungsverhältnisse des Fahrzeugs bei einer Fahrtgeschwindigkeit $v_1 = 120\,\text{km/h}$ untersucht werden sollen (gleiche kinematische Zähigkeit $v_1 = v_2$).

Lösung

Da die Reynoldszahlen vom Original (1) und Modell (2) übereinstimmen müssen, gilt $\text{Re}_1 = \text{Re}_2$. Aus

$$\frac{v_1 L_1}{v_1} = \frac{v_2 L_2}{v_2}$$

erhält man

$$v_2 = v_1 \frac{L_1}{L_2} = 120 \cdot \frac{10}{1}\text{km/h} = 333{,}3\ \text{m/s}\ .$$

Dieser Wert liegt kurz unterhalb der Schallgeschwindigkeit für Luft ($c = 344\,\text{m/s}$ bei $\vartheta = 20\,^\circ\text{C}$). Es ist deshalb empfehlenswert, den Modellmaßstab zu vergrößern (z. B. auf 1:8).

Froudezahl Fr

Die *Froudezahl* Fr (Froude, 1810 bis 1879) ist ebenfalls eine dimensionslose Kennzahl und beschreibt ähnliche Strömungen, bei denen vor allem die *Schwerkraft* F_G von Bedeutung ist. Dies ist beispielsweise bei der hydraulischen bzw. pneumatischen Förderung von Staub, Sand oder Körnern der Fall, spielt aber auch bei der Widerstandsermittlung von Oberflächenwellen für Schiffskörper eine Rolle. Die hydrodynamische Ähnlichkeit (Abb. 2.130) fordert hier die Proportionalität von Schwerkraft $F_\text{G} = m\,g$ und Trägheitskraft $F_\text{t} = -m\,a$:

$$\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}\ .$$

Bei einer Dimensionsbetrachtung kann v für die Dimension der Beschleunigung $[a] = [v]^2/[L]$ gesetzt werden. Dann gilt nach Kürzen der Massen

$$\frac{a_1}{g} = \frac{a_2}{g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{[v_1]^2}{[L_1][g]} = \frac{[v_2]^2}{[L_2][g]} = \frac{[v]^2}{[L][g]}\ . \qquad (2.257)$$

Die Froudezahl ist die Wurzel aus diesem Ausdruck:

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{Lg}}\ . \qquad (2.258)$$

Bei Strömungsuntersuchungen für Schiffsmodelle im Schleppkanal müssten idealerweise der Widerstand durch die Oberflächenwellen (Froudezahl Fr) und der Reibungswiderstand im Wasser (Reynoldszahl Re) gleich sein. Wie (2.248) und (2.258) zeigen, liegen allerdings völlig unterschiedliche Abhängigkeiten von der umströmten Länge vor; es ist $\text{Re} \sim L$ und $\text{Fr} \sim 1/\sqrt{L}$. In der Praxis wird bei Schiffen vor allem auf Gleichheit der Froudezahl geachtet, weil der Einfluss der Oberflächenwellen größer ist als derjenige der Reibungskraft.

Beispiel

2.12-8 Das Modell eines Schiffes im Maßstab 1:15 wird im Schleppkanal untersucht. Berechnet werden soll die Geschwindigkeit im Schleppkanal v_2 für eine Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes von $v_1 = 20\,\text{km/h}$ a) bei gleicher Reynoldszahl $\text{Re}_1 = \text{Re}_2$ und b) bei gleicher Froudezahl $\text{Fr}_1 = \text{Fr}_2$.

Lösung

a) Gemäß Beispiel 2.12-7 errechnet man für gleiche Reynoldszahlen

$$v_2 = v_1 \frac{L_1}{L_2} = 20 \cdot \frac{15}{1}\ \text{km/h} = 83{,}3\ \text{m/s}\ .$$

b) Für gleiche Froudezahlen ist

$$\frac{v_1}{\sqrt{L_1 g}} = \frac{v_2}{\sqrt{L_2 g}}\ .$$

Daraus folgt

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 20\sqrt{\frac{1}{15}}\ \text{km/h} = 1{,}4\ \text{m/s}\ .$$

Die beiden Geschwindigkeiten unterscheiden sich also um den Faktor 60.

Spezielle Probleme der Strömungsmechanik

Auftrieb an umströmten Körpern

Treten bei der Umströmung von Körpern an der Oberseite höhere Strömungsgeschwindigkeiten als an der Unterseite auf, so hat dies nach der Bernoulli-Gleichung zur Folge, dass an der Oberseite ein Unterdruckgebiet und an der Unterseite ein Überdruckgebiet entsteht, wie Abb. 2.133a zeigt. Aus diesem Grund wird eine *dynamische Auftriebskraft* F_A wirksam, die analog zur Druckkraft F_D (2.243)

$$F_A = c_A \frac{\varrho}{2} v^2 A \qquad (2.259)$$

beträgt mit c_A als dem Auftriebsbeiwert. Die Fläche A ist die maximale Projektionsfläche des Körpers (z. B. bei einem Tragflügel: A = Spannweite s mal Spanntiefe l). Die Auftriebskraft $\boldsymbol{F}_A$ und die Widerstandskraft $\boldsymbol{F}_W = c_W \varrho/2\, v^2 A$ ergeben vektoriell addiert die resultierende Kraft

$$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_W\ . \qquad (2.260)$$

Die Analyse der Laplace-Gleichung (2.197) für den räumlichen Verlauf der Geschwindigkeitsfunktion der Strömung um das Hindernis ergibt, dass in wirbelfreien Strömungsfeldern keine Auftriebskräfte entstehen. Erst der Anfahrwirbel, der sich wegen der Grenzschichtreibung an der hinteren Tragflügelkante ablöst, führt zu Druckkräften auf den angeströmten Körper. Dieser Anfahrwirbel verursacht um den Tragflügel eine *Zirkulation*

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \qquad (2.261)$$

gemäß Abb. 2.133b, deren Drehimpuls den Drehimpuls des Anfahrwirbels kompensiert. Nach der Theorie von Kutta (1867 bis 1944) und Joukowsky (1847 bis 1921) erzeugt die Zirkulation auf einen Tragflügel der Spannweite s die Auftriebskraft

$$F_A = \varrho v s \Gamma\ . \qquad (2.262)$$

Die resultierende Kraft F_0 greift am *Druckpunkt* P an (Abb. 2.133a). Aus dem Drehmoment M um den vorderen Punkt O, das vom Anstellwinkel α abhängt, kann der Abstand $r = \overline{\mathrm{OP}}$ des Druckpunkts bestimmt werden. Mit (2.259) und (2.244) folgt

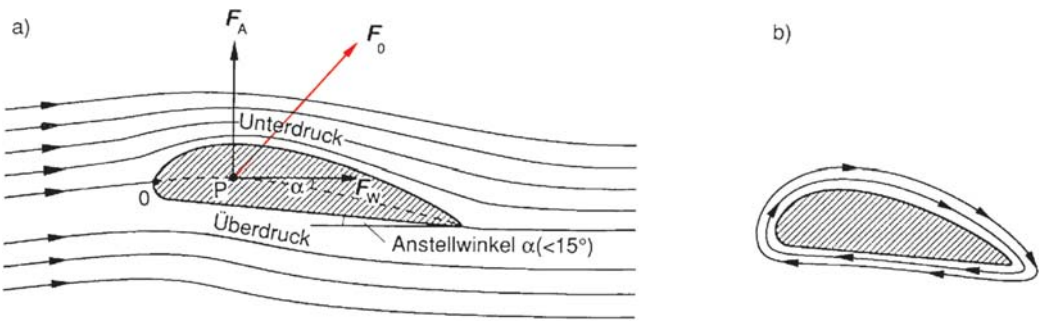


Abb. 2.133 Zum dynamischen Auftrieb an umströmten Körpern: **a)** Kräfte, **b)** „Zirkulation“

$M = r(F_A \cos\alpha + F_W \sin\alpha)$ oder

$$M = \frac{\varrho}{2} v^2 A r (c_A \cos\alpha + c_W \sin\alpha) \,. \tag{2.263}$$

Mit $c_M\, l = r(c_A \cos\alpha + c_W \sin\alpha)$ resultiert

$$M = c_M \frac{\varrho}{2} v^2 A\, l \,. \tag{2.264}$$

c_M wird *Momentenbeiwert* genannt. Durch die Messung des Drehmomentes M im Windkanal kann der Momentenbeiwert c_M und damit die Lage des Druckpunktes eines Tragflügelprofils bestimmt werden.

Für einen Tragflügel soll die Auftriebskraft F_A möglichst groß und die Widerstandskraft F_W möglichst gering werden. Ein Maß dafür ist die *Gleitzahl*

$$\varepsilon = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} \,. \tag{2.265}$$

Die Werte für den Widerstandsbeiwert c_W und den Auftriebsbeiwert c_A sind vom Anstellwinkel α (Abb. 2.133a) abhängig. Diese Zusammenhänge werden empirisch im Windkanal ermittelt und in ein *Polardiagramm* eingezeichnet. Abbildung 2.134 zeigt das Polardiagramm der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte eines Hubschrauberrotorblatts.

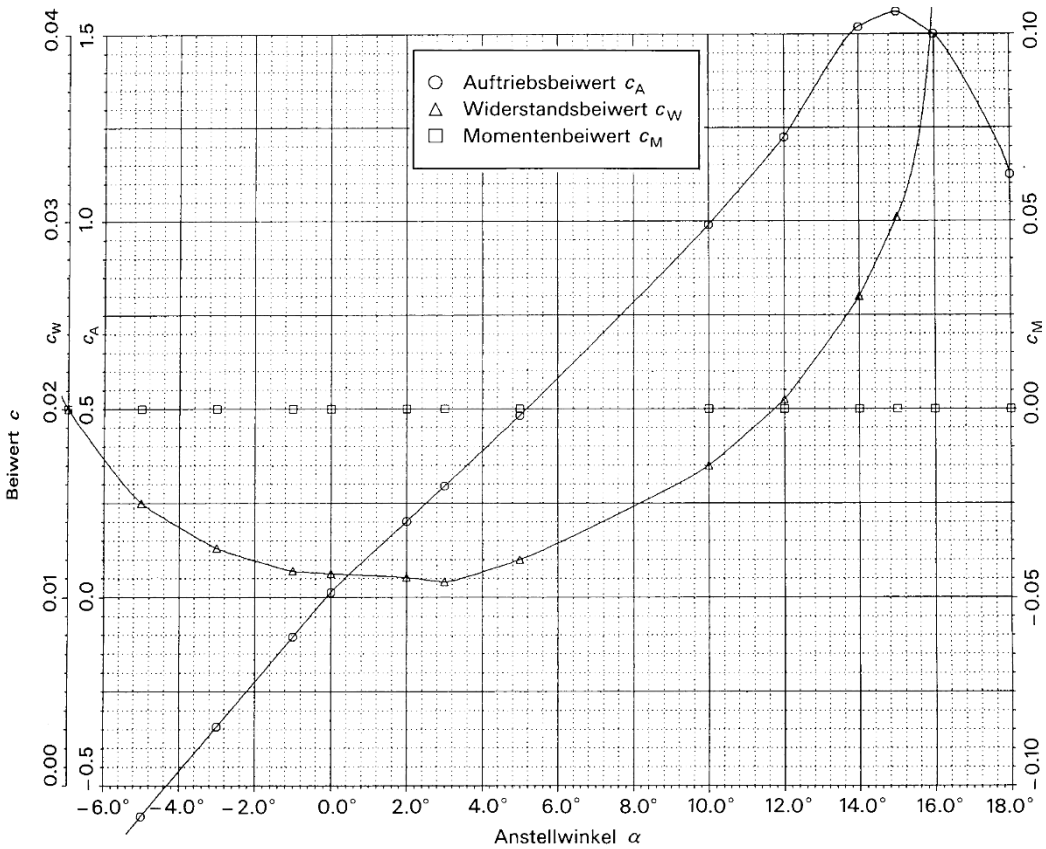


Abb. 2.134 Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für das Rotorblatt eines Hubschraubers. Werkbild: MBB

Bernoulli-Gleichung für kompressible Medien

Gase zeigen bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten ($v > 0{,}3c$; c Schallgeschwindigkeit) nicht vernachlässigbare Dichteänderungen. Die *Bernoulli-Gleichung* (2.204) gilt dann nur noch für sehr kleine Strömungsbereiche, in denen die Höhendifferenzen vernachlässigbar klein sind und die Dichte näherungsweise konstant ist. Eine differentielle Druckänderung $\mathrm{d}p$ bewirkt dann eine differentielle Änderung der Strömungsgeschwindigkeit $v\,\mathrm{d}v$:

$$v\,\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} = 0 \qquad \text{oder integriert}$$

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} = \text{konstant} \,. \tag{2.266}$$

Diese Gleichung ist die *verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung* für kompressible Medien.

Für die adiabatischen Strömungen idealer Gase ergibt sich nach (3.66) (Abschn. 3.3.4.4) $p/\varrho^{\varkappa} = \text{konstant}$. Wird daraus die Dichte ϱ in (2.266) eingesetzt und diese integriert, ergibt sich

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\varrho} = \text{konstant} \,. \tag{2.267}$$

Bei idealen Gasen ist der *Isentropenexponent* $\varkappa = c_\mathrm{p}/(c_\mathrm{p} - R_\mathrm{i})$ (Abschn. 3.3.3, (3.60)). Mit Hilfe der Zustandsgleichung idealer Gase (Abschn. 3.1.5, (3.20)) erhält man für die adiabatischen Gasströmungen den folgenden Zusammenhang zwischen der Strömungsgeschwindigkeit v und der absoluten Gastemperatur T:

$$\frac{v^2}{2} + c_\mathrm{p} T = \text{konstant} \,. \tag{2.268}$$

Bewirkt eine Querschnittsänderung $\mathrm{d}A$ eine Geschwindigkeitsänderung $\mathrm{d}v$, so spielt bei kompressiblen Strömungen das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit v zur Schallgeschwindigkeit c des Mediums eine wichtige Rolle. Dieses dimensionslose Verhältnis wird als *Machzahl* Ma bezeichnet (E. Mach, 1838 bis 1916):

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c} \,. \tag{2.269}$$

Für eine stationäre Strömung gilt $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \varrho A v = \text{konstant}$ oder in differentieller Form

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}v}{v} = 0 \,. \tag{2.270}$$

Mit der differentiellen Schreibweise der *verallgemeinerten Bernoulli-Gleichung* (2.266) $v\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}p/\varrho = 0$ und $c^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\varrho$ ergibt sich aus (2.270)

$$\frac{-v\,\mathrm{d}v}{c^2} + \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}v}{v} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{v}\right)\mathrm{d}v \,.$$

Damit gilt für die Querschnittsabhängigkeit von Über- und Unterschallströmungen ($v/c = \mathrm{Ma}$)

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{\mathrm{d}v}{v}(\mathrm{Ma}^2 - 1) \,. \tag{2.271}$$

Tabelle 2.12 gibt das Geschwindigkeitsverhalten bei Querschnittsänderungen für den *Unterschall-* bzw. *Überschallbereich* an. Es ist ersichtlich, dass sich Unterschallströmungen entgegengesetzt zu den Überschallströmungen verhalten. Im Unterschallbereich erhöht

Tabelle 2.12 Unterschall- und Überschallströmung bei Querschnittsänderung (v Strömungsgeschwindigkeit, c Schallgeschwindigkeit)

	Querschnittsverengung $dA < 0$	Querschnittserweiterung $dA > 0$	Querschnittsminimum $dA = 0$
Unterschall Ma < 1	$dv > 0$	$dv < 0$	entweder $dv = 0$ oder $v = c$
Überschall Ma > 1	$dv < 0$	$dv > 0$	

sich bei Querschnittsverengung die Geschwindigkeit, während sie sich im Überschallbereich vermindert. In Höhen oberhalb $h = 180$ km ist die Atmosphäre allerdings so dünn, dass keine Schallausbreitung mehr stattfinden kann. Die Machzahl ist dann bedeutungslos. – Wichtig ist ebenfalls das unterschiedliche Verhalten bei einer Querschnittserweiterung. Bei einer *Lavaldüse* ist dies beispielsweise der Fall. Deshalb ist am Einlauf $v < c$, sodass am engsten Querschnitt $v = c$ wird. Bei einem Diffusor hingegen wird $v > c$, wenn p genügend abgesenkt wird.

2.12.2.4 Anwendungen

Pumpen

Pumpen sind Arbeitsmaschinen zur Förderung von flüssigen Medien von einem niedrigen auf ein höheres Energieniveau. Die verschiedenen Eigenschaften der Fördermedien (z. B. geringe oder große Viskosität, chemische Aggressivität), die Forderungen nach bestimmten Förderströmen und die Überwindung genau definierter Förderhöhen sind der Grund für die Vielzahl von Pumpentypen. In Abb. 2.135 sind sie vergleichend gegenübergestellt. In der Hydrodynamik sind die *Kreiselpumpen* und die *Strahlpumpen* von Bedeutung. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf die in der Praxis häufig eingesetzte Kreiselpumpe und auf die Begriffe, Zeichen und Einheiten nach DIN EN 24 260, die im Pumpenbau üblich sind.

Die Funktion $H_A = f(Q)$ wird *Anlagekennlinie* (Rohrleitungskennlinie) genannt. Sie hat den schematischen Verlauf gemäß Abb. 2.136. Bei der *Pumpenkennlinie* $H = f(Q)$ dagegen nimmt bei Strömungspumpen mit zunehmendem Förderstrom Q die Förderhöhe H ab (Abb. 2.136).

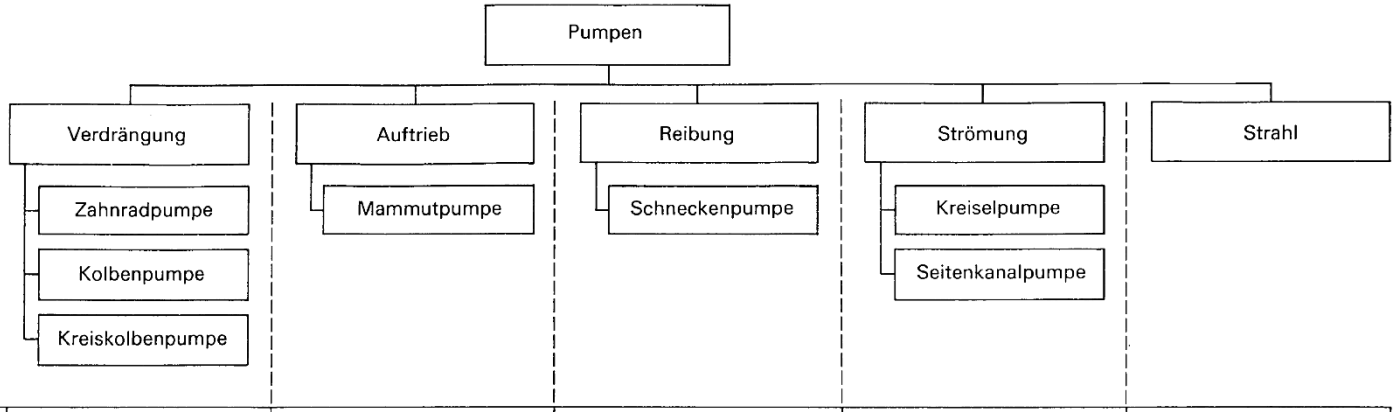
Abbildung 2.137 zeigt das Schema einer Pumpstation. Die Bernoulli-Gleichung (2.204) für diese Anlage lautet unter der Berücksichtigung der Reibungsverluste durch die Verlusthöhe h_V für den Eintritt e bzw. den Austritt a

$$h_e + H_A + \frac{P_e}{\varrho g} + \frac{v_e^2}{2g} = h_a + h + \frac{P_a}{\varrho g} + \frac{v_a^2}{2g} .$$

Die Geschwindigkeiten v_e und v_a sind in den Punkten e und a zu messen. Daraus errechnet sich die Förderhöhe H_A zu

$$H_A = \underbrace{(h_a - h_e) + \frac{p_a - p_e}{\varrho g}}_{\text{statischer Anteil}} + \underbrace{\frac{v_a^2 - v_e^2}{2g} + h_V}_{\text{dynamischer Anteil}} \qquad (2.272)$$

Gleichung (2.272) enthält einen *statischen Anteil*, der vom Förderstrom Q unabhängig ist, und einen *dynamischen Anteil*, der eine Funktion des Förderstromes Q ist. (Hierbei ist die Verlusthöhe h_V durch den Förderstrom Q bedingt.) Wegen $v = Q/A$ resultiert



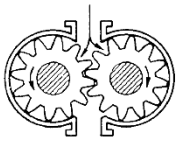
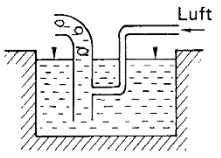
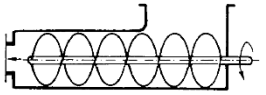
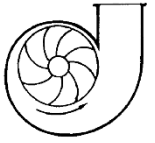
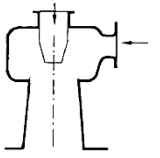
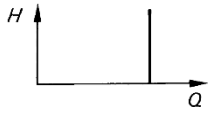
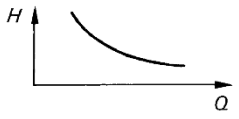
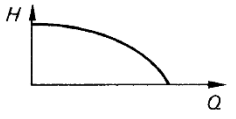
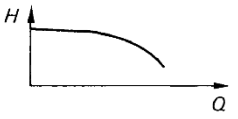
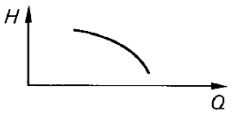
Schema					
Pumpen-kennlinie					
	Förderhöhe unabhängig vom Förderstrom	Förderhöhe H abhängig vom Förderstrom Q			
Förderung	pulsierend	gleichförmig			
Wirkungs-grad η	$0{,}92 < \eta < 0{,}95$	$\eta < 0{,}5$	$\eta < 0{,}7$	$\eta < 0{,}92$	$\eta < 0{,}7$
Einsatz-gebiete	sehr große Drücke, Dosierpumpen	keine beweglichen Teile, schonende Förderung	zähe, verschmutzte Medien, schonende Förderung	Universalpumpen	Heben, Absaugen und Mischen von Flüssigkeiten

Abb. 2.135 Bauformen von Pumpen

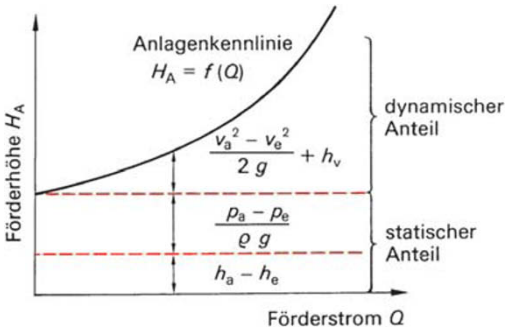


Abb. 2.136 Förderstrom Q in Abhängigkeit von der Förderhöhe H_A

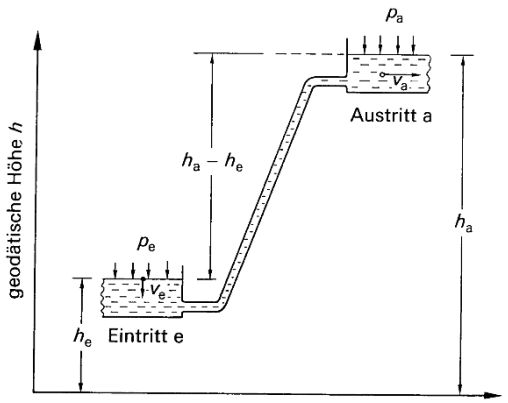


Abb. 2.137 Schema einer Pumpstation

$$H_A = (h_a - h_e) + \frac{p_a - p_e}{\varrho g} + \frac{\left(\frac{Q^2}{A_a^2}\right) - \left(\frac{Q^2}{A_e^2}\right)}{2g} + h_V \,. \quad (2.273)$$

Mit zunehmendem Förderstrom Q nimmt die erforderliche Förderhöhe H_A der Pumpe zu.

Beispiel

2.12-9 Die Förderhöhe H_A und der Leistungsbedarf P einer Kesselspeisepumpe (Höhenunterschied $h_a - h_e = 5\,\text{m}$; $\varrho = 907\,\text{kg/m}^3$) sollen errechnet werden (analog DIN EN 24 260). Die Anlage weist folgende Betriebsdaten auf:

Eintrittsdruck	$p_e = 6 \cdot 10^5$ Pa,
Austrittsdruck	$p_a = 11 \cdot 10^5$ Pa,
Förderstrom	$Q = 0{,}06\,\text{m}^3/\text{s}$,
Verlusthöhe	$h_V = 7$ m,
Eintrittsquerschnitt	$A_e = 1{,}5\,\text{m}^2$,
Austrittsquerschnitt	$A_a = 0{,}8\,\text{m}^2$,
Wirkungsgrad	$\eta = 0{,}85$.

Lösung

a) Nach (2.273) ergibt sich für die Förderhöhe

$$H_A = (h_a - h_e) + \frac{p_a - p_e}{\varrho g} + \frac{\left(\frac{Q^2}{A_a^2} - \frac{Q^2}{A_e^2}\right)}{2g} + h_V$$

$$= \left[5 + \frac{(11-6)\cdot 10^5}{907 \cdot 9{,}81} + \frac{\left(\frac{0{,}06^2}{0{,}8^2} - \frac{0{,}06^2}{1{,}5^2}\right)}{2 \cdot 9{,}81} + 7\right] \text{m}$$

$$= 68{,}19\,\text{m}\,.$$

b) Der Leistungsbedarf ist $P = \frac{\varrho g Q H}{\eta} = 42{,}8\,\text{kW}$.

Wasserturbinen

Wasserturbinen sind *Wasserkraftmaschinen*, in denen hydraulische Energie (Lageenergie und Strömungsenergie) in mechanische Arbeit umgewandelt wird. Je nach Anteil der Lageenergie (bestimmt durch die Fallhöhe H) im Verhältnis zur Strömungsenergie unterscheidet man drei Ausführungen, die nach ihren Konstrukteuren *Pelton-Turbinen* (L. A. Pelton, 1829 bis 1908), *Francis-Turbinen* (J. B. Francis, 1815 bis 1892) und *Kaplan-Turbinen* (V. Kaplan, 1876 bis 1934) genannt werden; außerdem gibt es noch *S-Turbinen* (S-förmiger Strömungskanal) und *Rohrturbinen* (Abb. 2.139) Nach der Fallhöhe werden die Wasserturbinen eingeteilt in

- *Hochdruck-Turbinen*: Bei ihnen ist die Fallhöhe H groß ($H > 200$ m) und der Volumenstrom Q klein. Beispiele dafür sind Pelton- und Francis-Turbinen;
- *Mitteldruck-Turbinen*: Bei ihnen ist die Fallhöhe H mittelgroß und der Volumenstrom Q ebenfalls. Beispiele dafür sind Francis- und Kaplan-Turbinen;

– *Niederdruck-Turbinen*: Bei ihnen ist die Fallhöhe H klein ($H < 50$ m) und der Volumenstrom Q groß. Beispiele hierfür sind Kaplan-, S- und Rohr-Turbinen.

Um diese verschiedenen Turbinentypen sowie unterschiedliche Baugrößen desselben Typs untereinander vergleichen zu können, dient die *spezifische Drehzahl* n_q. Sie ergibt sich aufgrund von Ähnlichkeitsgesetzen aus analogen Überlegungen wie die *Reynolds-* bzw. die *Froundezahl* (Abschn. 2.12.2.3). Sie ist die Drehzahl, die sich ergibt, wenn die Turbinen bei einer Fallhöhe $H = 1$ m einen Volumenstrom $Q = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ verarbeiten. Der Zusammenhang zwischen Fallhöhe und Volumenstrom ergibt sich aus

$$n_q = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{0,75}} \qquad (2.274)$$

mit n als der Drehzahl der Anlage.

Die Anwendungsbereiche von Wasserturbinen in Abhängigkeit von Fallhöhe H und spezifischer Drehzahl n_q sind in Abb. 2.138 dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass *Pelton-Turbinen* für hohe Fallhöhen bei niedrigen spezifischen Drehzahlen und *Kaplan-* bzw. *S-* oder *Rohrturbinen* bei niedrigen Fallhöhen und hohen spezifischen Drehzahlen zum Einsatz kommen. In den Überschneidungsbereichen muss man die Vor- und Nachteile der Turbinenart abwägen. Häufig sind die örtlichen Gegebenheiten ausschlaggebend. In Abb. 2.139 sind die Turbinentypen vergleichend gegenübergestellt. Es sind außerdem Einbaubeispiele und Laufräder der verschiedenen Turbinenarten sowie konstruktive Merkmale und Einsatzbereiche aufgeführt.

In Abschn. 2.12.2.2 ist darauf hingewiesen, dass nach der *Bernoulli-Gleichung* (2.204) der statische Druck p_{stat} mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit v abnimmt. Sinkt der

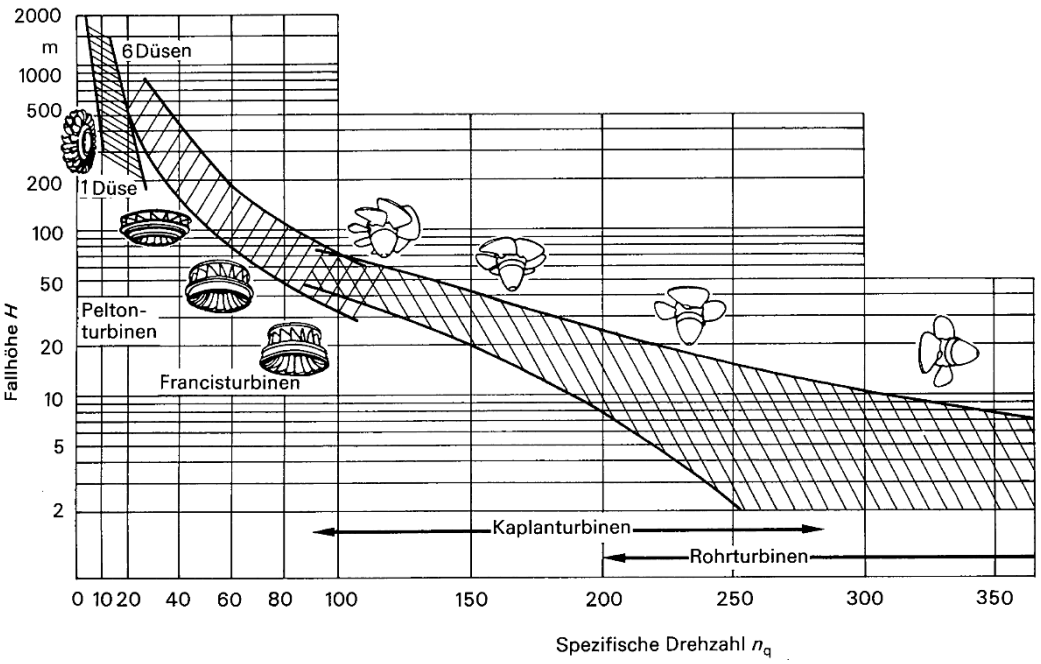


Abb. 2.138 Anwendungsbereiche der verschiedenen Arten von Wasserturbinen. Werkbild: Voith

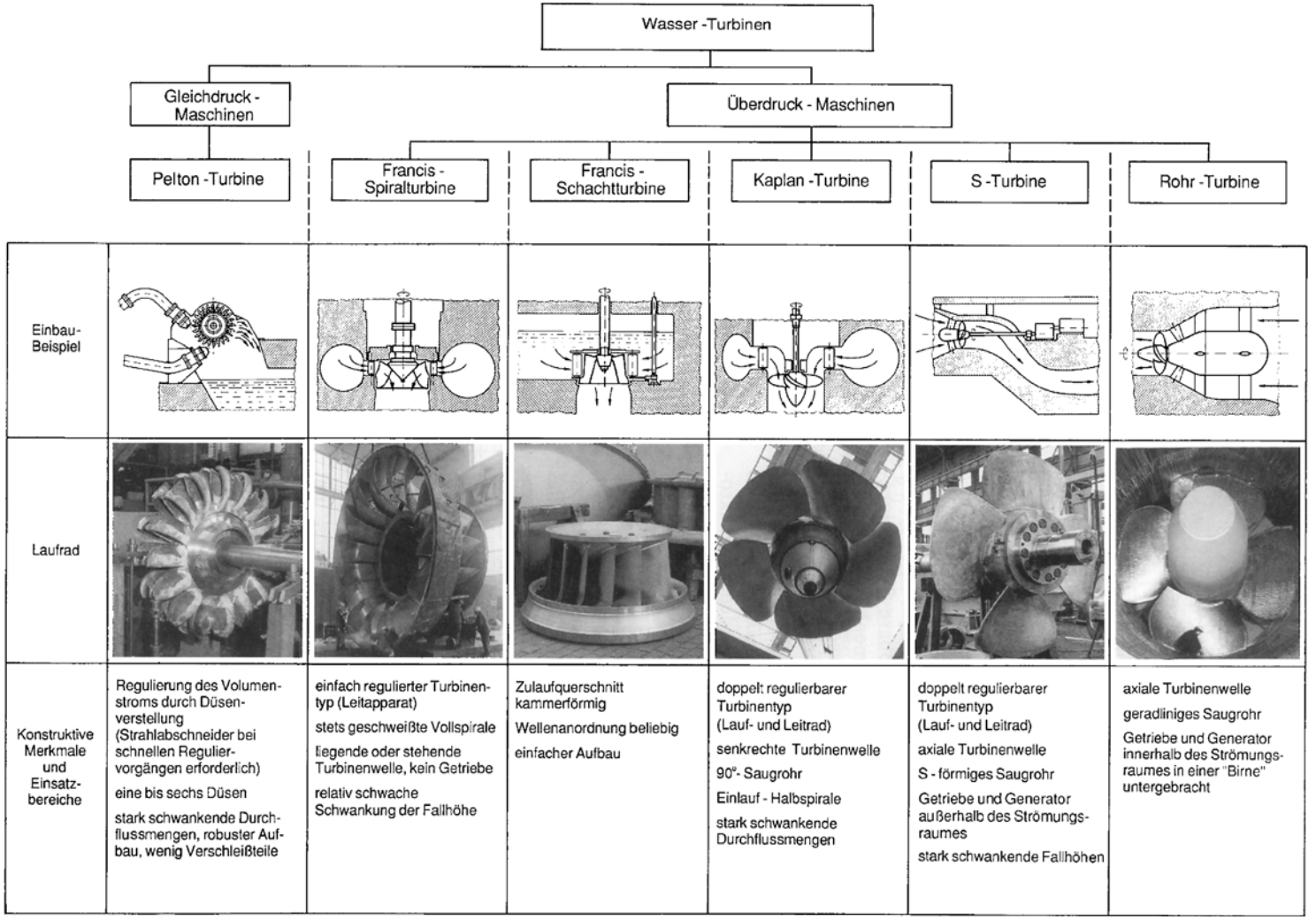


Abb. 2.139 Wasserturbinentypen. Werkfotos: Voith

statische Druck unter den Dampfdruck p_D der Flüssigkeit, dann bilden sich Dampfblasen oder vorhandene Blasen vergrößern sich. Steigt der Druck wieder an, dann kondensiert der Dampf in den Hohlräumen, und das Strömungsmedium schlägt mit hoher Geschwindigkeit auf das Turbinenmaterial. Dieser Vorgang wird *Kavitation* (Hohlraumbildung) genannt. Dabei können Druckspitzen bis 10^{10} Pa bei Frequenzen um 2 kHz auftreten. Diese ständigen Beanspruchungen führen zur Zerstörung der Materialoberfläche. Die kritische Geschwindigkeit, die oberhalb der Kavitation eintritt, lässt sich aus der Bernoulli-Gleichung (2.204) zu

$$v_{krit} = \sqrt{\frac{2(p_{ges} - p_D)}{\varrho}} \tag{2.275}$$

abschätzen. Sie ist für Wasser bei $p_{ges} = 1$ bar und 20 °C ($p_D = 2\,340$ Pa) $v_{krit} = 14$ m/s. Dies bedeutet, dass mit der Kavitation bei vielen Wassermaschinen gerechnet werden muss. Bei der Konstruktion von Wasserturbinen sollte daher darauf geachtet werden, dass

- möglichst hohe äußere Drücke auftreten,
- dünne Schaufelprofile verwendet werden und
- nur kleine Anstellwinkel möglich sind.

Zur Beurteilung der Gefahr auftretender Kavitation kann die *Kavitationszahl* σ nach D. Thoma herangezogen werden:

$$\sigma = \frac{p_0 - p_D}{\frac{1}{2}\varrho v_0^2} \tag{2.276}$$

Dabei ist p_0 der Referenzdruck und v_0 die Referenzgeschwindigkeit. Bestimmt man experimentell die kritische Kavitationszahl σ_{kr}, bei der Kavitation einsetzt, dann ist für $\sigma > \sigma_{kr}$ die Strömung frei von Kavitation.

Zur Übung

Ü 2.12-10 Ein Öltankeinlauf liegt 6 m höher als die Pumpe (Förderstrom $\dot{V} = 0{,}8$ l/s). Das Zuleitungsrohr hat eine Länge von $l = 7$ m und einen Durchmesser $d = 1{,}7$ cm. Wie groß ist der erforderliche Pumpendruck ($\varrho_{Öl} = 0{,}85$ kg/l; $\eta_{Öl} = 0{,}2$ N s/m^2)?

Ü 2.12-11 Zur Messung der dynamischen Viskosität η eines Öls ($\varrho_{Öl} = 0{,}85$ kg/l) wird ein Kugelfallviskosimeter benutzt. Die Stahlkugel ($\varrho_K = 7{,}85$ kg/dm^3) hat einen Durchmesser $d = 2$ mm und fällt in $t = 2$ s $s = 10$ cm weit. Wie groß ist η?

Ü 2.12-12 Ein Segelflugzeug der Masse $m = 200$ kg und der Projektionsfläche $A = 18$ m^2 fliegt mit einer Geschwindigkeit $v = 60$ km/h unter einem Gleitwinkel $\varepsilon = 8°$. Wie groß sind Auftriebs- und Widerstandskraft? Zu bestimmen sind ferner der Widerstandsbeiwert c_W und der Auftriebsbeiwert c_A ($\varrho_{Luft} = 1{,}25$ kg/m^3).

Ü 2.12-13 Ein Wasserbehälter hat am Boden eine waagerechte Ausflussröhre mit dem Durchmesser $d = 1{,}2$ mm, die $l = 50$ cm lang ist. Aus welcher Höhe h über der Ausflussröhre sinkt der Wasserspiegel ab, wenn turbulente Strömung in laminare Strömung umschlägt ($\eta_W = 10^{-3}$ N s/m^2)?

Kapitel 3
Thermodynamik

3

3 Thermodynamik

3.1 Grundlagen ... 175
3.1.1 Einführung ... 175
3.1.2 Thermodynamische Grundbegriffe ... 177
3.1.3 Temperatur ... 179
3.1.4 Thermische Ausdehnung ... 181
3.1.5 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase ... 185
3.2 Kinetische Gastheorie ... 188
3.2.1 Gasdruck ... 188
3.2.2 Thermische Energie und Temperatur ... 190
3.2.3 Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle ... 192
3.3 Hauptsätze der Thermodynamik ... 194
3.3.1 Wärme ... 194
3.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik ... 197
3.3.3 Berechnung der Wärmekapazitäten ... 201
3.3.4 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase ... 204
3.3.5 Kreisprozesse ... 212
3.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik ... 222
3.3.7 Thermodynamische Potentiale ... 229
3.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik ... 231
3.4 Zustandsänderungen realer Gase ... 232
3.4.1 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung ... 233
3.4.2 Gasverflüssigung (Joule-Thomson-Effekt) ... 236
3.4.3 Phasenumwandlungen ... 237
3.4.4 Dämpfe und Luftfeuchtigkeit ... 245
3.5 Wärmeübertragung ... 248
3.5.1 Wärmeleitung ... 248
3.5.2 Konvektion ... 254
3.5.3 Wärmestrahlung ... 258
3.5.4 Wärmedurchgang ... 264

3 Thermodynamik

3.1 Grundlagen

3.1.1 Einführung

Die *Thermodynamik* beschreibt die Zustände und deren Änderung infolge der Wechselwirkung mit der Umgebung von kompliziert zusammengesetzten makroskopischen Systemen durch eine geringe Anzahl *makroskopischer Variablen*, wie z. B. Druck oder Temperatur, sowie durch *thermodynamische Potentiale*.
Das System kann *makroskopisch* betrachtet werden. Hierbei wird das gesamte System durch makroskopisch messbare Systemeigenschaften und deren Zusammenhänge beschrieben. Dies wird als *phänomenologische Thermodynamik* bezeichnet, die der älteste Zweig der Thermodynamik ist.
Das System kann auch *mikroskopisch* betrachtet werden. Hierbei werden die makroskopischen Systemeigenschaften auf die Wechselwirkungen der Systembestandteile (Atome, Moleküle) zurückgeführt. Die Beschreibung erfolgt mit den *statistischen Methoden* der *klassischen Mechanik* bzw. der *Quantenmechanik*. Beispielsweise erklärt die kinetische Gastheorie das Zustandekommen des Gasdrucks und ermöglicht ein tieferes Verständnis des Temperaturbegriffs. Oder es können mit Hilfe der Statistik *thermodynamische Potentiale* hergeleitet werden, aus denen sich alle Zustandsgrößen und Materialeigenschaften (z. B. die spezifische Wärmekapazität) ergeben. In Abb. 3.1 sind diese Betrachtungsweisen gegenübergestellt.
Ein thermodynamisches System kann mit seiner Umgebung in Wechselwirkung stehen. Findet kein Austausch von Energie und Masse über die Systemgrenzen statt, so ist das System *abgeschlossen*. Wird nur die Arbeit W (z. B. mechanische, elektrische, magnetische Arbeit) ausgetauscht, liegt ein *adiabates* System vor. Bei *geschlossenen* Systemen findet ein Austausch von Arbeit W und Wärme Q und bei *offenen* Systemen noch zusätzlich ein Masseaustausch statt.
Die wichtigsten Erkenntnisse in der Thermodynamik sind in *vier Hauptsätzen* formuliert. Der *erste Hauptsatz* ist der *Energieerhaltungssatz*. Er besagt, dass die Änderung der inneren Energie ΔU durch Wärmezufuhr Q und (oder) Arbeitsverrichtung W erfolgen kann. Der *zweite Hauptsatz* sagt mit Hilfe des *Entropiebegriffs* etwas über die Richtung von Zustandsänderungen aus. Bei *reversiblen Prozessen* ist die Entropieänderung null; bei *irreversiblen Prozessen* ist sie positiv, d. h., die Wärme ist nicht vollständig in andere Energieformen umwandelbar. Von der Thermodynamik irreversibler Prozesse sind die *Transport- und Ausgleichsvorgänge* von besonderer praktischer Bedeutung. Die *Entropie* S lässt sich auch mikroskopisch als Wahrscheinlichkeitsfunktion deuten (Logarithmus der Zustands-

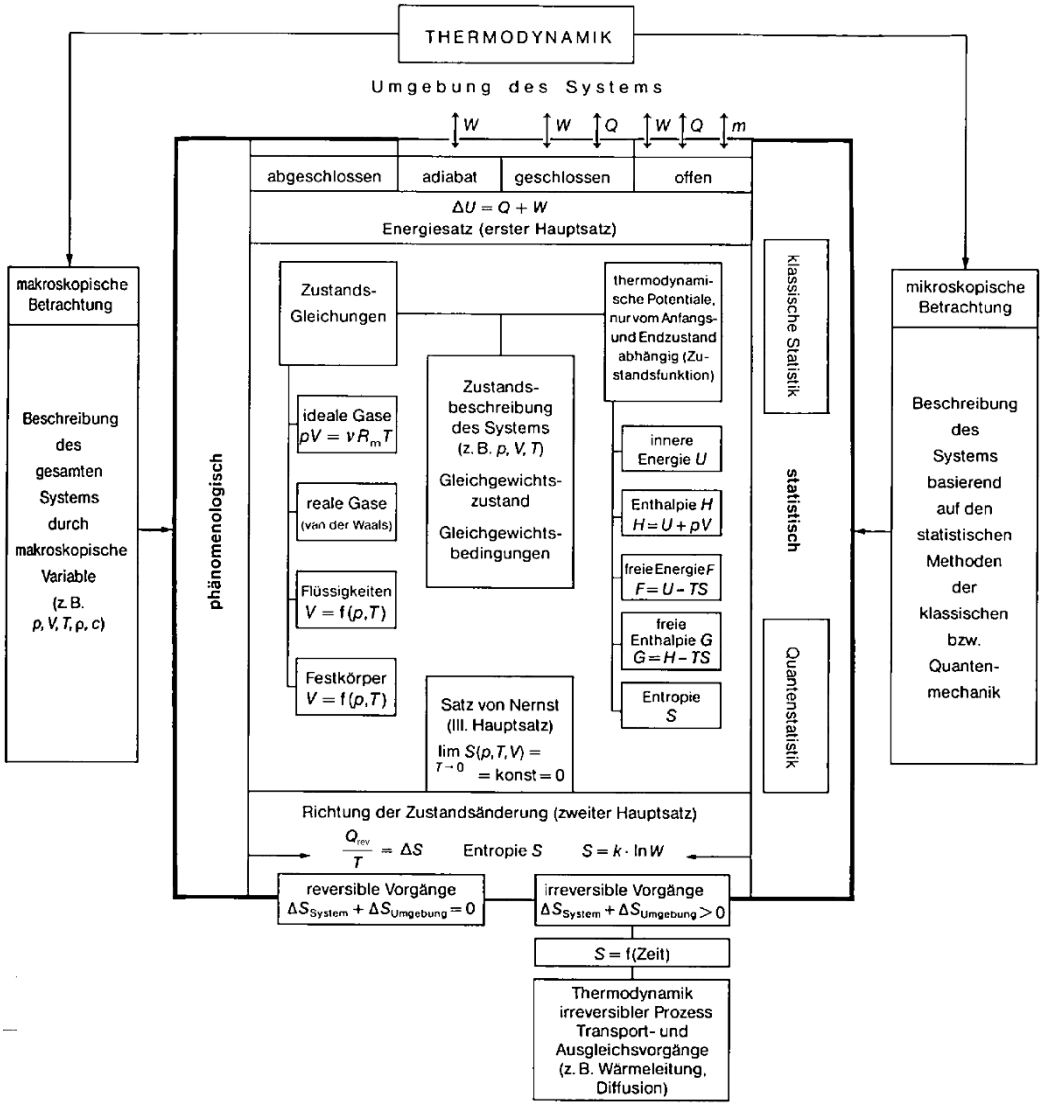


Abb. 3.1 Strukturbild der Thermodynamik

wahrscheinlichkeit ln W multipliziert mit der Boltzmann-Konstanten k). Zustandsänderungen werden in Richtung maximaler Wahrscheinlichkeit (maximale Entropie) ablaufen. Der *dritte Hauptsatz* (Satz von *Nernst*) zeigt, dass bei Annäherung der Temperatur an den absoluten Nullpunkt ($T \rightarrow 0$) die Entropie konstant wird. Diese Konstante wird gleich null gesetzt. Aus dem dritten Hauptsatz folgt auch, dass der absolute Nullpunkt ($T = 0$) nicht erreicht werden kann.

Ein thermodynamisches System – sei es gasförmig (ideale oder reale Gase), flüssig oder fest – kann durch *Zustandsgleichungen* und *Zustandsfunktionen*, die nur vom Anfangs- und Endzustand abhängen, beschrieben werden. Zu den Zustandsfunktionen (thermodynamischen Potentialen) gehören die innere

Energie U, die Enthalpie H, die freie Energie F, die freie Enthalpie G und die Entropie S.
Mit den Zustandsgleichungen und Zustandsfunktionen ist die Beschreibung von *Gleichgewichtszuständen* und *Gleichgewichtsbedingungen* möglich.

3.1.2 Thermodynamische Grundbegriffe

Systeme

Ein räumlich abgrenzbarer Bereich, der herausgelöst von seiner Umgebung betrachtet werden soll, wird als *System* bezeichnet. Nach Art der Systemgrenzen werden verschiedenartige Systeme unterschieden, wie aus Tabelle 3.1 hervorgeht.

Zustand, Zustandsgrößen, Prozessgrößen

In der Mechanik wird die Lage eines Punktes im Raum durch drei Koordinaten festgelegt; in der Thermodynamik benutzt man *Zustandsgrößen*, um den Zustand eines Systems zu beschreiben. Historisch bedingt wird zwischen den direkt messbaren *thermischen* Zustandsgrößen

- Druck p,
- Volumen V,
- Temperatur T

und den davon abgeleiteten *kalorischen* Zustandsgrößen, wie z. B.

- innere Energie U,
- Enthalpie H und
- Entropie S

unterschieden.
Bleiben die Zustandsgrößen zeitlich konstant, dann befindet sich das System in einem *Gleichgewichtszustand*. Der Zustand eines Systems kann auf verschiedene Weise verändert werden (z. B. durch Wärmezufuhr von außen). Hat sich, ausgehend von dem Gleichgewichtszustand 1, ein neuer Gleichgewichtszustand 2 eingestellt, dann haben alle Zustandsgrößen wieder wohldefinierte Werte angenommen.

Die Änderung ΔZ einer Zustandsgröße Z hängt nicht von der Art der Prozessführung ab, sondern nur vom Anfangs- und Endzustand. Es gilt

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 \,. \tag{3.1}$$

Eine Zustandsgröße ist also eine eindeutige Funktion der unabhängigen Variablen. Beispielsweise lässt sich die *innere Energie* U eines Systems (Abschn. 3.3.2) als Funktion der Variablen T und V schreiben: $U = U(T, V)$. Daher ist das Differenzial

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

das totale Differenzial einer Funktion der Zustandsvariablen.
Im Gegensatz zu den wegunabhängigen Zustandsgrößen sind *Wärme* und *mechanische Arbeit* wegabhängige *Prozessgrößen*. Die mit dem System bei einer Zustandsänderung ausgetauschten Energiebeträge sind von dem Verlauf des Prozesses abhängig.
Infolgedessen ist eine differenziell kleine Größe einer solchen Prozessgröße nicht das totale Differenzial einer Funktion von Zustandsvariablen. Derartige kleine Größen werden im Folgenden nicht mit einem d versehen, sondern mit einem δ. So ist also beispielsweise eine differenziell kleine Wärme δQ oder ein differenziell kleiner Arbeitsbetrag δW.
Für jeden Gleichgewichtszustand sind die Zustandsgrößen durch eine *Zustandsgleichung* miteinander verknüpft. So gilt z. B. für ideale Gase ein einfacher Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur (Abschn. 3.1.5). Bei realen Gasen ist der Zusammenhang komplizierter und muss em-

Tabelle 3.1 Thermodynamische Systeme

Bezeichnung des Systems	Kennzeichen der Systemgrenzen	Beispiele
offen	durchlässig für Materie und Energie	Wärmeübertrager, Gasturbine
geschlossen	durchlässig für Energie, undurchlässig für Materie	geschlossener Kühlschrank, Warmwasserheizung, Heißluftmotor
abgeschlossen	undurchlässig für Energie und Materie	verschlossenes Thermosgefäß
adiabat	undurchlässig für Materie und Wärme, durchlässig für mechanische Arbeit	rasche Kompression in einem Gasmotor

pirisch und mit Hilfe von Modellrechnungen ermittelt werden (Abschn. 3.4).

Spezifische und molare Größen

Viele thermodynamische Größen sind *extensiv*, d. h., sie hängen von der Substanzmenge (Masse m, Stoffmenge ν) des Systems ab (z. B. innere Energie U, Enthalpie H). *Intensive* Größen sind davon unabhängig (z. B. Druck p, Temperatur T). Wird eine extensive Größe durch die Substanzmenge dividiert, ergibt sich eine intensive Größe.

Eine *spezifische* Größe x ergibt sich nach DIN 5490 aus einer gemessenen extensiven Größe X, indem durch die Masse m des Systems dividiert wird:

$$x = \frac{X}{m} \,. \tag{3.2}$$

In der Maßeinheit einer spezifischen Größe steht immer $x = \ldots\ \mathrm{kg}^{-1}$. Spezifische Größen werden nach DIN 1345 mit kleinen Formelbuchstaben geschrieben.

Der Quotient aus einer gemessenen Größe X und der Stoffmenge ν ist die molare Größe X_m, die durch den Index m gekennzeichnet wird:

$$X_\mathrm{m} = \frac{X}{\nu} \,. \tag{3.3}$$

Die Maßeinheit einer molaren Größe enthält stets $X_\mathrm{m} = \ldots\ \mathrm{mol}^{-1}$.

Jede spezifische Größe kann leicht in die entsprechende molare Größe umgerechnet werden. Aus (3.2) und (3.3) folgt sofort $X = xm = X_\mathrm{m}\nu$, oder

$$X_\mathrm{m} = x\frac{m}{\nu} = xM \,. \tag{3.4}$$

Darin ist M die *Molmasse* der betreffenden Substanz (Einheit kg/mol).

Die Molmasse eines chemischen Elements bestimmt man am einfachsten aus der im Periodensystem angegebenen *relativen Atommasse* A_r bzw. der *relativen Molekülmasse* M_r bei einem Molekül. Ist m_M die Masse eines Moleküls, dann gilt

$$m_\mathrm{M} = M_\mathrm{r} u \,.$$

$u = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg ist die atomare Masseneinheit, nämlich ein Zwölftel der Masse eines ^{12}C-Atoms. Die Zahl der Teilchen der Stoffmenge $\nu = 1$ mol ist gegeben durch die *Avogadro'sche Konstante* $N_\mathrm{A} = 6{,}0221 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$. Damit wird die Molmasse

$$M = m_\mathrm{M} N_\mathrm{A} = M_\mathrm{r} u N_\mathrm{A} = M_\mathrm{r}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \,.$$

Hat also beispielsweise Stickstoff (N_2) die relative Molekülmasse $M_\mathrm{r} = 28$, dann ist seine Molmasse $M = 28$ g/mol.

Beispiel

3.1-1 Um $m = 2\,\text{kg}$ Wasser zu verdampfen, ist die Verdampfungswärme $Q_\text{d} = 4{,}512\,\text{MJ}$ erforderlich. Wie groß sind die spezifische und die molare Verdampfungswärme von Wasser?

Lösung

Für die spezifische Verdampfungswärme erhält man $q_\text{d} = Q_\text{d}/m = 2{,}256\,\text{MJ/kg}$. Die Molmasse von Wasser ist $M = 18\,\text{g/mol}$. Somit beträgt die molare Verdampfungswärme

$$Q_\text{md} = 2{,}256\,\text{MJ/kg} \cdot 18\,\text{g/mol} = 40{,}6\,\text{kJ/mol}\,.$$

3.1.3 Temperatur

Die Temperatur ist der menschlichen Empfindung direkt zugänglich und wird mit Begriffen wie „warm“ und „kalt“ umschrieben. Körper, die sich auf verschiedener Temperatur befinden, können durch Befühlen unterschieden und entsprechend ihrer Temperatur klassifiziert werden. Bringt man zwei Körper verschiedener Temperatur in Kontakt, so stellt man fest, dass der warme Körper kälter und der kalte wärmer wird. Es findet ein *Temperaturausgleich* statt, der dann beendet ist, wenn das System einen Gleichgewichtszustand erreicht hat. Dieser Sachverhalt wird durch den *nullten Hauptsatz der Thermodynamik* ausgedrückt:

> Im thermodynamischen Gleichgewicht haben alle Bestandteile eines Systems dieselbe Temperatur.

Der vorgenannte subjektive Temperaturbegriff muss natürlich durch eine Temperaturdefinition mit entsprechenden Messvorschriften ersetzt werden. Die exakte Definition der sog. *thermodynamischen* Temperatur geschieht über den Wirkungsgrad einer idealen Wärmekraftmaschine und wird in Abschn. 3.3.5 behandelt.

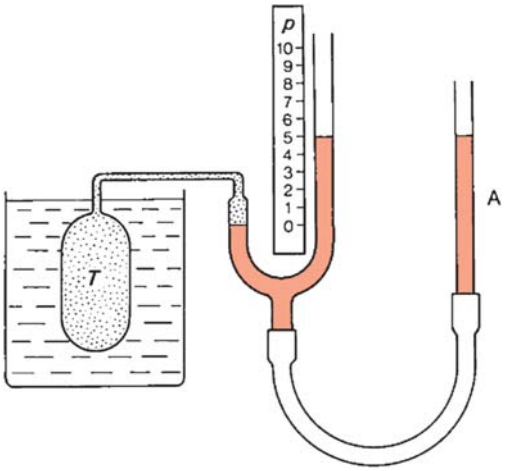


Abb. 3.2 Prinzip eines Gasthermometers mit konstantem Gasvolumen. Durch Heben oder Senken des Ausgleichsgefäßes A wird der Quecksilberspiegel im linken Schenkel des U-Rohrs auf der Nullmarke gehalten. p Druck T absolute Temperatur

Bereits im Jahr 1704 stellte G. Amontons (1663 bis 1705) fest, dass der Druck eines Gases, dessen Volumen konstant gehalten wird, von der Temperatur abhängt. Er schlug vor, die Temperatur proportional zum Druck des Gases zu setzen ($T \sim p$) und damit die Temperaturmessung auf eine Druckmessung zurückzuführen. Man erreicht dies mit Hilfe des in Abb. 3.2 dargestellten *Gasthermometers*. Es lässt sich zeigen, dass die Temperatur des Gasthermometers für *ideale* Gase (Abschn. 3.1.4 und 3.1.5) identisch ist mit der oben erwähnten thermodynamischen Temperatur. Die Abweichungen, die *reale* Gase zeigen, kann man rechnerisch berücksichtigen.

Der im Gasthermometer bestimmte Gasdruck p kann erst dann in eine Temperatur T umgerechnet werden, wenn die Proportionalitätskonstante zwischen Druck und Temperatur festgelegt ist. Alle Experimente, besonders die in Abschn. 3.1.4 geschilderten von *Gay-Lussac*, zeigen, dass es einen *absoluten Nullpunkt* der Temperatur gibt. Um eine Temperaturskala

Tabelle 3.2 Definierende Fixpunkte der ITS-90. Wenn nicht anders angegeben, beträgt der Druck $p_n = 101{,}325$ kPa

Gleichgewichtszustand	T_{90} in K	ϑ_{90} in °C
Siedepunkt von Helium bei verschiedenen Dampfdrücken	3 bis 5	−270,15 bis −268,15
Tripelpunkt des Gleichgewichtswasserstoffs	13,8033	−259,3467
Siedepunkt von Wasserstoff beim Dampfdruck 32,9 kPa und 102,2 kPa	17 20,3	−256,15 −252,85
Tripelpunkt des Neons	24,5561	−248,5939
Tripelpunkt des Sauerstoffs	54,3584	−218,7916
Tripelpunkt des Argons	83,8058	−189,3442
Tripelpunkt des Quecksilbers	234,3156	−38,8344
Tripelpunkt des Wassers	273,16	0,01
Schmelzpunkt der Galliums	302,9146	29,7646
Erstarrungspunkt des Indiums	429,7485	156,5985
Erstarrungspunkt des Zinns	505,078	231,928
Erstarrungspunkt des Zinks	692,677	419,527
Erstarrungspunkt des Aluminiums	933,473	660,323
Erstarrungspunkt des Silbers	1 234,93	961,78
Erstarrungspunkt des Goldes	1 337,33	1 064,18
Erstarrungspunkt des Kupfers	1 357,77	1 084,62

festzulegen, ist daher nur noch die Temperatur eines weiteren Punktes zu definieren. Dazu wurde der *Tripelpunkt* des Wassers zu $T_{Tr} = 273{,}16$ K (Kelvin) festgelegt. Der Tripelpunkt ist der Zustand, bei dem in einem Gefäß der feste, flüssige und gasförmige Aggregatzustand miteinander im Gleichgewicht sind. Der Tripelpunkt des Wassers ist leicht herzustellen und mit einer Toleranz von einigen Millikelvin reproduzierbar. Die 13. Generalkonferenz für Maße und Gewichte (GKMG) legte 1967 als Einheit für die Temperatur fest:

> 1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Die Einheit Kelvin (K) für die absolute Temperatur wurde zu Ehren von W. Thomson (1824 bis 1907), dem späteren Lord Kelvin gewählt, auf den die Temperaturskala zurückgeht.

Die so definierte Kelvin-Skala hat dieselbe Skalenteilung wie die bereits 1742 von A. Celsius (1701 bis 1744) vorgeschlagene Skala, bei der Schmelz- und Siedepunkte des Wassers unter Normdruck (0 °C bzw. 100 °C) als Fixpunkte dienen. Der Zusammenhang zwischen der absoluten Temperatur T in Kelvin und der Temperatur ϑ in Grad Celsius ergibt sich aus

$$\frac{\vartheta}{°C} = \frac{T}{K} - 273{,}15\ . \tag{3.5}$$

Durch diese Definition wird erreicht, dass Temperaturdifferenzen in beiden Einheiten dieselbe Maßzahl haben.

Für den praktischen Gebrauch wurde die *Internationale Temperaturskala von 1990* (ITS-90) erarbeitet. Sie stützt sich auf 17 gut reproduzierbare thermodynamische Gleichgewichtszustände als *definierende Fixpunkte*

(Tabelle 3.2) und gilt als derzeit beste Darstellung thermodynamischer Temperaturen.
Zur Interpolation zwischen den Fixpunkten wird zwischen 0,65 K und 5 K die Temperatur aus dem Dampfdruck von ^{3}He bzw. ^{4}He bestimmt; zwischen 3 K und 24,5561 K mit einem Gasthermometer. Oberhalb 13,8033 K bis 1 234,93 K werden Pt-Widerstandsthermometer und für noch höhere Temperaturen Spektralpyrometer eingesetzt.

Temperaturmessung

Jede physikalische Größe, die sich mit der Temperatur ändert, kann zur Temperaturmessung herangezogen werden. Für die verschiedensten Messaufgaben, Messobjekte und Temperaturbereiche wurden unterschiedliche Messverfahren entwickelt. Eine Zusammenstellung gängiger Methoden enthält Tabelle 3.3. Die VDE/VDI-Richtlinien 3511 geben eine ausführlichere Darstellung sowie eine Zusammenstellung der relevanten DIN-Normen.

3.1.4 Thermische Ausdehnung

Festkörper

Die meisten Festkörper dehnen sich bei Erwärmung aus. Die relative Verlängerung $\Delta l/l$ eines Stabes kann innerhalb bestimmter Grenzen proportional zur Temperaturänderung ΔT gesetzt werden:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T \,. \tag{3.6}$$

Ist die Länge l_1 bei der Temperatur ϑ_1 bekannt, so folgt für die Länge l_2 bei der Temperatur ϑ_2

$$l_2 = l_1[1 + \alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \tag{3.7}$$

mit $\Delta T = T_2 - T_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Die Proportionalitätskonstante α ist der *Längenausdehnungskoeffizient*. Sie ist ein Materialparameter und kann näherungsweise konstant gesetzt werden. In der Wirklichkeit steigt der Längenausdehnungskoeffizient α mit der Temperatur leicht an; Tabelle 3.4 enthält einige mit 10^6 multiplizierte Mittelwerte für die Temperaturbereiche $0\,°C \leqq \vartheta \leqq 100\,°C$ und $0\,°C \leqq \vartheta \leqq 500\,°C$.
Mit der Längenausdehnung der Körper ist zwangsläufig eine Volumenänderung verknüpft. Für das Volumen V_2 eines Würfels bei der Temperatur ϑ_2 gilt nach (3.7), wenn V_1 das Volumen bei ϑ_1 ist

$$\begin{aligned} V_2 = l_2^3 &= l_1^3[1 + \alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1)]^3 = \\ &= V_1[1 + 3\alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1) + 3\alpha^2(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 \\ &\quad + \alpha^3(\vartheta_2 - \vartheta_1)^3] \,. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder der Klammer sind gegenüber dem linearen Glied vernachlässigbar. Daher erhält man in guter Näherung

$$V_2 = V_1[1 + \gamma(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \tag{3.8}$$

oder für die relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \tag{3.9}$$

mit $\Delta T = T_2 - T_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1$ und dem *Raumausdehnungskoeffizienten*

$$\gamma = 3\alpha \,. \tag{3.10}$$

Beispiel

3.1-2 Eine Messingkugel ($\alpha = 19 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$) hat bei der Temperatur $\vartheta_1 = 20\,°C$ den Durchmesser $d_1 = 20{,}00$ mm. Auf welche Temperatur ϑ_2 muss sie erwärmt werden, damit sie in einem Ring mit dem Innendurchmesser $d_2 = 20{,}03$ mm stecken bleibt? Wie hat sich das Kugelvolumen verändert?

Tabelle 3.3 Temperaturmessverfahren

	Thermometertyp	Messbereich in °C	Fehlergrenzen	physikalisches Messprinzip
mechanische Berührungsthermometer	Flüssigkeits-Glasthermometer Füllung:			
	Pentangemisch	−200 bis 30	Näherungsweise in Größenordnung der Skalenteilung. Details in VDE/VDI 3511	Thermische Ausdehnung einer Flüssigkeit wird zur Temperaturmessung verwendet. Die Temperatur wird aus dem Stand der Flüssigkeit in einer Glaskapillare ermittelt.
	Alkohol	−110 bis 210		
	Toluol	−90 bis 100		
	Hg–Tl	−58 bis 30		
	Quecksilber	−38 bis 800		
	Galliumlegierung	bis 1 000		
	Flüssigkeits-Federthermometer	−35 bis 500	1 bis 2% des Anzeigebereichs	Thermische Ausdehnung einer Flüssigkeit (z. B. Hg unter 100 bis 150 bar) wird auf eine Rohr- oder Schneckenfeder übertragen.
	Dampfdruck-Federthermometer	−50 bis 350	1 bis 2% des Anzeigebereichs	Dampfdruck einer Flüssigkeit (Ethylether, Hexan, Toluol, Xylol) wird auf eine Rohr- oder Schneckenfeder übertragen.
	Stabausdehnungsthermometer	0 bis 1 000	1 bis 2% des Anzeigebereichs	Thermische Ausdehnung eines Metallstabs bewegt ein Messwerk.
	Bimetallthermometer	−50 bis 400	1 bis 3% des Anzeigebereichs	Thermobimetall besteht aus zwei fest miteinander verbundenen Schichten aus Werkstoffen mit unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten und krümmt sich bei Temperaturänderung.
elektrische Berührungsthermometer	Thermoelemente			
	AuFe–NiCr	−270 bis 0	0,75% des Temperatur-Sollwerts, mindestens 3 K	Zwischen zwei Verbindungsstellen verschiedener Metalle entsteht eine Thermospannung, wenn die Verbindungsstellen auf verschiedenen Temperaturen sind (Seebeck-Effekt).
	Cu-Konstantan	−200 bis 400		
	Fe-Konstantan	−200 bis 700		
	NiCr-Konstantan	−200 bis 900		
	Pt–PtRh	0 bis 1 600		
	W–WMo	0 bis 3 300		
	Widerstandsthermometer			
	Platin	−250 bis 1 000	0,3 bis 5 K	Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen und Halbleitern dient zur Temperaturbestimmung.
	Nickel	−60 bis 180	0,2 bis 2,1 K	
	Heißleiter	−273 bis 400	0,5 bis 1,5 K	
	Kaltleiter	40 bis 270		

Tabelle 3.3 (Fortsetzung)

	Thermometertyp	Messbereich in °C	Fehlergrenzen	physikalisches Messprinzip
berührungslose Thermometer	Strahlungspyrometer Spektralpyrom. Bandstrahlungsp. Gesamtstrahlungspyrometer	 650 bis 5 000 50 bis 2 000 –40 bis 3 000	 1 bis 35 K 1 bis 1,5% des Bereichs	Temperatur eines Körpers wird aus der Energiestromdichte seiner elektromagnetischen Strahlung bestimmt. Messung erfolgt entweder in engem Spektralbereich, breitem Spektralband oder im gesamten Spektrum.
	Verteilungspyrometer Farbangleichpyr. Verhältnispyrometer	 1 150 bis 2 000 200 bis 2 200	 10 bis 25 K 1 bis 1,5% des Bereichs	Rote und grüne Strahlungsanteile von Messstelle und Referenzlampe werden verglichen. Vergleich erfolgt subjektiv durch Farbvergleich oder objektiv durch Fotoempfänger.
besondere Messverfahren	Fotothermometrie	250 bis 1 000	±1 K	Die Oberfläche eines heißen Körpers wird mit infrarotempfindlichen Platten fotografisch aufgenommen. Zur Untersuchung von Temperaturfeldern geeignet.
	Temperaturmessfarben	40 bis 1 350	±5 K	Auf Messkörper wird Farbe aufgebracht, die bei Erreichen einer bestimmten Temperatur den Farbton ändert.
	Temperaturkennkörper	100 bis 1 600	±7 K	Zylindrische Körper aus Metalllegierungen zeigen durch Schmelzen eine bestimmte Temperatur an.
	Segerkegel	600 bis 2 000		Mischung aus Ton und Feldspat wird bei Erreichen einer bestimmten Temperatur weich, der Kegel neigt sich zur Seite.
	akustisches Thermometer	–271 bis –253		Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Gasen ist ein Maß für die Temperatur.
	magnetisches Thermometer	–273 bis –200		Magnetische Suszeptibilität paramagnetischer Salze hängt reziprok von der absoluten Temperatur ab.
	Glasfaserthermometer	50 bis 250	Auflösung 0,1 K	Die Fähigkeit einer Glasfaser, Lichtwellen zu führen, hängt vom tempera turempfindlichen Brechungsindex ab.

Tabelle 3.4 Mittlerer linearer Längenausdehnungskoeffizient α einiger Festkörper in verschiedenen Temperaturbereichen

Temperaturbereich	$10^6\,\alpha$ in K^{-1} $0\,°C \leqq \vartheta \leqq 100\,°C$	$10^6\,\alpha$ in K^{-1} $0\,°C \leqq \vartheta \leqq 500\,°C$
Aluminium	23,8	27,4
Kupfer	16,4	17,9
Stahl C 60	11,1	13,9
rostfreier Stahl	16,4	18,2
Invarstahl	0,9	
Quarzglas	0,51	0,61
gewöhnliches Glas	9	10,2

Lösung

Nach (3.6) ist die Temperaturänderung

$$\Delta T = \frac{\Delta d}{d\alpha} = \frac{0{,}03\ \text{mm}}{20\ \text{mm} \cdot 19 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}} = 79\ \text{K}\ .$$

Also ist die erforderliche Temperatur $\vartheta_2 = 99°\text{C}$. Die relative Volumenvergrößerung beträgt nach (3.9) und (3.10)

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T = 3\alpha \Delta T = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ .$$

Die *Dichte* ϱ eines Körpers ist umgekehrt proportional zum Volumen. Für die Temperaturabhängigkeit gilt

$$\varrho(\vartheta) = \frac{m}{V_0(1 + \gamma\vartheta)}\ .$$

Ist $\varrho_0 = m/V_0$ die Dichte bei $\vartheta_0 = 0°\text{C}$, dann ist die Dichte bei der Temperatur ϑ

$$\varrho(\vartheta) = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma\vartheta} \approx \varrho_0(1 - \gamma\vartheta)\ . \qquad (3.11)$$

Flüssigkeiten

Weil Flüssigkeiten keine Eigengestalt haben, ist nur die Volumenänderung von Interesse. Es gelten (3.8), (3.9) und (3.11); allerdings ist der Raumausdehnungskoeffizient γ größer als bei Festkörpern. Einige Zahlenwerte enthält Tabelle 3.5.

Bemerkenswert ist die Anomalie des Wassers. Bei der Temperatur $\vartheta = 4\,°\text{C}$ hat die Dichte ihr Maximum mit $\varrho_{\max} = 0{,}999973\,\text{kg/dm}^3$. Wenn im Winter ein See zufriert, sammelt sich das Wasser von $\vartheta = 4\,°\text{C}$ und größter Dichte am Grund; darüber liegen die kälteren und leichteren Schichten. Weil die kalten Schichten nicht absinken, erfolgt keine Wärmeübertragung durch Konvektion. Der Wärmetransport durch Wärmeleitung ist nicht sehr effektiv (Abschn. 3.5), sodass tiefe Seen nicht bis zum Grund durchgefrieren.

Gase

Bei Gasen hängt das Volumen vom Druck und der Temperatur ab. Messungen von J. A. C. Charles (1746 bis 1823), die von J. L. Gay-Lussac (1778 bis 1823) vertieft wurden, ergaben, dass bei einem Gas unter konstantem Druck das Volumen linear mit der Temperatur gemäß (3.9) variiert:

$$V(\vartheta) = V_0(1 + \gamma\,\vartheta)\ ,$$

wenn V_0 das Volumen bei $\vartheta_0 = 0\,°\text{C}$ ist. Experimente liefern für den Raumausdehnungskoeffizienten γ im Gay-Lussac'schen Gesetz für fast alle Gase den gleichen Wert. Die Unterschiede zwischen den einzelnen

Tabelle 3.5 Raumausdehnungskoeffizient γ einiger Flüssigkeiten bei der Temperatur $\vartheta = 20\,°\text{C}$

Stoff	$10^3\gamma$ in K^{-1}
Wasser	0,208
Quecksilber	0,182
Pentan	1,58
Ethylalkohol	1,10
Heizöl	0,9 bis 1,0

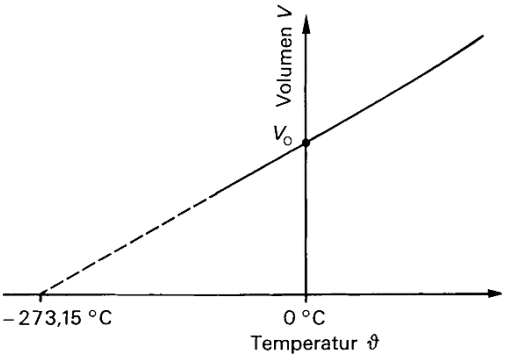


Abb. 3.3 Zusammenhang zwischen dem Volumen V und der Temperatur T eines idealen Gases bei konstantem Druck

Gasen werden umso geringer, je niedriger der Druck p ist. Im Grenzfall $p \to 0$ ergibt sich für alle Gase

$$\gamma = 0{,}003661\ \mathrm{K}^{-1} = \frac{1}{273{,}15\ \mathrm{K}}\ .$$

Ein Gas in diesem Grenzzustand wird als *ideales Gas* bezeichnet.
Wie die grafische Darstellung des Gay-Lussac'schen Gesetzes in Abb. 3.3 zeigt, wird das Volumen bei $\vartheta = -273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$ gleich null. Dies ist der *absolute Nullpunkt* der Temperatur. Natürlich gilt das Gay-Lussac'sche Gesetz bei sehr tiefen Temperaturen nicht mehr. Reale Gase kondensieren beim Abkühlen; selbst am absoluten Nullpunkt muss noch ein bestimmtes Restvolumen, nämlich das Eigenvolumen der Atome, übrig bleiben. Die absolute Temperatur T erlaubt eine einfache Formulierung des Gay-Lussac'schen Gesetzes:

$$V(T) = V_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{V}{T} = \text{konst.} \tag{3.12}$$

Hierbei ist $T_0 = 273{,}15$ K.

Wird das Volumen eines Gases konstant gehalten und die Temperatur verändert, dann variiert der Druck p gemäß

$$p(\vartheta) = p_0(1 + \gamma\vartheta) \tag{3.13}$$

oder

$$p(T) = p_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{T} = \text{konst.} \tag{3.14}$$

Diese Gleichung ist die Grundlage der Temperaturbestimmung nach *Amontons* mit Hilfe des Gasthermometers.

3.1.5 Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

Das Volumen V und der Druck p einer abgeschlossenen Menge eines idealen Gases sind bei konstanter Temperatur durch das Gesetz von *Boyle-Mariotte* verknüpft:

$$pV = \text{konst.} \tag{3.15}$$

Der Zusammenhang wurde 1662 von R. Boyle (1627 bis 1691) und unabhängig von ihm 1679 von E. Mariotte (1620 bis 1684) experimentell gefunden.
Die Gesetze von *Boyle-Mariotte, Gay-Lussac* und *Charles,* formuliert in (3.15), (3.12) sowie (3.14), lassen sich in einer Gleichung, der *Zustandsgleichung idealer Gase* kombinieren:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \tag{3.16}$$

Reale Gase befolgen (3.16) umso besser, je geringer der Druck und je höher die Temperatur

ist. Die physikalischen Gründe hierfür sind in Abschn. 3.2.1 erläutert.
Die Zustandsgrößen Druck p, Volumen V und Temperatur T einer konstanten Stoffmenge eines idealen Gases gehorchen stets (3.16). Durch Auflösung nach dem Druck ergibt sich $p = \text{konst.}\ T/V$.
Werden das Gefäßvolumen und die Temperatur vorgegeben, dann hängt der Gasdruck und damit die Konstante von der Gasmenge ab, die sich im Gefäß befindet.
Zur Bestimmung der Konstante wird (3.16) in die Form

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_\mathrm{n} V_\mathrm{n}}{T_\mathrm{n}} \tag{3.17}$$

gebracht. Die Größen mit dem Index n beziehen sich auf den in DIN 1343 festgelegten *Normzustand* mit der *Normtemperatur* $T_\mathrm{n} = 273{,}15\ \mathrm{K}$ ($\vartheta_\mathrm{n} = 0\,^\circ\mathrm{C}$) und dem *Normdruck* $p_\mathrm{n} = 101\,325\ \mathrm{Pa}$.
Das Volumen V_n des Gases hängt mit der Dichte ϱ_n beim Normzustand und der Masse m gemäß

$$V_\mathrm{n} = \frac{m}{\varrho_\mathrm{n}}$$

zusammen. Somit wird aus (3.17)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_\mathrm{n}}{T_\mathrm{n}\varrho_\mathrm{n}} m\ .$$

Die Werte für $p_\mathrm{n}, T_\mathrm{n}$ und ϱ_n werden zusammengefasst zu der *individuellen (speziellen) Gaskonstanten*

$$R_\mathrm{i} = \frac{p_\mathrm{n}}{T_\mathrm{n}\varrho_\mathrm{n}}\ . \tag{3.18}$$

Die Zustandsgleichung idealer Gase erhält demnach die Form

$$pV = mR_\mathrm{i}T\ . \tag{3.19}$$

Da die Gaskonstante R_i von der Dichte ϱ_n des Gases abhängt, ergibt sich für jede Gasart eine eigene, individuelle Konstante.

Beispiel

3.1-3 Wie groß ist die individuelle Gaskonstante von Luft?

Lösung

Die Dichte beim Normzustand beträgt $\varrho_\mathrm{n} = 1{,}293\ \mathrm{kg/m^3}$. Damit errechnet man für die Gaskonstante

$$R_\mathrm{i} = \frac{101\,325\ \mathrm{N\,m^{-2}}}{273{,}15\ \mathrm{K} \cdot 1{,}293\ \mathrm{kg\,m^{-3}}} = 286{,}9\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\ .$$

Der Nachteil, für jedes Gas eine besondere Gaskonstante in (3.19) einsetzen zu müssen, entfällt, wenn in (3.17) das Volumen V_n durch die Stoffmenge ν ausgedrückt wird. Nach dem Satz von A. Avogadro (1776 bis 1856) benötigt eine bestimmte Teilchenmenge eines idealen Gases bei bestimmten Werten des Drucks und der Temperatur stets das gleiche Volumen, und zwar unabhängig von der Gasart. Für die Stoffmenge $\nu = 1\ \mathrm{mol}$ beträgt beim Normzustand nach DIN 1443 das Molvolumen $V_\mathrm{mn} = 22{,}414\ \mathrm{dm^3/mol}$. Somit ist das Volumen V_n der Teilchenmenge ν

$$V_\mathrm{n} = \nu\, V_\mathrm{mn}\ ,$$

und (3.17) erhält die Form

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_\mathrm{n} V_\mathrm{mn}}{T_\mathrm{n}} \nu\ .$$

Die Konstanten der rechten Seite fasst man zur *universellen (molaren) Gaskonstante* R_m zusammen:

$$R_\mathrm{m} = \frac{p_\mathrm{n} V_\mathrm{mn}}{T_\mathrm{n}} = 8{,}3145\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\ .$$

Damit erhält man die Zustandsgleichung der idealen Gase:

$$pV = \nu R_m T \,. \tag{3.20}$$

Diese Form hat den Vorteil, dass für alle Gase dieselbe Gaskonstante verwendet werden kann.
Die individuelle Gaskonstante R_i kann bei Kenntnis der Molmasse M des Gases aus der molaren Gaskonstante R_m berechnet werden. Nach (3.4), die den allgemeinen Zusammenhang zwischen spezifischen und molaren Größen beschreibt, gilt

$$R_i = \frac{R_m}{M} \,. \tag{3.21}$$

Die Anzahl der Teilchen in der Teilchenmenge $\nu = 1$ mol wird durch die *Avogadro'sche Konstante* angegeben:

$$N_A = 6{,}0221 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \,.$$

Mit der Avogadro-Konstante kann die rechte Seite von (3.20) umgeformt werden:

$$pV = \nu N_A \frac{R_m}{N_A} T \,.$$

Hierin ist $N = \nu N_A$ die *Teilchenanzahl* des Systems. Der Quotient

$$k = \frac{R_m}{N_A} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

wird als *Boltzmann-Konstante* (L. Boltzmann, 1844 bis 1906) bezeichnet. Hiermit ergibt sich eine weitere Form der Zustandsgleichung idealer Gase:

$$pV = NkT \,. \tag{3.22}$$

Beispiel

3.1-4 Ein Gefäß mit $V = 2\,\text{l}$ Inhalt wird bei der Temperatur $\vartheta = 22\,^\circ\text{C}$ evakuiert und anschließend mit Helium gefüllt, bis sich gegenüber dem äußeren Luftdruck $p_L = 1\,016\,\text{hPa}$ der Überdruck $p_ü = 2{,}0\,\text{bar}$ eingestellt hat. Wie groß sind die Teilchenanzahl N, die Teilchenmenge ν und die Masse m des Gases?

Lösung

Der Druck des Gases beträgt $p = p_L + p_ü = 3{,}016 \cdot 10^5\,\text{Pa}$. Die absolute Temperatur ist $T = 295{,}15\,\text{K}$. Nach (3.22) folgt für die Teilchenanzahl

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{3{,}016 \cdot 10^5\,\text{N m}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\text{N m K}^{-1} \cdot 295{,}15\,\text{K}} = 1{,}48 \cdot 10^{23} \,.$$

Die Teilchenmenge ist

$$\nu = \frac{pV}{TR_m} = \frac{N}{N_A} = 0{,}246\ \text{mol} \,.$$

Helium hat die Molmasse $M = 4{,}003\,\text{g/mol}$. Damit ist die Masse des Gases $m = \nu M = 0{,}985\,\text{g}$.

Der funktionale Zusammenhang der drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur in der Zustandsgleichung der idealen

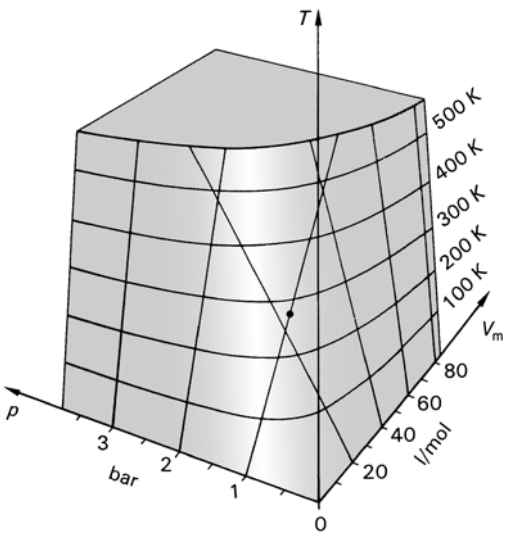


Abb. 3.4 Zustandsfläche der Zustandsgleichung idealer Gase. p Druck, V_m molares Volumen, T absolute Temperatur

Gase kann in einem dreidimensionalen Raum nach Abb. 3.4 anschaulich dargestellt werden. Alle Gleichgewichtszustände liegen auf der gekrümmten Fläche. Schnitte durch die Fläche bei konstanter Temperatur liefern die *Hyperbeln* des *Boyle-Mariotte'schen Gesetzes* im p, V-Diagramm. Schnitte bei konstantem Druck erzeugen die *Geraden* des *Gay-Lussac'schen Gesetzes* im V, T-Diagramm, und schließlich ergeben Schnitte bei konstantem Volumen die *Geraden* des *Charles'schen Gesetzes* im p, T-Diagramm.

Zur Übung

Ü 3.1-1 Ein Glasstab aus Pyrex-Glas und ein Maßstab aus Messing Ms 58 sind bei $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ genau $l_1 = 1\,000\,\text{mm}$ lang. Welche Länge liest man für den Glasstab ab, wenn beide Körper auf $\vartheta_2 = 100\,°\text{C}$ erwärmt werden? ($\alpha_{\text{Glas}} = 3{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$; $\alpha_{\text{Ms}} = 19 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$)

Ü 3.1-2 Eine kreisförmige Stahlplatte hat bei $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ den Durchmesser $d_1 = 1\,200\,\text{mm}$. Um welchen Betrag nimmt ihre Fläche zu, wenn sie auf $\vartheta_2 = 96\,°\text{C}$ erwärmt wird?

Ü 3.1-3 Wie groß ist die Zugspannung in Eisenbahnschienen bei $\vartheta_1 = -20\,°\text{C}$, wenn sie bei $\vartheta_2 = +20\,°\text{C}$ spannungsfrei verschweißt wurden? Der Elastizitätsmodul des Stahls beträgt $E = 2 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$ (Abschn. 2.11).

Ü 3.1-4 Bei $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ beträgt die Dichte von Quecksilber $\varrho_1 = 13{,}546\,\text{kg/dm}^3$. Bei welcher Temperatur ϑ_2 ist die Dichte $\varrho_2 = 13{,}5\,\text{kg/dm}^3$?

Ü 3.1-5 Wie groß ist die individuelle Gaskonstante von Wasserdampf, wenn bei der Temperatur $\vartheta = 800\,°\text{C}$ und dem Druck $p = 9{,}807\,\text{bar}$ das spezifische Volumen $v = 0{,}5\,\text{m}^3/\text{kg}$ beträgt?

Ü 3.1-6 In ein Gefäß mit dem Volumen $V = 20\,\text{l}$ wird bei der Temperatur $\vartheta = 22\,°\text{C}$ Luft gepumpt, bis sich der Überdruck $p = 100\,\text{bar}$ einstellt. Welche Masse hat das Gas, wenn der äußere Luftdruck $p_{\text{L}} = 1\,\text{bar}$ beträgt?

Ü 3.1-7 In einem Gefäß mit $V = 1\,\text{m}^3$ Inhalt befindet sich bei der Temperatur $T = 250\,\text{K}$ und dem Druck $p = 2{,}5\,\text{bar}$ ein ideales Gas. Wie groß ist dessen Teilchenmenge?

3.2 Kinetische Gastheorie

3.2.1 Gasdruck

Die bisher phänomenologisch eingeführten Zustandsgrößen erhalten eine mechanische Interpretation durch die *kinetische Gastheorie*. Hierbei legt man die atomare Struktur der Materie zugrunde und leitet die thermodynamischen Eigenschaften der Gase aus der Bewegung der Gasmoleküle unter Anwendung der Gesetze der Mechanik ab.

Ein ideales Gas zeichnet sich dadurch aus, dass es die Zustandsgleichung idealer Gase (3.15) und folgende in Abschn. 3.1.5 befolgt. Ein reales Gas verhält sich dann ideal, wenn die Teilchendichte gering und die Temperatur wesentlich über der Siedetemperatur der Substanz liegt. In diesem Zustand ist das Eigenvolumen der Moleküle sehr viel kleiner als das Gefäßvolumen; außerdem sind die zwischenmolekularen Kräfte vernachlässigbar, da diese eine sehr kurze Reichweite haben.

Die Modellsubstanz des idealen Gases hat folgende Eigenschaften:

- Das Gas besteht aus einer großen Anzahl gleichartiger Teilchen, den Molekülen.
- Die räumliche Ausdehnung der Teilchen ist so klein, dass ihr Eigenvolumen gegenüber dem Gefäßvolumen vernachlässigbar ist (Konzept des Massenpunktes).
- Zwischen den Teilchen existieren keine Wechselwirkungskräfte, ausgenommen bei einem Zusammenstoß.
- Die Zusammenstöße der Teilchen untereinander und mit den Gefäßwänden verlaufen völlig elastisch innerhalb einer vernachlässigbaren Zeitspanne.

Der Druck, den ein Gas auf die Gefäßwand ausübt, wurde bereits 1738 von *Bernoulli* so erklärt, dass die Teilchen bei ihren Zusammenstößen mit der Wand an diese einen bestimm-

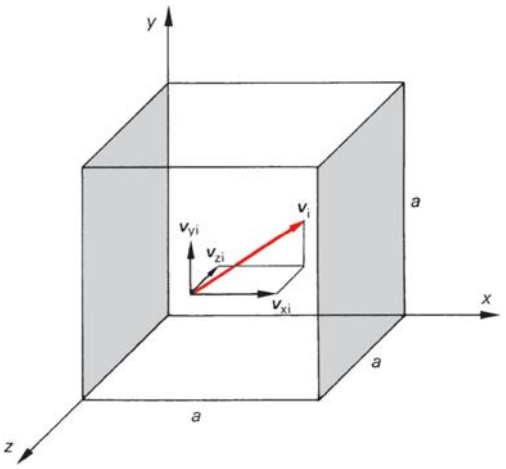


Abb. 3.5 Zur kinetischen Gastheorie: Würfel mit einem Molekül der Geschwindigkeit v_i. x, y, z Koordinaten, a Kantenlänge

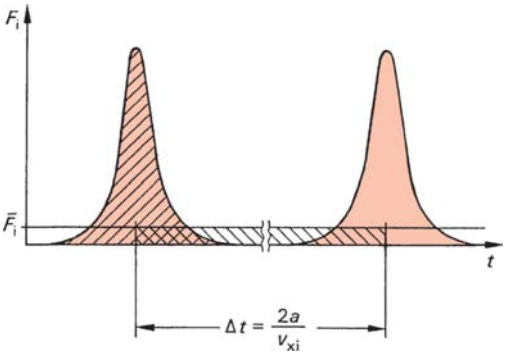


Abb. 3.6 Zur kinetischen Gastheorie: Kraftstöße auf die Wand. F_i Kraft, t Zeit, a Kantenlänge, v_{xi} Geschwindigkeit

ten Impuls übertragen und dadurch eine Kraft ausüben. Zur Bestimmung des Drucks sei zunächst nach Abb. 3.5 ein Würfel der Kantenlänge a als Gefäß betrachtet, in dem sich lediglich *ein* Molekül der Masse m_M befinden soll. Das Molekül bewege sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i$ und treffe auf die rechte Wand des Würfels. Gemäß den Stoßgesetzen von Abschn. 2.7 wird das Teilchen wie beim optischen Reflexionsgesetz reflektiert und gibt dabei den Impuls $\Delta \boldsymbol{p}_i = 2m_M \boldsymbol{v}_{xi}$ an die Wand ab. Nach einer bestimmten Laufzeit Δt wiederholt sich der Vorgang, sodass in regelmäßigen Abständen nach Abb. 3.6 ein Kraftstoß auf die rechte Wand ausgeübt wird. Die mittlere Kraft $\overline{F}_i$ auf die rechte Wand beträgt

$$\overline{F}_i = \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{2m_M v_{xi}}{2a/v_{xi}} = \frac{m_M v_{xi}^2}{a} .$$

Damit ist der „Druck“, von einem Molekül herrührend,

$$\overline{p}_i = \frac{\overline{F}_i}{A} = \frac{m_M v_{xi}^2}{a^3} = \frac{m_M v_{xi}^2}{V} .$$

Nun sollen sich N Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten im Würfel befinden. Falls sie untereinander nicht zusammenstoßen, ergibt sich der Druck auf die Wand durch Summation über alle N Einzelbeiträge:

$$p = \frac{m_M}{V}\left(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \cdots + v_{xN}^2\right)$$
$$= \frac{m_M}{V}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 .$$

Bei den üblichen Teilchenanzahlen verschwindet das in Abb. 3.6 angedeutete diskrete Auftreten der Stöße vollkommen. Tatsächlich treffen beispielsweise bei einem mit Luft gefüllten Gefäß im Normzustand auf jeden Quadratzentimeter der Wand je Sekunde etwa $3 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Die Geschwindigkeiten der einzelnen Moleküle messen zu wollen, ist ein hoffnungsloses Unterfangen. Sinnvoll sind nur statistische Aussagen, z. B. eine Berechnung des Mittelwerts. Der obige Ausdruck lässt sich mit dem *mittleren Geschwindigkeitsquadrat*

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

vereinfachen zu

$$p = \frac{m_M}{V} N \overline{v_x^2} .$$

Nun gilt für jedes Teilchen

$$\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}_x^2 + \boldsymbol{v}_y^2 + \boldsymbol{v}_z^2 \,.$$

Da bei vielen Teilchen alle Raumrichtungen gleichmäßig vorkommen, gilt für die Mittelwerte der Geschwindigkeitsquadrate

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} \,.$$

Demnach erhält man für den Druck

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m_\mathrm{M} \overline{v^2} \,. \tag{3.23}$$

Diese *Grundgleichung der kinetischen Gastheorie* ist auch gültig, wenn Zusammenstöße zwischen den Teilchen stattfinden, sowie bei beliebiger Gefäßform.
Gleichung (3.23) lässt sich mit Hilfe der Dichte $\varrho = m/V = N\, m_\mathrm{M}/V$ umschreiben:

$$p = \frac{1}{3}\varrho\, \overline{v^2} \,. \tag{3.24}$$

Diese Beziehung kann benutzt werden, um die mittleren Molekülgeschwindigkeiten in Gasen zu berechnen. Als *mittlere Geschwindigkeit* v_m wird die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\overline{v^2}$ definiert:

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\varrho}} \,. \tag{3.25}$$

Beispiel

3.2-1 Beim Normzustand beträgt die Dichte von Stickstoff $\varrho_\mathrm{n} = 1{,}2505\,\mathrm{kg/m^3}$. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit?

Lösung

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{3 \cdot 101\,325\,\mathrm{N\,m^{-2}}}{1{,}2505\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}} = 493\,\mathrm{m/s} \,.$$

Tabelle 3.6 Mittlere Geschwindigkeit v_m und Schallgeschwindigkeit c einiger Gase beim Normzustand $\vartheta_\mathrm{n} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ und $p_\mathrm{n} = 1{,}013$ bar (ϱ Dichte, $\varkappa$ Isentropenexponent).

Gas	ϱ in kg/m^3	$\varkappa$	v_m in m/s	c in m/s
Helium	0,1785	1,67	1305	974
Argon	1,784	1,67	413	308
Wasserstoff	0,0899	1,41	1840	1260
Sauerstoff	1,4289	1,40	461	315
Stickstoff	1,2505	1,40	493	337
Luft	1,2928	1,40	485	331

Die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle ist in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit. Nach (5.186) gilt für die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}} \,.$$

$\varkappa$ ist der in Abschn. 3.3.4 definierte Isentropenexponent, der im Bereich $1 < \varkappa \leqq 5/3$ liegt. Tabelle 3.6 enthält Werte der mittleren Geschwindigkeit v_m und der Schallgeschwindigkeit c für einige Gase.

3.2.2 Thermische Energie und Temperatur

Wird die Grundgleichung (3.23) der kinetischen Gastheorie in der Form

$$pV = \frac{1}{3} N m_\mathrm{M} \overline{v^2}$$

geschrieben, so ist eine Verwandtschaft mit der allgemeinen Zustandsgleichung (3.22) idealer Gase

$$pV = NkT$$

offensichtlich. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten entsteht die Beziehung

$$\frac{1}{3} m_\mathrm{M} \overline{v^2} = kT \,,$$

die zeigt, dass das mittlere Geschwindigkeitsquadrat proportional zur Temperatur ist. Daraus folgt sofort für die Temperaturabhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit:

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{3kT}{m_\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{3R_\mathrm{m}T}{M}} \,. \qquad (3.26)$$

Beispiel

3.2-2 Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit v_m und die Schallgeschwindigkeit c von Luft bei $\vartheta = 20\,^\circ\mathrm{C}$?

Lösung

Aus (3.26) folgt

$$\frac{v_\mathrm{m20}}{v_\mathrm{m0}} = \sqrt{\frac{293}{273}} \quad \text{und} \quad v_\mathrm{m20} = 1{,}036 v_\mathrm{m0} \,.$$

Mit $v_\mathrm{m0} = 485$ m/s (Tabelle 3.6) ergibt sich $v_\mathrm{m20} = 502$ m/s. Im gleichen Verhältnis nimmt die Schallgeschwindigkeit von $c_0 = 331$ m/s auf $c_{20} = 343$ m/s zu.

Eine sehr plastische Deutung des Temperaturbegriffs wird möglich durch Einführung der *mittleren kinetischen Energie* $\overline{E}_\mathrm{kin}$ eines Teilchens der Masse m_M:

$$\overline{E}_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} m_\mathrm{M} \overline{v^2} \,. \qquad (3.27)$$

Aus (3.26) und (3.27) folgt

$$\overline{E}_\mathrm{kin} = \frac{3}{2} kT \,. \qquad (3.28)$$

Dieser Ausdruck erlaubt eine anschauliche Interpretation der phänomenologisch eingeführten Zustandsgröße „Temperatur“:

> Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle.

Durch die Verknüpfung von Temperatur und kinetischer Energie wird auch wieder auf die Existenz eines absoluten Temperatur-Nullpunkts hingewiesen, bei dem jede Teilchenbewegung aufhört. (Die Quantentheorie lehrt, dass bei $T = 0$ K noch eine Nullpunktsenergie vorhanden ist.)

Gleichverteilungssatz

Die Modellsubstanz – die Grundlage der vorgenannten abgeleiteten Gleichungen – besteht aus punktförmigen Teilchen mit jeweils $f = 3$ Freiheitsgraden. Da sich im zeitlichen Mittel die Bewegung der Moleküle gleichmäßig auf alle drei Raumrichtungen verteilt, kann man die kinetische Energie eines Moleküls in drei gleiche Teile aufspalten. Auf jeden Freiheitsgrad entfällt somit die *mittlere thermische Energie pro Molekül*

$$\overline{E}_f = \frac{1}{2} kT \,. \qquad (3.29)$$

Dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden auf Gase, deren Teilchen nicht punktförmig sind (z. B. das hantelförmige N_2-Molekül) und daher mehr als drei Freiheitsgrade haben:

> Die thermische Energie eines Moleküls verteilt sich gleichmäßig auf alle seine Freiheitsgrade. Jeder Freiheitsgrad hat die Energie $\overline{E}_f = \frac{1}{2}kT$.

Dieser *Gleichverteilungssatz* (Äquipartitionsprinzip) liefert für die mittlere kinetische Energie eines Moleküls mit f Freiheitsgraden

$$\overline{E}_\mathrm{kin} = \frac{f}{2} kT \,. \qquad (3.30)$$

Der Gleichverteilungssatz verliert seine Gültigkeit bei tiefen Temperaturen, wo Quanteneffekte wirksam werden (Abschn. 3.3.3).

3.2.3 Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle

Boltzmann-Faktor

Die barometrische Höhenformel gemäß (2.184) beschreibt die Druckabnahme in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe h:

$$p_h = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 T_0 g h}{p_0 T}} .$$

Der Exponent lässt sich leicht umformen:

$$p_h = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{m_\mathrm{M} g h}{kT}} .$$

Da die *Teilchenanzahldichte* $n = N/V$ proportional zum Druck ist, gilt für das Verhältnis der Teilchenanzahldichten in der Höhe h und am Erdboden bei $h = 0$:

$$\frac{n_h}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{m_\mathrm{M} g h}{kT}} .$$

Der Zähler im Exponenten entspricht der Differenz der potentiellen Energie ΔE_pot im Schwerefeld zwischen den beiden betrachteten Zuständen, sodass auch gilt

$$\frac{n_h}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E_\mathrm{pot}}{kT}} .$$

Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern auf zwei beliebige Energiezustände E_1 und E_2. Werden auf diese beiden Energieniveaus N Teilchen verteilt, dann gilt für die Besetzungszahlen bzw. Teilchenanzahldichten

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{n_2}{n_1} = \mathrm{e}^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}} . \qquad (3.31)$$

Diese Exponentialfunktion ist als *Boltzmann-Faktor* bekannt und spielt in den Gleichungen der Gleichgewichtsstatistik eine große Rolle.

> Der Boltzmann-Faktor gibt an, welcher Bruchteil der Teilchen aufgrund ihrer thermischen Bewegung die Energieschwelle $E_2 - E_1$ überschritten hat.

Er tritt auf in den Gleichungen der Leitfähigkeit von Halbleitern, in der Diodenkennlinie, beim Verdampfen von Flüssigkeiten und beim Elektronenaustritt aus Glühkathoden, um einige Beispiele zu nennen.
Haben mehrere Zustände dieselbe Energie (entartete Zustände), dann kann dies durch ein *statistisches Gewicht* g berücksichtigt werden. Aus (3.31) wird dann

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \mathrm{e}^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} . \qquad (3.32)$$

Wenn ein System verschiedene Zustände mit den Energien $E_1, E_2, \ldots$ einnimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand mit der Energie E_i besetzt ist, gegeben durch

$$P_i \sim g_i \, \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{kT}} . \qquad (3.33)$$

Maxwell'sche Verteilungsfunktion

Bei einem Gas ändern sich infolge der Zusammenstöße zwischen den Gasmolekülen ständig deren Geschwindigkeiten. Trotzdem ist eine statistische Aussage darüber möglich, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Geschwindigkeit vorkommt. Nach (3.33) ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + \mathrm{d}v$ gegeben durch die *Verteilungsfunktion*

$$f(v)\,\mathrm{d}v = C g(v) \mathrm{e}^{-\frac{m_\mathrm{M} v^2}{2kT}} \mathrm{d}v .$$

Darin berücksichtigt $g(v)\,\mathrm{d}v$ das statistische Gewicht des Geschwindigkeitsintervalls.

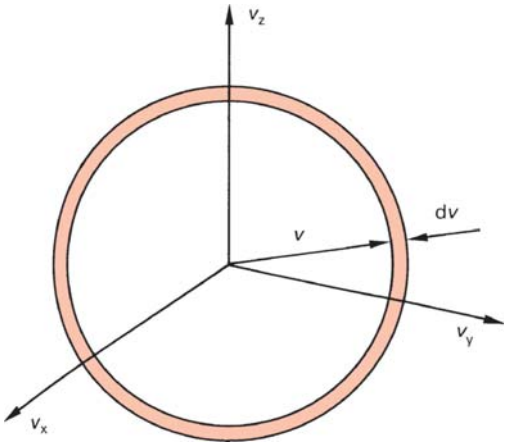


Abb. 3.7 Zur Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung: Geschwindigkeiten zwischen v und $v + \mathrm{d}v$

Im dreidimensionalen Geschwindigkeitsraum nach Abb. 3.7 liegen die Spitzen aller Geschwindigkeitsvektoren mit den Beträgen zwischen v und $v + \mathrm{d}v$ in einer Kugelschale mit dem Radius v und der Dicke $\mathrm{d}v$. Die Anzahl der möglichen Geschwindigkeitsvektoren ist proportional zum Volumen dieser Kugelschale $4\pi v^2\,\mathrm{d}v$. Setzt man

$$g(v) = 4\pi v^2 \,,$$

dann ergibt sich die Normierungskonstante C aus der Forderung

$$\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v = 1 \,.$$

Dies ist der mathematische Ausdruck dafür, dass ein Teilchen mit Sicherheit irgendeine Geschwindigkeit zwischen null und unendlich haben muss. Durch Bestimmung des Integrals folgt

$$C = \left(\frac{m_\mathrm{M}}{2\pi k\,T}\right)^{3/2} \,.$$

Die *Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung* lautet demnach

$$f(v)\,\mathrm{d}v = 4\pi v^2 \left(\frac{m_\mathrm{M}}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{m_\mathrm{M} v^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v \,. \tag{3.34}$$

Sie wurde von J. C. Maxwell im Jahr 1859 gefunden und 1876 von L. Boltzmann theoretisch begründet.

Abbildung 3.8 zeigt die Verteilungsfunktion für Stickstoff-Moleküle bei den Temperaturen $T = 300$ K und $T = 900$ K.

Die *wahrscheinlichste Geschwindigkeit* v_w, also diejenige, die am häufigsten auftritt, kann aus (3.34) durch Bestimmung des Maximums ermittelt werden:

$$v_\mathrm{w} = \sqrt{\frac{2kT}{m_\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,v_\mathrm{m} \,. \tag{3.35}$$

Die *durchschnittliche Geschwindigkeit* $\bar{v}$, also der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeitsbeträge aller Teilchen, liegt zwischen v_w und v_m:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,v_\mathrm{m} \,. \tag{3.36}$$

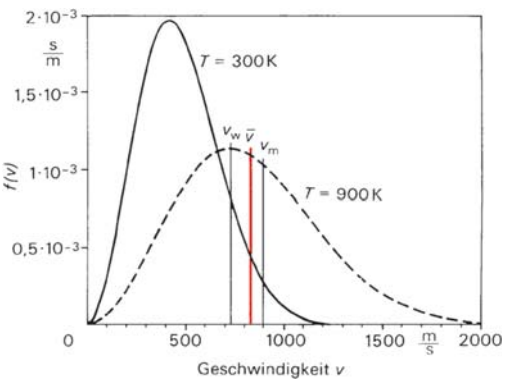


Abb. 3.8 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für Stickstoffmoleküle

An vielen Prozessen sind nur jene Teilchen beteiligt, deren Energie eine bestimmte Schwelle überschreitet. Beispiele sind chemische Reaktionen, Glühemission von Elektronen aus Metallen, Stoßionisation in Gasen. Mit Hilfe von (3.34) lässt sich berechnen, welcher Bruchteil der Teilchen die erforderliche Mindestenergie bzw. Mindestgeschwindigkeit besitzt.

Beispiel

3.2-3 Eine chemische Reaktion wird eingeleitet, wenn die Gasatome eine Aktivierungsenergie von $E_A = 1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$ aufbringen. Welcher Bruchteil der Moleküle ist dazu in der Lage, wenn die Masse der Moleküle $m_M = 4{,}65 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$ beträgt? Die Temperatur sei $T_1 = 300\,\text{K}$ bzw. $T_2 = 900\,\text{K}$. Wie groß ist jeweils die mittlere Geschwindigkeit v_m?

Lösung

Die Aktivierungsenergie entspricht einer Mindestgeschwindigkeit von $v_0 = \sqrt{\frac{2E_A}{m_M}} = 2\,625\,\text{m/s}$. Im Vergleich hierzu sind die mittleren Geschwindigkeiten klein:

$$v_{m,1} = \sqrt{\frac{3kT_1}{m_M}} = 517\,\text{m/s} \quad \text{und} \quad v_{m,2} = 895\,\text{m/s}\,.$$

Der Bruchteil x der Moleküle mit $v \geqq v_0$ beträgt

$$x = \frac{\int_{v_0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v}{\int_{0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v} = \int_{0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v\,.$$

Eine numerische Integration mit einem programmierbaren Rechner liefert

für $T_1 = 300\,\text{K}$: $x_1 = 1{,}14 \cdot 10^{-16}$ und

für $T_2 = 900\,\text{K}$: $x_2 = 1{,}06 \cdot 10^{-5}$.

Obwohl die Temperatur nur um den Faktor drei variiert, verändert sich die Anzahl der reaktionsfähigen Teilchen um neun Größenordnungen.

Ist die Mindestgeschwindigkeit v_0 sehr viel größer als die mittlere Geschwindigkeit v_m, dann gilt in guter Näherung für den Bruchteil x der reaktionsfähigen Teilchen

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{E_A}{kT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{E_A}{kT}}\,. \qquad (3.37)$$

Zur Übung

Ü 3.2-1 Ein Gefäß mit $V = 1\,\text{l}$ Inhalt ist mit Helium gefüllt. Das Gas befindet sich im Normzustand. a) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit v_m der Atome? b) Wie groß ist die gesamte kinetische Energie aller He-Atome, die sich in dem Gefäß befinden?

Ü 3.2-2 Eine Orgelpfeife einer Kirchenorgel schwingt bei $\vartheta_1 = 20\,^\circ\text{C}$ mit der Frequenz $f_1 = 440\,\text{Hz}$. Die Frequenz einer Pfeife ist proportional zur Schallgeschwindigkeit in der Luft. Welche Frequenz gibt die Pfeife im Winter ab, wenn die Temperatur der angesaugten Luft $\vartheta_2 = 5\,^\circ\text{C}$ beträgt? (Zur Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit siehe Beispiel 3.2-2. Die Längenänderung der Pfeife ist ein vernachlässigbarer Effekt.)

Ü 3.2-3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Stickstoff-Moleküle bei Raumtemperatur ($T = 300\,\text{K}$) Geschwindigkeiten im Intervall $1\,000\,\text{m/s} \leqq v \leqq 1\,100\,\text{m/s}$ haben? Wie viele Moleküle erfüllen diese Bedingung, wenn das Gas beim Normdruck das Volumen $V = 1\,\text{l}$ ausfüllt?

Ü 3.2-4 Bei der Glühemission von Wolfram müssen die Elektronen die Austrittsarbeit $W_A = 4{,}5\,\text{eV}$ überwinden. Welcher Bruchteil der Elektronen ist dazu bei Raumtemperatur bzw. bei $T = 1\,500\,\text{K}$ in der Lage? (Das Elektronengas wird näherungsweise wie ein ideales Gas angesehen.)

3.3 Hauptsätze der Thermodynamik

3.3.1 Wärme

Aus dem letzten Abschnitt geht hervor, dass die Temperatur ein Maß ist für die Energie, die in der ungeordneten thermischen Bewegung der Teilchen steckt. Bei Gasen und Flüssigkeiten ist dies die kinetische Energie der Translation und

Rotation der Moleküle sowie die Schwingungsenergie der Molekülschwingungen. In Festkörpern schwingen die Atome um ihre Ruhelagen; hierbei werden mit zunehmender Temperatur die Schwingungsamplituden immer größer.
Bringt man zwei Körper, die sich auf verschiedenen Temperaturen befinden, in Kontakt, dann findet ein Temperaturausgleich statt: Die Temperatur des kälteren Körpers nimmt zu und die des wärmeren nimmt ab. Dies bedeutet nach den vorgenannten Erläuterungen, dass vom warmen System an das kalte System Energie übertragen wird. Diese *Energieübertragung* belegt man mit dem Begriff *Wärme*:

> Wärme ist Energie, die aufgrund eines Temperaturunterschieds zwischen zwei Systemen übertragen wird. Diese Energieübertragung hat eine eindeutige Richtung. Die Wärme fließt stets in Richtung der niedrigeren Temperatur. Der Wärmeübergang ist also ein *irreversibler* Prozess.

Wird einem Festkörper oder einer Flüssigkeit Wärme zugeführt, dann ist dies immer mit einer Temperaturerhöhung verknüpft, falls kein *Phasenübergang* stattfindet (Abschn. 3.4.3). Um die Temperatur T eines Systems um $\mathrm{d}T$ zu erhöhen, ist eine Wärmezufuhr δQ erforderlich, die proportional zu $\mathrm{d}T$ ist:

$$\delta Q = C\,\mathrm{d}T\,. \tag{3.38}$$

Die Proportionalitätskonstante C ist die *Wärmekapazität* des Systems. Sie hängt von der Art des Stoffs und von der Menge ab, sie ist also eine *extensive* Größe.
Je nachdem, ob die Wärmekapazität C auf die Masse m oder die Teilchenmenge ν bezogen wird, ergibt sich die *spezifische* Wärmekapazität

$$c = \frac{C}{m} \tag{3.39}$$

oder die *molare* Wärmekapazität

$$C_\mathrm{m} = \frac{C}{\nu}\,. \tag{3.40}$$

Nach (3.4) gilt der Zusammenhang $C_\mathrm{m} = cM$.
Die SI-Maßeinheit der Wärme ist wie für jede Energieform 1 J (Joule). Somit erhalten die Wärmekapazitäten die Maßeinheiten C: 1 J/(K), c: 1 J/(kg K), C_m: 1 J/(mol K).
Im älteren Schrifttum und im praktischen Gebrauch findet man häufig noch die früher übliche Maßeinheit für die Wärme, die Kilokalorie. Für die *Internationale Tafelkalorie* gilt der Umrechnungsfaktor $1\ \mathrm{kcal_{IT}} = 4{,}1868\ \mathrm{kJ}$. (Molare Wärmekapazitäten einiger Gase enthält Tabelle 3.8 in Abschn. 3.3.3, spezifische Wärmekapazitäten von einigen Festkörpern und Flüssigkeiten Tabelle 3.12 in Abschn. 3.5.1.)
Die Wärmekapazität kann nur in bestimmten Grenzen als Konstante angesehen werden. Tatsächlich hängt sie von der Temperatur ab. Bei einer endlichen Temperaturänderung von T_1 auf T_2 beträgt die übertragene Wärme

$$Q_{12} = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,\mathrm{d}T = \nu\int_{T_1}^{T_2} C_\mathrm{m}(T)\,\mathrm{d}T\,. \tag{3.41}$$

Ist das Temperaturintervall klein, kann die Wärmekapazität näherungsweise als konstant angenommen werden und (3.41) vereinfacht sich zu

$$Q_{12} = mc(T_2 - T_1) = \nu C_\mathrm{m}(T_2 - T_1)\ . \tag{3.42}$$

Diese Gleichung gilt auch für einen größeren Temperaturbereich, wenn anstatt der *wahren* eine *mittlere* Wärmekapazität eingesetzt wird.

Beispiel

3.3-1 Wie groß ist die Wärme, die einem Bauteil aus Eisen von der Masse $m = 0{,}8\,\mathrm{kg}$ zugeführt werden muss, um es von $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ auf $\vartheta_2 = 400\,^\circ\mathrm{C}$ zu erwärmen?

Lösung

In diesem Temperaturintervall ist die spezifische Wärmekapazität linear von der Temperatur abhängig $c_1 = 465\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $c_2 = 615\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Die mittlere spezifische Wärmekapazität beträgt $\bar{c} = 540\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Damit ist die erforderliche Wärme

$$\begin{aligned} Q_{12} &= m\bar{c}(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ &= 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 540\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 380\,\mathrm{K} = 164\,\mathrm{kJ}\ . \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung: Mit der gleichen Energie könnte man das Bauteil von $v_1 = 0$ auf $v_2 = 640\,\mathrm{m/s}$ beschleunigen.

Die *spezifische* bzw. *molare Wärmekapazität von Gasen* hängt außer von der Gasart auch ab von

- der Temperatur,
- dem Druck (nicht bei idealen Gasen) und von
- der Prozessführung.

Die umgesetzte Wärme kann deshalb i. Allg. nicht nach (3.41) berechnet werden, da je nach Versuchsbedingungen eine ganz bestimmte Wärmekapazität einzusetzen wäre. Für die Praxis sind besonders zwei Versuchsbedingungen von Bedeutung, für die die Wärmekapazitäten vieler Gase gemessen sind:

a) Temperaturänderung bei konstantem Volumen; die *isochore* Wärmekapazität wird mit dem Index „v“ gekennzeichnet: $C_v, c_v, C_{\mathrm{m}v}$;
b) Temperaturänderung bei konstantem Druck; die *isobare* Wärmekapazität erhält den Index „p“: $C_p, c_p, C_{\mathrm{m}p}$.

Kalorimetrie

Wärmekapazitäten werden in *Kalorimetern* gemessen. Abbildung 3.9 zeigt das Prinzip eines Mischungskalorimeters, das geeignet ist, die Wärmekapazität von Festkörpern und Flüssigkeiten zu messen. Im Innern des gut isolierten *Dewar-Gefäßes* befindet sich eine Flüssigkeit (meist Wasser) der Masse m_1 bei der Temperatur T_1. Wird ein Körper der Masse m_2 mit der Temperatur T_2 in die Flüssigkeit eingetaucht, so stellt sich nach einiger Zeit die Mischungstemperatur T_m ein. Es muss folgende Energiebilanzgleichung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} m_1 c_1(T_\mathrm{m} - T_1) + C_\mathrm{K}(T_\mathrm{m} - T_1) \\ = m_2 c_2(T_2 - T_\mathrm{m})\ . \end{aligned}$$

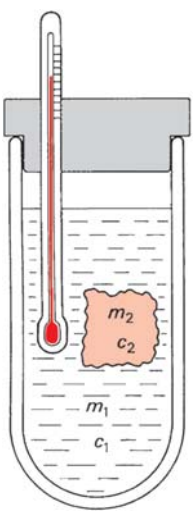


Abb. 3.9 Mischungskalorimeter. m Masse, c spezifische Wärmekapazität 1 Flüssigkeit, 2 Festkörper

C_K ist die Wärmekapazität des Kalorimeters. Daraus bestimmt sich die zu messende spezifische Wärmekapazität des Körpers 2:

$$c_2 = \frac{(m_1 c_1 + C_K)(T_m - T_1)}{m_2(T_2 - T_m)} . \qquad (3.43)$$

Es ist einleuchtend, dass mit dieser Methode die spezifische Wärmekapazität nur relativ zu der des Wassers c_1 gemessen werden kann. Aus diesem Grund hat man früher die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit $c_1 = 1$ kcal/(kg K) festgelegt und darauf alle anderen Wärmekapazitäten bezogen.

Die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität c_v von Gasen bei konstantem Volumen ist verhältnismäßig schwierig. Das Gas wird in ein Kalorimetergefäß eingeschlossen und – z. B. mit einer elektrischen Heizung – aufgeheizt. Da die Wärmekapazität des Gefäßes sehr viel größer ist als die des Gases, ist das Messergebnis nicht sonderlich genau. Einfacher ist die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität c_p unter konstantem Druck:

Gemäß Abb. 3.10 leitet man eine bestimmte Menge erhitztes Gas in einer Rohrschlange durch ein Wasserkalorimeter. Aus der Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$, dem Massenstrom und der Temperaturzunahme der Flüssigkeit lässt sich die Wärmekapazität c_p bestimmen. c_v kann aus c_p berechnet werden (Abschn. 3.3.3).

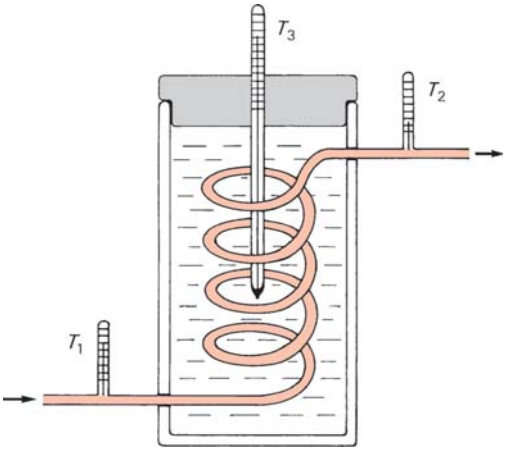


Abb. 3.10 Kalorimeter zur Bestimmung der isobaren spezifischen Wärmekapazität c_p von Gasen. T Temperatur

Zur Übung

Ü 3.3-1 Die Wärmekapazität C_K eines Kalorimeters soll bestimmt werden. Dazu wird ein Kupferblock der Masse $m_2 = 150$ g und der Temperatur $\vartheta_2 = 35\,°C$ in das Wasserbad der Masse $m_1 = 250$ g und der Temperatur $\vartheta_1 = 15\,°C$ getaucht. Die Mischungstemperatur beträgt $\vartheta_m = 15{,}9\,°C$.

Ü 3.3-2 In ein Kalorimeter, das mit Methylalkohol der Masse $m_1 = 0{,}3$ kg gefüllt ist, wird eine Heizwicklung getaucht und mit elektrischem Strom geheizt. Die Heizleistung beträgt $P = 100$ W. Die Temperaturzunahme der Flüssigkeit ist $dT/dt = 0{,}119$ K/s. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität von Methylalkohol, wenn die Wärmekapazität des Kalorimeters $C_K = 95$ J/K beträgt?

Ü 3.3-3 Um die isobare spezifische Wärmekapazität von Stickstoffmonoxid (NO) zu bestimmen, wird das Gas gemäß Abb. 3.10 durch ein Kalorimeter geleitet. Dieses ist mit $m_1 = 1$ kg Wasser gefüllt. Die Wärmekapazität des Gefäßes ist vernachlässigbar. Die Temperaturdifferenz zwischen ein- und ausströmendem Gas ist $T_1 - T_2 = 5$ K. Der Volumenstrom beträgt $\dot{V} = 1$ l/s. Die Dichte von NO ist $\varrho = 1{,}34\,\mathrm{kg/m^3}$. Die Temperaturzunahme der Flüssigkeit ist $dT_3/dt = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ K/s. Wie groß ist die isobare spezifische Wärmekapazität c_p und die isobare molare Wärmekapazität $C_{m,p}$?

Ü 3.3-4 Die spezifische Wärmekapazität der Festkörper entspricht bei tiefen Temperaturen dem Debye'schen T^3-Gesetz $c = \text{konst.} \cdot T^3$. Für Zink gilt $C_m = 1{,}76$ J/mol K ($T = 20$ K). Welche Wärme muss einem Bauteil der Masse $m = 200$ g entzogen werden, wenn es von $T_2 = 20$ K auf $T_1 = 4{,}2$ K abgekühlt werden soll?

3.3.2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Aus der kinetischen Gastheorie folgt sehr einleuchtend, dass Wärme eine Energieform ist.

Diese Theorie wurde erst um die Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelt. Bis dahin war die Meinung vorherrschend, dass beim Wärmeübergang von einem heißen auf einen kalten Körper ein *Wärmestoff*, das „Phlogiston", überwechselt. Von den zahlreichen Experimenten, die im Lauf der Zeit die Theorie des Wärmestoffs zu Fall brachten, seien kurz zwei erwähnt:

Im Jahr 1797 beaufsichtigte *Graf Rumford* (B. Thompson, 1753 bis 1814) das Kanonenbohren im Münchener Zeughaus. Mit Hilfe eines von Pferden angetriebenen Bohrers wurde eine Kanone aufgebohrt. Die dabei entwickelte Wärme wurde an Kühlwasser abgegeben. In 2,5 Stunden wurden 8,5 kg Wasser zum Kochen gebracht. Rumford zog aus seinen Beobachtungen den Schluss, dass die Temperaturerhöhung durch die mechanische Arbeit der Pferde verrichtet wurde: „Mehr Energie lässt sich erzeugen, indem man mehr Pferdefutter verwendet." – 1799 brachte H. Davy (1778 bis 1829) zwei Eisstücke von $\vartheta = 0\,°C$ durch Reiben zum Schmelzen. Auch hierbei wurde die erforderliche Schmelzwärme durch mechanische Arbeit zugeführt.

Im Jahr 1842 erkannte der Arzt R. Mayer (1814 bis 1878) als erster die Existenz eines *allgemeinen Energieerhaltungssatzes*, der außer den bisher bekannten mechanischen Energieformen die Wärme mit einschließt. Er stellte fest, dass der Energiesatz der Mechanik uneingeschränkt gilt, wenn die Wärme als weitere Energieform berücksichtigt wird. Aus vorliegenden Daten der spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v von Luft berechnete er als erster das *mechanische Wärmeäquivalent,* also den Umrechnungsfaktor der (damals) in Kalorien gemessenen Wärme in mechanische Energieeinheiten. Aufgrund ungenauer Messdaten erhielt *Mayer* einen Zahlenwert, der um 14% vom korrekten Wert abwich.

Von 1843 bis 1850 bemühte sich J. P. Joule (1818 bis 1889) in vielen verschiedenartigen Experimenten um eine genaue Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Er erhielt einen Zahlenwert für das mechanische Wärmeäquivalent, der lediglich um 1% von dem heute anerkannten Wert 4,1868 kJ (= 1 kcal) abweicht.

Unabhängig von *Mayer* entwickelte 1847 H. v. Helmholtz (1821 bis 1894) den allgemeinen Energiesatz, der außer mechanischer und Wärmeenergie auch alle anderen Energieformen, wie z. B. elektrische, magnetische und chemische Energie, einschließt. Dieser *erste Hauptsatz der Thermodynamik* lautet:

> In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtbetrag der Energie konstant. Innerhalb des Systems können die verschiedenen Energieformen ineinander umgewandelt werden.

Helmholtz kam zu seiner Schlussfolgerung aufgrund der Tatsache, dass es nicht gelingt, ein *Perpetuum mobile* zu bauen, also eine Maschine, die ständig Arbeit abgibt, ohne gleichzeitig entsprechende Energie aufzunehmen. Eine solche Maschine, die dem ersten Hauptsatz widersprechen würde, wäre ein Perpetuum mobile *erster Art.*

> Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art.

Dieser Erfahrungssatz ist schon recht alt. Bereits 1775 beschloss die französische Akademie der Wissenschaften, Vorschläge von Erfindern für ein Perpetuum mobile nicht mehr zu prüfen.

Innere Energie

Die gesamte thermische Energie eines Systems, die in der ungeordneten Bewegung der

Teilchen steckt, wird nach *Kelvin* als *innere Energie* U des Systems bezeichnet. Diese kann nach den obigen Erläuterungen nur geändert werden, wenn über die Systemgrenzen Energie mit der Umgebung ausgetauscht wird. Die Energieübertragung umfasst in den folgenden Betrachtungen lediglich Wärme und mechanische Arbeit, kann aber jederzeit auf alle vorhandenen Energieformen ausgedehnt werden. Für die Änderung $\mathrm{d}U$ der inneren Energie gilt somit

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W \,. \tag{3.44}$$

Die Änderung der inneren Energie eines geschlossenen Systems entspricht der Summe von übertragener Wärme und Arbeit.

Das *Vorzeichen* der umgesetzten Energiebeträge wird wie folgt festgelegt: Wärme und Arbeit, die dem System *zugeführt* werden, erhalten ein *positives* Vorzeichen. Wenn das System Energie nach außen *abgibt*, ist diese *negativ*.
Die innere Energie ist eine *Zustandsgröße* (Abschn. 3.1.2), d. h., sie hängt nur vom augenblicklichen Zustand des Systems ab, nicht aber davon, wie das System in diesen Zustand gelangt ist. Wäre dies nicht so, dann ließe sich ein Perpetuum mobile konstruieren. Speziell bei den idealen Gasen gilt nach (3.30) für die innere Energie

$$U = N\overline{E}_{\mathrm{kin}} = N\frac{f}{2}kT = \nu\frac{f}{2}R_{\mathrm{m}}T \,. \tag{3.45}$$

Die innere Energie der idealen Gase hängt außer von der Stoffmenge nur von der Temperatur ab.

Wird bei einer Zustandsänderung das Volumen konstant gehalten, dann kann am System keine Volumenänderungsarbeit verrichtet werden. Nach (3.44) gilt für eine solche *isochore Zustandsänderung*

$$\mathrm{d}U = \delta Q|_{V=\mathrm{konst.}} = \nu C_{\mathrm{m}v}\,\mathrm{d}T = mc_v\,\mathrm{d}T \,.$$

Da die innere Energie eine Zustandsgröße ist, kann für eine beliebige Zustandsänderung, die nicht isochor zu sein braucht, die Änderung der inneren Energie nach der vorgenannten Beziehung berechnet werden:

$$\mathrm{d}U = \nu C_{\mathrm{m}v}\,\mathrm{d}T = mc_v\,\mathrm{d}T \,. \tag{3.46}$$

Für beliebige Zustandsänderungen idealer Gase hängt die Änderung der inneren Energie nur von der isochoren Wärmekapazität und der Temperaturänderung ab.

Bei einer endlichen Temperaturänderung ist die gesamte Änderung der inneren Energie

$$\begin{aligned}\Delta U = U_2 - U_1 &= \nu \int_{T_1}^{T_2} C_{\mathrm{m}v}(T)\,\mathrm{d}T \\ &= m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T)\,\mathrm{d}T \end{aligned} \tag{3.47}$$

oder nach (3.44)

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \,. \tag{3.48}$$

Die umgesetzte Wärme Q_{12} und die mechanische Arbeit W_{12} sind *Prozessgrößen* (Abschn. 3.1.2). Sie hängen von der Art der Prozessführung ab, lassen sich also nicht nach der Art der inneren Energie als Differenz zweier fester Werte beschreiben.
Zur Berechnung der *Volumenänderungsarbeit* bei einem geschlossenen System sei die Kom-

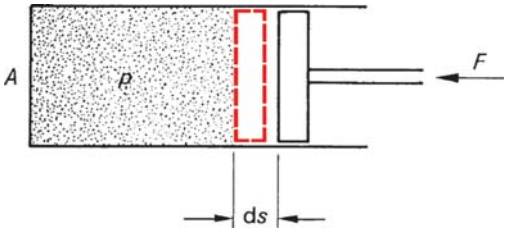


Abb. 3.11 Zur Bestimmung der Volumenänderungsarbeit. A Kolbenfläche, F Kraft, p Druck, ds Wegelement

pression eines Gases gemäß Abb. 3.11 betrachtet. In einem Zylinder mit verschiebbarem Kolben befindet sich ein Gas unter dem Druck p. Zur Verschiebung des Kolbens mit der Fläche A um die Strecke ds ist die Arbeit $\delta W = F\,ds = pA\,ds$ erforderlich. Das Produkt $A\,ds = dV$ entspricht der Änderung des Gasvolumens. Das Differential der Arbeit ist also – mit dem Minuszeichen nach der Vorzeichenvereinbarung –

$$\delta W = -p\,dV\,. \tag{3.49}$$

Wird das Volumen von V_1 nach V_2 geändert, so ist die Gesamtarbeit

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV\,. \tag{3.50}$$

Abbildung 3.12 erlaubt eine anschauliche Interpretation:

Die Volumenänderungsarbeit entspricht der Fläche unter der Kurve der Zustandsänderung im p,V-Diagramm.

Es wird noch einmal deutlich, dass die Arbeit als Prozessgröße vom Weg im p,V-Diagramm abhängt. Für dieselben Endpunkte 1 und 2 erfordert der Weg a eine geringere Arbeit als der Weg b.

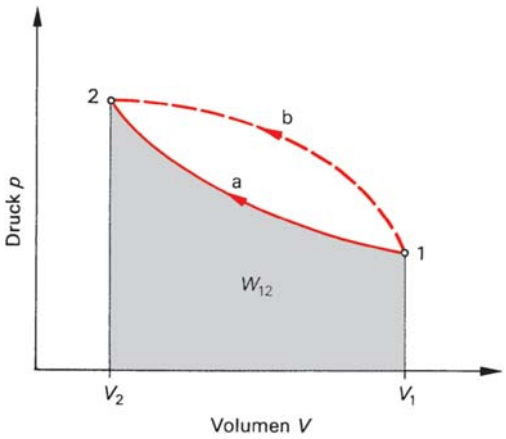


Abb. 3.12 Volumenänderungsarbeit im p,V-Diagramm. 1,2 Grenzpunkte, W_{12} Volumenänderungsarbeit, a,b Wege

Enthalpie

Außer der inneren Energie U ist eine weitere Zustandsgröße, die *Enthalpie* H sehr nützlich:

$$H = U + p\,V\,. \tag{3.51}$$

Das totale Differenzial der Enthalpie ist $dH = dU + p\,dV + V\,dp$. Für Zustandsänderungen, die unter konstantem Druck ablaufen, vereinfacht es sich zu $dH = dU + p\,dV$.
Mit der Volumenänderungsarbeit in geschlossenen Systemen $\delta W = -p\,dV$ ergibt sich $dH = dU - \delta W$. Diese Beziehung lässt sich mit dem ersten Hauptsatz (3.44) so schreiben:

$$dH = \delta Q|_{p=\text{konst.}} = \nu C_{mp}\,dT = mc_p\,dT\,. \tag{3.52}$$

Bei einer isobaren Zustandsänderung ist die umgesetzte Wärmemenge gleich der Änderung der Enthalpie.

Die Einführung der Enthalpie vereinfacht thermodynamische Berechnungen bei Zustandsänderungen, die bei konstantem Druck ablaufen.

3.3.3 Berechnung der Wärmekapazitäten

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die isochore spezifische bzw. molare Wärmekapazität einfach gebauter Moleküle mit Hilfe der Ergebnisse der kinetischen Gastheorie berechnet werden kann. Die isobaren Wärmekapazitäten c_p und C_{mp} hängen mit den isochoren Wärmekapazitäten c_v und C_{mv} wie folgt zusammen:
Die Temperatur eines idealen Gases der Teilchenmenge ν soll isobar um dT erhöht werden. Die erforderliche Wärme ist

$$\delta Q|_{p=\text{konst.}} = \nu C_{mp}\,dT\,.$$

Die innere Energie ändert sich dabei nach (3.44) und (3.49) um

$$dU = \delta Q + \delta W = \nu C_{mp}\,dT - p\,dV\,.$$

Da die innere Energie eine Zustandsgröße ist, lässt sich ihre Änderung für beliebige Zustandsänderungen nach (3.46) berechnen:

$$dU = \nu C_{mv}\,dT\,.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhält man

$$\nu C_{mv}\,dT = \nu C_{mp}\,dT - p\,dV$$

oder

$$C_{mp} - C_{mv} = \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}\,.$$

Aus der Zustandsgleichung idealer Gase ergibt sich $dV/dT = \nu R_m/p$ und schließlich

$$C_{mp} - C_{mv} = R_m\,. \tag{3.53}$$

Ebenso gilt mit der individuellen Gaskonstante R_i für die spezifischen Wärmekapazitäten

$$c_p - c_v = R_i\,. \tag{3.54}$$

Die *isochore molare Wärmekapazität* kann nun aus der inneren Energie des Systems berechnet werden. Nach (3.46) gilt

$$C_{mv} = \frac{1}{\nu}\frac{dU}{dT}\,. \tag{3.55}$$

Die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie wird durch (3.45) beschrieben:

$$U(T) = \frac{f}{2}\nu R_m T\,.$$

Die Basis dieser Beziehung ist der *Gleichverteilungssatz* (Abschn. 3.2.2), nach dem die thermische Energie eines Moleküls gleichmäßig auf seine verschiedenen Freiheitsgrade f verteilt ist. Somit gilt für die isochore molare Wärmekapazität

$$C_{mv} = \frac{f}{2}R_m\,. \tag{3.56}$$

Die *isobare molare Wärmekapazität* folgt aus (3.53)

$$C_{mp} = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R_m\,. \tag{3.57}$$

Entsprechend sind die *spezifischen Wärmekapazitäten*

$$c_v = \frac{f}{2}R_i \tag{3.58}$$

Tabelle 3.7 Freiheitsgrade, molare Wärmekapazitäten C_m und Isentropenexponent $\varkappa$ für verschiedene Molekülformen

Molekülform	Symbol	Freiheitsgrade				C_{mv} in $\frac{J}{mol\,K}$	C_{mp} in $\frac{J}{mol\,K}$	$\varkappa$
		Translation	Rotation	Oszillation	gesamt			
punktförmig		3	–	–	3	12,47	20,79	1,67
starre Hantel		3	2	–	5	20,79	29,10	1,40
schwingende Hantel		3	2	2	7	29,10	37,41	1,29
mehratomig, starr		3	3	–	6	24,94	33,26	1,33

und

$$c_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R_i \,. \tag{3.59}$$

Das Verhältnis von isobarer und isochorer Wärmekapazität ist der *Isentropenexponent* $\varkappa$, der bei isentropen Zustandsänderungen eine wichtige Rolle spielt (Abschn. 3.3.4). Mit (3.56) bis (3.59) folgt

$$\varkappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f} \,. \tag{3.60}$$

Zur Berechnung der Wärmekapazitäten von Gasen nach (3.56) bis (3.59) ist die Kenntnis der Molekülform erforderlich, um die möglichen Freiheitsgrade f des Moleküls angeben zu können. Für verschiedene Molekültypen sind in Tabelle 3.7 die Freiheitsgrade und die daraus berechneten molaren Wärmekapazitäten sowie der Isentropenexponent angegeben. Jedes Teilchen hat drei Translationsfreiheitsgrade. Dazu kommen bei mehratomigen Molekülen noch drei Freiheitsgrade der Rotation. Bei zweiatomigen Molekülen in Form einer gestreckten starren Hantel werden nur zwei Freiheitsgrade für die Rotation angesetzt. Diese entfallen auf die Rotation um Achsen, die senkrecht zur Hantelachse stehen. Die Rotation um die Hantelachse tritt nicht auf, da infolge des geringen Massenträgheitsmoments dafür extrem hohe Temperaturen nötig wären (Begründung weiter unten). Für die Schwingung einer Hantel werden zwei Freiheitsgrade angesetzt, da bei einem schwingenden System im Mittel derselbe Energiebetrag als kinetische und als potentielle Energie vorliegt (Abschn. 5.1).

Die theoretisch berechneten molaren Wärmekapazitäten in Tabelle 3.7 können nun mit den gemessenen Werten in Tabelle 3.8 verglichen werden. Bei den Edelgasen stimmen die Messungen hervorragend mit den theoretischen Berechnungen für punktförmige Teilchen überein. Die zweiatomigen Gase zeigen mit Ausnahme von Chlor eine gute Übereinstimmung mit den theoretischen Werten der starren Hantel. Dies bedeuet: Die Moleküle von H_2, O_2 und N_2 verhalten sich bei Raumtemperatur wie starre Hanteln. Die Zahlenwerte von Cl_2 liegen zwischen den erwarteten für die starre und die schwingende Hantel. Tatsächlich schwingt bei Raumtemperatur etwa

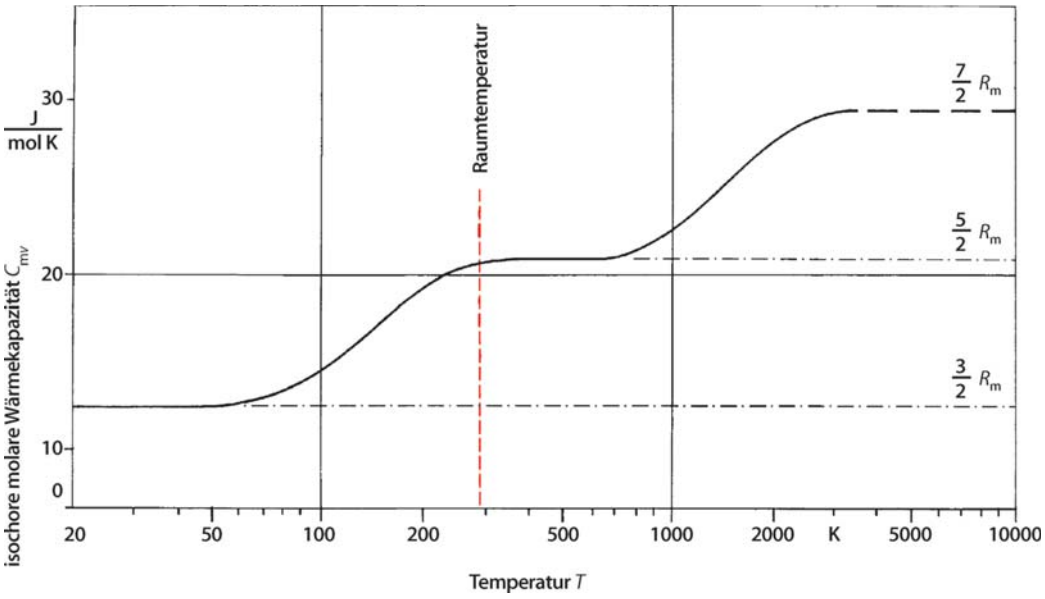


Abb. 3.13 Temperaturabhängigkeit der isochoren molaren Wärmekapazität C_{mv} von Wasserstoff. Wasserstoff dissoziiert bei etwa $T = 3\,200$ K. Die fortgesetzte gestrichelte Linie gilt für ein stabiles zweiatomiges Molekül

die Hälfte der Cl_2-Moleküle, während die andere Hälfte starr ist. Dieses auf den ersten Blick merkwürdige Verhalten wird verständlich, wenn die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität betrachtet wird.

Tabelle 3.8 Gemessene molare Wärmekapazitäten C_m einiger Gase beim Normdruck $p_n = 1{,}013$ bar und der Temperatur $\vartheta = 20\,°C$

Gas		C_{mv} in $\frac{J}{mol\,K}$	C_{mp} in $\frac{J}{mol\,K}$	$\varkappa$
Helium	He	12,47	20,80	1,67
Argon	Ar	12,47	20,80	1,67
Wasserstoff	H_2	20,43	28,76	1,41
Sauerstoff	O_2	21,06	29,43	1,40
Stickstoff	N_2	20,76	29,09	1,40
Luft		20,77	29,10	1,40
Chlor	Cl_2	25,74	34,70	1,35
Kohlendioxid	CO_2	28,46	36,96	1,30
Schwefeldioxid	SO_2	31,40	40,39	1,29
Methan	CH_4	26,19	34,59	1,32
Ethan	C_2H_6	43,12	51,70	1,20
Ammoniak	NH_3	27,84	36,84	1,31

Abbildung 3.13 zeigt den Verlauf der molaren Wärmekapazität C_{mv} von Wasserstoff in Abhängigkeit von der Temperatur. Offenbar verhält sich H_2 bei tiefen Temperaturen wie ein einatomiges Gas mit drei Freiheitsgraden. Mit steigender Temperatur beginnen die Moleküle ab etwa $T = 80$ K zu rotieren; dies bewirkt einen Anstieg der Wärmekapazität. Bei Raumtemperatur rotieren praktisch alle Moleküle. Die Wärmekapazität nimmt erneut zu, wenn ab etwa $T = 800$ K die Moleküle zu schwingen beginnen. Die Schwelle, bei der die Oszillation einsetzt, liegt für Cl_2 tiefer als für H_2, sodass bei Cl_2 unterhalb der Raumtemperatur bereits ein Großteil der Moleküle schwingt.

Vom klassischen Gleichverteilungssatz her ist das Ausfrieren von Freiheitsgraden mit abnehmender Temperatur nicht verständlich. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik aber ist der Drehimpuls eines Moleküls gequantelt.

Der minimale Drehimpuls $L_{\min}$ beträgt $\hbar = h/2\pi$ mit der Planck'schen Konstanten h. Damit ist die minimale Rotationsenergie eines Moleküls mit dem Massenträgheitsmoment J

$$E_{\text{rot,min}} = \frac{1}{2}\frac{L_{\min}^2}{J} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{J} .$$

Ist die mittlere thermische Energie $\frac{1}{2}kT$ je Freiheitsgrad kleiner als diese minimale Rotationsenergie, so wird das Molekül bei einem Stoß i. Allg. nicht in Rotation versetzt werden können. Nach den Regeln der Quantenmechanik ist auch die Schwingungsenergie gequantelt mit der Mindestenergie hf, f ist hierbei die Schwingungsfrequenz. Diese Energie liegt üblicherweise höher als die Schwellenenergie für die Rotation.

Beispiel

3.3-2 Bei welcher Temperatur beginnen die Wasserstoff-Moleküle zu rotieren?

Lösung

Die Grenze ist näherungsweise gegeben durch $\frac{1}{2}kT \approx \frac{1}{2}\hbar^2/J$. Für das Massenträgheitsmoment gilt $J = 2mr^2$. Mit $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg und $r \approx 5 \cdot 10^{-11}$ m ergibt sich $J \approx 8{,}35 \cdot 10^{-48}\,\text{kg}\,\text{m}^2$. Die Temperaturschwelle ist dann etwa $T \approx \hbar^2/kJ = 95$ K.

Die letzte Gruppe der Gase in Tabelle 3.7 besteht aus mehratomigen Molekülen, die jeweils mehrere Schwingungsformen haben können. Bei Raumtemperatur sind die meisten Schwingungen noch nicht angeregt, sodass keine Systematik in die gemessenen Wärmekapazitäten gebracht werden kann.

Bei kristallinen Festkörpern sitzen die einzelnen Atome bzw. Moleküle an festen Plätzen eines Raumgitters. Punktförmige Atome können dabei Schwingungen in den drei Raumrichtungen ausführen. Da jede Schwingungsrichtung formal mit zwei Freiheitsgraden in die Rechnung eingeht, haben die Atome jeweils sechs Freiheitsgrade für die Berechnung der Wärmekapazität. Nach (3.56) ist dann die molare

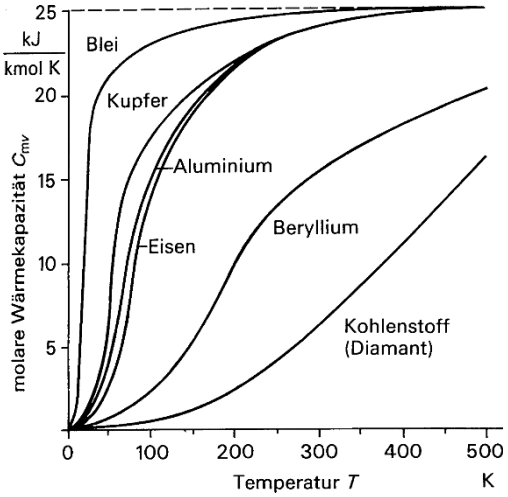


Abb. 3.14 Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität einiger Festkörper

Wärmekapazität eines Festkörpers

$$C_{mv} = 3R_m = 24{,}9\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} .$$

Dieses Ergebnis ist als *Dulong-Petit'sches Gesetz* (P. L. DULONG, 1785 bis 1838, und A. T. PETIT, 1791 bis 1820) bekannt. Wie Abb. 3.14 zeigt, wird das Dulong-Petit'sche Gesetz bei hohen Temperaturen gut befolgt, während mit abnehmender Temperatur durch Ausfrieren der Freiheitsgrade die Wärmekapazität gegen null geht.

Bei komplizierten Molekülkristallen (beispielsweise Eis) kommen außer den Schwingungen auch Rotationen ganzer Molekülgruppen vor, sodass die molare Wärmekapazität oberhalb des Wertes liegt, den die Dulong-Petit'sche Regel angibt.

3.3.4 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase

Zustandsänderungen, die in realen Systemen ablaufen, sind meist recht komplex, lassen sich aber durch verhältnismäßig einfach zu behan-

delnde spezielle Zustandsänderungen annähern.

Die Zustandsänderungen sollen mit einem idealen Gas konstanter Teilchenmenge in einem geschlossenen System durchgeführt werden. Das Gas sei in einem dichten Zylinder mit verschiebbarem Kolben eingeschlossen. Die Prozessführung sei so kontrolliert, dass zu jeder Zeit Druck und Temperatur des Gases mit Umgebungsdruck und -temperatur im Gleichgewicht sind. Ferner erfolge die Bewegung des Kolbens reibungsfrei. Unter diesen Voraussetzungen sind die beschriebenen Prozesse jederzeit umkehrbar (reversibel).

Für alle Prozesse wird anhand einer Darstellung im p, V-Diagramm die umgesetzte Energie (mechanische Arbeit bzw. Wärme) berechnet. Alle Gleichungen werden mit molaren Größen geschrieben. Für Berechnungen mit spezifischen Größen müssen lediglich folgende Vertauschungen durchgeführt werden:

$$\nu R_\mathrm{m} \rightarrow m\, R_\mathrm{i}\,,$$
$$\nu C_{\mathrm{m}p} \rightarrow m\, c_p\,,$$
$$\nu C_{\mathrm{m}v} \rightarrow m\, c_v\,.$$

Die wichtigsten Ergebnisse der folgenden Betrachtungen sind in Abb. 3.22 am Ende von Abschn. 3.3.4 tabellarisch zusammengefasst.

3.3.4.1 Isotherme Zustandsänderung

Die isotherme Zustandsänderung (T = konst.) kann nach Abb. 3.15 so realisiert werden, dass ein Zylinder mit guter Wärmeleitfähigkeit an ein *Wärmebad* großer Wärmekapazität angekoppelt wird. Die Zustandsänderung soll sehr langsam (quasistatisch) erfolgen. Die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase (3.20) nimmt im Fall konstanter Temperatur die Form des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes (3.15) an:

$$pV = \nu R_\mathrm{m}\, T = \text{konst.}$$

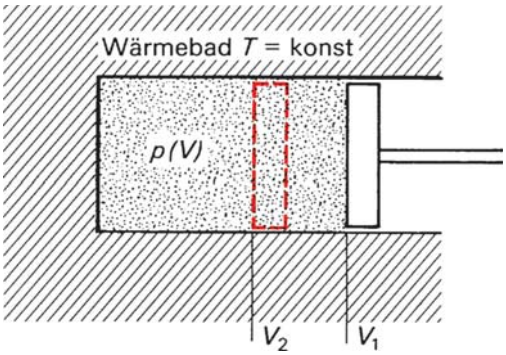


Abb. 3.15 Realisierung der isothermen Zustandsänderung

Im p, V-Diagramm von Abb. 3.16 ist die *Isotherme* eine Hyperbel. Das Gas wird vom Anfangszustand 1 auf den Endzustand 2 komprimiert. Hierbei muss dem System eine Volumenänderungsarbeit zugeführt werden. Nach (3.50) ist diese Arbeit

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V\,.$$

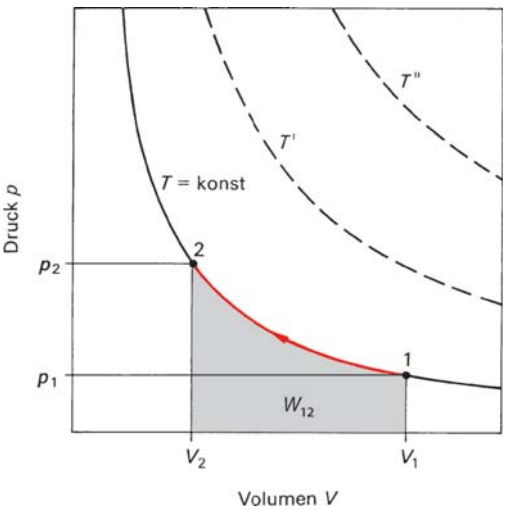


Abb. 3.16 Isotherme Kompression vom Zustand 1 zum Zustand 2. Temperaturen der Isothermen: $T < T' < T''$, W_{12} Volumenänderungsarbeit

Mit dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz $p = \nu R_m T/V$ ergibt sich hieraus

$$W_{12} = \nu R_m \, T \ln \frac{V_1}{V_2} \, . \qquad (3.61)$$

In Übereinstimmung mit der Vorzeichenkonvention von Abschn. 3.3.2 wird die *zugeführte* Kompressionsarbeit *positiv*. Bei einer Expansion wird die *abgegebene* Arbeit *negativ*. Gemäß der Bedeutung des Integrals kann die Arbeit im p, V-Diagramm anschaulich sichtbar gemacht werden:

> Die Volumenänderungsarbeit entspricht der Fläche unter der Kurve im p, V-Diagramm.

Da bei einer isothermen Zustandsänderung die innere Energie konstant bleibt (sie hängt nur von T ab), nimmt der erste Hauptsatz die Form

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W = 0 \quad \text{oder} \quad W_{12} = -Q_{12}$$

an. Dies bedeutet, dass die gesamte bei einer Kompression zugeführte Arbeit quantitativ als Wärme an die Umgebung abgegeben werden muss. (Dieser Wärmeübergang findet nur dann statt, wenn die Systemtemperatur höher ist als die Umgebungstemperatur; damit der Temperaturanstieg vernachlässigbar klein bleibt, muss der Prozess unendlich langsam geführt werden.) Umgekehrt muss bei einer isothermen Expansion die vom System nach außen abgegebene Arbeit zunächst als Wärme aus dem umgebenden Wärmebad dem System zufließen. Für die umgesetzte Wärme gilt

$$Q_{12} = \nu R_m \, T \ln \frac{V_2}{V_1} \, . \qquad (3.62)$$

3.3.4.2 Isochore Zustandsänderung

Bei der isochoren Zustandsänderung wird durch ein genügend steifes Gefäß das *Volumen* der eingeschlossenen Gasmenge *konstant* gehalten. Die Zustandsgleichung idealer Gase entspricht im Fall V = konst. dem Gesetz von *Charles* und *Gay-Lussac*, (3.14):

$$\frac{p}{T} = \frac{\nu R_m}{V} = \text{konst.}$$

Im p, V-Diagramm nach Abb. 3.17 kann die *Isochore* als vertikale Gerade dargestellt werden. Bei der skizzierten isochoren Erwärmung muss man dem System Wärme zuführen. Es gilt $\delta Q = \nu C_{m\nu} \, \mathrm{d}T$ und hieraus

$$Q_{12} = \nu C_{m\nu}(T_2 - T_1) \, . \qquad (3.63)$$

$C_{m\nu}$ ist in diesem Fall die *mittlere* molare Wärmekapazität zwischen den Temperaturen T_1 und T_2.

Da bei konstantem Volumen keine Volumenänderungsarbeit vorkommt, nimmt der erste Hauptsatz die Form $\mathrm{d}U = \delta Q$ und

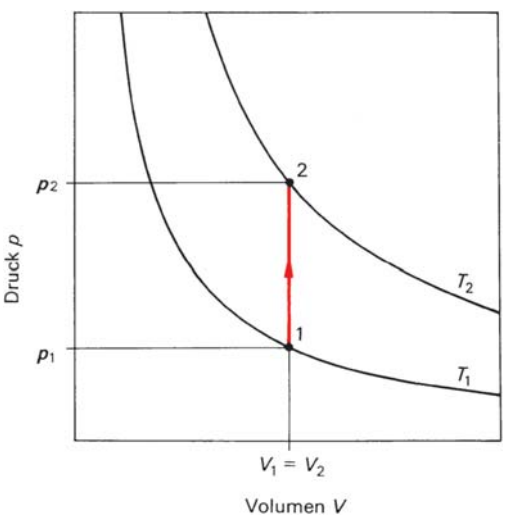


Abb. 3.17 Isochore Erwärmung vom Zustand 1 zum Zustand 2

$U_2 - U_1 = Q_{12}$ an. Dies bedeutet, dass die zugeführte Wärme ausschließlich der Erhöhung der inneren Energie dient.

3.3.4.3 Isobare Zustandsänderung

Die isobare Zustandsänderung (p = konst.) kann nach Abb. 3.18 verwirklicht werden. Durch statische Belastung des Kolbens ist der Druck im Innenraum konstant, unabhängig von der Höhe des Kolbens. Die Zustandsgleichung idealer Gase nimmt die Form des Gay-Lussac'schen Gesetzes nach (3.12) an:

$$\frac{V}{T} = \frac{\nu R_\mathrm{m}}{p} = \text{konst.}$$

Im p, V-Diagramm von Abb. 3.19 ist die *Isobare* eine waagrechte Gerade. Die gezeigte Expansion verläuft so, dass dem System von Abb. 3.18 durch eine geeignete Heizung die Wärme Q_{12} zugeführt wird, worauf sich der Kolben nach oben schiebt. Für die erforderliche Wärme gilt $\delta Q = \nu C_{mp}\,\mathrm{d}T$ oder

$$Q_{12} = \nu C_{mp}(T_2 - T_1)\,. \qquad (3.64)$$

Die Volumenänderungsarbeit entspricht der Fläche unter der Isobare. Sie beträgt

$$W_{12} = p(V_1 - V_2)\,. \qquad (3.65)$$

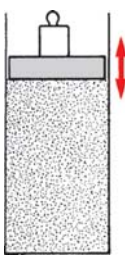


Abb. 3.18 Realisierung der isobaren Zustandsänderung

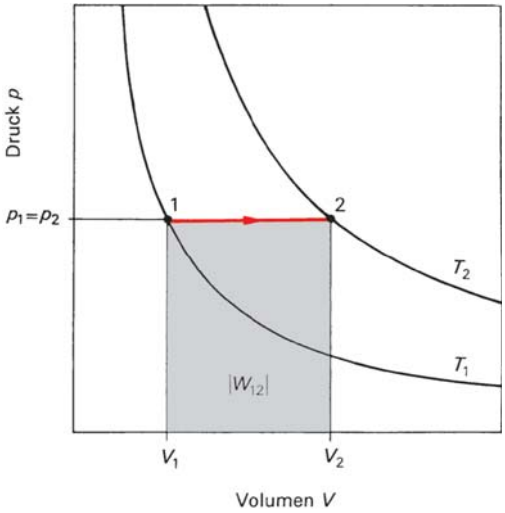


Abb. 3.19 Isobare Expansion vom Zustand 1 zum Zustand 2. W_{12} Volumenänderungsarbeit

Diese Arbeit ist bei einer Expansion negativ, d. h., sie wird vom System nach außen abgegeben. Bei einer Kompression ist die Arbeit positiv, da sie dem System zugeführt werden muss.
Nach dem ersten Hauptsatz ist

$$\delta Q = \mathrm{d}U - \delta W \qquad \text{oder}$$
$$Q_{12} = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)\,.$$

Dies bedeutet, dass bei einer Erwärmung sowohl die Erhöhung der inneren Energie als auch die abgegebene mechanische Arbeit durch die zugeführte Wärme gedeckt werden müssen. Zur Erinnerung: Bei der isochoren Erwärmung wurde durch die zugeführte Wärme lediglich die innere Energie vergrößert. Dies ist der anschauliche Grund, weshalb die *isobare* Wärmekapazität stets größer ist als die *isochore*: $C_{mp} > C_{mv}$.

3.3.4.4 Isentrope Zustandsänderung

Die isentrope Zustandsänderung kann in einem *adiabaten* System realisiert werden, bei dem jeglicher Wärmeübergang zur Um-

gebung unterbunden wird. Im Gegensatz zur isothermen Zustandsänderung, bei der gemäß Abb. 3.15 ein guter Wärmekontakt zur Umgebung notwendig ist, muss der Zylinder jetzt mit einer geeigneten Wärmeisolation versehen werden. Die adiabate Zustandsänderung lässt sich leicht verwirklichen, wenn der Prozess sehr schnell abläuft, sodass für eine Wärmeübertragung keine Zeit bleibt. Der Name *Isentrope* rührt daher, dass die Zustandsgröße *Entropie,* die in Abschn. 3.3.6 definiert ist, bei einer reibungsfrei und quasistatisch verlaufenden Zustandsänderung konstant bleibt. Die *reversibel* durchlaufende *Adiabate* ist mit der *Isentrope* identisch (Einzelheiten hierzu in Abschn. 3.3.6).
Bei einem adiabaten System ($\delta Q = 0$) nimmt der erste Hauptsatz die Form $\mathrm{d}U = \delta W$ oder

$$\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (1)$$

an. Mit (3.46) gilt

$$\nu C_{\mathrm{m}\nu}\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V = 0\,. \qquad (2)$$

Die Änderung der Enthalpie ist nach (3.51) und (3.52)

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = \nu C_{\mathrm{m}p}\,\mathrm{d}T\,.$$

Mit (1) ergibt sich hieraus

$$\nu C_{\mathrm{m}p}\,\mathrm{d}T = V\,\mathrm{d}p\,. \qquad (3)$$

Durch Elimination von $\mathrm{d}T$ aus (2) und (3) folgt

$$\frac{C_{\mathrm{m}p}}{C_{\mathrm{m}\nu}}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p}\,.$$

Diese Gleichung lässt sich direkt integrieren. Führt man noch zur Abkürzung den bereits in (3.60) definierten *Isentropenexponenten* (Adiabatenexponenten) $\varkappa = C_{\mathrm{m}p}/C_{\mathrm{m}\nu}$ ein, so ergibt sich

$$\varkappa \ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\frac{p_1}{p_2}\,.$$

Aus dieser Beziehung folgt sofort die *Isentropengleichung* (Adiabatengleichung)

$$p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa} \quad \text{oder}$$
$$pV^{\varkappa} = \text{konst.} \qquad (3.66)$$

Eine Verknüpfung zwischen Temperatur und Volumen ergibt sich, wenn mit Hilfe der Zustandsgleichung idealer Gase der Druck eliminiert wird:

$$T_1 V_1^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1} \quad \text{oder}$$
$$TV^{\varkappa-1} = \text{konst.} \qquad (3.67)$$

Schließlich lässt sich noch eine Beziehung zwischen Druck und Temperatur herstellen:

$$p_1^{1-\varkappa} T_1^{\varkappa} = p_2^{1-\varkappa} T_2^{\varkappa} \quad \text{oder}$$
$$p^{1-\varkappa} T^{\varkappa} = \text{konst.} \qquad (3.68)$$

Gleichungen (3.66) bis (3.68) werden als *Poisson'sche Gleichungen* bezeichnet. Sie wurden von D. Poisson (1781 bis 1840) im Jahr 1822 formuliert.
Im p, V-Diagramm von Abb. 3.20 ist eine isentrope Kompression dargestellt. Der Kurvenverlauf von 1 nach 2 entspricht $p = \text{konst}/V^{\varkappa}$ (3.66) und ist steiler als bei einer isothermen Zustandsänderung. Dies bedeutet, dass die Temperatur des Systems während der Kompression zunimmt. Umgekehrt kühlt sich das Gas bei einer isentropen Entspannung ab. Die Volumenänderungsarbeit lässt sich auch hierbei als Fläche unter der Kurve ermitteln bzw. durch Integration von (3.66) berechnen:

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V\,,$$

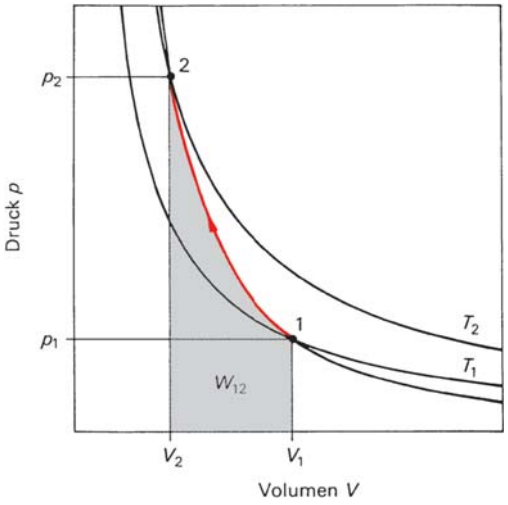


Abb. 3.20 Isentrope Kompression vom Zustand 1 zum Zustand 2

mit $p(V) = p_1 V_1^{\varkappa}/V^{\varkappa}$ ergibt sich

$$W_{12} = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] . \qquad (3.69)$$

Diese Beziehung ist mit Hilfe der Poisson'schen Gleichungen und der Zustandsgleichung idealer Gase auf vielfältige Art und Weise umformbar. Eine wesentlich einfachere Berechnung der Arbeit hingegen ist durch den ersten Hauptsatz möglich. Für ein adiabates System ($\delta Q = 0$) nimmt dieser die Form $\mathrm{d}U = \delta W$ an. Dies besagt, dass die bei einer isentropen Kompression zugeführte Volumenänderungsarbeit ausschließlich der Erhöhung der inneren Energie dient. Diese beträgt aber nach (3.46) $\delta W = \mathrm{d}U = \nu C_{\mathrm{m}\nu}\,\mathrm{d}T$ bzw. nach Integration

$$W_{12} = \nu C_{\mathrm{m}\nu}\,(T_2 - T_1) . \qquad (3.70)$$

Beispiel

3.3-3 Eine Luftfeder besteht aus einem Zylinder mit 250 mm Durchmesser und 500 mm Länge, der durch einen verschiebbaren Kolben abgeschlossen ist. Die Luft im Zylinder habe zunächst ebenso wie die Umgebungsluft die Temperatur $\vartheta_1 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ und den Druck $p_1 = 1$ bar. Welche kinetische Energie hat ein auffahrendes Fahrzeug, wenn beim Aufprall der Kolben 400 mm weit eindringt? Welche Temperatur und welcher Druck wird erreicht?

Lösung

Der Enddruck ist nach (3.66)

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = 1\ \mathrm{bar}\cdot\left(\frac{5}{1}\right)^{1{,}4} = 9{,}52\ \mathrm{bar} .$$

Die Temperatur beträgt nach (3.67)

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = 293\ \mathrm{K}\cdot\left(\frac{5}{1}\right)^{0{,}4} = 558\ \mathrm{K} ;$$

$\vartheta_2 = 285\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Die Teilchenmenge ist $\nu = p_1 V_1/R_{\mathrm{m}} T_1 = 1{,}01$ mol. Mit der molaren Wärmekapazität $C_{\mathrm{m}\nu} = 20{,}8$ J/mol K errechnet man die Kompressionsarbeit nach (3.70) zu $W_{12} = 5\,567$ J. Ein Teil dieser Arbeit, nämlich $W_{\mathrm{L}} = (V_1 - V_2)p_1 = 1\,963$ J, wird von der Umgebungsluft geleistet und nur die Differenz stammt vom auffahrenden Fahrzeug. Demnach ist $E_{\mathrm{kin}} = 3\,604$ J.

3.3.4.5 Polytrope Zustandsänderung

Sowohl die isotherme Zustandsänderung $pV^1 = \text{konst.}$ als auch die isentrope Zustandsänderung $pV^{\varkappa} = \text{konst.}$ sind Extreme, die sich in der Praxis kaum verwirklichen lassen. Bei der Kompression bzw. Expansion eines Gases in einem Verdichter oder Motor wird eher eine *polytrope* Zustandsänderung der Form

$$pV^n = \text{konst.} \qquad (3.71)$$

ablaufen, wobei der *Polytropenexponent* n im Allgemeinen zwischen 1 und $\varkappa$ liegt: $1 < n < \varkappa$. Im p,V-Diagramm der Abb. 3.21 verläuft eine solche polytrope Zustandsänderung innerhalb des gekennzeichneten Gebiets. Für

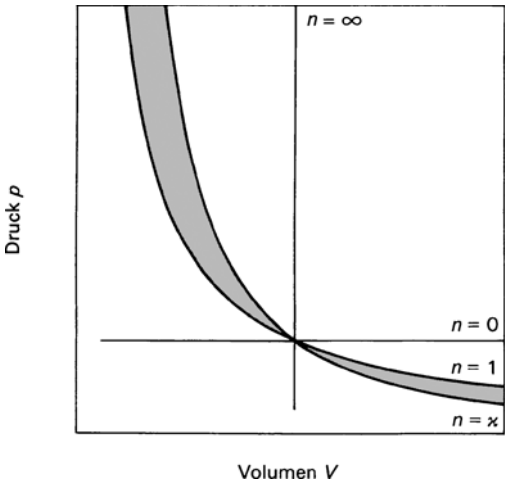


Abb. 3.21 Polytropen. n Polytropenexponent, $\varkappa$ Isentropenexponent; hervorgehoben: Bereich $1 < n < \varkappa$ der Polytrope im engeren Sinn

einen *realen* Verdichtungsprozess, wie er beispielsweise in einem ungekühlten Turboverdichter stattfindet, ist $n < \varkappa$.

Die Polytropengleichung (3.71) beschreibt aber auch alle bisher beschriebenen Zustandsänderungen. Dabei nimmt der Polytropenexponent folgende Werte an:

- Isotherme: $n = 1$,
- Isentrope: $n = \varkappa$,
- Isobare: $n = 0$,
- Isochore: $n = \infty$.

Die Poisson'schen Gleichungen (3.66) bis (3.68) gelten auch für polytrope Zustandsänderungen, wenn der Isentropenexponent $\varkappa$ durch den Polytropenexponenten n ersetzt wird. Ebenso gilt (3.69) für die Berechnung der Volumenänderungsarbeit, wenn anstelle des Isentropenexponenten der Polytropenexponent eingesetzt wird.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse von Abschn. 3.3.4 zeigt Abb. 3.22.

Zur Übung

Ü 3.3-5 Beim Dieselmotor wird im Kompressionstakt Luft so rasch verdichtet, dass keine Wärmeabgabe an die Umgebung erfolgt und die hohe Temperatur zur Entzündung des eingespritzten Kraftstoffs ausreicht. Gegeben sei ein Motor mit dem Verdichtungsverhältnis $V_1/V_2 = 20$. Zu Beginn der Kompression ist das Volumen $V_1 = 0{,}6\,\text{l}$ mit Luft der Temperatur $\vartheta_1 = 27\,^\circ\text{C}$ und dem Druck $p_1 = 950\,\text{mbar}$ gefüllt. a) Wie hoch ist die Endtemperatur ϑ_2 nach der Kompression? b) Welcher Druck p_2 stellt sich ein? c) Welche Arbeit W_{12} muss während der Kompression von außen am Kolben verrichtet werden?

Ü 3.3-6 Ein Wetterballon hätte prall gefüllt das Volumen $V_{\max} = 50\,\text{m}^3$. Am Erdboden ist er nur teilweise gefüllt worden: Beim Druck $p_1 = 1\,\text{bar}$ und der Temperatur $\vartheta_1 = 7\,^\circ\text{C}$ nimmt das eingefüllte Wasserstoffgas nur das Volumen $V_1 = \frac{1}{6} V_{\max}$ ein.

a) Welche Gasmenge v und welche Masse m enthält der Ballon?
b) Der Aufstieg geschieht so rasch, dass durch die Ballonhülle praktisch keine Wärme übertragen wird. In einer bestimmten Höhe ist der Innendruck gleich dem Außendruck $p_2 = 0{,}2\,\text{bar}$. Welches Gasvolumen V_2 enthält dann der Ballon?
c) Wie groß ist in diesem Fall die Temperatur T_2 der Gasfüllung?
d) Sonneneinstrahlung heizt danach den Ballon auf. Das Füllgas dehnt sich so lange aus, bis der Ballon prall gefüllt ist. Dabei bleibt der Druck konstant ($p_3 = p_2$). Auf welchen Wert T_3 steigt dabei die Gastemperatur?
e) Welche Wärme Q_{23} hat das Gas aufgenommen?

Ü 3.3-7 Eine abgeschlossene Menge eines idealen Gases wird vom Ausgangszustand $p_1 = 1\,\text{bar}$, $V_1 = 1\,\text{l}$ und $\vartheta_1 = 22\,^\circ\text{C}$ auf die Hälfte seines Volumens verdichtet. Während der Kompression wird Wärme zugeführt, sodass eine Zustandsänderung gemäß der Beziehung $pV^2 = \text{konst.}$ durchlaufen wird. a) Wie groß ist der erreichte Enddruck p_2? b) Welche Endtemperatur ϑ_2 stellt sich ein? c) Welche Arbeit W_{12} wurde dem System bei der Kompression zugeführt? d) Wie groß ist die zugeführte Wärme Q_{12}, wenn das Gas aus Molekülen in Form einer starren Hantel besteht, bei denen die Freiheitsgrade der Translation und Rotation angeregt sind?

Ü 3.3-8 Wasserstoff mit der Teilchenmenge v wird in einem Zylinder mit verschiebbarem Kolben einer Zustandsänderung unterworfen. Der Ausgangszustand ist gekennzeichnet durch $p_1 = 1\,\text{bar}$, $V_1 = 2\,\text{l}$

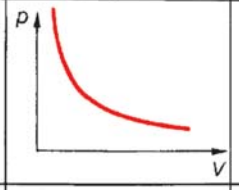
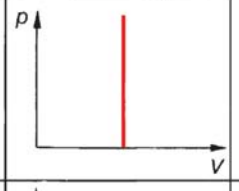
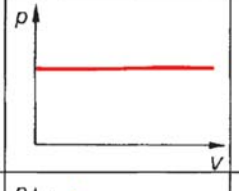
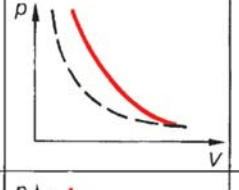
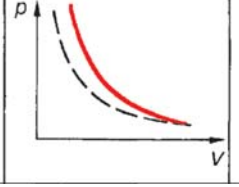
Zustands-änderung	Bedingung	p, V-Diagramm	thermische Zustandsgrößen	erster Hauptsatz	Wärme	Volumen-änderungsarbeit
isotherm	$dT = 0$ T = konstant		pV = konstant *Boyle-Mariotte*	$\delta Q + \delta W = 0$ $Q_{12} + W_{12} = 0$	$\delta Q = -\delta W$ $Q_{12} = \nu R_m T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W = -p\,dV$ $W_{12} = \nu R_m T \ln \frac{V_1}{V_2}$
isochor	$dV = 0$ V = konstant		$\frac{p}{T}$ = konstant *Charles*	$dU = \delta Q$ $U_2 - U_1 = Q_{12}$	$\delta Q = \nu C_{mv} dT$ $Q_{12} = \nu C_{mv}(T_2 - T_1)$ $= mc_v(T_2 - T_1)$	$\delta W = 0$ $W_{12} = 0$
isobar	$dp = 0$ p = konstant		$\frac{V}{T}$ = konstant *Gay-Lussac*	$dU = \delta Q + \delta W$ $U_2 - U_1 =$ $Q_{12} + W_{12}$	$\delta Q = \nu C_{mp} dT$ $Q_{12} = \nu C_{mp}(T_2 - T_1)$ $= mc_p(T_2 - T_1)$	$\delta W = p\,dV$ $W_{12} = p(V_1 - V_2)$
isentrop	$dS = 0$ $\delta Q = 0$ S = konstant		$pV^{\varkappa}$ = konstant $TV^{\varkappa-1}$ = konstant $p^{1-\varkappa}T^{\varkappa}$ = konstant	$dU = \delta W$ $U_2 - U_1 = W_{12}$	$\delta Q = 0$ $Q_{12} = 0$	$\delta W = \nu C_{mv}\,dT$ $W_{12} = \nu C_{mv}(T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\varkappa - 1}$
polytrop			pV^n = konstant TV^{n-1} = konstant $p^{1-n}T^n$ = konstant	$dU = \delta Q + \delta W$ $U_2 - U_1 =$ $Q_{12} + W_{12}$	$\delta Q = dU - \delta W$ $Q_{12} = \nu R_m(T_2 - T_1)$ $\left(\frac{1}{\varkappa - 1} - \frac{1}{n-1}\right)$	$\delta W = -p\,dV$ $W_{12} = \frac{\nu R_m}{n-1}(T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{n-1}$

Abb. 3.22 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase

und $\vartheta_1 = 20\,°C$. Die Zustandsänderung erfolgt im p, V-Diagramm längs einer Geraden vom Anfangs- zum Endzustand, der bestimmt ist durch den Druck $p_2 = 2\,\text{bar}$ und das Volumen $V_2 = 3\,\text{l}$. a) Wie groß ist die Teilchenmenge ν des Gases? b) Wie groß ist die Endtemperatur ϑ_2? c) Welche Arbeit W_{12} gibt das Gas nach außen ab? d) Um welchen Betrag ΔU steigt die innere Energie des Gases? e) Welche Wärmemenge Q_{12} wird bei der Zustandsänderung zugeführt?

3.3.5 Kreisprozesse

Durchläuft ein System eine Folge von Zustandsänderungen, sodass der Endzustand wieder mit dem Anfangszustand übereinstimmt, so handelt es sich um einen *Kreisprozess*. Ein *rechtsläufiger* Kreisprozess liegt vor, wenn die Zustandsänderungen im p, V-Diagramm im *Uhrzeigersinn* durchlaufen werden. Beim Kreisprozess in Abb. 3.23 wird während der Expansion von 1 nach 2 Volumenänderungsarbeit nach außen abgegeben, die der Fläche unter der oberen Kurve entspricht. Bei der anschließenden Kompression von 2 nach 1 wird Arbeit zugeführt, die der Fläche unter der unteren Kurve entspricht.

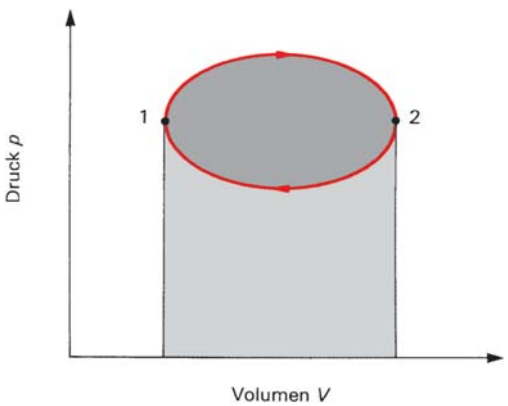


Abb. 3.23 Rechtsläufiger Kreisprozess. 1, 2 Zustandspunkte, helle Graufläche: zugeführte Volumenänderungsarbeit, gesamte Graufläche: abgegebene Volumenänderungsarbeit, umfahrene Fläche: Nutzarbeit

Insgesamt wird also bei einem rechtsläufigen Kreisprozess mehr Arbeit abgegeben als zugeführt.

Die je Umlauf nach außen abgegebene Nutzarbeit entspricht dem Flächeninhalt der vom Kreisprozess eingeschlossenen Figur im p, V-Diagramm. Sie kann als Kreisintegral geschrieben werden:

$$W = \oint \delta W = -\oint p\,\mathrm{d}V\,. \tag{3.72}$$

Der erste Hauptsatz nimmt bei einem kompletten Umlauf die Form

$$\oint \mathrm{d}U = 0 = \oint \delta Q + \oint \delta W \tag{3.73}$$

an. Das Kreisintegral über alle Änderungen der inneren Energie ist null, da die innere Energie als Zustandsgröße nach einem vollen Umlauf wieder den Anfangswert annimmt. Dies bedeutet, dass sich die je Zyklus abgegebene Nutzarbeit aus der Differenz der zu- und abgeführten Wärmen ergibt.

Bei einem *linksläufigen* Kreisprozess wird die Figur im p, V-Diagramm im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Da hierbei die abgegebene Expansionsarbeit stets kleiner ist als die zugeführte Kompressionsarbeit, läuft der Prozess nur, wenn mit Hilfe eines Motors periodisch mechanische Arbeit zugeführt wird. Tabelle 3.9 zeigt eine Gegenüberstellung der Eigenschaften von rechts- und linksläufigen Kreisprozessen.

Die Kreisprozesse, die im Folgenden beschrieben werden, sollen reibungsfrei durchlaufen werden. Ferner soll sich das Gas stets im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Umgebung befinden. Unter diesen Voraussetzungen sind alle Kreisprozesse *reversibel* führbar, d. h.,

Tabelle 3.9 Eigenschaften von Kreisprozessen

Umlaufsinn	rechtsläufig	linksläufig
Bezeichnung	Kraftmaschinenprozess	Arbeitsmaschinenprozess
Wärmefluss	Wärme wird bei hoher Temperatur aufgenommen und bei tiefer Temperatur abgegeben.	Wärme wird bei tiefer Temperatur aufgenommen und bei hoher Temperatur abgegeben.
mechanische Arbeit	Differenz von zu- und abgeführter Wärme wird als mechanische Nutzarbeit abgegeben.	Differenz von ab- und zugeführter Wärme wird als mechanische Arbeit zugeführt.
Beispiele	Verbrennungsmotor, Wärmekraftmaschine	Kältemaschine, Wärmepumpe

sie können sowohl rechts- als auch linksläufig sein.

3.3.5.1 Carnot'scher Kreisprozess

Rechtsläufiger Prozess

Von S. Carnot (1796 bis 1832) wurde ein Kreisprozess vorgeschlagen, mit dem Wärme in einer periodisch arbeitenden Maschine in mechanische Arbeit umgeformt werden kann. Nach Abb. 3.24 verläuft der Prozess im p,V-Diagramm zwischen zwei Isothermen und zwei Isentropen. Als Arbeitsmedium dient ein ideales Gas der Teilchenmenge ν, Folgende Einzelprozesse werden aneinandergereiht:

$1 \to 2$: Isotherme Kompression von V_1 auf V_2 bei der tiefen Temperatur T_1: zugeführte Arbeit

$$W_{12} = \nu R_\mathrm{m} T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} ,$$

abgegebene Wärme

$$Q_{12} = -\nu R_\mathrm{m} T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} .$$

$2 \to 3$: Isentrope Kompression von V_2 auf V_3; die Temperatur steigt von T_1 auf T_3: zugeführte Arbeit

$$W_{23} = \nu C_{\mathrm{m}\nu}(T_3 - T_1) .$$

$3 \to 4$: Isotherme Expansion von V_3 auf V_4 bei der hohen Temperatur T_3: zugeführte Wärme

$$Q_{34} = \nu R_\mathrm{m} T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} ,$$

abgegebene Arbeit

$$W_{34} = -\nu R_\mathrm{m} T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} .$$

$4 \to 1$: Isentrope Expansion von V_4 auf V_1; die Temperatur fällt von T_3 auf T_1: abgegebene Arbeit

$$W_{41} = -\nu C_{\mathrm{m}\nu}(T_3 - T_1) .$$

Die Nutzarbeit je Zyklus entspricht dem Inhalt der rot begrenzten Fläche im p, V-Diagramm der Abb. 3.24. Sie beträgt

$$W = \oint \delta W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} .$$

Mit $W_{23} = -W_{41}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{34} \\ &= -\nu R_\mathrm{m} \left(T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} - T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \right) . \end{aligned}$$

Für die beiden Isentropen gilt nach (3.67)

$$T_3 V_3^{\varkappa-1} = T_1 V_2^{\varkappa-1} \qquad \text{und}$$
$$T_3 V_4^{\varkappa-1} = T_1 V_1^{\varkappa-1} .$$

Daraus folgt für die Volumina $V_4/V_3 = V_1/V_2$ und schließlich für die Nutzarbeit

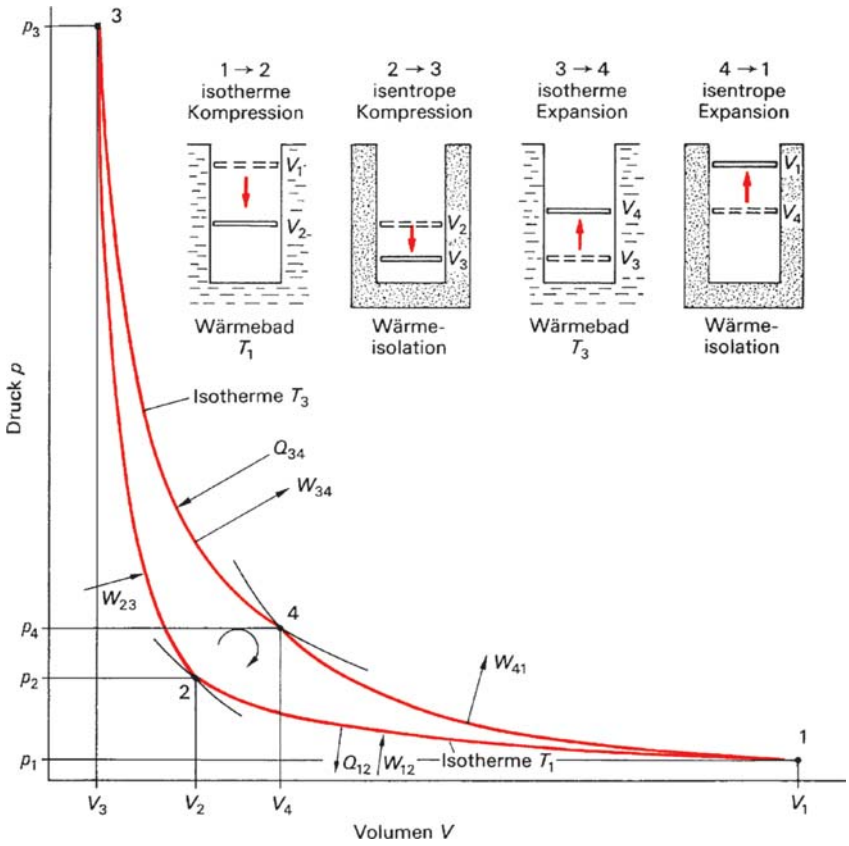


Abb. 3.24 Carnot'scher Kraftmaschinenprozess. Q Wärme, W Arbeit, rot umgrenzte Fläche: Nutzarbeit

$$W = -\nu R_\mathrm{m} \ln \frac{V_4}{V_3}(T_3 - T_1) \,.$$

Sie ist negativ, weil sie vom System nach außen abgegeben wird.

Die Energieströme, die bei der Carnot-Kraftmaschine (und im Prinzip bei jeder Wärmekraftmaschine) umgesetzt werden, sind in Abb. 3.25 anschaulich dargestellt. Von der zugeführten Wärme kann nur ein Teil (meist der kleinere) als mechanische Arbeit abgegeben werden. Den anderen Teil muss das System als Abwärme an eine Wärmesenke tiefer Temperatur abführen. Aus dem ersten Hauptsatz folgt die Bilanzgleichung

$$|W| = Q_\mathrm{zu} - |Q_\mathrm{ab}|$$

oder, mit den Bezeichnungen des Carnot-Prozesses und richtigen Vorzeichen,

$$Q_{12} + Q_{34} + W = 0 \,. \tag{3.74}$$

Verschiedene Kreisprozesse lassen sich miteinander vergleichen durch Berechnung des *thermischen Wirkungsgrades* η_th, der den Nutzen (abgegebene Arbeit) zum Aufwand (zugeführte Wärme) ins Verhältnis setzt:

$$\eta_\mathrm{th} = \frac{|W|}{Q_\mathrm{zu}} \,. \tag{3.75}$$

Beim Carnot-Prozess ist zugeführte Wärme

$$Q_{zu} = Q_{34} = \nu R_m T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} .$$

Damit ist der *thermische Wirkungsgrad*

$$\eta_{th,C} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_3} . \qquad (3.76)$$

Der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses ist nur von den Temperaturen der beiden Wärmebäder abhängig.

Der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses könnte dann 100 % werden, wenn die Temperatur der Wärmesenke $T_1 = 0\,K$ wäre. Da in der Praxis die Wärmesenke z. B. das Kühlwasser eines Flusses oder die Umgebungsluft ist, muss für die Erzielung eines hohen Wirkungsgrades die Temperatur der Wärmequelle so hoch wie möglich sein.

Beispiel

3.3-4 Welcher thermische Wirkungsgrad ist mit einem Carnot-Prozess erreichbar, der zwischen den Temperaturen $\vartheta_3 = 500\,°C$ und $\vartheta_1 = 50\,°C$ abläuft?

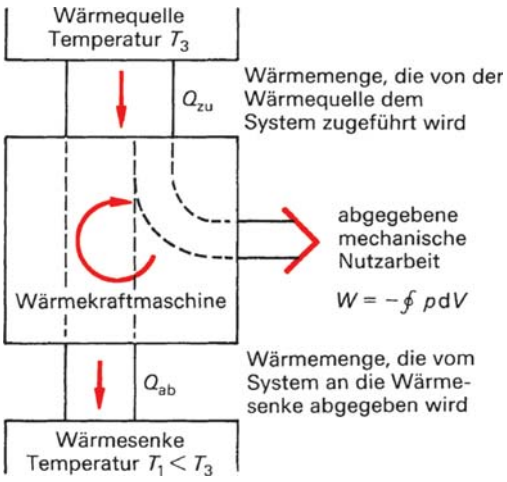


Abb. 3.25 Energieflussdiagramm eines rechtsläufigen Carnot-Prozesses

Lösung

Nach (3.76) ist

$$\eta_{th,C} = \frac{450\,K}{773\,K} = 0{,}58 = 58\%$$

Der Carnot-Prozess lässt sich praktisch nicht realisieren, da zu viele widersprüchliche Eigenschaften in einem System vereinigt sein müssten. Seine große Bedeutung liegt in der Abschätzung des *maximalen Nutzeffekts* einer Wärmekraftmaschine, die zwischen zwei Temperaturgrenzen Wärme in Arbeit umwandeln soll. Ein Vergleich verschiedener rechtsläufiger Kreisprozesse, die zwischen der Maximaltemperatur T_3 und der Minimaltemperatur T_1 ablaufen, zeigt, dass der höchstmögliche thermische Wirkungsgrad durch den Carnot-Prozess erreicht wird.

Thermodynamische Temperatur

Da der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses nur von den Temperaturen der beteiligten Wärmebäder, aber nicht vom Arbeitsstoff abhängt, ist eine Temperaturdefinition möglich, die von speziellen Thermometereigenschaften unabhängig ist. Nach (3.74) bis (3.76) gilt

$$\eta_{th} = \frac{Q_{zu} - |Q_{ab}|}{Q_{zu}} = 1 - \frac{|Q_{ab}|}{Q_{zu}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} .$$

Hieraus folgt die Beziehung zwischen den umgesetzten Wärmemengen und den Temperaturen der Wärmebäder:

$$\frac{|Q_{ab}|}{Q_{zu}} = \frac{T_1}{T_3} \quad \text{oder} \quad \frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} = 0 . \qquad (3.77)$$

Gleichung (3.77) erlaubt nach *W. Thomson* (*Lord Kelvin*) die Definition der *thermodynamischen Temperatur*. Die Temperaturen zweier Wärmebäder lassen sich dadurch vergleichen, dass man zwischen ihnen einen

idealen Carnot-Prozess ablaufen lässt und die übertragenen Wärmen misst. Wird die Temperatur eines Wärmebads festgelegt, z. B. die Temperatur von Wasser am Tripelpunkt mit $T_{Tr} = 273{,}16\,K$, dann kann die ganze Temperaturskala ausgemessen werden. Die so definierte thermodynamische Temperatur ist identisch mit der *Gastemperatur* des Gasthermometers (Abschn. 3.1.3).

Linksläufiger Prozess

Beim linksläufigen Carnot-Prozess wird das p, V-Diagramm von Abb. 3.24 im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dabei wird bei der tiefen Temperatur T_1 Wärme aus der Umgebung aufgenommen und bei der hohen Temperatur T_3 wieder abgegeben. Das Energieflussdiagramm des linksläufigen Prozesses ist in Abb. 3.26 dargestellt. Die Energiebilanz sagt aus, dass die abgegebene Wärme betragsmäßig gleich ist der Summe aus zugeführter Wärme und mechanischer Arbeit:

$$|Q_{ab}| = Q_{zu} + W\,. \tag{3.78}$$

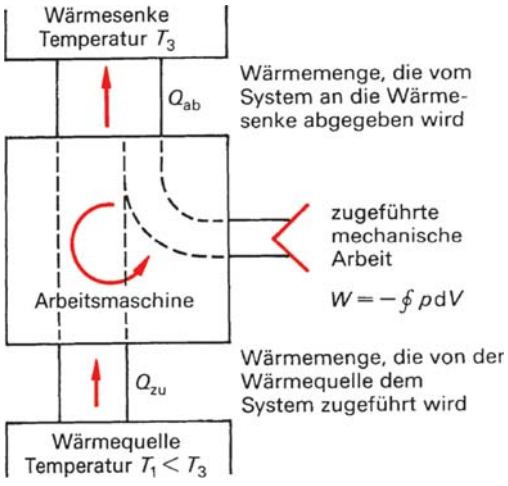


Abb. 3.26 Energieflussdiagramm eines linksläufigen Carnot-Prozesses

Der linksläufige Kreisprozess kann auf zweierlei Arten genutzt werden:

a) Kältemaschine

Eine Kältemaschine hat die Aufgabe, einen Raum zu kühlen, in dem z. B. Lebensmittel gelagert werden. Der zu kühlende Raum dient als Wärmequelle. Ihm wird bei der Temperatur T_1, die niedriger ist als die Umgebungstemperatur T_3, die Wärme Q_{zu} entzogen und dem System zugeführt. Als Wärmesenke dient i. Allg. die Umgebung. Das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand wird bei linksläufigen Kreisprozessen als *Leistungszahl* ε bezeichnet. Bei einer Kältemaschine ist der Nutzen die Wärme Q_{zu}, der Aufwand ist die Arbeit W des Antriebsmotors. Die Leistungszahl einer Kältemaschine wird deshalb definiert als

$$\varepsilon_K = \frac{Q_{zu}}{W} = \frac{\dot{Q}_{zu}}{P}\,. \tag{3.79}$$

($\dot{Q}_{zu}$ Wärmefluss, P Antriebsleistung). Für den Carnot-Prozess ergibt sich mit den bereits berechneten Energiebeträgen

$$\varepsilon_{K,C} = \frac{T_1}{T_3 - T_1}\,. \tag{3.80}$$

Die Leistungszahl ist umso günstiger, je näher die Temperaturen von Wärmequelle und Wärmesenke beieinander liegen.

Beispiel

3.3-5 Eine Kältemaschine nach Carnot soll eine Kühlraumtemperatur von $\vartheta_1 = 5\,°C$ bei einer Außentemperatur von $\vartheta_3 = 35\,°C$ erreichen. Wie groß ist die Leistungszahl ε_{KC}?

Lösung

Nach (3.80) ist $\varepsilon_{K,C} = 278\,K/30\,K = 9{,}27$. Dies bedeutet, dass die Leistung des Antriebsmotors nur rund ein Neuntel der Wärmeleistung sein muss, die dem Kühlraum entzogen werden soll.

b) Wärmepumpe

Bei der Wärmepumpe ist die Wärmequelle die Umgebung (z. B. Luft, Erdreich, Grundwasser), der die Wärme bei tiefer Temperatur entzogen und dem System zugeführt wird. Wärmesenke ist z. B. die Warmwasserheizung eines Hauses. Der Nutzen bei der Wärmepumpe liegt also in der bei hoher Temperatur abgegebenen Wärme Q_{ab}; der Aufwand ist auch in diesem Fall die Arbeit W des Antriebsmotors. Die Leistungszahl der Wärmepumpe wird deshalb definiert als

$$\varepsilon_W = \frac{|Q_{ab}|}{W} = \frac{|\dot{Q}_{ab}|}{P} \,. \tag{3.81}$$

Für den Carnot-Prozess ergibt sich

$$\varepsilon_{W,C} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} = -\frac{1}{\eta_{th,C}} \,. \tag{3.82}$$

Die Leistungszahl der Wärmepumpe nach Carnot ist immer größer als eins, und zwar umso größer, je kleiner der thermische Wirkungsgrad eines rechtsläufigen Carnot-Prozesses zwischen denselben Temperaturgrenzen ist, d. h., je kleiner die Temperaturdifferenz $T_3 - T_1$ ist.

Beispiel

3.3-6 Eine Wärmepumpe nimmt Wärme aus der Umgebungsluft bei $\vartheta_1 = -10\,°C$ auf und gibt Wärme an eine Warmwasserheizung mit der Vorlauftemperatur $\vartheta_3 = 40\,°C$ ab. Wie groß ist die Leistungszahl nach Carnot?

Lösung

Nach (3.82) gilt $\varepsilon_{W,C} = 313\,K/50\,K = 6{,}26$.

In der Praxis werden Kältemaschinen und Wärmepumpen meist mit *Kältemitteln*, wie z. B. Butan, Propan und Kohlenstoffdioxid, betrieben, die während des Kreisprozesses Phasenänderungen (Abschn. 3.4.3) durchlaufen. Das Prinzip des Kreislaufs zeigt Abb. 3.27. In einem Verdampfer wird dem flüssigen Kältemittel, das geringen Druck und niedrige Temperatur hat, die Wärme Q_{zu} zugeführt, sodass es verdampft. Der Dampf wird in einem Kompressor verdichtet und somit erwärmt. Im Kondensator wird dem heißen Dampf die Wärmemenge Q_{ab} entzogen, sodass das Kältemittel kondensiert. Die unter hohem Druck stehende Flüssigkeit wird durch ein Drosselventil entspannt. Dabei kühlt sie sich ab und wird dem Verdampfer für den nächsten Kreislauf zugeleitet.

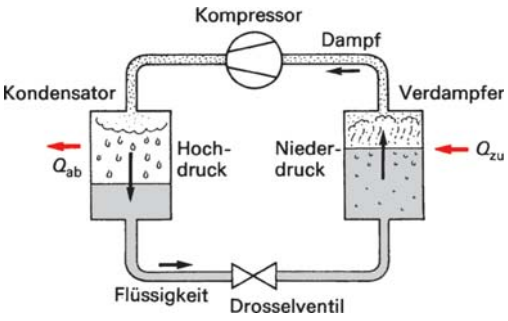


Abb. 3.27 Kreislauf einer Kompressor-Kältemaschine bzw. -Wärmepumpe

Die Leistungszahlen realer Wärmepumpen sind niedriger als die Leistungszahl eines Carnot-Prozesses. Für elektrisch betriebene Luft/Wasser-Wärmepumpen ist beispielsweise $\varepsilon_W \approx 3$. Bei großen Anlagen, die mit einem Dieselmotor angetrieben werden, sind die erreichbaren Leistungszahlen größer.

3.3.5.2 Technische Kreisprozesse

Die Kreisprozesse, die in realen Maschinen ablaufen, können durch idealisierte *Vergleichsprozesse* angenähert werden. Abbildung 3.28 zeigt eine Zusammenstellung von Vergleichsprozessen, die in technischen Wärmekraftmaschinen idealisiert ablaufen. Die Pfeile im

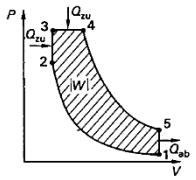
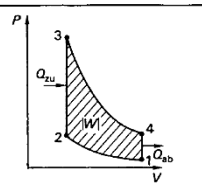
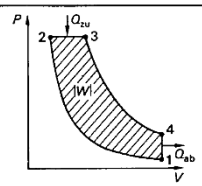
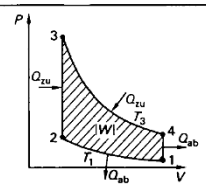
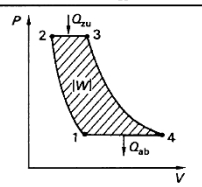
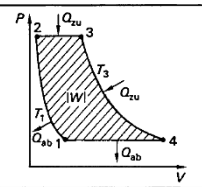
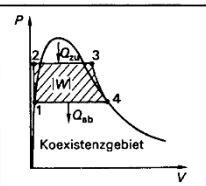
		Bezeichnung	*p*, *V*-Diagramm	Einzel-prozesse	thermischer Wirkungsgrad
Kolbenmaschinen	Verbrennungsmotoren	Seiliger-Prozess		2 Isentropen, 2 Isochoren, 1 Isobare	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2 + \varkappa(T_4 - T_3)}$
		Otto-Prozess		2 Isentropen, 2 Isochoren	$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}}$
		Diesel-Prozess		2 Isentropen, 1 Isochore, 1 Isobare	$\eta_{th} = 1 - \frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\varkappa} - 1}{\varkappa\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}}$
	Heißluftmotor	Stirling-Prozess		2 Isothermen, 2 Isochoren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{th,C}$
Strömungsmaschinen	offene Gasturbine	Joule-Prozess		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$
	geschlossene Gasturbine	Ericsson-Prozess		2 Isothermen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{th,C}$
	Dampfkraft-anlagen	Clausius-Rankine-Prozess		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \approx 1 - \frac{h_4}{h_3}$

Abb. 3.28 Technische Kreisprozesse

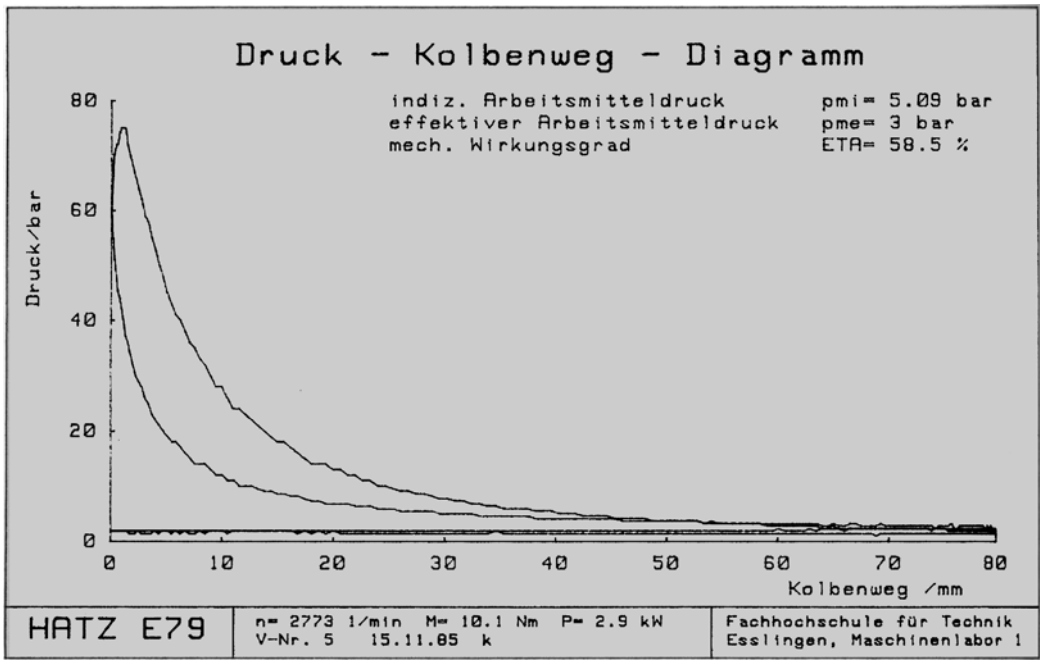


Abb. 3.29 p, V-Diagramm eines Dieselmotors (Rechnerausdruck)

p, V-Diagramm zeigen die Prozesse, bei denen Wärme zu- bzw. abgeführt wird.

Obwohl *Verbrennungsmotoren* offene Systeme sind, können sie näherungsweise als geschlossene Systeme angesehen werden. Beim *Seiliger-Prozess* (nach einem Vorschlag von M. Seiliger, 1922) wird Frischluft isentrop verdichtet. Nach Zündung des Luft-Kraftstoff-Gemisches läuft eine Verbrennung ab, die näherungsweise durch eine isochore und isobare Wärmezufuhr beschrieben wird. Die Expansion des verbrannten Gemisches erfolgt isentrop. Der nachfolgende Austausch von verbrannten Gasen durch Frischluft wird als isochore Wärmeabgabe angenähert. Der thermische Wirkungsgrad ist abhängig von den Temperaturen der fünf Eckpunkte.

Ein Spezialfall des Seiliger-Prozesses mit $V_2 = V_3 = V_4$ ist der *Otto-Prozess* (N. Otto, 1832 bis 1892). Hierbei verbrennt das Luft-Kraftstoff-Gemisch nach der Zündung so schnell, dass die Wärmezufuhr idealisierend wie eine isochore Zustandsänderung erfolgt. Der thermische Wirkungsgrad hängt ab vom Kompressionsverhältnis $\varepsilon = V_1/V_2$.

Ein weiterer Spezialfall des Seiliger-Prozesses mit $p_2 = p_3 = p_4$ ist der *Diesel-Prozess* (R. Diesel, 1858 bis 1913). Der Kraftstoff wird so in die komprimierte Luft eingespritzt, dass die Verbrennung näherungsweise isobar erfolgt. Abbildung 3.29 zeigt ein Original-p, V-Diagramm eines Dieselmotors. Der thermische Wirkungsgrad des Diesel-Prozesses übertrifft den des Otto-Prozesses, allerdings ist der mittlere Kolbendruck im Dieselmotor wesentlich höher als im Ottomotor.

Das Arbeitsmedium beim *Stirling-Prozess* (R. Stirling, 1790 bis 1878) ist ein Gas (meistens Luft). Die Wärmezufuhr erfolgt bei der isochoren Erwärmung und der isothermen Expansion. Die während der isochoren Abkühlung abgegebene Wärme ist betragsmäßig

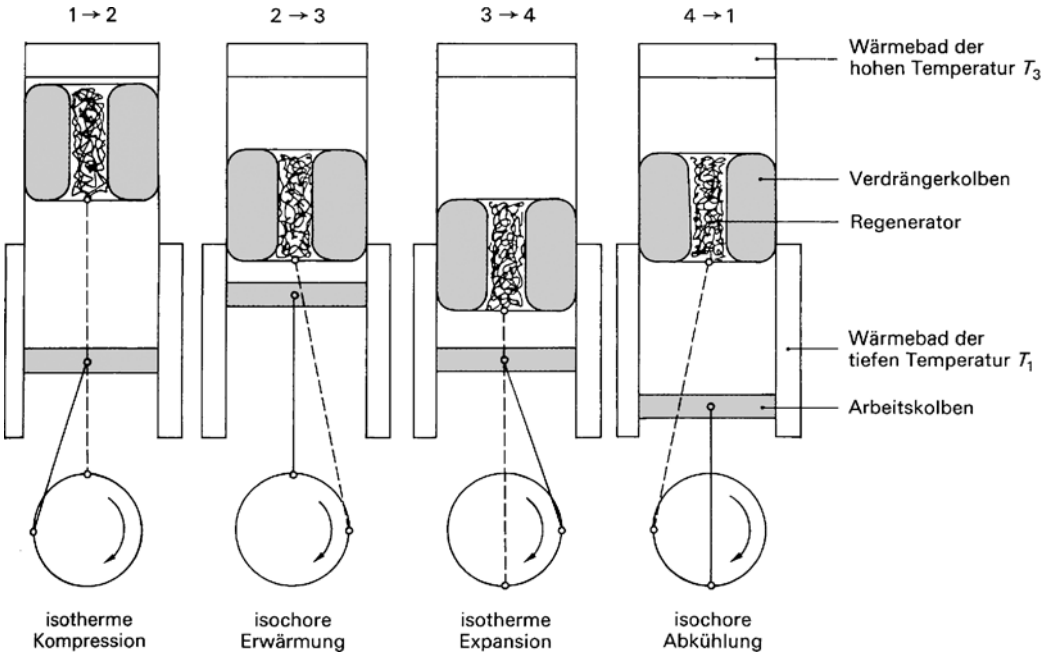


Abb. 3.30 Realisierung eines Stirling'schen Kreisprozesses

so groß wie die bei der isochoren Erwärmung zugeführte: $Q_{23} = -Q_{41}$. Gelingt es, die abgegebene Wärme Q_{41} zwischenzuspeichern und bei der isochoren Erwärmung wieder dem System zuzuführen, dann muss von außen her nur noch die Wärme Q_{34} zugeführt werden und der thermische Wirkungsgrad erreicht den Wert des Carnot-Prozesses.

Der Stirling-Prozess kann nach Abb. 3.30 näherungsweise so realisiert werden, dass ein Arbeitskolben und ein Verdrängerkolben, um 90° phasenverschoben, auf eine Kurbelwelle arbeiten. Der Verdrängerkolben schiebt die Luft im Zylinder hin und her und bringt sie abwechselnd in Kontakt mit dem heißen bzw. kalten Teil der Maschine. Der Regenerator besteht aus Metallspänen, die beim Durchströmen der heißen Luft Wärme aufnehmen und diese nachher wieder an die durchströmende kalte Luft abgeben.

Abbildung 3.31 zeigt ein Demonstrationsmodell eines Heißluftmotors. Im Deckel ist eine Glühwendel eingebaut, die als elektrische Wärmequelle dient. Die Wärmesenke ist Kühlwasser, das den unteren Teil des doppelwandigen Zylinders durchfließt. Der Heißluftmotor kann bezüglich des thermischen Wirkungsgrades bislang nicht mit den Verbrennungsmotoren konkurrieren, weil die interne Wärmeübertragung ($Q_{41} \rightarrow Q_{23}$) nur unvollkommen gelingt. Der linksläufige Stirling-Prozess wurde z. B. bei der Philips-Gaskältemaschine verwirklicht, die mit dem Arbeitsmedium Wasserstoff oder Helium bei der Luftverflüssigung eingesetzt wird.

In der *offenen Gasturbine*, die hauptsächlich bei Flugzeugen verwendet wird, läuft ein Prozess ab, den man näherungsweise durch den *Joule-Prozess* beschreiben kann. Luft wird im Verdichter isentrop komprimiert. In der Brennkammer wird eingespritzter Treibstoff (Kerosin) mit der heißen Luft verbrannt (isobare Erwärmung) und anschließend in der Turbine isentrop entspannt. Die verbrannten



Abb. 3.31 Demonstrationsmodell eines Heißluftmotors

Gase werden beim realen Prozess ausgestoßen. Der idealisierte Kreisprozess wird durch eine isobare Abkühlung geschlossen. *Ortsfeste* Gasturbinen arbeiten nach dem geschlossenen *Ericsson-Prozess* (J. Ericsson, 1803 bis 1899), der von J. Ackeret und C. Keller näherungsweise verwirklicht wurde. Unter der Voraussetzung, dass die bei den isobaren Zustandsänderungen umgesetzten Wärmemengen intern übertragen werden können, erreicht der Ericsson-Prozess den thermischen Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses.

In *Dampfkraftanlagen* läuft i. Allg. der *Clausius-Rankine-Prozess* (R. J. E. Clausius, 1822 bis 1885; W. J. M. Rankine, 1802 bis 1872) ab. Die Speisewasserpumpe erhöht von 1 nach 2 isentrop den Druck des Wassers. Durch isobare Wärmezufuhr wird das Wasser verdampft und der Heißdampf von 3 nach 4 in der Turbine isentrop entspannt. Im Kondensator verflüssigt sich der entspannte Dampf durch Wärmeabfuhr an das Kühlwasser und Kondensat wird wieder der Speisewasserpumpe zugeleitet. Der thermische Wirkungsgrad ist im Wesentlichen von der Enthalpie des Dampfes vor und nach der Entspannung abhängig.

Zur Übung

Ü 3.3-9 Mit einem idealen Gas wird der rechtsläufige Kreisprozess gemäß Abb. 3.32 durchgeführt, der sich aus Isobaren und Isochoren zusammensetzt. Die Zustandsgrößen der Eckpunkte im p, V-Diagramm sind $p_1 = 7{,}5$ bar, $p_2 = 10$ bar, $V_2 = 1$ l, $V_3 = 1{,}5$ l. Das Gas besteht aus zweiatomigen Molekülen, die im betrachteten Temperaturbereich rotieren, ohne zu schwingen. Die Teilchenmenge beträgt $\nu = 0{,}3$ mol. a) Wie groß sind die Temperaturen T_1, T_2 und T_3? b) Welche Nutzarbeit W wird je Umlauf abgegeben? c) Welche Wärme Q_{zu} muss je Zyklus zugeführt werden? d) Wie groß ist der thermische Wirkungsgrad η_{th} des Kreisprozesses? e) Welchen Wirkungsgrad hätte eine Carnot-Maschine, die zwischen denselben Maximal- und Minimaltemperaturen T_3 und T_1 arbeitet?

Ü 3.3-10 Eine Wärmepumpe mit der Leistungszahl $\varepsilon_W = 3$ soll ein Haus heizen. Die erforderliche Heizleistung ist $|\dot{Q}_{ab}| = 15$ kW bei $\vartheta_3 = 45\,^\circ$C. Die Außentemperatur beträgt $\vartheta_1 = -5\,^\circ$C. a) Welche elektrische Leistung P nimmt der Motor auf? b) Wie groß wäre die Leistung P_C des Antriebsmotors, wenn ein Carnot-Prozess ablaufen würde?

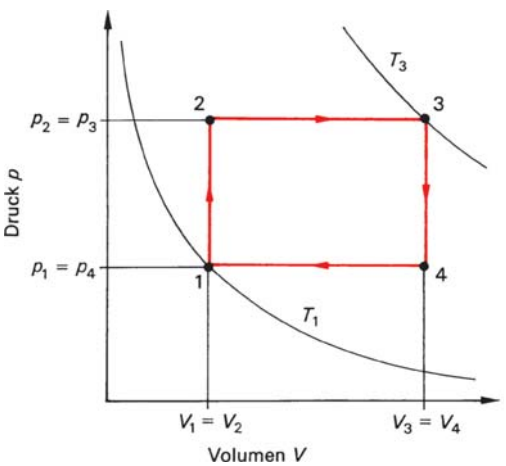


Abb. 3.32 Zu Aufgabe Ü 3.3-9 Kreisprozess aus 2 Isobaren und 2 Isochoren

Ü 3.3-11 In einer mit Wasserstoff betriebenen Gaskältemaschine läuft ein linksläufiger Stirling-Prozess mit folgenden Einzelprozessen ab:

$1 \rightarrow 2$: Isochore Erwärmung vom Anfangszustand $p_1 = 9\,\text{bar}$, $V_1 = 0{,}28\,\text{l}$ und $T_1 = 77\,\text{K}$ auf $T_2 = 300\,\text{K}$;
$2 \rightarrow 3$: Isotherme Kompression von $V_1 = V_2$ auf $V_3 = V_4 = 0{,}14\,\text{l}$;
$3 \rightarrow 4$: Isochore Abkühlung von T_2 auf T_1;
$4 \rightarrow 1$: Isotherme Expansion von V_4 auf V_1.

a) Wie groß ist die Leistungszahl ε_K des Prozesses unter der Voraussetzung, dass die interne Wärmeübertragung $-Q_{34} = Q_{12}$ ideal gelingt? b) Welche Kälteleistung Q_{zu} liefert die Maschine, wenn $n = 1\,400\,\text{min}^{-1}$ Zyklen durchlaufen werden? c) Wie groß ist die erforderliche Leistung P des Antriebsmotors? d) Welche Wärmeleistung $|\dot{Q}_{ab}|$ wird an die Umgebung abgegeben?

3.3.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

3.3.6.1 Reversible und irreversible Prozesse

Wird vom elastischen Stoß zweier Billardkugeln eine Filmaufnahme gemacht und der Film anschließend vorwärts- und rückwärtslaufend betrachtet, so kann ein Zuschauer, der bei der Aufnahme nicht dabei war, nicht sagen, welche Laufrichtung des Films das Experiment richtig wiedergibt. In beiden Richtungen könnte der Vorgang abgelaufen sein; keine der beiden Varianten verletzt die Stoßgesetze. Solche umkehrbaren oder *reversiblen* Vorgänge werden in der Mechanik beobachtet, wenn keine Wärmeentwicklung infolge von Reibung auftritt.

> Ein Prozess ist reversibel, wenn bei seiner Umkehr der Ausgangszustand wieder erreicht wird, ohne dass Änderungen in der Umgebung zurückbleiben.

Reversible Zustandsänderungen von Gasen sind als idealisierte Grenzfälle denkbar, wenn die Prozesse reibungsfrei und quasistatisch verlaufen, sodass der Druck und die Temperatur des Gases zu jeder Zeit mit der Umgebung im Gleichgewicht sind.
Wird der Fall eines Apfels von einem Baum gefilmt und der Film später rückwärts laufend betrachtet, so löst die Szene allgemeine Heiterkeit aus. Jedermann weiß aus Erfahrung, dass dieser Vorgang *irreversibel* ist, also nicht von allein in umgekehrter Richtung abläuft.

> Ein Vorgang ist irreversibel, wenn seine Umkehr zum Ausgangszustand nur unter äußerer Einwirkung möglich ist, wobei eine Veränderung in der Umgebung zurückbleibt.

Beim unelastischen Aufprall des Apfels auf den Boden wird seine kinetische Energie in thermische Energie umgesetzt; die Temperatur des Apfels und der unmittelbaren Umgebung erhöht sich demnach geringfügig. Der umgekehrte Vorgang, dass der Apfel sich abkühlt und dann nach oben hüpft, ist noch nie beobachtet worden, obwohl er den ersten Hauptsatz nicht verletzen würde.
Weitere Beispiele für irreversible Vorgänge sind

- *Diffusion*: Stoffe breiten sich aufgrund eines Konzentrationsgefälles so lange aus, bis die Konzentration räumlich konstant ist. Konzentrationsunterschiede dagegen bauen sich nicht von selbst auf;
- *Wärmeübergang*: Wärme geht von einem warmen auf einen kalten Körper über, bis die Temperatur ausgeglichen ist. Temperaturunterschiede jedoch entstehen nicht von selbst;
- *Chemische Reaktionen*, die von selbst ablaufen: Wasserstoff verbindet sich mit Sauerstoff zu Wasser. Für die Zersetzung des Wassers in seine Bestandteile hingegen muss Energie aufgewendet werden.

Bei genauer Betrachtung sind alle natürlich ablaufenden und technischen Prozesse irreversibel. Reversible Vorgänge sind lediglich idealisierte Grenzfälle.

3.3.6.2 Formulierungen des zweiten Hauptsatzes

Die *Irreversibilität* natürlicher und technischer Prozesse ist der Inhalt des *zweiten Hauptsatzes* der Thermodynamik. Dieser legt die Richtung der von selbst ablaufenden Vorgänge fest, die stets einem Gleichgewichtszustand zustreben. Eine klassische Formulierung des zweiten Hauptsatzes stammt von *Thomson* (*Lord Kelvin*) aus dem Jahr 1851:

> Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die Wärme aus einer Wärmequelle entnimmt und vollständig in mechanische Arbeit umwandelt.

Die Erfahrung zeigt, dass eine Wärmekraftmaschine stets auch Wärme an eine Wärmesenke tiefer Temperaturen abgeben muss (Abb. 3.25). Ließe sich eine Maschine konstruieren, die ohne Wärmeabgabe bei tiefer Temperatur auskäme, so wären die Energieprobleme der Menschheit für alle Zeiten gelöst. Da z. B. in den Weltmeeren ein ungeheuerer Betrag an innerer Energie steckt, könnten durch geringfügiges Abkühlen des Meerwassers nahezu unbegrenzte Energiereserven freigesetzt werden. Eine solche Maschine, die zwar den zweiten, nicht aber den ersten Hauptsatz verletzt, wird als *Perpetuum mobile zweiter Art* bezeichnet. Eine weitere Formulierung des zweiten Hauptsatzes lautet also:

> Es gibt kein Perpetuum mobile zweiter Art.

Die linksläufigen Kreisprozesse zeigen, dass Wärme unter Arbeitsaufwand einem kalten Körper entzogen und einem warmen Körper zugeführt werden kann (Abb. 3.26). *Clausius* formulierte 1850 den zweiten Hauptsatz so:

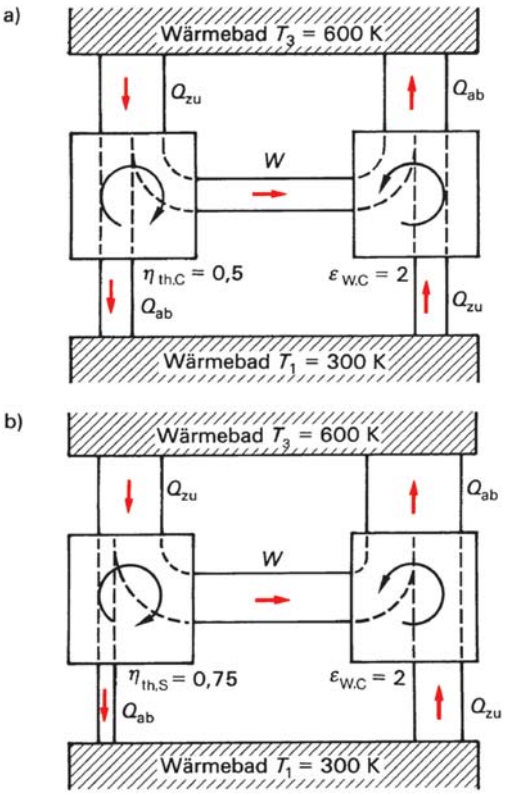


Abb. 3.33 Es existiert keine Maschine, die einen höheren Nutzeffekt als die Carnot-Maschine hat: **a**) Kopplung von rechts- und linkslaufender Carnot-Maschine, **b**) Kopplung einer rechtsläufigen „Super"-Maschine mit einer linksläufigen Carnot-Maschine

> Wärme geht nicht von selbst von einem kalten auf einen warmen Körper über.

Anhand von Abb. 3.33 erkennt man, dass der thermische Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses nicht übertroffen werden kann. Zwischen den Temperaturgrenzen $T_3 = 600\,\mathrm{K}$ und $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ wirkt je ein rechts- und ein

linksläufiger Kreisprozess. Abbildung 3.33a zeigt eine Carnot-Wärmekraftmaschine, die nach (3.76) den thermischen Wirkungsgrad $\eta_{th,C} = 0{,}5$ hat. Ihre mechanische Nutzarbeit wird eingesetzt, um eine Wärmepumpe zu betreiben, die nach (3.82) die Leistungszahl $\varepsilon_{W,C} = 2$ aufweist. Aus den Daten geht klar hervor, dass im Endeffekt jedem Wärmebad die Wärmemenge, die ihm eine Maschine entnimmt, von der anderen wieder zugeführt wird.

Abbildung 3.33b zeigt eine hypothetische „Super"-Wärmekraftmaschine mit einem thermischen Wirkungsgrad, der den Carnot'schen übertrifft (z. B. $\eta_{th,S} = 0{,}75$). Nimmt diese Maschine beispielsweise die Wärmeleistung 4 kW vom oberen Wärmebad auf, dann gibt sie $\dot{Q} = 1$ kW an das kalte Reservoir und $P = 3$ kW an die Wärmepumpe ab. Die Carnot-Wärmepumpe nimmt aus dem unteren Wärmebad $\dot{Q} = 3$ kW an Wärmeleistung auf und gibt an das obere $\dot{Q} = 6$ kW ab. Dies bedeutet schlussendlich, dass Wärme ohne äußere Arbeitszufuhr von einem kalten auf einen warmen Körper übergeht, was gegen den zweiten Hauptsatz verstößt. Daraus folgt:

> Ein höherer thermischer Wirkungsgrad als der des Carnot-Prozesses ist nicht möglich.

3.3.6.3 Entropie

Die bisherigen Formulierungen des zweiten Hauptsatzes können mathematisch ausgedrückt werden mit Hilfe der Zustandsgröße *Entropie,* die gestattet, den Grad der Irreversibilität eines Vorganges zu berechnen. Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist der ideale reversibel geführte Carnot-Prozess (Abb. 3.24). Für die umgesetzten Wärmen und die Temperaturen der Wärmebäder gilt

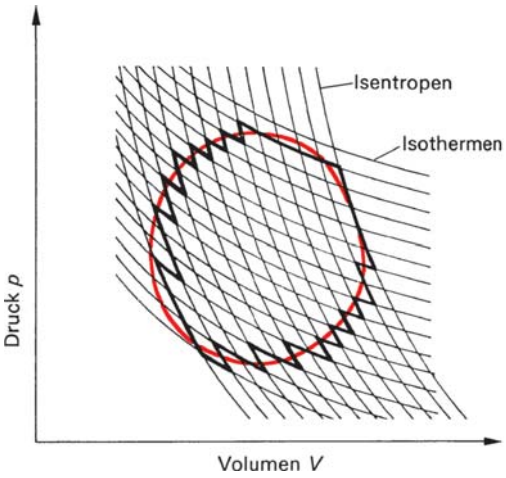


Abb. 3.34 Ersatz eines beliebigen Kreisprozesses durch ein System von Carnot-Prozessen

nach (3.77)

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} = 0 \,.$$

Der Quotient von übertragener Wärme und der absoluten Temperatur, bei der sie übertragen wurde, wird als *reduzierte Wärme* bezeichnet. Offensichtlich ist die Summe der reduzierten Wärmen bei einem kompletten Umlauf eines reversiblen Carnot-Prozesses null. Wird ein beliebiger Kreisprozess reversibel durchlaufen, dann kann er nach Abb. 3.34 durch unendlich viele differentiell schmale Carnot-Prozesse ersetzt werden. Auch hierbei ist die Summe aller reduzierten Wärmen null:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \,. \qquad (3.83)$$

Der Index rev soll daran erinnern, dass die Prozessführung reversibel sein muss.

Wenn die Größe $\frac{\delta Q_{rev}}{T}$ bei einem kompletten Umlauf keine Änderung erfährt, erfüllt sie die Voraussetzungen, die an eine Zustandsgröße gestellt werden. Diese Zustandsgröße bezeich-

net man nach *Clausius* als *Entropie S*. Ihr Differential ist definiert als

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} \,. \tag{3.84}$$

Die Maßeinheit der Entropie ist J/K. Der Nullpunkt kann willkürlich gewählt werden. Die Entropiedifferenz zwischen einem Ausgangszustand 1 und einem Endzustand 2 ist

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} \,. \tag{3.85}$$

Die *Entropieänderung* ist als Differenz zweier Zustandsgrößen *wegunabhängig*. Zu ihrer Berechnung muss aber ein – wenigstens in Gedanken – realisierbarer reversibler Weg beschritten werden. Bei reversibel geführten adiabaten Zustandsänderungen ist $\delta Q_{\mathrm{rev}} = 0$. Somit gibt es keine Änderung der Entropie ($S_1 = S_2$); die Zustandsänderung verläuft *isentrop*.

Die Entropieänderung bei einer Zustandsänderung eines idealen Gases lässt sich aus (3.84) mit Hilfe des ersten Hauptsatzes berechnen:

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} = \frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}{T} \,.$$

Mit (3.46) für die Änderung der inneren Energie ergibt sich daraus

$$\mathrm{d}S = \nu C_{\mathrm{m}\nu} + \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V \,.$$

Nach der Zustandsgleichung idealer Gase ist $p/T = \nu R_{\mathrm{m}}/V$ und somit

$$\mathrm{d}S = \nu C_{\mathrm{m}\nu}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \nu R_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}V}{V} \,.$$

Wird die molare Wärmekapazität $C_{\mathrm{m}\nu}$ als konstant vorausgesetzt, kann integriert werden:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu C_{\mathrm{m}\nu} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R_{\mathrm{m}} \ln \frac{V_2}{V_1} \,. \tag{3.86}$$

Nach (3.51) kann die innere Energie durch die Enthalpie H ausgedrückt werden:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}H - p\,\mathrm{d}V - V\,\mathrm{d}p \,.$$

Damit gilt

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}H - V\,\mathrm{d}p}{T} = \nu C_{\mathrm{m}p}\frac{\mathrm{d}T}{T} - R_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

und nach der Integration

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu C_{\mathrm{m}p} \ln \frac{T_2}{T_1} - \nu R_{\mathrm{m}} \ln \frac{p_2}{p_1} \,. \tag{3.87}$$

Beispiel

3.3-7 In einem berühmt gewordenen Versuch ließ *Gay-Lussac* nach Abb. 3.35 ein Gas aus einem Behälter in einen zunächst evakuierten Rezipienten strömen. Die Anordnung war nach außen wärmeisoliert (adiabates System). *Gay-Lussac* fand, dass nach Erreichen des Gleichgewichtszustands die Temperatur des Gases nicht verändert war und schloss daraus, dass die innere Energie idealer Gase nicht vom Volumen abhängt. Wie groß ist die Entropieänderung bei dem geschilderten Vorgang?

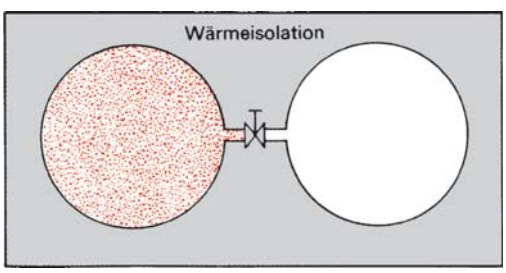


Abb. 3.35 Zu Beispiel 3.3-7 Gay-Lussac'scher Versuch

Lösung

Obwohl die Ausströmung ins Vakuum ein hochgradig irreversibler Prozess ist, lässt sich die Entropieänderung mit Hilfe eines reversiblen *Ersatzprozesses* berechnen. Ein denkbarer Ersatzprozess ist die isotherme Expansion mit jeweils dem gleichen Anfangs- und Endzustand wie der tatsächliche Prozess. Nach (3.86) gilt dann mit $T_1 = T_2$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu R_\mathrm{m} \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Die Entropieänderung ist größer als null, weil $V_2 > V_1$ ist. Ist z. B. $\nu = 1$ mol und $V_2/V_1 = 2$, dann beträgt die Entropieänderung

$$\Delta S = 1\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot \ln 2 = 5{,}76\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} .$$

Hat der Carnot'sche Kreisprozess irreversible Anteile (z. B. Reibungsarbeit oder Wärmeübertragung mit Temperaturgefälle zwischen Wärmebad und Gas), so ist der thermische Wirkungsgrad geringer als bei vollkommen reversibler Prozessführung:

$$\eta_\mathrm{th,irr} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{34}} < \eta_\mathrm{th,rev} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} .$$

Anstelle von (3.77) gilt dann

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} < 0 .$$

Für beliebige irreversible Kreisprozesse gilt entsprechend (im Gegensatz zu (3.83), die nur bei reversibler Prozessführung gültig ist)

$$\oint \frac{\delta Q_\mathrm{irr}}{T} < 0 . \qquad (3.88)$$

Nach Abb. 3.36 sei jetzt ein Kreisprozess betrachtet, der aus einem irreversiblen ($1 \to 2$) und einem reversiblen ($2 \to 1$) Weg besteht. Der Gesamtprozess ist damit irreversibel, und nach (3.88) gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q_\mathrm{irr}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_\mathrm{rev}}{T} < 0 .$$

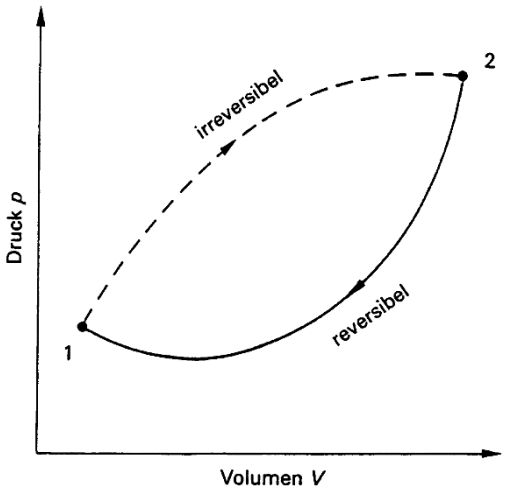


Abb. 3.36 Kreisprozess mit reversiblem und irreversiblem Anteil

Mit (3.85) kann man schreiben

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_\mathrm{irr}}{T} + S_1 - S_2 < 0 .$$

Betrachtet man insbesondere *adiabate* Systeme, bei denen keine Wärmeübertragung stattfindet ($\delta Q_\mathrm{irr} = 0$), dann gilt

$$S_2 - S_1 > 0 \qquad (3.89)$$

In einem adiabaten geschlossenen System sind irreversible Prozesse stets mit einem Anstieg der Entropie verknüpft. Bei reversibler Prozessführung bleibt die Entropie konstant.

Mathematisch kann diese Aussage auch so formuliert werden:

$$\mathrm{d}S \geqq 0 . \qquad (3.90)$$

Das Gleichheitszeichen gilt für reversible, das Größer-als-Zeichen für irreversible Prozesse.

Da in der Natur von selbst nur irreversible Prozesse ablaufen, gilt:

> In einem adiabaten geschlossenen System können von selbst nur Vorgänge ablaufen, bei denen die Entropie ansteigt.

Ein Beispiel für den Entropieanstieg ist die Ausströmung eines Gases ins Vakuum (Beispiel 3.3-7). Ist ein System abgeschlossen, dann ist die innere Energie des Systems konstant und die Entropie des Systems strebt einem Maximalwert zu, den sie im Gleichgewichtszustand erreicht hat.

Aus der Definitionsgleichung der Entropie $dS = \delta Q_{rev}/T$ folgt, dass in einem T,S-Diagramm die *reversibel* umgesetzte Wärmemenge als Fläche unter der Kurve einer Zustandsänderung abgelesen werden kann:

$$\delta Q_{rev} = T\,dS \qquad \text{oder}$$

$$Q_{12,rev} = \int_1^2 T\,dS\,. \tag{3.91}$$

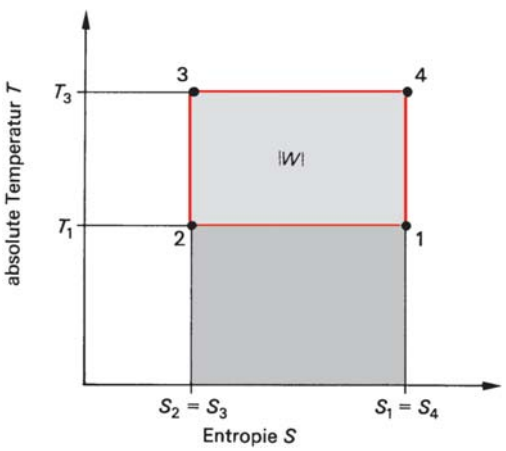


Abb. 3.37 T,S-Diagramm des Carnot-Prozesses. W Arbeit 1 bis 4 Zustandspunkte

Abbildung 3.37 zeigt das *Wärmeschaubild* des Carnot-Prozesses. Die zugeführte Wärme entspricht der Fläche unterhalb der Geraden 3–4, die abgegebene Wärme ist sichtbar als Fläche unterhalb der Geraden 1–2. Die Nutzarbeit entspricht wie beim p,V-Diagramm dem Flächeninhalt der umfahrenen Figur.

3.3.6.4 Statistische Deutung der Entropie

Mit Hilfe statistischer Betrachtungen soll gezeigt werden, dass die Entropie in engem Zusammenhang steht zu der *Wahrscheinlichkeit*, mit der ein bestimmter Zustand realisiert werden kann.

Zunächst soll gemäß Abb. 3.38 der übersichtliche Fall betrachtet werden, dass sich lediglich $N = 4$ Moleküle in einem Gefäß befinden. Teilt man das Gefäß willkürlich in zwei Hälften, so befindet sich jedes Molekül mit derselben Wahrscheinlichkeit entweder in der linken oder in der rechten Gefäßhälfte. Nun sollen aber fünf so genannte *Makrozustände* verglichen werden. Das sind Besetzungen der beiden Hälften mit $n_1{:}n_2$ = 0:4, 1:3, 2:2, 3:1 und 4:0 Molekülen. Anhand der durchnummerierten Moleküle erkennt man sofort, dass jeder Makrozustand durch verschieden viele *Mikrozustände* oder *Komplexionen* realisiert werden kann. So hat der Zustand der Gleichverteilung in den beiden Gefäßhälften, $n_1{:}n_2$ = 2:2,

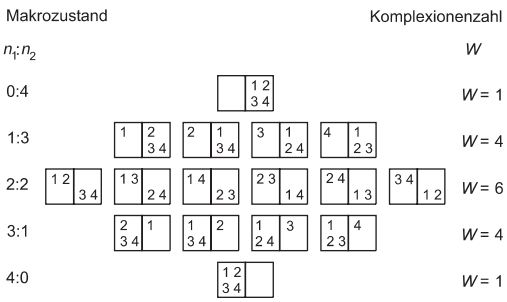


Abb. 3.38 Verschiedene Mikrozustände bei der Verteilung von $N = 4$ Molekülen auf die zwei Hälften eines Gefäßes

mit den meisten Mikrozuständen ($W = 6$) die höchste Wahrscheinlichkeit der Realisierung.
Diese Überlegungen sind vergleichbar dem Würfeln mit zwei Würfeln: Jede Augenzahl eines Würfels hat dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich 1/6. Die Summe der beiden Augenzahlen wird aber am häufigsten 7 ergeben, weil diese Summe die meisten Realisierungsmöglichkeiten (Mikrozustände) besitzt, nämlich 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2 und 6 + 1.
Die Zahl der Mikrozustände, die denselben Makrozustand ergeben, oder die Komplexionenzahl, beträgt

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!} \,. \tag{3.92}$$

Sie wird auch als *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. Im Gegensatz zur normalen Wahrscheinlichkeit ist W meist eine große Zahl.
Während man sich bei $N = 4$ Molekülen durchaus noch vorstellen kann, dass sich im Verlauf der thermischen regellosen Bewegung gelegentlich alle Moleküle in einer Gefäßhälfte befinden (die Gleichverteilung ist nur 6-mal wahrscheinlicher), nimmt die Komplexionenzahl W der Gleichverteilung mit zunehmender Teilchenzahl N extrem zu. Bereits bei $N = 10$ Molekülen lässt sich die Gleichverteilung 5:5 durch $W = 252$ Mikrozustände realisieren, ist also 252-mal wahrscheinlicher als der Zustand 0:10. Bei den großen Teilchenzahlen, wie sie in Gasen vorkommen, z.B. in der Größenordnung der Avogadro'schen Konstante, besitzt die Gleichverteilung der Moleküle auf das Gefäßvolumen eine derart hohe Wahrscheinlichkeit, dass die spontane Besetzung des halben Gefäßvolumens durch alle Moleküle nicht auftreten wird.
Von L. Boltzmann stammt die Erkenntnis, dass derjenige Makrozustand, der sich durch die meisten Mikrozustände verwirklichen lässt, also der Zustand mit größter Wahrscheinlichkeit, zugleich auch der Zustand mit maximaler Entropie ist. Nach Boltzmann gilt der Zusammenhang

$$S = k \ln W \,, \tag{3.93}$$

mit der Boltzmann-Konstante k als Proportionalitätsfaktor.
Bei großen Teilchenzahlen N lassen sich die Fakultäten $N!$ praktisch nicht mehr berechnen. Für die Berechnung des Logarithmus der Fakultäten kann die *Stirling'sche Näherungsformel* verwendet werden:

$$\ln N! \approx N \cdot \ln N - N \,. \tag{3.94}$$

Beispiel

3.3-8 Wie groß ist der Zuwachs an Entropie, wenn ein ideales Gas mit N Molekülen überströmt in ein Gefäß mit doppeltem Volumen (Abb. 3.35, Beispiel 3.3-7, Überströmversuch von Gay-Lussac).

Lösung

Der Anfangszustand, in dem sich das Gas in einer Gefäßhälfte befindet, besitzt die Komplexionenzahl $W_A = \frac{N!}{N!0!} = 1$ und damit die Entropie $S_A = k \ln 1 = 0$.
Der Endzustand mit der größten Realisierungswahrscheinlichkeit ist die Gleichverteilung mit der Komplexionenzahl $W_E = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}!\right)^2}$ und der Entropie $S_E = k\left[\ln N! - 2\ln\left(\frac{N}{2}!\right)\right]$.
Mithilfe der Stirling'schen Formel (3.94) wird daraus

$$S_E = Nk \ln 2 = \nu R_m \ln 2.$$

Die Entropieänderung ist damit

$$\Delta S = S_E - S_A = \nu R_m \ln 2,$$

in Übereinstimmung mit der thermodynamischen Berechnung von Beispiel 3.3-7.

Füllt man in einen Behälter weißen Sand und schichtet darüber vorsichtig dunklen Sand,

dann werden sich die beiden Sandsorten beim Schütteln des Gefäßes mischen. Dieser typisch irreversible Mischungsvorgang kann vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung so interpretiert werden, dass das System vom unwahrscheinlichen Zustand hoher Ordnung in den wahrscheinlicheren Zustand großer Unordnung übergeht. Von selbst ablaufende Vorgänge gehen stets von geordneten Zuständen in Richtung größerer Unordnung. Da sie gleichzeitig mit einem Entropieanstieg verknüpft sind, folgt:

> Die Entropie ist ein Maß für den Grad der Unordnung eines Systems.

Das Prinzip des Entropieanstiegs gilt nur für abgeschlossene Systeme, nicht aber für offene. Ist ein offenes System weit entfernt vom thermischen Gleichgewicht, so bewirken einerseits die Energiezufuhr oder auch der Zustrom neuer Stoffe und andererseits die Umwandlung im System in andere Energie- und Stoffformen, dass sich im System ständig neue Lagen der Systemteile zueinander, neuartige Bewegungsabläufe oder neuartige Reaktionsabläufe bilden, an denen größere Bereiche des Systems beteiligt sind. Unter den sich kurzzeitig bildenden, miteinander konkurrierenden Strukturen (Moden) kommt es ab einem charakteristischen Schwellwert der Energie- oder Stoffzufuhr plötzlich zu makroskopisch wahrnehmbaren Ordnungszuständen. Durch *Selbstorganisation* setzen sich jene neuartigen Moden (Ordner) durch, die den anderen Systemteilen ihre Ordnung am erfolgreichsten aufprägen (Versklavung) und die höchsten Wachstumsraten haben. Aus der Unordnung (Chaos) entstehen also in offenen Systemen geordnete Strukturen. Welche Ordnungszustände sich unter gegebenen Randbedingungen bilden, ist Untersuchungsgegenstand der von H. Haken (* 1927) begründeten Lehre vom Zusammenwirken der Einzelteile offener Systeme, der *Synergetik*.

Zur Übung

Ü 3.3-12 Wie groß ist die Energie, die man mit einem Perpetuum mobile zweiter Art aus dem Meerwasser gewinnen könnte, wenn dieses um $\Delta\vartheta = 1\,^\circ\mathrm{C}$ abgekühlt würde? Die Masse des Meerwassers ist $m \approx 1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg. Wie lange würde dieser Energievorrat reichen bei einem mittleren Leistungsbedarf der Menschheit von ungefähr $P = 13$ TW?

Ü 3.3-13 Stickstoff wird vom Normzustand p_n, T_n und $V_\mathrm{n} = 1\,\mathrm{l}$ a) isobar, b) isochor auf die Temperatur $T_1 = 500\,\mathrm{K}$ erwärmt. Wie groß ist in beiden Fällen die Entropieänderung?

Ü 3.3-14 Welche Kurvenform hat eine Isochore im T,S-Diagramm? Wie sieht demnach das T,S-Diagramm des Stirling-Prozesses aus? Wie kann man zeigen, dass der thermische Wirkungsgrad des idealen Stirling-Prozesses mit funktionierender interner Wärmeübertragung mit dem des Carnot-Prozesses identisch ist?

Ü 3.3-15 Ein Teil aus Kupfer mit der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ und der Temperatur $\vartheta_1 = 10\,^\circ\mathrm{C}$ wird in Kontakt gebracht mit einem gleich schweren Kupferteil mit $\vartheta_2 = 30\,^\circ\mathrm{C}$. a) Um welchen Betrag ändert sich die Entropie der beiden Körper beim Temperaturausgleich, wenn kein Wärmetransport zur Umgebung erfolgt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der umgekehrte Vorgang von selbst abläuft?

3.3.7 Thermodynamische Potentiale

Der zweite Hauptsatz erlaubt Aussagen über die Richtung von selbst ablaufender Prozesse in adiabaten bzw. abgeschlossenen Systemen. Viele Prozesse, besonders *chemische Reaktionen,* laufen bei konstanter Temperatur ab. Hierbei kann die Richtung von selbst ablaufender Vorgänge mit der von *Helmholtz* eingeführten *freien Energie F* bestimmt werden:

$$F = U - TS\,. \tag{3.95}$$

Das totale Differenzial dieser Zustandsgröße ist $\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T$. Für isotherme Systeme gilt $\mathrm{d}T = 0$ und $\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S$. Mit dem ersten Hauptsatz $\mathrm{d}U = \delta Q_{\mathrm{rev}} + \delta W_{\mathrm{rev}}$ und der Definitionsgleichung (3.84) für die Entropie $T\,\mathrm{d}S = \delta_{\mathrm{rev}}$ folgt für reversible Prozesse $\mathrm{d}F = \delta W_{\mathrm{rev}}$ oder $\delta W_{\mathrm{rev}} = -\mathrm{d}F$.
Die Arbeit, die ein isothermes System bei reversiblen Prozessen abgeben kann, entspricht der Abnahme der freien Energie. Bei irreversibler Prozessführung ist die abgegebene Arbeit stets kleiner als bei reversibler Führung, also $-\delta W_{\mathrm{irr}} < -\delta W_{\mathrm{rev}}$. Damit gilt

$$-\delta W \leqq -\mathrm{d}F\,. \tag{3.96}$$

Das Gleichheitszeichen gilt im Fall reversibler, das Kleiner-als-Zeichen bei irreversibler Prozessführung.

Der maximale Arbeitsbetrag, den ein isothermes System nach außen abgeben kann, ist gleich der Abnahme der freien Energie.

Nimmt beispielsweise bei einer isothermen chemischen Reaktion die innere Energie von U_1 auf U_2 ab, dann kann nicht die ganze Differenz ΔU als Arbeit nach außen abgegeben werden, sondern nur der Anteil der freien Energie $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$. Der Teilbetrag $T\Delta S$, die *gebundene Energie*, wird in Wärme umgesetzt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass unter „Arbeit“ in diesem Fall nicht nur die Volumenänderungsarbeit $\delta W_v = -p\,\mathrm{d}V$, sondern auch jede andere Form von Arbeit $\delta W'$ (z. B. elektrische Arbeit bei elektrochemischen Reaktionen und Oberflächenarbeit) verstanden wird: $\delta W = \delta W_v + \delta W'$.
Wird das Volumen eines Systems konstant gehalten, dann ist $\delta W_v = 0$, und aus (3.96) folgt $-\delta W' \leqq -\mathrm{d}F$ oder $\mathrm{d}F - \delta W' \leqq 0$.
Bei spontan ablaufenden Reaktionen wird Nutzarbeit abgegeben, d. h. $-\delta W' \geqq 0$. Für die freie Energie folgt daraus

$$\mathrm{d}F \leqq 0\,. \tag{3.97}$$

In einem isotherm-isochoren System verlaufen reversible Vorgänge bei konstanter freier Energie, irreversible Prozesse unter Abnahme der freien Energie. Im Gleichgewicht hat die freie Energie ein Minimum.

Somit ist auch die Richtung chemischer Reaktionen aufgezeigt: In isotherm-isochoren Systemen verlaufen chemische Reaktionen spontan, wenn die freie Energie der Reaktionspartner nach der Reaktion geringer ist als vorher.
Die freie Energie gehört zu den *thermodynamischen Potentialen*. Wie in der Mechanik die Komponenten einer Kraft durch Differenziation des Potentials nach den Koordinaten ermittelt werden können, besteht in der Thermodynamik die Möglichkeit, alle Zustandsgrößen durch Differenziation aus thermodynamischen Potentialen zu gewinnen. Für die freie Energie gilt

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T\,.$$

Mit dem ersten und zweiten Hauptsatz

$$\mathrm{d}U = \delta Q - p\,\mathrm{d}V = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$$

folgt

$$\mathrm{d}F = -p\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T\,. \tag{1}$$

Das totale Differenzial der Funktion $F(V, T)$ kann geschrieben werden

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T \,. \qquad (2)$$

Aus dem Vergleich der Beziehungen (1) und (2) folgt

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad \text{und} \qquad (3.98)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \,. \qquad (3.99)$$

Ist ein thermodynamisches Potential als Funktion seiner natürlichen Variablen bekannt, so kann man durch reine Differenziationsprozesse andere thermodynamische Potentiale oder Zustandsgrößen gewinnen. Auf diese Weise werden beispielsweise Dampftafeln berechnet.
Ein weiteres thermodynamisches Potential ist die *freie Enthalpie G* oder *Gibbs'sches Potential* (J. W. Gibbs, 1839 bis 1903):

$$G = H - TS = U + pV - TS \,. \qquad (3.100)$$

Für das totale Differenzial der Zustandsgröße $G(p, T)$ gilt

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T \,.$$

Mit $\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \delta Q = T\,\mathrm{d}S$ folgt $\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$. Durch Vergleich mit

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T$$

ergeben sich

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T \text{ und} \qquad (3.101)$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \,. \qquad (3.102)$$

Die freie Enthalpie hat eine ähnliche Bedeutung wie die freie Energie. In einem isotherm-isobaren System gilt

$$\mathrm{d}G \leqq 0 \,. \qquad (3.103)$$

Das Gleichheitszeichen gilt für reversible, das Kleiner-als-Zeichen für irreversible Vorgänge.

In isotherm-isobaren Systemen strebt die freie Enthalpie ein Minimum an, das sie im Gleichgewichtszustand erreicht hat.

3.3.8 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Durch experimentelle Untersuchungen fand *Nernst* (W. Nernst, 1864 bis 1941) im Jahr 1906, dass die Entropie fester Körper am absoluten Temperaturnullpunkt nicht von der Kristallmodifikation abhängt. So hat z. B. weißes und graues Zinn bei $T = 0$ dieselbe Entropie: $S_{\text{weiß}}(0) = S_{\text{grau}}(0)$.
Bei Annäherung eines homogenen Systems an den absoluten Nullpunkt ist im Gleichgewicht die molare Entropie unabhängig von thermodynamischen Parametern (z. B. Druck, Volumen, Kristallstruktur, Magnetfeld) und nimmt einen konstanten Wert $S_{\text{m}0}$ an. Dieser *Nernst'sche Wärmesatz* wurde von *Planck* erweitert, der die Entropie am absoluten Nullpunkt null setzte:

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad T = 0 \,. \qquad (3.104)$$

Die Entropie reiner Stoffe ist am absoluten Temperaturnullpunkt null.

Diese Festlegung der Entropie durch den *dritten Hauptsatz* ist im Einklang mit der statis-

tischen Deutung der Entropie. Der Gleichgewichtszustand am absoluten Nullpunkt zeichnet sich durch maximale Ordnung aus. Die Unordnung und damit die Entropie sind null.

Der dritte Hauptsatz ist nur gültig für reine Stoffe. Mischkristalle haben bei $T = 0$ eine endliche Entropie. Außerdem müssen die Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Dies ist z. B. bei Gläsern nicht der Fall. Gläser haben auch bei $T = 0$ noch eine Unordnung, demnach ist $S_0 > 0$. Der Übergang in eine geordnete kristalline Phase findet nicht statt, weil bei tiefen Temperaturen die Reaktionsgeschwindigkeiten vernachlässigbar klein werden.

Die Entropie eines Systems kann nach dem dritten Hauptsatz absolut berechnet werden

$$S(T) = \int_0^T \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = m \int_0^T \frac{c\,(T)}{T}\,\mathrm{d}T\,. \qquad (3.105)$$

Die Entropie bleibt nur dann endlich, wenn die spezifische Wärmekapazität $c(T)$ mit abnehmender Temperatur hinreichend schnell gegen null geht. Dies ist in der Tat der Fall: Bei vielen Festkörpern gilt bei tiefen Temperaturen das *Debye'sche* T^3 *-Gesetz* $c(T) = \text{konst.} \cdot T^3$ (Abschn. 9.3.1.2).

Aus dem dritten Hauptsatz folgt auch, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient $(\partial V/\partial T)_p$ und der Druckkoeffizient $(\partial p/\partial T)_V$ bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt null werden.

In Abschn. 3.3.5 ist ausgeführt, dass ein Carnot-Prozess, bei dem die tiefe Temperatur $T_1 = 0$ ist, einen thermischen Wirkungsgrad von $\eta_{\text{th}} = 1$ hat. Bei einem reversiblen Carnot-Prozess (Abb. 3.24) gilt nach dem zweiten Hauptsatz für das Kreisintegral der Entropie

$$\oint \mathrm{d}S = S_{12} + S_{23} + S_{34} + S_{41} = 0\,.$$

Nun ist $S_{23} = S_{41} = 0$ wegen isentroper Prozessführung. Nach dem dritten Hauptsatz ist $S_{12} = 0$ für $T_1 = 0$. Also gilt $\oint S = S_{34} = 0$. Die Entropieänderung während der isothermen Expansion von 3 nach 4 ist aber nach (3.85)

$$S_{34} = \frac{Q_{34}}{T_3} > 0\,.$$

Der Widerspruch löst sich nur, wenn die tiefe Temperatur $T_1 > 0$ gesetzt wird. Daraus folgt:

> Der absolute Temperaturnullpunkt lässt sich nicht erreichen.

Der dritte Hauptsatz wird deshalb gelegentlich auch als *Satz von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts* bezeichnet.

3.4 Zustandsänderungen realer Gase

Sind die Wechselwirkungen zwischen den Gasmolekülen – beispielsweise in der Nähe von Phasenumwandlungen – nicht mehr zu vernachlässigen, so handelt es sich um *reale Gase*. Mit der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (Abschn. 3.1.5) lässt sich die Dichte ϱ aus der absoluten Temperatur T und dem Druck p ableiten: $pV = mR_{\text{i}}T$ ergibt wegen $\varrho = m/V$

$$\varrho = \frac{p}{R_{\text{i}}T} \qquad (3.106)$$

mit R_{i} als der spezifischen Gaskonstante. Für reale Gase mit molekularen Wechselwirkungen wird die Zustandsgleichung mit dem *Realgasfaktor* Z korrigiert:

$$\varrho = \frac{p}{ZR_i T} \,. \qquad (3.107)$$

Abbildung 3.39 zeigt den Verlauf der Realgasfaktoren Z von Luft in Abhängigkeit vom Druck p (von 0 bis 300 bar).
Die Dichte von Gasgemischen ϱ_G errechnet sich aus den jeweiligen Dichten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ und deren prozentualen Volumenanteilen:

$$\varrho_G = \frac{\sum \varrho_i V_i}{V} \,. \qquad (3.108)$$

3.4.1 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung

Die für ideale Gase abgeleiteten Gesetze vernachlässigen zwei Einflussgrößen, die bei hohen Drücken und tiefen Temperaturen besonders deutlich in Erscheinung treten, nämlich

- die zwischen den Gasmolekülen stattfindenden Anziehungskräfte (*Kohäsion*) und
- das Eigenvolumen der Gase (*Kovolumen*).

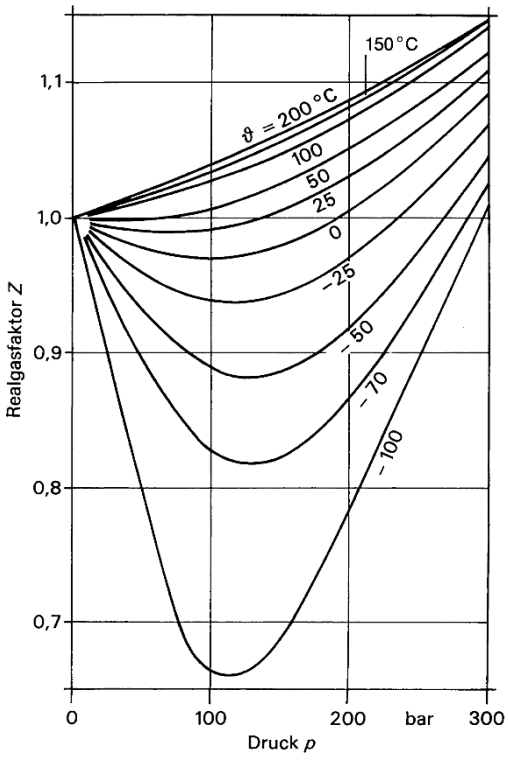


Abb. 3.39 Realgasfaktor Z von Luft

J. D. Van der Waals (1837 bis 1923) hat den Druck und das Volumen in der allgemeinen Gasgleichung dementsprechend korrigiert. Die *van-der-Waals'sche Zustandsgleichung* lautet mit molaren Größen

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T \,. \qquad (3.109)$$

Darin sind V_m das Molvolumen und a sowie b gasspezifische Materialkonstanten.
Den Korrekturterm a/V_m^2 nennt man *Binnendruck*. Er berücksichtigt die Wirkung der zwischenmolekularen Anziehungskräfte *(van-der-Waals-Kräfte,* Abschn. 9.1.1.1), die Kohäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen, die auch für die Oberflächenspannung verantwortlich sind (Abschn. 2.12.1.6, Abb. 2.99). Im Innern der Gasphase heben sich die zwischenmolekularen Kräfte zwar auf, an den Grenzflächen (z. B. einer Gasoberfläche) aber weisen sie eine resultierende Kraft in Richtung des Gasinneren auf. Dadurch erhöht sich der Innendruck im Gas (Binnendruck); das Korrekturglied ist deshalb positiv. Der Binnendruck p_{bi} ist proportional zur Dichte der anziehenden Teilchen und zur Dichte der stoßenden Umgebungsteilchen. Insgesamt ist also der Binnendruck proportional zum Quadrat der Dichte: $p_{bi} \sim \varrho^2$ oder wegen $\varrho \sim 1/V_m$ ist $p_{bi} \sim 1/V_m^2$.
Der Faktor b berücksichtigt das Wechselwirkungsvolumen der Molekülkräfte, das *van-der-Waals'sche Kovolumen;* es entspricht etwa dem vierfachen Eigenvolumen des Moleküls. Die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung stellt für konstante Temperaturen (Isother-

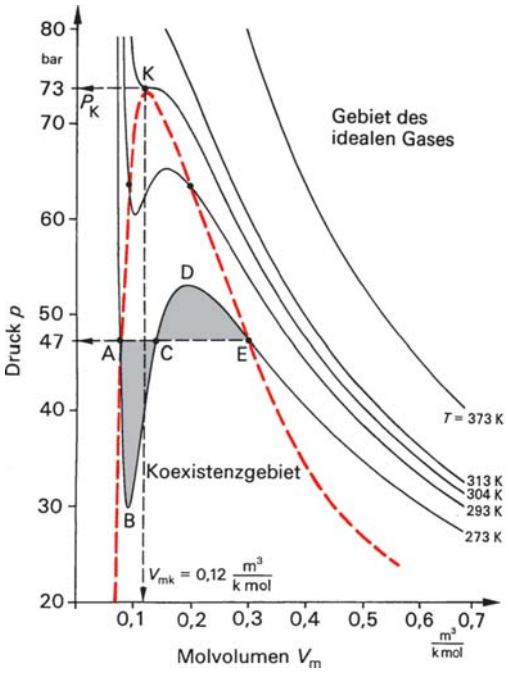


Abb. 3.40 Verlauf der Isothermen für Kohlendioxid im p, V-Diagramm

men) im p, V-Diagramm eine Funktion dritten Grades dar. Abbildung 3.40 zeigt den Verlauf der Isothermen für Kohlendioxid (CO_2). Unterhalb der Isothermen für die *kritische Temperatur* T_k (für CO_2 ist $T_k = 304{,}2$ K) weisen die Isothermen mit abnehmendem Molvolumen ein Druckmaximum und ein Druckmimimum auf. Dies widerspricht jedoch der experimentellen Erfahrung: Mit fallendem Volumen durchläuft der Druck nicht die Kurve EDCBA (Isotherme 273 K), sondern verläuft horizontal längs der Geraden ECA. Dies liegt daran, dass bei realen Gasen ab dem Punkt E eine *Verflüssigung* eintritt, die am Punkt A abgeschlossen ist. Der bei weiterer Komprimierung erfolgende steile Druckanstieg rührt von der im Vergleich zu Gasen sehr kleinen Kompressibilität von Flüssigkeiten her.

Der Druck p_E in Abb. 3.40, bei dem eine Verflüssigung einsetzt, ist der Dampfdruck. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (Abschn. 3.3.6) müssen die Flächeninhalte über der Linie CDE und unter der Linie ABC gleich sein. Werden für jede Isotherme jeweils die Punkte E der beginnenden Verflüssigung des Gases und jeweils die Punkte A des Endes der Verflüssigung miteinander verbunden, so ergibt sich ein Bereich, innerhalb dessen eine Umwandlung von der gasförmigen Phase in die flüssige stattfindet (rot umgrenzte Zone in Abb. 3.40). Links von diesem Gebiet liegt nur die flüssige und rechts nur die gasförmige Phase vor. Im *Koexistenzgebiet* sind beide Phasen vorhanden. Bei *Wasser* heißen diese Gebiete: *überhitzter Dampf* (rein gasförmiger Zustand), *trocken gesättigter Dampf* (Grenzkurve) und *Naßdampf* (innerhalb des Verflüssigungsgebiets). Der höchste Dampfdruckpunkt ist der *kritische Punkt* K. Die zugehörige Temperatur ist die kritische Temperatur T_k. Sie ist der Wendepunkt der entsprechenden Isotherme. Die zugehörigen Werte sind der *kritische Druck* p_k (für CO_2 ist $p_k = 7{,}38$ MPa) und das *kritische Volumen* V_k (für CO_2 ist $V_{mk} = 0{,}1275\ m^3/kmol$). Oberhalb des Punktes K ist eine Verflüssigung durch alleinige Komprimierung (kleineres Volumen und höherer Druck) nicht möglich. Tabelle 3.10 enthält die kritischen Werte für Temperatur und Druck sowie die *van-der-Waals'schen Konstanten* a und b für einige ausgewählte Stoffe.

Da der kritische Punkt K einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente darstellt, können die drei kritischen Werte von Gasen (T_k, p_k und V_k) durch folgende drei Bestimmungsgleichungen errechnet werden: $p = f(V)$ (van-der-Waals'sche Zustandsgleichung für die Isotherme $T = T_k$), $(\partial p/\partial V)_{T_k} = 0$ (waagerechte Tangente) und $(\partial^2 p/\partial V^2)_{T_k} = 0$ (Wendepunkt). Aus $(\partial p/\partial V)_{T_k} = 0$ und $(\partial^2 p/\partial V^2)_{T_k} = 0$ folgen

$$V_{mk} = 3\,b \qquad (3.110)$$

Tabelle 3.10 Kritische Temperatur T_k, kritischer Druck p_k sowie van-der-Waals'sche Konstanten a und b verschiedener Stoffe

Stoff	T_k in K	p_k in MPa	a in $10^5 \frac{\mathrm{N\,m^4}}{\mathrm{kmol^2}}$	b in $10^{-2} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kmol}}$
Elemente				
Wasserstoff (H_2)	33,240	1,296	0,2486	2,666
Helium (He)	5,2010	0,2275	0,0347	2,376
Stickstoff (N_2)	126,20	3,400	1,366	3,858
Sauerstoff (O_2)	154,576	5,043	1,382	3,186
Luft	132,507	3,766	1,360	3,657
anorganische Verbindungen				
Chlor (Cl_2)	417	7,70	6,59	5,63
Wasser (H_2O)	647,30	22,120	5,5242	3,041
Ammoniak (NH_3)	405,6	11,30	4,246	3,730
Kohlendioxid (CO_2)	304,2	7,3825	3,656	4,282
organische Verbindungen				
Methan (CH_4)	190,56	4,5950	2,3047	4,310
Propan (C_3H_8)	370	4,26	9,37	9,03
Butan (C_4H_{10})	425,18	3,796	13,89	11,64

und

$$T_k = \frac{8\,a}{27\,b\,R_m}\,. \tag{3.111}$$

Werden diese beiden Gleichungen in die van-der-Waals'sche Zustandsgleichung (3.109) eingesetzt, ergibt sich

$$p_k = \frac{a}{27\,b^2}\,. \tag{3.112}$$

Aus der Kombination aller drei Gleichungen erhält man

$$\frac{p_k V_{mk}}{T_k} = \frac{3}{8} R_m\,. \tag{3.113}$$

Bei dem Vergleich mit dem Wert des Realgasfaktors Z (3.107) ergibt sich für den kritischen Punkt

$$Z_k = \frac{p_k V_{mk}}{R_m T_k} = \frac{3}{8}\,. \tag{3.114}$$

Wenn die allgemeine Gasgleichung für ideale Gase am kritischen Punkt gültig wäre, müsste $Z_k = 1$ sein. Der Realgasfaktor Z gibt also den Grad der Abweichung von der allgemeinen Gasgleichung an (Abb. 3.39).

Sind zwei der kritischen Werte p_k, V_{mk} und T_k bekannt, dann können die *van-der-Waals'schen Konstanten* a und b errechnet werden:

$$b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{R_m T_k}{8\,p_k}\,, \tag{3.115}$$

$$a = 3 p_k V_{mk}^2 = 27 b^2 p_k\,. \tag{3.116}$$

Beispiel

3.4-1 Für Kohlendioxid (CO_2) gilt am kritischen Punkt $T_k = 304{,}2\,\mathrm{K}$ und $p_k = 7{,}38\,\mathrm{MPa}$. Es sollen hieraus die van-der-Waals'schen Konstanten a und b berechnet werden.

Lösung

Nach (3.115) gilt

$$b = \frac{R_m T_k}{8 p_k} = 0{,}0428\ \mathrm{m^3/kmol}\ ,$$

nach (3.116) gilt

$$a = 27 b^2 p_k = 3{,}66 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N\,m^4}}{\mathrm{kmol^2}}\ .$$

3.4.2 Gasverflüssigung (Joule-Thomson-Effekt)

Bei einem realen Gas ist wegen der zwischenmolekularen Wechselwirkungen und des Eigenvolumens der Moleküle die innere Energie U volumen- und druckabhängig. Wird ein *reales Gas adiabat* (ohne Wärmeübertragung) und ohne Arbeitsverrichtung (*Drosselung*) entspannt, so kühlt es sich im Gegensatz zum idealen Gas ab. Zur Überwindung der zwischenmolekularen Anziehungskräfte muss nämlich Energie aufgewendet werden, die aus dem Vorrat der inneren Energie U entnommen wird. Dieser Effekt wird *Joule-Thomson-Effekt* genannt (J. P. Joule, 1818 bis 1889, und W. Thomson, 1824 bis 1907). Die druckbezogenen Temperaturdifferenzen betragen beispielsweise für Luft $\Delta T/\Delta p = 2{,}5$ K/MPa und für Kohlendioxid $\Delta T/\Delta p = 7{,}5$ K/MPa.

Die Luftverflüssigung gelang erstmalig *Linde* (C. v. Linde, 1842 bis 1934) im Jahr 1876.

Genaue Rechnungen ergeben, dass der *Joule-Thomson-Effekt* auch zu einer Erwärmung führen kann. Oberhalb der *Inversionstemperatur* T_i erwärmt sich ein Gas und unterhalb dieser kühlt es sich ab. Näherungsweise ist

$$T_i \approx \frac{2a}{R_m b}\ . \tag{3.117}$$

Da für die kritische Temperatur eines realen Gases nach (3.111) $T_k = 8a/(27bR_m)$ gilt, ist die Inversionstemperatur

$$T_i = 6{,}75\ T_k\ . \tag{3.118}$$

Weil für Luft, Stickstoff, Sauerstoff und Kohlendioxid die Inversionstemperatur T_i weit oberhalb der Raumtemperatur liegt, kühlen sich diese Gase nach dem *Joule-Thomson-Effekt* ab, während sich Wasserstoff bei Raumtemperatur ($T_k = 33{,}3$ K) erwärmt. Deshalb wird Wasserstoff zwecks Verflüssigung erst mit flüssigem Stickstoff vorgekühlt.

In Abb. 3.41 sind einige technisch bedeutsame Temperaturen und die entsprechenden phy-

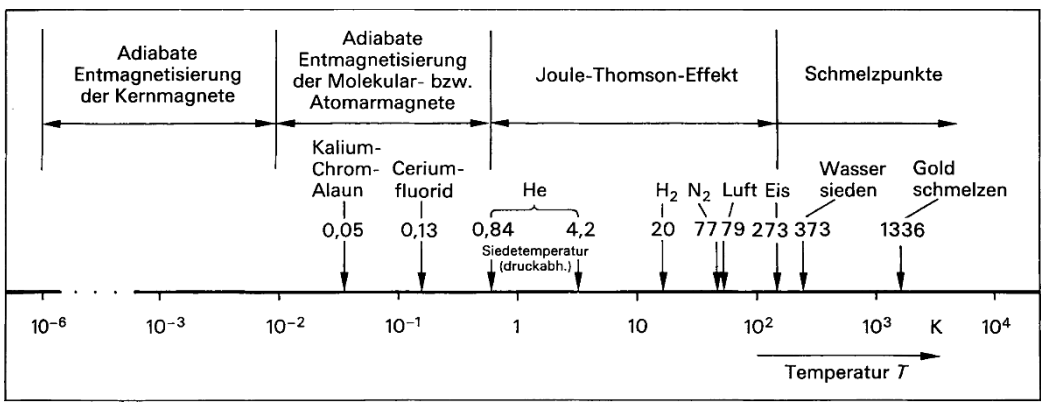


Abb. 3.41 Physikalische Effekte und einige technisch bedeutsame Temperaturen

sikalischen Effekte zusammengestellt. Für die Untersuchung von Werkstoffen bei tiefen Temperaturen kühlt man die Proben mit flüssiger Luft (T = 79 K) oder flüssigem Stickstoff (T = 77 K) ab. Zur Untersuchung des supraleitenden Zustandes (Abschn. 9.2.3) kühlt man meist mit flüssigem Helium (T = 4,2 K bis 0,83 K). Um tiefere Temperaturen, die durch den *Joule-Thomson-Effekt* nicht mehr erreicht werden, zu erhalten, müssen *paramagnetische Salze* adiabat entmagnetisiert werden. Infolge der während der Entmagnetisierung zunehmenden Unordnung der magnetischen Struktur wird – analog zum Verdampfungsprozess – dem Stoff Wärme entzogen, sodass eine Abkühlung eintritt (z. B. Cäsium-Titan-Alaun, T = 0,0034 K). Nach diesem *magnetokalorischen Effekt* werden Temperaturen bis $T = 10^{-2}$ K erzeugt. Noch tiefere Temperaturen (bis $T = 10^{-6}$ K) kann man durch *Entmagnetisierung von Atomkernen* erreichen.

3.4.3 Phasenumwandlungen

Eine *Phase* ist ein räumlich abgegrenztes Gebiet eines Stoffes mit gleichen physikalischen Eigenschaften. Der Begriff Phase kann sowohl auf die drei *Aggregatzustände der Materie* (fest, flüssig, gasförmig) als auch auf die verschiedenen Modifikationen desselben Stoffs (z. B. α- und γ-Eisen) angewandt werden. Die unterschiedlichen chemischen Bestandteile werden *Komponenten* genannt und zweckmäßigerweise durch eine chemische Strukturformel angegeben.

Abbildung 3.42 zeigt die möglichen Phasenübergänge für die drei Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig unter Berücksichtigung von Modifikationsänderungen innerhalb des festen Zustands. Allen Phasenübergängen ist gemeinsam, dass Wärme zu- bzw. abgeführt werden muss, ohne dass eine Temperaturänderung eintritt. Diese Wärme wird deshalb als *latente Wärme* bezeichnet. Wird beispielsweise der Phasenübergang von fest nach flüssig betrachtet, dann dient die zugeführte Wärme der Aufbrechung des Festkörpergitters. Die bei konstantem Druck und konstanter Temperatur zugeführte Wärme erhöht die Enthalpie der Substanz: $H_{\text{flüssig}} = H_{\text{fest}} + \Delta H_S$. ΔH_S wird als *Schmelzenthalpie* bezeichnet. Sie wird bei der Erstarrung wieder frei ($-\Delta H_S$). Beim Über-

von \ nach	fest	flüssig	gasförmig
fest	Modifikationsänderung (Modifikationsenthalpie ΔH_M)	Schmelzen (Schmelzenthalpie ΔH_S)	Sublimieren (Sublimationsenthalpie $\Delta H_{Sub} = \Delta H_S + \Delta H_V$)
flüssig	Erstarren (Erstarrungsenthalpie $-\Delta H_S$)	———	Sieden (Verdampfungsenthalpie ΔH_V)
gasförmig	Desublimieren (Desublimationsenthalpie $-\Delta H_{sub} = -\Delta H_S - \Delta H_V$)	Kondensieren (Kondensationsenthalpie $-\Delta H_V$)	———

Abb. 3.42 Phasenübergänge und zugehörige Enthalpien (Einstoffsystem)

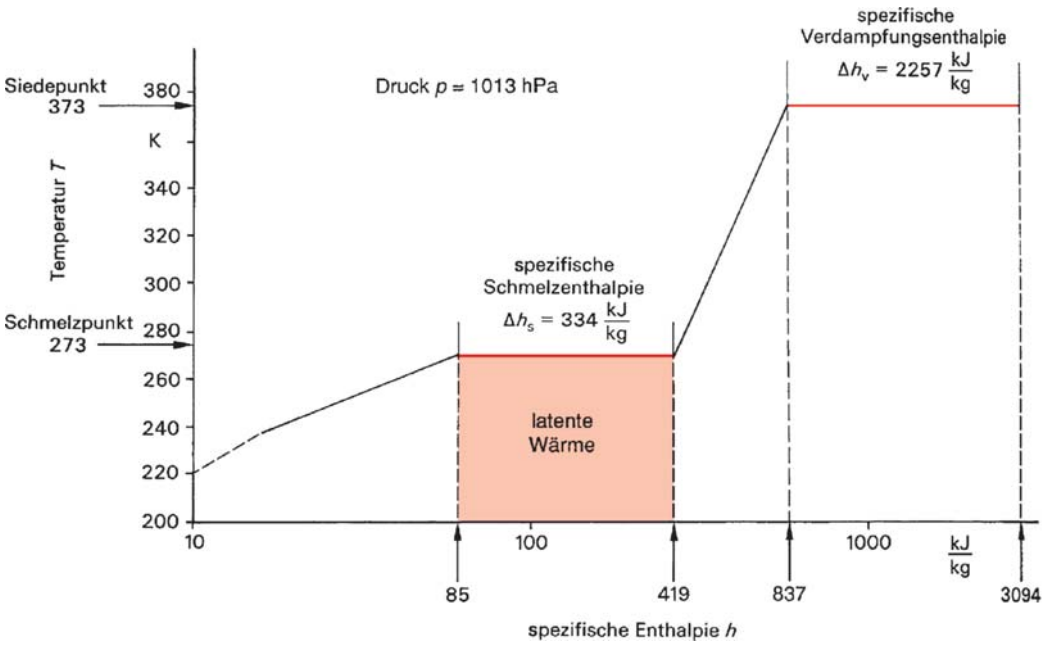


Abb. 3.43 Temperaturverlauf der spezifischen Enthalpie von Wasser

gang vom festen in den gasförmigen Zustand muss die Summe aus Schmelzenthalpie ΔH_S und Verdampfungsenthalpie ΔH_V als Sublimationsenthalpie $\Delta H_{sub} = \Delta H_S + \Delta H_V$ zugeführt werden.

Abbildung 3.43 zeigt den Temperaturverlauf als Funktion der zugeführten spezifischen Enthalpie für Wasser vom Aggregatzustand fest (Eis) bis gasförmig (Wasserdampf). In Tabelle 3.11 sind die Schmelz- bzw. Siedepunkte sowie die spezifischen Schmelz- bzw. Verdampfungsenthalpien zusammengestellt (die Siedepunkte und Verdampfungsenthalpien beziehen sich auf den Normdruck $p_n = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa).

3.4.3.1 Thermodynamisches Gleichgewicht

Ein physikalisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn sein physikalischer Zustand gleich bleibt. Es gibt *stabile, labile* und *indifferente Gleichgewichte*, je nachdem, ob eine äußere Störung das System zum Gleichgewichtszustand zurücktreibt, forttreibt oder keinen Einfluss zeigt. In der *Mechanik* (Abschn. 2.9.3) liegt bei einem stabilen Gleichgewicht ein *Minimum der potentiellen Energie* vor.

Unterschiede in der potentiellen Energie (Gradient des mechanischen Potentials) sind die treibenden Kräfte, die im Minimum verschwinden. In der Wärmelehre können je nach Systemzustand fünf Gleichgewichtsforderungen auftreten (Abschn. 3.3.7). Sie sind in Abb. 3.44 zusammengestellt:

- *Maximum der Entropie S* für ein abgeschlossenes System ohne Materie- und Energieaustausch;
- *Minimum der freien Enthalpie G* für ein isobar-isothermes System;
- *Minimum der freien Energie F* für ein isochor-isothermes System;
- *Minimum der Enthalpie H* für ein isobar-adiabates System sowie
- *Minimum der inneren Energie U* für ein isochor-adiabates System.

Tabelle 3.11 Schmelz- bzw. Verdampfungstemperatur ϑ sowie spezifische Schmelzenthalpie Δh_S und spezifische Verdampfungsenthalpie Δh_V verschiedener Stoffe beim Druck $p_n = 1\,013$ hPa

Stoff	Schmelzen ϑ in °C	Δh_S in kJ/kg	Verdampfen ϑ in °C	Δh_V in kJ/kg
Elemente				
Wasserstoff (H_2)	−259,15	58,6	−252,75	461
Helium (He)	−270,7	3,52	−268,94	20,9
Stickstoff (N_2)	−209,85	25,75	−195,75	201
Sauerstoff (O_2)	−218,75	13,82	−182,95	214
Luft	−213		−192,3	197
anorganische Verbindungen				
Chlor (Cl_2)	−100,95	90,4	−34,45	289
Wasser (H_2O)	0,00	335	100,00	2 257
Ammoniak (NH_3)	−80	339	−33,45	1 369
Kohlendioxid (CO_2)	−56,55	184	−78,45	574
organische Verbindungen				
Methan (CH_4)	−182,45	58,6	−161,45	510
Propan (C_3H_8)	−187,65	80,0	−42,05	426
Butan (C_4H_{10})	−138,35	77,5	−0,65	386

	isobar $dp = 0$	isochor $dV = 0$	isotherm $dT = 0$	$dU = 0$	adiabat $\delta Q = 0$
Maximum der Entropie $dS \geqq 0$					
Minimum der freien Enthalpie $dG \leqq 0$					
Minimum der freien Energie $dF \leqq 0$					
Minimum der Enthalpie $dH \leqq 0$					
Minimum der inneren Energie $dU \leqq 0$					

freie Enthalpie G = Enthalpie H ($U + pV$) − freie Energie F (TS)

Abb. 3.44 Gleichgewichtsbedingungen für die verschiedenen thermodynamischen Zustände

Chemische Reaktionen, die isobar und isotherm spontan ablaufen, haben alle eine negative molare freie Enthalpie ΔG_m. Dabei kann entweder Wärme frei werden ($\Delta H < 0$) oder der Endzustand der Reaktion weist eine sehr viel höhere Entropie auf ($\Delta S = (\Delta H - \Delta G)/T < 0$).

3.4.3.2 Gleichgewicht zwischen flüssiger und gasförmiger Phase

Analog zur *Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung* in Gasen (Abschn. 3.2.3) gibt es auch in Flüssigkeiten eine temperaturabhängige Verteilungsfunktion. Es ist immer eine bestimmte Anzahl von Teilchen vorhanden, deren Geschwindigkeit und somit deren kinetische Energie groß genug ist, um gegen die Kohäsionskräfte der Nachbarteilchen die Flüssigkeitsoberfläche zu durchstoßen.
Betrachtet sei ein Gefäß, in dem sich eine Flüssigkeit befindet. Wird der Gasraum evakuiert, so steigt der Dampfdruck so lange, bis sich ein Gleichgewicht zwischen der Verdampfungs- und der Kondensationsrate einstellt. Dann liegt ein gesättigter Dampf vor und der zugehörige Dampfdruck heißt *Sättigungsdampfdruck* p_s. Er ist unabhängig vom Volumen, da sich bei Vergrößerung bzw. bei Verkleinerung des Volumens entsprechend mehr Dampf bildet bzw. kondensiert. Auch das Einbringen von Körpern oder anderen Gasmolekülen beeinflusst also den Sättigungsdampfdruck nicht. Für die Dampfdrücke eines Gasgemischs (*Partialdrücke*) gilt deshalb das *Dalton'sche Gesetz* (J. Dalton, 1766 bis 1844):

Der gesamte Druck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke:

$$p_{ges} = \sum_{i=1}^{n} p_i \,. \tag{3.119}$$

Der Sättigungsdampfdruck steigt mit zunehmender Temperatur, da zusätzlich Flüssigkeit verdampft, und nimmt ab mit fallender Temperatur, weil Dampf kondensiert. Abbildung 3.45 zeigt den Verlauf des Sättigungsdampfdruckes p_s von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur. Diese *Dampfdruckkurve* beschreibt die für das Gleichgewicht zwischen flüssiger und gasförmiger Phase maßgebenden Wertepaare von Sättigungsdampfdruck p_s und Temperatur.
Die Dampfdruckkurve wird durch den Boltzmann-Faktor (3.31) beschrieben:

$$p_s \sim e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \,. \tag{3.120}$$

ΔE ist die Energie, die benötigt wird, um vom flüssigen in den gasförmigen Zustand zu gelangen.
Der Verlauf der Dampfdruckkurve kann genauer berechnet werden. Hierbei geht man davon aus, dass mit einem Mol verdampfender Flüssigkeit ein *Carnot'scher Kreisprozess* (Abschn. 3.3.5) durchlaufen wird. Wie Abb. 3.46 zeigt, wird die Flüssigkeit auf dem Weg 3–4 bei der Temperatur $T + dT$ und dem Sättigungsdruck $p_s + dp_s$ durch Zufuhr der molaren Verdampfungsenthalpie ΔH_{mv} verdampft. Auf dem Weg 1–2 erfolgt bei der Temperatur T und dem Dampfdruck p_s eine Kondensation. Zunächst liegt das Volumen V_m^D in gasförmigem Zustand vor, am Ende ist das Volumen V_m^{Fl} flüssig. (Die adiabaten Teilstücke 4–1 und 2–3 sind infinitesimal klein und daher bedeutungslos.) Die in diesem Diagramm verrichtete Arbeit ist $-dW = (V_m^D - V_m^{Fl})\,dp_s$. Nach (3.75) und (3.76) lässt sich der thermische Wirkungsgrad des Carnot'schen Kreisprozesses ermitteln aus

$$\eta_{th} = \frac{dT}{T} = \frac{\left(V_m^D - V_m^{Fl}\right)\,dp_s}{\Delta H_{mv}} \,.$$

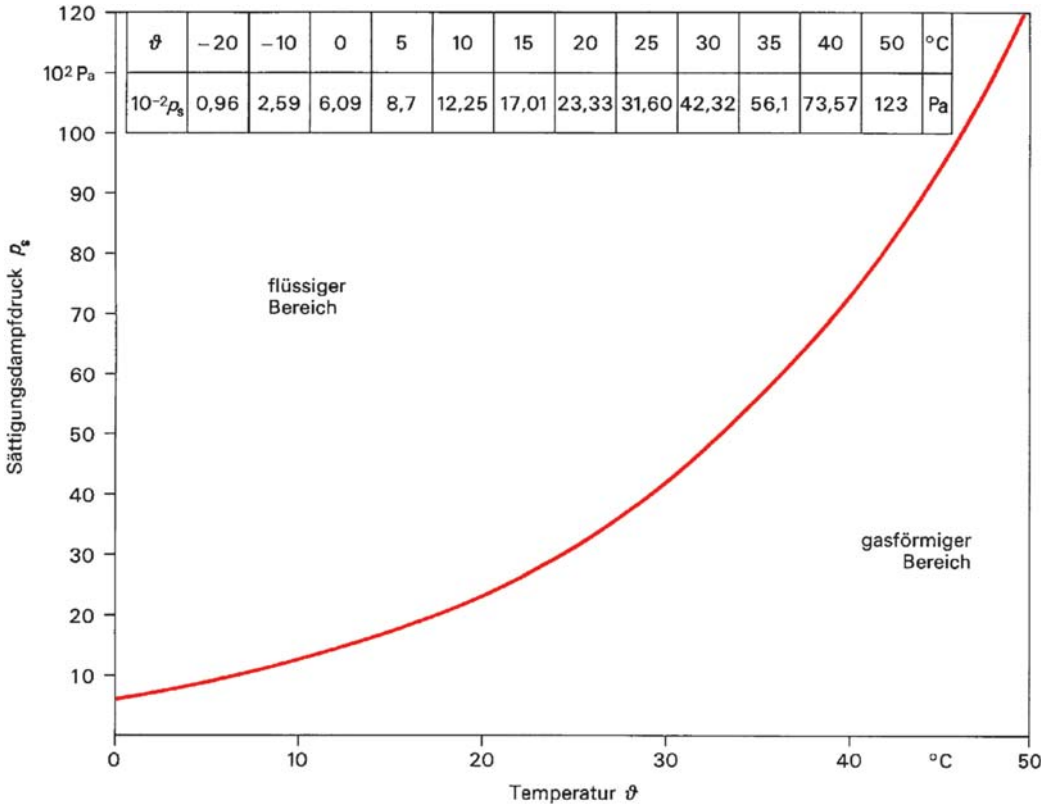


Abb. 3.45 Verlauf des Sättigungsdampfdrucks p_s von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur

Daraus ergibt sich als Steigung der Dampfdruckkurve die *Clausius-Clapeyron'sche-Gleichung* (R. E. Clausius, 1822 bis 1888, und B. P. E. Clapeyron, 1799 bis 1864):

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta H_{\mathrm{m}\nu}}{\left(V_\mathrm{m}^\mathrm{D} - V_\mathrm{m}^\mathrm{Fl}\right) T} \,. \tag{3.121}$$

Da das Molvolumen des Dampfes V_m^D stets größer ist als das der Flüssigkeit V_m^Fl, ist die Steigung positiv, d. h., der Sättigungsdampfdruck steigt – wie erwartet – mit zunehmender Temperatur. Wird das Molvolumen der Flüssigkeit V_m^Fl vernachlässigt und der gesättigte Dampf als ideales Gas betrachtet ($V_\mathrm{m}^\mathrm{D} = R_\mathrm{m} T/p_\mathrm{s}$), dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta H_{\mathrm{m}\nu} p_\mathrm{s}}{R_\mathrm{m} T^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}}{p_\mathrm{s}} = \frac{\Delta H_{\mathrm{m}\nu}}{R_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}T}{T^2} \,.$$

Nach Integration erhält man

$$\ln\left(\frac{p_\mathrm{s}}{p_{\mathrm{s}0}}\right) = -\frac{\Delta H_{\mathrm{m}\nu}}{R_\mathrm{m} T} + c \,. \tag{3.122}$$

Dies entspricht dem Boltzmann-Faktor (3.120). Die Dampfdruckkurve lässt sich unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Verdampfungsenthalpie für viele Substanzen in folgender Form darstellen:

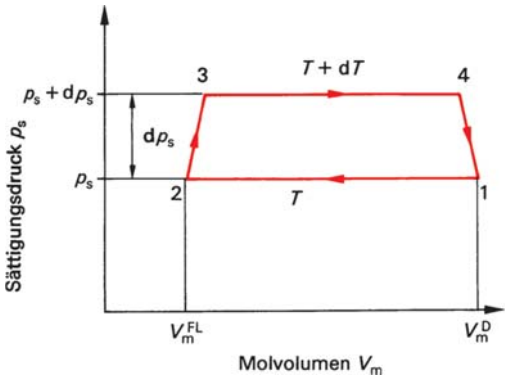


Abb. 3.46 Carnot'scher Kreisprozess für eine verdampfende und kondensierende Flüssigkeit

$$\ln\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right) = -\frac{a}{T} - b\ln\frac{T}{T_0} + c\,. \qquad (3.123)$$

a, b und c sind materialabhängige Konstanten. Die Dampfdruckkurve endet bei hohen Temperaturen am kritischen Punkt.

Ist der Dampfdruck einer Flüssigkeit gleich dem auf der Flüssigkeit wirkenden Druck eines anderen Gases (z. B. Luft auf Wasser), so bilden sich auch im Innern der Flüssigkeit Dampfblasen; die Flüssigkeit siedet. Wird der auf der Flüssigkeitsoberfläche liegende Druck erhöht, dann steigt der Siedepunkt. Dieser Effekt wird bei einem Dampfkochtopf ausgenützt. Wird der Druck erniedrigt, so fällt der Siedepunkt, sodass beispielsweise Wasser in großen Höhen deutlich unterhalb $\vartheta = 100\,^\circ\mathrm{C}$ kocht. Die Temperaturabhängigkeit des Siedepunkts wird aus der Dampfdruckkurve (Abb. 3.45) erkennbar.

Eine Verdampfung in offener Umgebung ist eine *Verdunstung*. Da der Dampf ständig wegtransportiert wird, kann sich kein Phasengleichgewicht bilden, sodass große Mengen Flüssigkeit verdunsten können. Die aufzuwendende Verdampfungswärme wird zum Teil der Flüssigkeit entzogen, die sich deshalb abkühlt (*Verdunstungskälte*).

3.4.3.3 Gleichgewicht zwischen fester und flüssiger Phase

Auch zwischen flüssiger und fester Phase besteht ein Gleichgewicht Die Schmelztemperatur ist wie bei der Phasenumwandlung flüssig–gasförmig nach der *Clausius-Clapeyron'schen Gleichung* vom Druck abhängig. Diese *Schmelzdruckkurve* beschreibt die für das Gleichgewicht zwischen fester und flüssiger Phase maßgebenden Wertepaare von Schmelzdruck p_f und Temperatur T:

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{\Delta H_{ms}}{\left(V_m^{Fl} - V_m^{Fest}\right) T}\,. \qquad (3.124)$$

Hierbei ist ΔH_{ms} die molare Schmelzenthalpie, V_m^{Fl} bzw. F_m^{Fest} das Molvolumen der flüssigen bzw. festen Substanz und T die Schmelztemperatur. Die Volumenänderung $V_m^{Fl} - V_m^{Fest}$, beim Übergang vom festen in den flüssigen Zustand, ist wesentlich geringer als vom gasförmigen in den flüssigen Zustand. Deshalb zeigen die Schmelzdruckkurven einen steileren Anstieg als die Dampfdruckkurven (Abb. 3.47). In den meisten Fällen ist das Volumen des festen Körpers V_m^{Fest} kleiner als das Flüssigkeitsvolumen V_m^{Fl}, sodass die Schmelzdruckkurve mit zunehmender Temperatur steigt. Bei Wasser dagegen ist das Eisvolumen größer als das Flüssigkeitsvolumen (*Anomalie des Wassers*). Dann wird nach (3.124) die Steigung der Schmelzdruckkurve dp_f/dT negativ. Dies hat zur Folge, dass die Schmelztemperatur mit zunehmendem Druck sinkt, sodass Eis bei gleichbleibender Temperatur durch Druckerhöhung schmilzt. Dieser Effekt macht Eissportarten, z. B. Schlittschuhlaufen, möglich: Infolge des Drucks schmilzt das Eis; wird der Druck weggenommen, dann gefriert der Wasserfilm wieder.

Der Übergang vom festen in den gasförmigen Aggregatzustand (*Sublimieren*) findet bei ent-

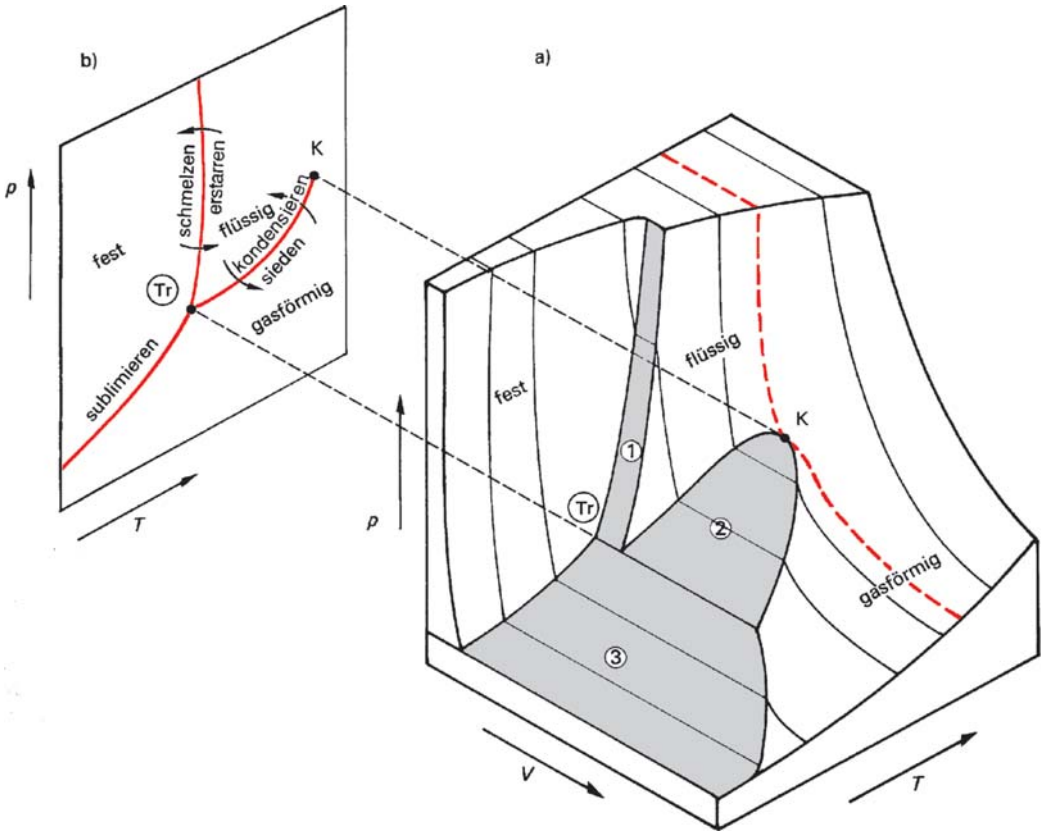


Abb. 3.47 Zustandsdiagramm. **a**) Dreidimensionales p, V, T-Diagramm (schematisch), **b**) zweidimensionales p, T-Diagramm (schematisch). p Druck, V Volumen, T absolute Temperatur, Tr Tripelpunkt, K kritischer Punkt, 1, 2, 3 Gleichgewichtsgebiete

sprechend niedrigen Drücken und Temperaturen statt. Diesen Vorgang kann man bei Normaldruck bei Kohlensäureschnee (Trockeneis) beobachten.

3.4.3.4 Koexistenz dreier Phasen

Der Verlauf der Phasengrenzen zwischen den drei Aggregatzuständen fest, flüssig und gasförmig in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Volumen wird durch ein *Zustandsdiagramm* beschrieben. Abbildung 3.47a zeigt dieses dreidimensionale „Gebirge", Abb. 3.47b das p, T-Zustandsdiagramm und Abb. 3.47c das p, T-Zustandsdiagramm für Kohlendioxid. Besonders wichtig sind die Gleichgewichtsgebiete (*Koexistenzgebiete*). Die grauen Flächen in Abb. 3.47a zeigen die Gleichgewichtsgebiete zwischen Festkörper und Flüssigkeit (1), Flüssigkeit und Gas (2) sowie Festkörper und Gas (3). Außerdem ist der kritische Punkt K ersichtlich. Das Flüssigkeitsgebiet wird oberhalb des kritischen Drucks p_k durch die *kritische Isotherme* T_k gegen das Gasgebiet abgegrenzt (gestrichelte rote Linie in Abb. 3.47). Die Begrenzungshyperbel am rechten Bildrand gibt den Übergang zum idealen Gas an. Am kritischen Punkt K für Kohlendioxid betragen die Werte für die Zustandsgrößen p_k = 7,38 MPa und T_k = 304,2 K. An der Sublimationsdruckkurve

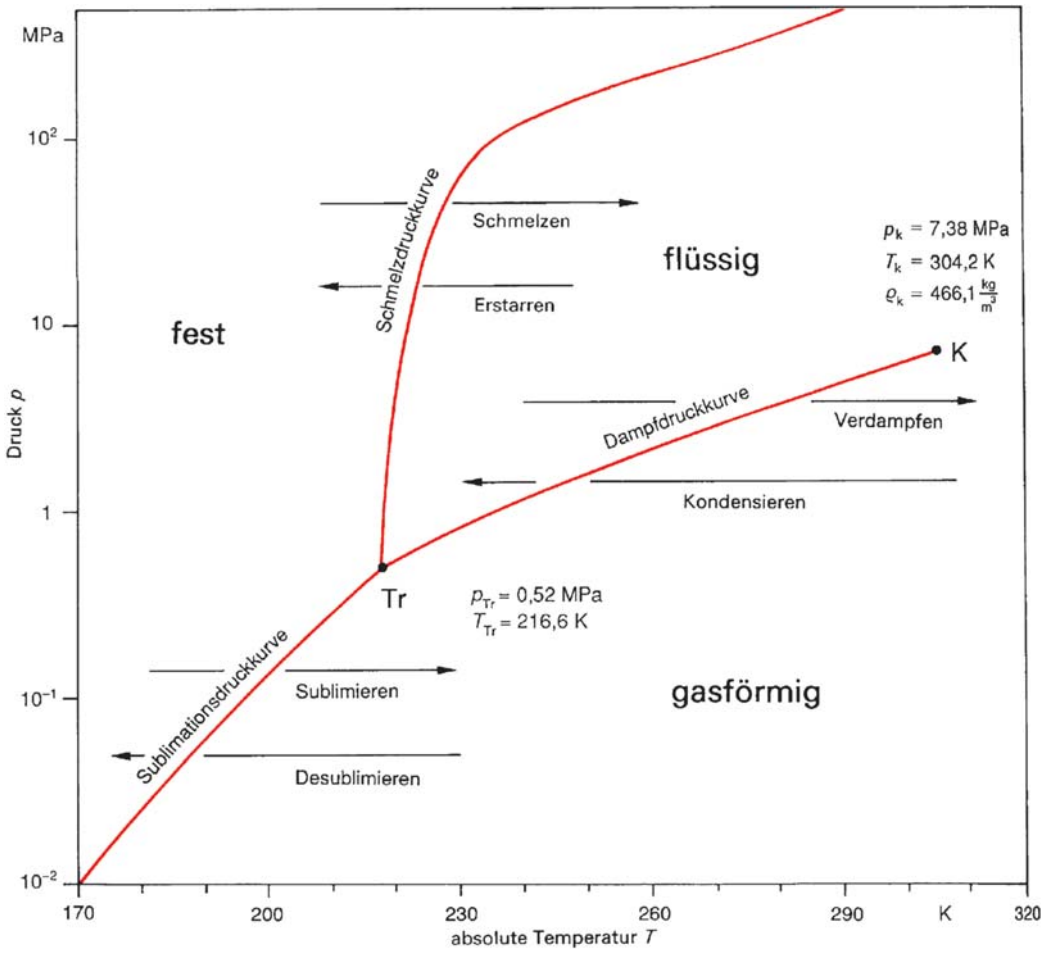


Abb. 3.47 c) p, T-Diagramm für Kohlendioxid

von Kohlendioxid lässt sich der Vorgang der Sublimation bei Normaldruck zeigen, für den Normdruck $p_n = 0{,}1013$ MPa ergibt sich im Gleichgewicht aus der Sublimationsdruckkurve die Temperatur $T = 195$ K ($\vartheta = -78\,^\circ$C). Bei dieser Temperatur findet ein direkter Übergang vom festen in den gasförmigen Zustand statt (Sublimation). Im p, T-Zustandsdiagramm gibt es einen einzigen Punkt Tr, in dem die feste, flüssige und gasförmige Phase im Gleichgewicht stehen. Er wird *Tripelpunkt* genannt. Die Koexistenz von drei Phasen tritt nur bei einer wohldefinierten Temperatur auf, weshalb der Tripelpunkt zur Temperaturdefinition geeignet ist. Der Tripelpunkt des Wassers ist der Fundamentalpunkt für die Temperaturskala nach Kelvin. Er liegt bei der Temperatur $T_{Tr} = 273{,}16$ K, der Druck beträgt $p_{Tr} = 612$ Pa. Für Kohlendioxid betragen die Werte $T_{Tr} = 216{,}6$ K und $p_{Tr} = 0{,}52$ MPa (Abb. 3.47c).

Befinden sich in einem Gefäß mehrere Phasen, dann sind die Zustandsvariablen Druck und Temperatur nicht voneinander unabhängig.

Die Anzahl der *Freiheitsgrade* f, d. h. die Anzahl der physikalischen Zustandsgrößen, die

frei variiert werden können, sind durch die *Gibbs'sche Phasenregel* (J. W. Gibbs, 1839 bis 1903) gegeben:

$$f = k + 2 - P\,. \tag{3.125}$$

Es bedeuten hierbei k die Anzahl der unabhängigen chemischen Komponenten und P die Anzahl der Phasen. Für reines Wasser ist $k = 1$. Liegt nur eine Phase vor (z. B. die Gasphase), dann ist $P = 1$ und es gibt $f = 2$ Freiheitsgrade. Dies bedeutet, dass die Temperatur und der Druck unabhängig voneinander variieren können. Liegen aber zwei Phasen gleichzeitig vor (z. B. entlang der Dampfdruckkurve), so gibt es nur noch einen Freiheitsgrad ($f = 1$); beispielsweise ist dann nur die Temperatur unabhängig variierbar. Im Tripelpunkt liegen alle drei Phasen nebeneinander vor ($P = 3$). In diesem Fall gibt es keinen Freiheitsgrad mehr ($f = 0$), d. h., die physikalischen Zustandsgrößen Druck p und Temperatur T sind festgelegt.

3.4.4 Dämpfe und Luftfeuchtigkeit

Die Berechnung und Auslegung von Luftzuständen (*Konditionierung*) ist ein wichtiges Arbeitsfeld der *Klimatechnik* und Luft das technisch wichtigste Dampf-Gas-Gemisch. Wenn in der Luft Wasserdampf enthalten ist, liegt *feuchte Luft* vor. Die Aufgabe der Klimatechnik besteht darin, Luftmassen zu befeuchten oder zu trocknen. Nach Abb. 3.48 gibt es hierfür drei Möglichkeiten:

- *Mischung von Luftmassen,*
- *Wärmezu- bzw. -abfuhr* und
- *Wasserzu- bzw. -abfuhr.*

Diese Konditionierungskonzepte für Luft werden beispielsweise zur Lösung folgender Aufgaben eingesetzt:

- Auslegung von stationären Klimaanlagen,
- Auslegung der Klimatisierung von Verkehrsmitteln *(air condition* in Bussen und Flugzeugen) sowie
- Auslegung von Produktionshallen zur Kunststoffverarbeitung. (Einige Kunststoffe geben nach zu feuchter Verarbeitung Wasser ab. Dann schrumpft das Kunststoffteil, es ist nicht mehr maßhaltig.)

Die zahlenmäßigen Angaben in den folgenden Gleichungen sind auf den Normdruck ($p_n = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa) bezogen und für den in der Klimatechnik üblichen Temperaturbereich zwischen $\vartheta = -10\,^\circ$C und $\vartheta = +40\,^\circ$C näherungsweise gültig.

Druck der feuchten Luft

Der Druck p_{FL} der feuchten Luft wird unmittelbar an einem Barometer abgelesen (Abschn. 2.12.1.1) und setzt sich nach dem *Dalton'schen Gesetz* aus der Summe der Partialdrücke (Druck der trockenen Luft p_{TL} und Druck des Wasserdampfes p_D) zusammen: $p_{FL} = p_{TL} + p_D$.

Absolute Luftfeuchtigkeit

Die *absolute Luftfeuchtigkeit* φ_a ist der Quotient aus der Masse des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes m_D und dem Volumen der feuchten Luft V_{FL}:

$$\varphi_a = \frac{m_D}{V_{FL}}\,. \tag{3.126}$$

Relative Luftfeuchtigkeit

Die *relative Luftfeuchtigkeit* φ ist der Quotient aus dem Partialdruck des Wasserdampfes p_D und dem Sättigungsdampfdruck des Wasserdampfes p_s (bei der jeweiligen Temperatur):

$$\varphi = \frac{p_D}{p_s}\,. \tag{3.127}$$

Aufgaben / technische Lösung	Befeuchten	Trocknen
Mischung von Luftmassen	Zufuhr feuchter Luft	Zufuhr trockener Luft
Wärmezu- bzw. -abfuhr	Temperatur-absenkung	Temperatur-erhöhung
Wasserzu- bzw. -abfuhr	Wasserzufuhr (durch Einsprühen)	Wasserentzug (durch Abkühlen unter Taupunkt)

Abb. 3.48 Aufgaben der Klimatechnik und ihre technische Realisierung

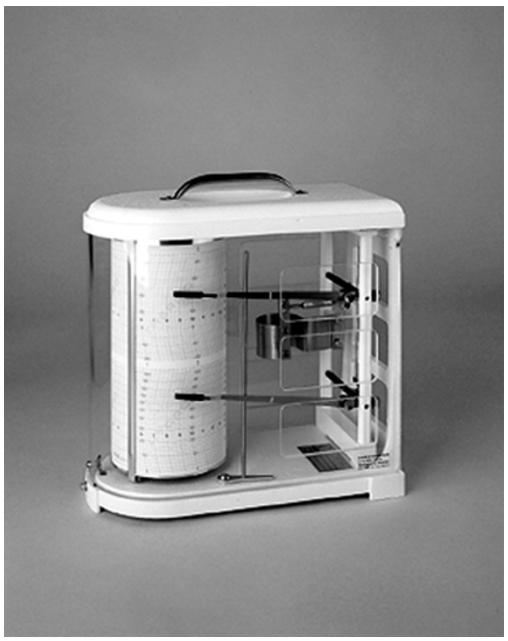


Abb. 3.49 Thermo-Hygrograph. Werkfoto: Luftbefeuchtung Proklima GmbH

(Der Wert wird manchmal noch mit 100 multipliziert, und die relative Luftfeuchtigkeit φ in Prozent angegeben.) Je nachdem, ob die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi < 1, \varphi = 1$ oder $\varphi > 1$ ist, ist die Luft ungesättigt, gesättigt oder übersättigt.

Physikalische Effekte, die stark abhängig von der Feuchtigkeit sind, dienen zur Messung und Regelung der relativen Luftfeuchtigkeit. Früher wurde vorwiegend die Längenänderung hygroskopischer Stoffe zur Messung herangezogen. In *Feuchtesensoren* modernerer Art nutzt man die Änderung von elektrischen Eigenschaften (z. B. *Widerstands-* oder *Kapazitätshygrometer*), die vom Sättigungsgrad der Luft abhängige Abkühlung befeuchteter Thermometer (*Aspirationspsychrometer*) oder das Beschlagen abgekühlter Spiegel (*Taupunktsspiegel*) zur Feuchtemessung.

Die fortlaufende Messung der Temperatur und der relativen Luftfeuchtigkeit ist für die Überwachung von technischen und baulichen Anlagen von Bedeutung (z. B. Telefonzentralen oder Kunstausstellungen). Sie kann mit *Thermo-Hygrographen* gemäß Abb. 3.49 erfolgen.

Feuchtegrad

Unter dem Feuchtegrad x versteht man den Quotienten aus der Masse des Wasserdampfes m_D und der Masse der trockenen Luft m_TL:

$$x = \frac{m_\mathrm{D}}{m_\mathrm{TL}} \,. \tag{3.128}$$

Der Feuchtegrad kann mit der allgemeinen Gasgleichung $pV = mR_\mathrm{i}T$ in Druckverhältnisse umgerechnet werden; dabei ist für tro-

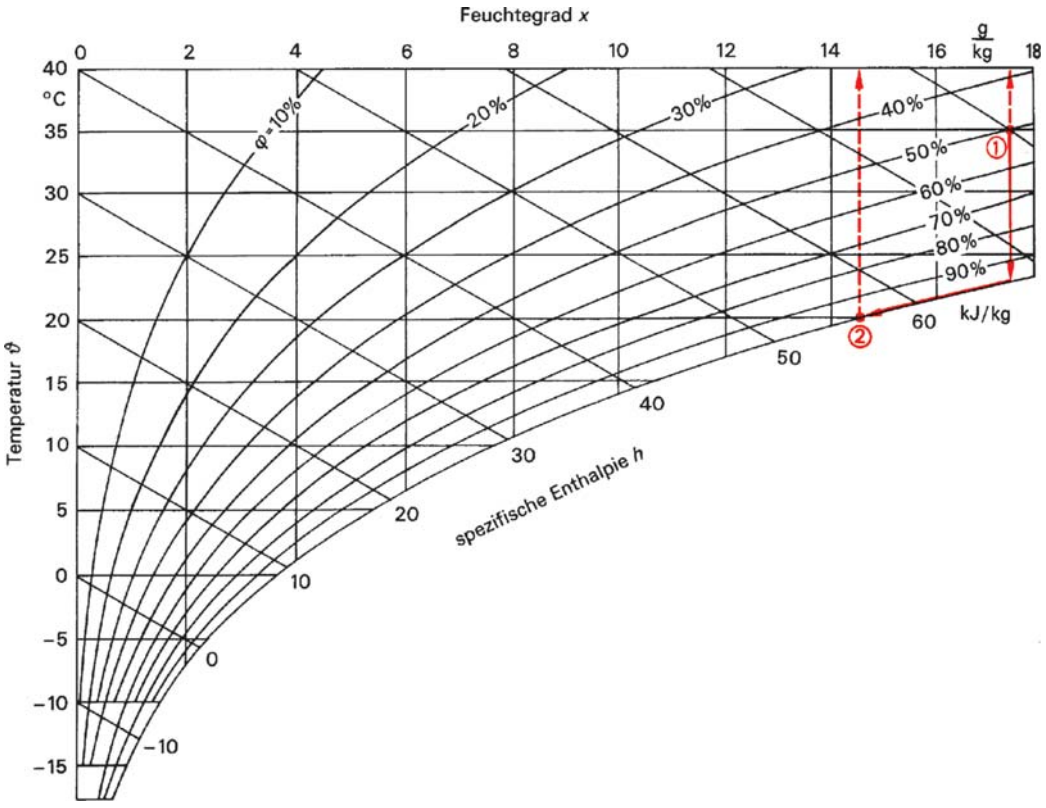


Abb. 3.50 h,x-Diagramm nach Mollier für feuchte Luft beim Druck $p = 1\,013$ hPa (VDI-Richtlinie 2067, Blatt 3). φ relative Feuchte. Die roten Linien beziehen sich auf Beispiel 3.4-2

ckene Luft $R_{i\,TL} = 287$ J/(kg K) und für Wasserdampf $R_{i\,D} = 462$ J/(kg K) zu setzen.

Dichte der feuchten Luft

Die Dichte der feuchten Luft ϱ_{FL} setzt sich aus der Dichte der trockenen Luft ϱ_{TL} und des Dampfes ϱ_D zusammen: $\varrho_{FL} = \varrho_{TL} + \varrho_D$. Wird das allgemeine Gasgesetz verwendet, so ist $\varrho_{TL} = p_{TL}/(R_{i\,TL}T)$ und $\varrho_D = p_D/(R_{i\,D}T)$. Nach dem *Dalton'schen Gesetz* (3.119) ist $p_{TL} = p_{FL} - p_D$, sodass sich für die Dichte der feuchten Luft ergibt

$$\varrho_{FL} = \frac{1}{T}\left(\frac{p_{FL} - p_D}{R_{i\,TL}} + \frac{p_D}{R_{i\,D}}\right) . \qquad (3.129)$$

Da $R_{i\,D}$ größer als $R_{i\,TL}$ ist, ergibt sich nach (3.129), dass feuchte Luft leichter ist als trockene.

Spezifische Enthalpie feuchter Luft

Die *spezifische Enthalpie* ($h = H/m$ [kJ/kg]) der feuchten Luft h_{FL} ist die Summe aus der spezifischen Enthalpie der trockenen Luft h_{TL} und der mit dem Feuchtegrad x multiplizierten spezifischen Enthalpie des Wasserdampfes h_D, also

$$h_{FL} = h_{TL} + x\,h_D . \qquad (3.130)$$

Setzt man für $T_0 = 273{,}15$ K die Enthalpie willkürlich gleich null, dann gilt nach (3.52)

für die spezifische Enthalpie der trockenen Luft $h_{\mathrm{TL}} = c_{p\,\mathrm{TL}}(T - T_0)$ und für die des Wasserdampfes unter Berücksichtigung der spezifischen Verdampfungsenthalpie Δh_{V} des Wassers $h_{\mathrm{D}} = c_{p\,\mathrm{D}}(T - T_0) + \Delta h_{\mathrm{V}}$.
Für klimatechnische Berechnungen geeigneter ist das *Mollier-Diagramm* (R. Mollier, 1863 bis 1935), eine grafische Darstellung der Zusammenhänge von (3.128) bis (3.130) zwischen der Temperatur ϑ der spezifischen Enthalpie h der feuchten Luft, der relativen Luftfeuchtigkeit φ und dem Feuchtegrad x. Üblicherweise erstellt man das Mollier-Diagramm für Normdruck gemäß Abb. 3.50.

Beispiel

3.4-2 Gegeben sind $m = 50\,\mathrm{kg}$ feuchte Luft vom Umgebungsdruck $p = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ mit einer Temperatur $\vartheta = 35\,^{\circ}\mathrm{C}$ und einer relativen Luftfeuchtigkeit $\varphi_1 = 0{,}5\,(50\%)$. Berechnet werden soll die Wärmemenge, die dieser Luftmasse zu entziehen ist, um als neuen Luftzustand eine Temperatur $\vartheta_2 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von $\varphi = 1\,(100\%)$ zu erzielen. Ferner soll bestimmt werden, welche Kondenswassermenge hierbei anfällt.

Lösung

In Abb. 3.50 ist dieser Vorgang rot eingezeichnet. Der Luftzustand 1 hat einen Feuchtegrad von $x_1 = 17{,}5\,\mathrm{g/kg}$ und eine spezifische Enthalpie von $h_1 = 80\,\mathrm{kJ/kg}$. Da der Feuchtegrad sich bis zur relativen Luftfeuchtigkeit von $\varphi = 100\%$ nicht ändert, wird im h,x-Diagramm eine senkrechte Wegstrecke zurückgelegt. Entlang der Sättigungslinie verläuft der Prozess weiter bis zum Zustand 2. Dieser hat einen Feuchtegrad $x_2 = 14{,}6\,\mathrm{g/kg}$ und eine spezifische Enthalpie $h_2 = 57\,\mathrm{J/kg}$. Daraus lässt sich die Kondenswassermenge $\Delta m_{\mathrm{H_2O}} = \Delta x\, m$ berechnen, wobei $\Delta x = x_1 - x_2 = 2{,}9\,\mathrm{g/kg}$ ist. Somit errechnet sich $\Delta m_{\mathrm{H_2O}} = 2{,}9 \cdot 50\,\mathrm{g} = 145\,\mathrm{g}$ Kondenswasser. Für die abgeführte Wärmemenge gilt

$$\Delta H = (h_2 - h_1)m = -23\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}\;50\,\mathrm{kg} = -1\,550\,\mathrm{kJ}\,.$$

3.5 Wärmeübertragung

Durch die Trennwand zwischen thermodynamischen Systemen mit unterschiedlichen Temperaturen und damit unterschiedlichen kinetischen Energien wird vom System höherer Temperatur Wärme an das System mit niedrigerer Temperatur abgegeben. Der *Wärmedurchgang* lässt sich gemäß Abb. 3.51 in die drei Übertragungsmechanismen *Wärmeleitung, Konvektion* und *Wärmestrahlung* einteilen. In Festkörpern tritt nur *Wärmeleitung* in Form einer Übertragung der Schwingungsenergien benachbarter Moleküle und der kinetischen Energien der Leitungselektronen in Stoßprozessen auf (Abschn. 9.3.1). In Flüssigkeiten kommt es auch ohne von außen aufgeprägter Zwangsströmung zu Strömungen erwärmter Teilmengen, zur *freien Konvektion*. Wird die Flüssigkeit durch äußere Druckkräfte in Bewegung versetzt, so wird dieser Wärmetransportmechanismus als *erzwungene Konvektion* bezeichnet. In stehenden Flüssigkeiten bestimmt die Wärmeleitung den Wärmetransport. Mit Ausnahme dünner ruhender Gasschichten, in denen die Wärmeleitung nicht vernachlässigbar ist, dominieren in Gasen die Konvektion und die *Wärmestrahlung* zwischen den Wänden des Gasvolumens. Im Vakuum ist der Wärmetransport durch Wärmestrahlung der einzige Wärmeübertragungsmechanismus.

3.5.1 Wärmeleitung

Den Zusammenhang zwischen der Ursache eines Wärmetransports, einem räumlichen Temperaturgradienten $\partial\vartheta/\partial n$ in einer Raumrichtung n und der in der Zeitspanne Δt durch eine Grenzfläche A transportierten Wärme ΔQ, der Wärmestromdichte $j_{\mathrm{q}} = \Delta Q/A\Delta t = \dot{Q}/A$, beschreibt das *Fourier'sche Grundgesetz des molekularen Wärmetransports* (J. B. J. Fourier, 1768 bis 1830):

$$j_{\mathrm{q}} = -\lambda\,\mathbf{grad}\,\vartheta \qquad (3.131)$$

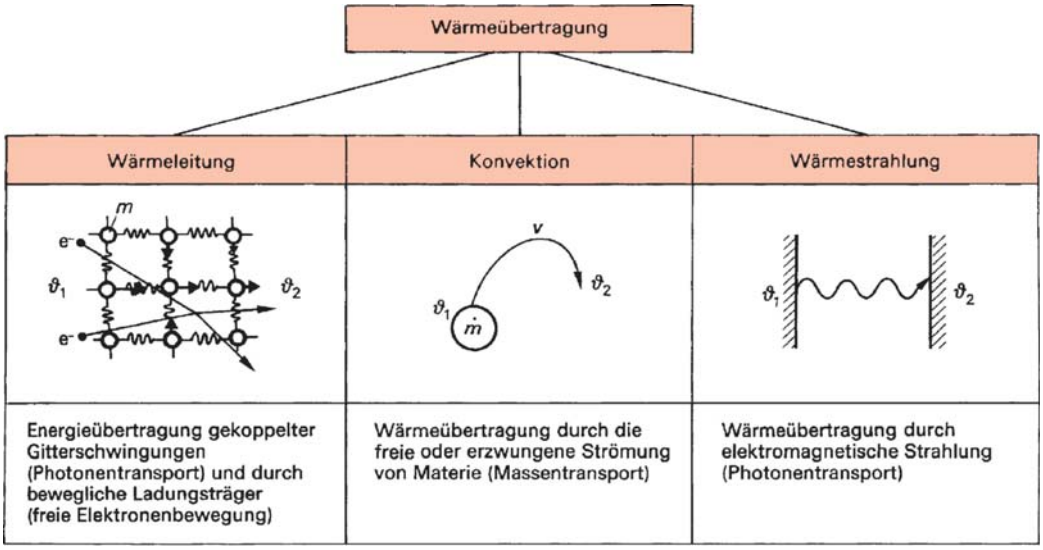


Abb. 3.51 Wärmeübertragungsmechanismen

mit dem Temperaturgradienten

$$\mathbf{grad}\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\boldsymbol{k}\,. \qquad (3.132)$$

Die Proportionalitätskonstante λ ist die *Wärmeleitfähigkeit* des Wärmekontakts. Die Maßeinheit der Wärmeleitfähigkeit ist W/(m K). Die Wärmeleitfähigkeitswerte der Stoffe sind sehr unterschiedlich. Die Wärmeleitfähigkeit ist besonders gering, wenn bei ruhenden Gasen die Dichte der energieübertragenden Moleküle niedrig ist. Sie ist besonders hoch – etwa in Metallen –, wenn parallel zur Energieleitung durch Übertragung der Schwingungsenergien der Atomrümpfe frei bewegliche Elektronen bei Stoßprozessen Energie transportieren. In elektrisch gut leitenden Metallen ist bei nicht zu tiefen Temperaturen nach dem *Wiedemann-Franz'schen Gesetz* (G. H. Wiedemann, 1826 bis 1899, R. Franz, 1827 bis 1902) die Wärmeleitfähigkeit λ proportional zur elektrischen Leitfähigkeit $\varkappa$ (Abschn. 9.3.1.3) gemäß

$$\lambda = LT\varkappa\,. \qquad (3.133)$$

T ist die absolute Temperatur des Stoffs, L wird als *Lorenz'sche Zahl* bezeichnet und hat für alle Metalle annähernd denselben Wert $L = 2{,}45 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{V^2/K^2}$. Isolatoren, beispielsweise die nichtmetallischen Baustoffe, sind schlechte Wärmeleiter. Ruhende Gasschichten in Poren oder zwischen Mineral-, Glas-, Holz- oder Korkfasern vermindern die Wärmeleitfähigkeit erheblich. Bei Mauersteinen nimmt die Wärmeleitfähigkeit etwa proportional zum wachsenden Porenanteil (abnehmende Rohdichte) ab. Porosierte, luft- oder schwergasgeschäumte sowie faserartige Stoffe mit einer Wärmeleitfähigkeit unter $\lambda = 0{,}1$ W/(m K) werden als *Wärmedämmstoffe* bezeichnet.

Die Wärmeleitfähigkeit ist temperaturabhängig und besonders bei porosierten Stoffen stark abhängig von der Materialfeuchtigkeit. Zur Beurteilung des *Wärmeschutzes im Hochbau nach DIN 4108* werden des-

halb nur *Rechenwerte der Wärmeleitfähigkeit* λ_R verwendet, die einen der praktischen Baufeuchtigkeit entsprechenden Zuschlag zu den experimentell im trockenen Zustand gemessenen Wärmeleitfähigkeitswerten enthalten. In Tabelle 3.12 sind einige wärmetechnische Stoffwerte zusammengestellt.

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (Abschn. 3.3.2) ist die Zunahme der inneren Energie $c\,\mathrm{d}m\,\partial\vartheta/\partial t$ (c ist die spezifische Wärmekapazität $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ die Masse des Volumenelementes $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.) gleich der Energiezufuhr durch die internen Wärmequellen mit der Energiedichte $\dot{f}$ im Volumenelement $\mathrm{d}V$, abzüglich der Wärmeströme $j_q\,\mathrm{d}A$ durch die Oberflächen $\mathrm{d}A$ des Volumenelements gemäß Abb. 3.52:

$$
\begin{aligned}
c\,\mathrm{d}m\frac{\partial\vartheta}{\partial t} &= \dot{f}\,\mathrm{d}V \\
&- \{[j_q(x+\mathrm{d}x) - j_q(x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&+ [j_q(y+\mathrm{d}y) - j_q(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&+ [j_q(z+\mathrm{d}z) - j_q(z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\}\,. \qquad (3.134)
\end{aligned}
$$

In einem infinitesimalen Volumenelement sind die Wärmestromdichten, entwickelt in eine Taylorreihe $j_q(x+\mathrm{d}x) = j_q(x) + (\partial j_{qx}/\partial x)\,\mathrm{d}x$, $j_q(y+\mathrm{d}y) = j_q(y) + (\partial j_{qy}/\partial y)\,\mathrm{d}y$ und $j_q(z+\mathrm{d}z) = j_q(z) + (\partial j_{qz}/\partial z)\,\mathrm{d}z$. Diese Beziehungen in (3.134) eingesetzt ergibt die *Fourier'sche Differenzialgleichung für den Transport durch Wärmeleitung*:

$$
c\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \dot{f} - \left\{\frac{\partial j_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{qz}}{\partial z}\right\}\,. \qquad (3.135)
$$

Die Elimination der Wärmestromdichten in (3.135) mit Hilfe von (3.131) führt auf die

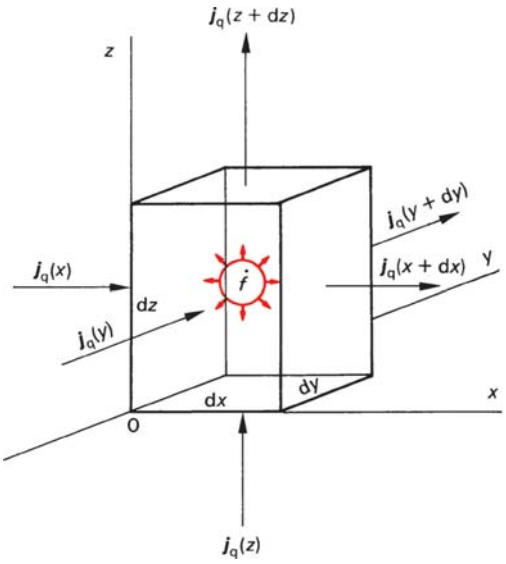


Abb. 3.52 Wärmeströme durch die Oberfläche eines Volumenelements $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ mit der Wärmequellendichte $\dot{f}$

Bestimmungsgleichung für den räumlichen Verlauf der *Isothermen* und das zeitliche Verhalten des *skalaren Temperaturfeldes* $\vartheta(x, y, z, t)$:

$$
c\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \dot{f} + \lambda\left\{\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right\}\,. \qquad (3.136)
$$

Rand- und Anfangsbedingungen bestimmen die Lösungsfamilien der partiellen Differenzialgleichung (3.136). Interne Wärmequellen können vernachlässigt und $\dot{f} = 0$ gesetzt werden, wenn die Lösungen nur für den wärmequellenfreien Bereich des Temperaturfeldes gesucht und die Wärmequellen bei der Wahl der Randbedingungen berücksichtigt werden. Im *stationären Fall* sind die Temperaturen zeitlich konstant und $\partial\vartheta/\partial t = 0$. Das stationäre, wärmequellenfreie Tempera-

Tabelle 3.12 Wärmetechnische Stoffwerte

Stoff	ϑ in °C	ϱ in $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	c_p in $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	λ in $\frac{\text{W}}{\text{m K}}$	a in $10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Festkörper					
Aluminium	20	2,70	920	221	88,89
Eisen	20	7,86	465	67	18,33
Grauguss	20	ca. 7,2	545	ca. 50	ca. 13
Stahl 0.6 C	20	7,84	460	46	12,78
Gold	20	19,30	125	314	130,57
Kupfer	20	8,90	390	393	113,34
Schamottestein	100	1,7	835	0,5	0,35
Normalbeton	10	2,4	880	$2{,}1^{R}$	1,0
Gasbeton	10	0,5	850	$0{,}22^{R}$	0,5
Ziegelstein	10	1,2	835	$0{,}5^{R}$	0,5
Eis	0	0,92	1 930	2,2	1,25
Schnee	0	0,1	2 090	0,11	0,53
Fichtenholz	10	0,6	2 000	$0{,}13^{R}$	0,11
Polystyrol fest	20	1,05	1 300	0,17	0,125
Glas	20	2,5	800	0,8	0,4
Schaumglas	10	0,1	800	$0{,}045^{R}$	0,6
Mineralfaser	10	0,2	800	$0{,}04^{R}$	0,3
Flüssigkeiten					
Wasser	20	0,998	4 182	0,600	0,144
Wärmeträgeröl	20	0,87	1 830	0,134	0,084
Kältemittel R 12	−20	1,46	900	0,086	0,065
Gase					
Luft	20	0,00119	1 007	0,026	21,8
Kohlendioxid	0	0,00195	827	0,015	9,08
Wasserdampf	150	0,00255	2 320	0,031	5,21

ϑ Temperatur
ϱ Dichte
c_p spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
λ Wärmeleitfähigkeit (^{R} Rechenwert DIN 4108)
a Temperaturleitfahigkeit

turfeld folgt aus der Lösung der *Laplace-Gleichung* (2.197)

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = 0\,. \qquad (3.137)$$

Der *Laplace-Gleichungstyp* kommt auch in anderen Bereichen der Physik, beispielsweise in der Elektrostatik, vor. Dort experimentell für spezielle Randbedingungen gefundene Lösungen können auf Wärmetransportprobleme übertragen werden (*elektrisches Analogon der Wärmeleitung,* Abschn. 2.12.2, Abb. 2.103).
Sind das Temperaturfeld und der Verlauf der Isothermen bekannt, dann berechnen sich daraus die Wärmeströme nach (3.131), wobei die Wärmestromrichtung senkrecht auf den Isothermen steht. So lassen sich die in Abb. 3.53 dargestellten Lösungen für die

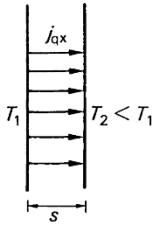
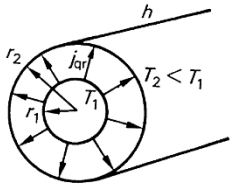
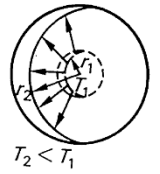
Geometrie	planparallele Platte (eindimensionaler Fall)	zylindrisches Rohr (zweidimensionaler Fall)	Hohlkugel (dreidimensionaler Fall)
			
Fourier-Grundgleichung	$j_{qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ $\dot{Q} = j_{qx} A$ (3.138)	$j_{qr} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ $\dot{Q} = j_{qr} 2\pi r h$ (3.142)	$j_{qr} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ $\dot{Q} = j_{qr} 4\pi r^2$ (3.147)
Temperaturprofil	$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x$ (3.139)	$T = \frac{T_1 \ln \frac{r}{r_2} - T_2 \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$ (3.143)	$T = \frac{(r_2 T_2 - r_1 T_1)}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 (T_2 - T_1)}{(r_2 - r_1)} \frac{1}{r}$ (3.148)
Wärmestrom, einschichtige Trennwand	$j_{qx} = \frac{\lambda}{s} (T_1 - T_2)$ (3.140)	$j_{qr} = \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$ (3.144) $\frac{\dot{Q}}{h} = \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$ (3.145)	$j_{qr} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_1 - T_2)$ (3.149) $\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (T_1 - T_2)$ (3.150)
Wärmestrom, mehrschichtige Trennwand	$j_{qx} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}}$ (3.141)	$\frac{\dot{Q}}{h} = \frac{2\pi (T_1 - T_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{r_4}{r_3}}$ (3.146)	$\dot{Q} = \frac{4\pi (T_1 - T_2)}{\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \frac{1}{\lambda_3}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)}$ (3.151)

Abb. 3.53 Lösungen für den stationären Wärmetransport durch Wärmeleitung

stationäre Wärmeleitung durch eine Platte, eine Rohrwand und eine Hohlkugel ableiten. Der Wärmestrom durch mehrschichtige Bauteile wird durch die sukzessive Aneinanderreihung der Berechnungen für die Einzelschichten ermittelt, wobei wegen des Energieerhaltungssatzes die Wärmeströme an den Grenzflächen gleich gesetzt werden. Die Lösungen für mehrschichtige Trennwände sind ebenfalls in Abb. 3.53 aufgeführt.

Beispiel

3.5-1 Wie groß ist der stationäre Wärmestrom durch eine $s_2 = 24\,\text{cm}$ dicke Hochlochziegelwand ($\lambda_R = 0{,}50\,\text{W/(m K)}$) mit einer außenseitigen $s_3 = 60\,\text{mm}$ dicken Polystyrol-Dämmplattenschicht ($\lambda_R = 0{,}04\,\text{W/(m K)}$) und $s_4 = 6\,\text{mm}$ Kunstharzputz ($\lambda_R = 0{,}70\,\text{W/(m K)}$) gemäß Abb. 3.54, auf die raumseitig ein $S_1 = 15\,\text{mm}$ dicker Kalkgipsputz ($\lambda_R = 0{,}70\,\text{W/(m K)}$) aufgebracht ist? Wie ist der Temperaturverlauf im Beharrungszustand in der Wand, wenn die Oberflächentemperaturen innen $\vartheta_{Oi} = 17\,°\text{C}$ und außen $\vartheta_{Oa} = -10\,°\text{C}$ betragen?

Lösung

Die Energieerhaltung fordert, dass die Wärmestromdichte j_q in allen Schichten gleich ist. Mit (3.140) führt diese Forderung auf

$$j_q = \frac{\lambda_1}{s_1}(\vartheta_{Oi} - \vartheta_1) = \frac{\lambda_2}{s_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{\lambda_3}{s_3}(\vartheta_2 - \vartheta_3) = \frac{\lambda_4}{s_4}(\vartheta_3 - \vartheta_{Oa})\,. \tag{3.152}$$

Der Quotient $\Lambda = \lambda/s$ ist der *Wärmedurchlasskoeffizient* einer Schicht, der Kehrwert $R = 1/\Lambda$ der *Wärmedurchlasswiderstand* mit der Maßeinheit $\text{m}^2\text{K/W}$
Wird (3.152) in die Beziehung

$$\vartheta_{Oi} - \vartheta_{Oa} = (\vartheta_{Oi} - \vartheta_1) + (\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_2 - \vartheta_3) + (\vartheta_3 - \vartheta_{Oa}) \tag{3.153}$$

eingesetzt, so folgt

$$\vartheta_{Oi} - \vartheta_{Oa} = j_q \left(\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4} \right)\,. \tag{3.154}$$

Wird als *Gesamt-Wärmedurchlasswiderstand*

$$R_g = \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4} \tag{3.155}$$

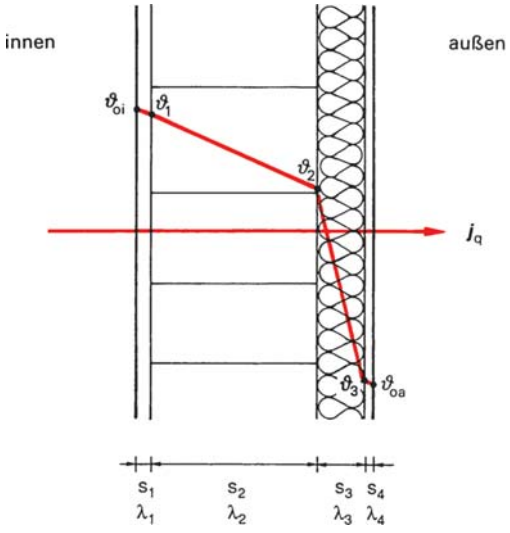


Abb. 3.54 Temperaturverlauf in einer mehrschichtigen Wand nach Beispiel 3.5-1

definiert, der im vorliegenden Fall $R_g = 2{,}01\,\text{m}^2\text{K/W}$ ist, so errechnet sich die Wärmestromdichte j_q durch die Wand zu

$$j_q = \frac{1}{R_g}(\vartheta_{Oi} - \vartheta_{Oa}) = 13{,}4\,\text{W/m}^2\,. \tag{3.156}$$

Die Temperaturen an den Schichtgrenzen lassen sich mit Hilfe von (3.152) bestimmen:

$$\vartheta_1 = \vartheta_{Oi} - R_1 j_q = 17{,}0\,°\text{C} - (0{,}02 \cdot 13{,}4)\text{K} = 16{,}7\,°\text{C}\,, \tag{3.157}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - R_2 j_q = 10{,}3\,°\text{C}\,, \tag{3.158}$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 - R_3 j_q = -9{,}9\,°\text{C} \quad \text{und} \tag{3.159}$$

$$\vartheta_{Oa} = \vartheta_3 - R_4 j_q = -10\,°\text{C}\,. \tag{3.160}$$

Nach (3.139) ist in plattenförmigen Schichten der Temperaturabfall linear. Das Temperaturprofil in der Außenwand hat also den in Abb. 3.54 eingezeichneten Verlauf.

Gleichung (3.155) für den *Gesamt-Wärmedurchlasswiderstand* R_g gilt nur für eindimensionale Wärmeströme durch plattenförmige Bauteile. Sind die Wärmeströme in einem Bauteil divergent und mehrdimensional, wie z. B. bei einer Außenecke oder in der Rippe eines Wärmerohrs gemäß Abb. 3.55

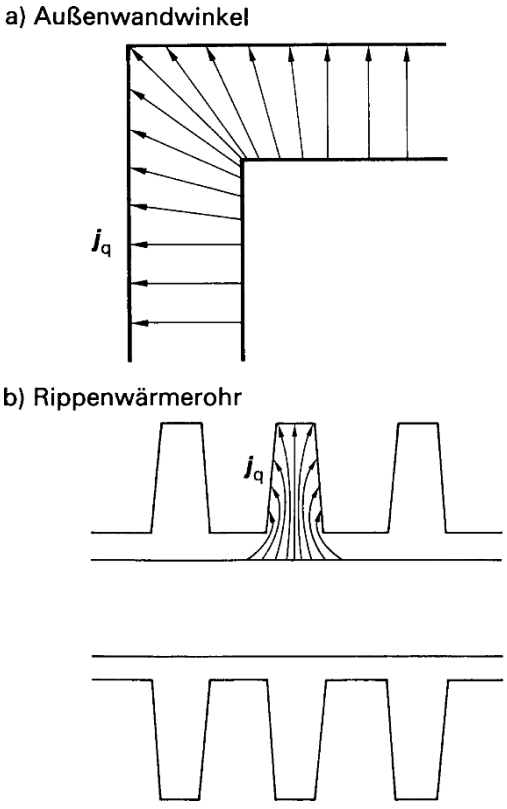


Abb. 3.55 Divergente Wärmeströme geometrischer Wärmebrücken

(gekrümmte Isothermen), dann ergibt die Anwendung von (3.155) falsche Wärmedurchlasswiderstandswerte; dies zeigt schon der Vergleich von (3.155) mit (3.144) im einfachen Fall der radialen Wärmestromlinien eines zylindrischen Rohrs.

Instationäre Wärmeleitungsvorgänge, beispielsweise der Aufheizvorgang einer Wand oder periodische Wärmeübertragungsprozesse, erfordern die Lösung der zeitabhängigen Wärmeleitungsgleichung (3.136). Die Lösungen haben als charakteristische Kenngröße die *Temperaturleitfähigkeit a* der Trennwand in m^2/s:

$$a = \frac{\lambda}{c\,\varrho}\,. \tag{3.161}$$

In der Regel lässt sich (3.136) ebenso wie (3.137) für praktische Fälle nicht geschlossen lösen, sondern muss durch ein Iterationsverfahren numerisch integriert werden (*Methode der finiten Elemente*).

3.5.2 Konvektion

Beim *konvektiven Wärmeübergang* findet die Wärmeübertragung zwischen zwei thermodynamischen Systemen statt, die sich relativ zueinander bewegen, wie es beispielsweise bei der Wärmeübertragung von einem *Fluid*, also einer Flüssigkeit oder einem Gas, an eine Wand der Fall ist, wie Abb. 3.56 zeigt. Erfolgt die Strömung des Fluids nur durch *Auftriebskräfte*, die ein temperaturabhängiges Dichtegefälle im Fluid verursacht, dann wird dieser Wärmeübergang als *freie Konvektion* bezeichnet. Bei der *erzwungenen Konvektion* handelt es sich um eine *Zwangsströmung* unter der Wirkung äußerer Kräfte, beispielsweise von Antriebskräften von Pumpen oder Ventilatoren. Auch beim konvektiven Wärmeübergang an windausgesetzten Bauteilen überwiegt in der Regel der Anteil der erzwungenen Konvektion.

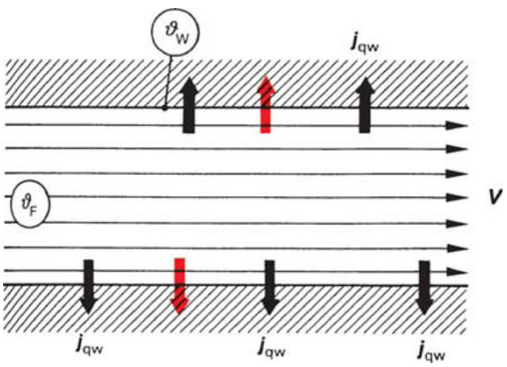


Abb. 3.56 Konvektiver Wärmeübergang bei einer erzwungenen Kanalströmung. ϑ Temperatur der Wand (Index W) bzw. des Fluids (Index F) j_{qw} Wärmestromdichte v Strömungsgeschwindigkeit

Die Proportionalitätskonstante zwischen der auf die wärmeübertragende Wandfläche A bezogenen Wärmestromdichte j_q und dem Temperaturgefälle zwischen der Fluidtemperatur ϑ_F und der Wandtemperatur ϑ_W wird als *Wärmeübergangskoeffizient* α_K^* definiert:

$$j_q = \alpha_K^*(\vartheta_F - \vartheta_W) \,. \qquad (3.162)$$

Adhäsionskräfte zwischen den Fluid- und Wandatomen sind die Ursache, dass sich im Fluid vor der Wand eine *Grenzsschicht* entsprechend Abb. 3.57 ausbildet, in der die Strömungsgeschwindigkeit der Fluidmoleküle null ist. Durch diese ruhende Fluidschicht vor der Wand wird die Wärme nur durch Wärmeleitung transportiert, sodass in diesem Bereich das *Fourier'sche Grundgesetz* (3.131) gilt:

$$j_q = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_{\text{Grenzschicht}} \,. \qquad (3.163)$$

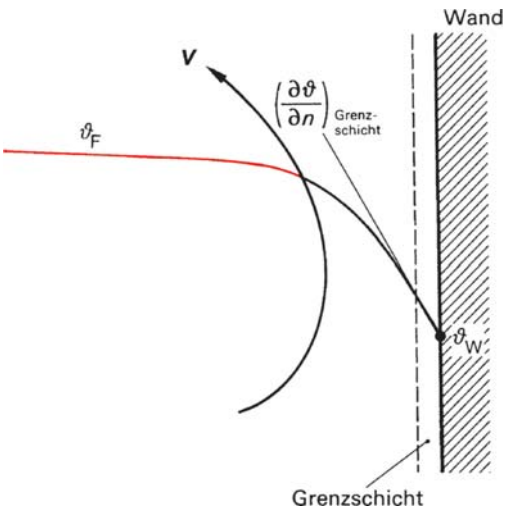


Abb. 3.57 Temperaturprofil des konvektiven Wärmeübergangs mit Grenzschicht vor der wärmeaufnehmenden Wand

(λ ist die Wärmeleitfähigkeit der stehenden Flüssigkeit oder des ruhenden Gases, $\partial\vartheta/\partial n$ der Temperaturgradient in der Grenzschicht normal zur Wand und j_q die Wärmestromdichte in die Wand.)

Im Gegensatz zur Wandtemperatur ϑ_W ist die Festlegung und Messung der Fluidtemperatur ϑ_F, besonders bei der freien Konvektion, nicht einfach, weil im Allgemeinen die Temperaturverteilung im Fluid sehr inhomogen ist. Der Zahlenwert des *konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten* hängt also im konkreten Fall von der Festlegung der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta_F - \vartheta_W$ ab.

Im Fall des konvektiven Wärmeübergangs ist die Berechnung des Wärmestroms mit der *Fourier-Differenzialgleichung* (3.136) wegen der räumlichen Mitführung des Temperaturfelds mit der Fluidbewegung extrem kompliziert. Um einen von der Strömungsgeschwindigkeit v abhängigen Transportanteil erweitert, lautet (3.136) für den wärmequellenfreien Bereich

$$c_p \varrho \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \,. \qquad (3.164)$$

Betrag und Richtung der Strömungsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort im Fluid folgen aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht für ein Volumenelement der Strömung, den *Navier-Stokes-Gleichungen der Hydromechanik*. Nach diesen gilt für die x-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \gamma\, g\, \Delta T \qquad (3.165)$$

In (3.165) hält der auf das Volumen bezogenen Trägheitskraft neben der von der Dichte ϱ abhängigen Druckkraft und der zur *kinematischen Viskosität* υ proportionalen Reibungskraft auch eine *Auftriebskraft* das Gleichgewicht (ΔT ist das Temperaturgefälle im Fluid, das den Auftrieb verursacht, g die Fallbeschleunigung und γ der *thermische Ausdehnungskoeffizient* des Fluids).

Die Lösungen der Differenzialgleichung (3.165) können *laminare und turbulente Strömungsformen* sein. Der *Wärmeübergangskoeffizient der Konvektion* α_K^* wird in der Praxis mit Hilfe von Modellversuchen ermittelt. Die Versuchsergebnisse lassen sich auf andere konvektive Wärmeübergangsverhältnisse übertragen, wenn diese *geometrisch und hydrodynamisch ähnlich* sind, also die charakteristischen Längen L, die Viskositäten ν, die Strömungsgeschwindigkeiten υ, Dichten ϱ, thermische Ausdehnungs- und Wärmeübergangskoeffizienten γ, α^* sowie die Wärmeleitfähigkeiten λ, die Temperaturdifferenzen ΔT u. a. zueinander proportional sind (Abschn. 2.12.2.3). Damit die Lösung eines Modellfalls auf ein konkretes Problem übertragen werden kann, müssen die *Maßstabsfaktoren*

$$f_L = \frac{L_2}{L_1}\,,\quad f_\nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}\,,\quad f_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,,\quad f_\varrho = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,,$$
$$f_\alpha = \frac{\alpha_2^*}{\alpha_1^*}\,,\quad f_\upsilon = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\,,\quad f_a = \frac{a_2}{a_1}\,,\quad f_{c_p} = \frac{c_{p2}}{c_{p1}}\,,$$
$$f_{\Delta T} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\,,\quad f_p = \frac{p_2}{p_1}\,,\quad f_\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \qquad (3.166)$$

Zwangsbedingungen genügen; dann stimmen die Differenzialgleichungen (3.164) und (3.165) des Problems mit denjenigen des Modellfalls überein. Werden beispielsweise in (3.165) für die Temperaturverteilung $\vartheta(x_2, y_2, z_2, \upsilon_2, \varrho_2, c_{p2}, \lambda_2)$ die Maßstabsfaktoren (3.166) eingesetzt gemäß

$$\begin{aligned}
&\frac{f_\upsilon^2}{f_L}\left(\upsilon_{x1}\frac{\partial \upsilon_{x1}}{\partial x_1} + \upsilon_{y1}\frac{\partial \upsilon_{x1}}{\partial y_1} + \upsilon_{z1}\frac{\partial \upsilon_{x1}}{\partial z_1}\right)\\
&= \frac{f_p}{f_\varrho f_L}\left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)\\
&\quad + \frac{f_\nu f_\upsilon}{f_L^2}\nu_1\left(\frac{\partial^2 \upsilon_{x1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_{x1}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_{x1}}{\partial z_1^2}\right)\\
&\quad + f_\gamma f_g f_{\Delta T}(\gamma_1 g_1 \Delta T_1)\,, \qquad (3.167)
\end{aligned}$$

so stimmt diese Gleichung mit der Differenzialgleichung einer Lösung $\vartheta(x_1, y_1, z_1, \upsilon_1, \varrho_1, c_{p1}, \lambda_1)$ überein, wenn die Maßstabsfaktoren folgenden Bedingungen genügen:

$$\frac{f_\upsilon^2}{f_L} = \frac{f_p}{f_\varrho f_L} = \frac{f_\nu f_\upsilon}{f_L^2} = f_\gamma f_g f_{\Delta T}\,. \qquad (3.168)$$

Die Kenngrößen des Wärmeübergangs müssen also in folgender Relation zueinander stehen:

$$\frac{f_\upsilon^2}{f_L} = \frac{\upsilon_2^2 L_1}{\upsilon_1^2 L_2} = \frac{f_\nu f_\upsilon}{f_L^2} = \frac{\nu_2 \upsilon_2 L_1^2}{\nu_1 \upsilon_1 L_2^2} \quad \text{oder} \qquad (3.169)$$

$$\frac{\upsilon_2 L_2}{\nu_2} = \frac{\upsilon_1 L_1}{\nu_1} = \mathrm{Re}\,. \qquad (3.170)$$

Das dimensionslose Verhältnis $\upsilon L/\nu$ wird *Reynoldszahl* Re genannt und entspricht dem Verhältnis der Trägheitskraft zur Reibungskraft. Die Trägheits- und Reibungskräfte in den Strömungen zweier Wärmeübergänge mit erzwungener Konvektion sind einander ähnlich, wenn die Reynoldszahlen übereinstimmen. Mit Hilfe der Reynoldszahl kann der *Umschlagpunkt* bestimmt werden, bei dem eine laminare Strömung in eine turbulente „umkippt“. Diese *kritische Reynoldszahl*

$\mathrm{Re_{kr}}$ ist stark geometrieabhängig. Bei einem Kreisrohr mit dem Rohrinnendurchmesser als charakteristischer Länge L ist die Strömung laminar für $\mathrm{Re} < 2\,300$, oberhalb dieses Wertes, ausgelöst durch kleinste Störungen, turbulent (Abschn. 2.12.2.3, Abb. 2.129).

Charakteristisch für die *freie Konvektion* ist die *Grashofzahl* Gr. Sie folgt aus der Bedingung

$$\frac{f_\nu f_v}{f_L^2} = \frac{\nu_2 v_2 L_1^2}{\nu_1 v_1 L_2^2} = f_\gamma f_g f_{\Delta T} = \frac{\gamma_2 g_2 \Delta T_2}{\gamma_1 g_1 \Delta T_1} \,. \tag{3.171}$$

Wird die Strömungsgeschwindigkeit v mit Hilfe von (3.170) eliminiert, ergibt sich

$$\frac{\gamma_2 g_2 \Delta T_2 L_2^3}{\nu_2^2} = \frac{\gamma_1 g_1 \Delta T_1 L_1^3}{\nu_1^2} = \mathrm{Gr} \,. \tag{3.172}$$

Die Auftriebs- und Reibungsverhältnisse zweier Strömungen mit gleichen Grashofzahlen entsprechen sich.

Auch aus der Fourier-Gleichung (3.163) lässt sich unter Berücksichtigung von (3.162) eine Ähnlichkeitsforderung ableiten, wenn der Maßstabsfaktor $f_\alpha = \alpha^*_{\mathrm{K2}}/\alpha^*_{\mathrm{K1}}$ gebildet wird. Aus

$$\frac{f_\lambda}{f_L}\left(-\lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial L_1}\right) = f_\alpha \alpha^*_{\mathrm{K1}} (\vartheta_\mathrm{F} - \vartheta_\mathrm{W}) \tag{3.173}$$

folgt

$$\frac{\alpha^*_{\mathrm{K2}} L_2}{\lambda_2} = \frac{\alpha^*_{\mathrm{K1}} L_1}{\lambda_1} = \mathrm{Nu} \,. \tag{3.174}$$

Die *Nußeltzahl* Nu ist für den konvektiven Wärmeübergang die charakteristische Kennzahl. Einige weitere dimensionslose Kenngrößen sind in Tabelle 3.13 zusammengestellt.

Werden die Versuchsergebnisse von Modellfällen verallgemeinert, so ergeben sich Beziehungen zwischen den dimensionslosen Kenngrößen der Wärmeübertragung. Tabelle 3.14 enthält die experimentell gefundenen Beziehungen für die Nußeltzahl Nu einiger spezieller Wärmeübergänge.

Lässt sich ein konvektiver Wärmeübergang auf einen solchen Modellfall abbilden, dann kann aus dessen Nußeltzahl Nu der *Wärmeübergangskoeffizient* α^*_K bestimmt werden:

$$\alpha^*_\mathrm{K} = \frac{\mathrm{Nu}\,\lambda}{L} \,. \tag{3.188}$$

Im Einzelfall ist die Wahl der charakteristischen Länge L problematisch. Sie muss entsprechend der Festlegung im Modellfall gewählt werden.

Die Stoffwerte der fluiden Medien sind temperaturabhängig, wie aus Tabelle 3.15 hervorgeht. Als Bezugstemperatur wird eine mittlere Temperatur ϑ_m des Fluids angesetzt; bei einer Rohrströmung beispielsweise das arithmetische Mittel aus den Ein- und Austrittstemperaturen.

Beispiel

3.5-2 Wie hängt der konvektive Wärmeübergangskoeffizient einer Wand von der Oberflächentemperatur der Wand ab? Wie groß ist er auf der Raumseite einer Außenwand, deren Wärmeschutz nach DIN 4108 so bemessen ist, dass bei einer Raumlufttemperatur von $\vartheta_\mathrm{Li} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ die Oberflächentemperatur nicht unter $\vartheta_\mathrm{Oi} = 13{,}7\,^\circ\mathrm{C}$ absinkt? Die Raumhöhe ist normalerweise etwa $h = 2{,}5$ m.

Lösung

Für Luft mit $\vartheta_\mathrm{Li} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ ist nach Tabelle 3.15 $\mathrm{Pr} = 0{,}7$. Nach (3.183) ist bei freier, laminarer Konvektion vor einer senkrechten Wand $\mathrm{Nu} = 0{,}53\,(\mathrm{Gr\,Pr})^{1/4}$ und mit (3.188)

Tabelle 3.13 Dimensionslose Kenngrößen der konvektiven Wärmeübertragung

Kenngröße	Zeichen	Definition	Gl.	Problembereich
Fourierzahl	Fo	$\mathrm{Fo} = \frac{a\,t}{L^2}$	(3.175)	instationäre Wärmeleitung
Froudezahl	Fr	$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{g\,L}$	(3.176)	Strömungen unter Schwerkrafteinfluss
Grashofzahl	Gr	$\mathrm{Gr} = \frac{g\gamma\Delta T L^3}{\nu^2}$	(3.172)	freie Konvektion bei Temperaturgradient
Nußeltzahl	Nu	$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha_\mathrm{K}^* L}{\lambda}$	(3.174)	stationärer konvektiver Wärmeübergang
Pécletzahl	Pe	$\mathrm{Pe} = \frac{v\,L}{a}$	(3.177)	erzwungene instationäre Konvektion
Prandtlzahl	Pr	$\mathrm{Pr} = \frac{\nu\varrho c_\mathrm{p}}{\lambda}$	(3.178)	Wärmeübertragungskenngröße des Fluids
Reynoldszahl	Re	$\mathrm{Re} = \frac{v\,L}{\nu}$	(3.170)	Strömungen unter Reibungseinfluss

$$\alpha^*_{\mathrm{K,\,lam}} = 0{,}48\frac{\lambda}{L}\left(\frac{g\gamma\Delta T L^3}{\nu^2}\right)^{1/4}. \tag{3.189}$$

Mit der Raumhöhe h als charakteristischer Länge L und der Näherung für den Wärmeausdehnungskoeffizienten der Luft $\gamma = 1/T_\mathrm{m}$ sowie mit den Zahlenwerten aus Tabelle 3.15 für eine mittlere Temperatur von $T_\mathrm{m} = 290$ K ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha^*_{\mathrm{K,\,lam}} &= 5{,}7\,\frac{\mathrm{W\,m^{1/4}}}{\mathrm{m^2\,K}}\left(\frac{\Delta T}{T_\mathrm{m} h}\right)^{1/4}\\ &\approx 6\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}\left(\frac{\Delta T}{T_\mathrm{m} h/m}\right)^{1/4}.\end{aligned} \tag{3.190}$$

Dies ist eine häufig angeführte Näherungsformel für die freie Konvektion in Luft. Mit den angegebenen Daten des Beispiels ist der konvektive Wärmeübergangskoeffizient auf der Raumseite der Außenwand $\alpha^*_{\mathrm{k,\,lam}} = 1{,}8\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Bei der freien Konvektion in Luft kann jedoch vor Wänden der turbulente Anteil des konvektiven Wärmeübergangs nicht vernachlässigt werden. Die Nußeltzahl Nu ist größer als der Näherung $\alpha^*_\mathrm{K} \sim T^{1/4}$ zugrunde liegt. – Im vorliegenden Beispiel ist die Grashofzahl $\mathrm{Gr} = 1{,}47 \cdot 10^{10}$ und die Nußeltzahl für den turbulenten Bereich nach (3.184) in Tabelle 3.14 Nu = 254. Der sich mit diesem Wert nach (3.188) für den turbulenten konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten ergebende Wert ist $\alpha^*_{\mathrm{K,\,turb}} = 2{,}6\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$. Im Übergangsbereich der Strömungsarten kann der effektive Wärmeübergangskoeffizient abgeschätzt werden mit der Beziehung

$$\alpha^*_{\mathrm{K,\,eff}} = \sqrt{\alpha^{*2}_{\mathrm{K,\,lam}} + \alpha^{*2}_{\mathrm{K,\,turb}}} = 3{,}2\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}. \tag{3.191}$$

Bei der erzwungenen Konvektion ist häufig der Einfluss der Anströmgeschwindigkeit auf den übertragenen Wärmestrom von Interesse. In diesem Fall muss der Faktor der Strömungsgeschwindigkeit v aus der Nußeltzahl abgespaltet werden.

3.5.3 Wärmestrahlung

Die Abgabe von Wärmestrahlung hängt außer von der Temperatur T nur noch von der Größe und der Struktur der Oberfläche ab. Die höchste Strahlungsdichte emittiert ein *schwarzer Körper* (*Hohlraumstrahler*, Abb. 6.69 in Abschn. 6.3.2). Ein solcher schwarzer Körper absorbiert andererseits auch die gesamte auffallende Strahlungsenergie und wandelt sie in Wärme um.

Bei nicht schwarzen Körpern ist das Abstrahlungsvermögen gleich dem Absorptionsgrad. Blanke Metalloberflächen haben deshalb ein geringes Abstrahlungsvermögen, weil sie we-

Tabelle 3.14 Modellfälle konvektiver Wärmeübergänge (nach VDI-Wärmeatlas, 4. Aufl. 1984)

Strömungsmodell	laminarer Bereich	turbulenter Bereich	Hinweise
erzwungene Konvektion längs einer Platte	$\mathrm{Nu} = 0{,}664\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ (3.179)	$\mathrm{Nu} = \dfrac{0{,}037\,\mathrm{Re}^{0,8}\,\mathrm{Pr}}{1 + 2{,}443\,\mathrm{Re}^{-0,1}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}$ (3.180)	L Plattenlängen in Strömungsrichtung $\vartheta_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(\vartheta_\mathrm{E} + \vartheta_\mathrm{A})$ ϑ_E Eintrittstemperatur ϑ_A Ausströmtemperatur
erzwungene Strömung im Rohrinneren	$\mathrm{Nu} = \left(49{,}0 + 4{,}17\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\dfrac{d_\mathrm{i}}{L}\right)^{1/3}$ (3.181)	$\mathrm{Nu} = \dfrac{0{,}125\,\xi\,(\mathrm{Re} - 1000)\mathrm{Pr}}{1 + 4{,}49\sqrt{\xi}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}\left[1 + \left(\dfrac{d_\mathrm{i}}{L}\right)^{2/3}\right]$ (3.182) $\xi = (1{,}82\lg\mathrm{Re} - 1{,}64)^{-2}$	d_i Innendurchmesser Rohr L Rohrlänge $\vartheta_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(\vartheta_\mathrm{E} + \vartheta_\mathrm{A})$
freie Konvektion an vertikaler Wand oder um ein senkrechtes Rohr	$\mathrm{Nu} = 0{,}53\,(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4}$ (3.183)	$\mathrm{Nu} = \left\{0{,}825 + \dfrac{0{,}387(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/6}}{\left[1 + \left(\dfrac{0{,}492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$ (3.184) $\mathrm{Nu} \approx 0{,}129\,(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/3}$ (3.185)	L Höhe der vertikalen Wand oder des Rohres bzw. kurze Seitenlänge der horizontalen Platte
freie Konvektion längs einer horizontalen Platte	$\mathrm{Nu} = 0{,}70\,(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4}$ (3.186)	$\mathrm{Nu} = 0{,}155\,(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/3}$ (3.187)	$\Delta T = (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)$ ϑ_0 Oberflächentemperatur in Flächenmitte ϑ_∞ Fluidtemperatur außerhalb Grenzschicht $\vartheta_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_\infty)$

Tabelle 3.15 Wärmetechnische Stoffwerte von Wasser und trockener Luft bei dem Druck $p = 1$ bar (aus: VDI-Wärmeatlas, 10. Aufl. 2006)

ϑ °C	ϱ kg/m^3	c_p kJ/(kg K)	γ 10^{-3} K	λ 10^{-3} W/(m K)	η 10^{-6} kg/(m s)	ν 10^{-6} m^2/s	a 10^{-6}m^2/s	Pr
Wasser								
0	999,8	4,218	–0,0672	561,0	1 791,3	1,792	0,133	13,48
20	998,2	4,181	0,2067	598,4	1 002,0	1,004	0,143	7,00
50	988,0	4,180	0,4578	643,6	547,1	0,554	0,156	3,55
99,63	958,6	4,216	0,7487	678,9	293,0	0,295	0,168	1,76
trockene Luft								
–100	2,019	1,011	5,852	16,02	11,77	5,829	7,85	0,742
0	1,275	1,006	3,674	24,18	17,24	13,52	18,83	0,718
20	1,188	1,007	3,421	25,69	18,24	15,35	21,47	0,715
100	0,9329	1,012	2,683	31,39	21,94	23,51	33,26	0,707
200	0,7356	1,026	2,115	37,95	26,09	35,47	50,30	0,705
500	0,4502	1,093	1,293	55,64	36,62	81,35	113,1	0,719
1000	0,2734	1,185	0,785	80,77	50,82	185,9	249,2	0,746

ϑ Celsius-Temperatur
ϱ Dichte
c_p Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
γ Wärmeausdehnungskoeffizient
λ Wärmeleitfähigkeit
η dynamische Viskosität
ν kinematische Viskosität
a Temperaturleitfähigkeit
Pr Prandtlzahl

nig absorbieren. Wenn das Absorptionsvermögen eines nicht schwarzen Körpers < 1 und unabhängig von der Wellenlänge ist, dann liegt ein *grauer* Körper vor. Auf den schwarzen Körper wird das Emissions- und Absorptionsvermögen anderer *grauer Körper* bezogen und durch den *Emissionsgrad* ε und den *Absorptionsgrad* α gekennzeichnet. Ist M_e die *spezifische Ausstrahlung* des grauen Körpers und $M_{e,s}$ die des schwarzen, dann ist der Emissionsgrad ε des grauen Körpers

$$\varepsilon = \frac{M_e}{M_{e,s}} . \tag{3.192}$$

Entsprechend hängt der Absorptionsgrad α des grauen Körpers vom Verhältnis der *absorbierten Strahlungsleistungen* M_a des grauen und $M_{a,s}$ des schwarzen Körpers ab:

$$\alpha = \frac{M_a}{M_{a,s}} . \tag{3.193}$$

Definitionsgemäß sind für einen schwarzen Körper $\varepsilon = 1$ und $\alpha = 1$. Die Emissionszahlen ausgewählter grauer Körper sind in Tabelle 3.16 aufgeführt.

Der Emissionsgrad und der Absorptionsgrad eines Temperaturstrahlers sind nach dem *Kirchhoff'schen Strahlungsgesetz* (G. R. Kirchhoff, 1824 bis 1887) immer gleich:

$$\varepsilon = \alpha . \tag{3.194}$$

Wäre dies nicht so, dann könnte durch eine geeignete Führung des Strahlungsaustausches erreicht werden, dass der Körper mehr Strahlung von der Umgebung absorbiert, als er emit-

Tabelle 3.16 Emissionsgrad ε für die Gesamtstrahlung bei der Temperatur ϑ (aus: VDI-Wärmeatlas, 10. Auflage 2006 und Kohlrausch Praktische Physik, 24. Auflage 1996)

Oberfläche	ϑ in °C	ε
Metalle		
Aluminium		
poliert	100	0,12
oxidiert	93	0,23
Chrom poliert	150	0,071
Gold poliert	227	0,021
Eisen		
poliert	100	0,20
angerostet	20	0,62
verzinkt	28	0,26
Messing		
nicht oxidiert	25	0,045
oxidiert	200	0,61
Nichtmetalle		
Beton	20	0,94
Dachpappe	20	0,86
Glas	20	0,88
Holz (Eiche)	20	0,90
Mauerwerk. Putz	20	0,91
Kunststoffe	20	0,92
Lacke, Farben	100	0,88 bis 0,92
Wasser	20	0,90
Ziegelstein, rot	20	0,93

tiert. Er würde sich dadurch unter Abkühlung der Umgebung immer mehr erwärmen. Dies widerspricht jedoch dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (Abschn. 3.3.6).

Die *Strahlungsleistung* Φ_e der auf eine Trennwand einfallenden Strahlung gemäß Abb. 3.58 verteilt sich auf die *reflektierte Strahlungsleistung* Φ_r, die durch die Trennwand durchgehende *Strahlungsleistung* Φ_t und auf den *absorbierten* und in Wärmeenergie umgewandelten *Anteil* Φ_a. Nach dem Energieerhaltungssatz besteht zwischen dem *Reflexionsgrad* $\varrho = \Phi_r/\Phi_e$, dem *Transmissionsgrad* $\tau = \Phi_t/\Phi_e$ und dem *Absorptionsgrad* $\alpha = \Phi_a/\Phi_e$ der Zusammenhang

$$\varrho + \tau + \alpha = 1 \,. \tag{3.195}$$

Für einen nicht transparenten Stoff mit dem Transmissionsgrad $\tau = 0$, wie es die meisten technischen Stoffe im Infrarotbereich der elektromagnetischen Strahlung sind, gilt

$$\varrho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon \,. \tag{3.196}$$

Bei der Wärmestrahlung gelten die gleichen Gesetze wie bei der elektromagnetischen Strahlung im Sichtbaren (*Fotometrie*, Abschn. 6.3), nur liegen, wie Abschn. 6.3, Abb. 6.70 zeigt, die Strahlungsmaxima der Temperaturstrahler mit einer Oberflächentemperatur unter 600 °C weit im infraroten Wellenlängenbereich der elektromagnetischen Strahlung.

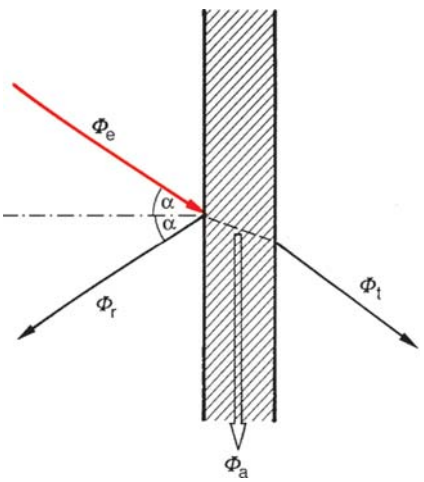


Abb. 3.58 Reflexion, Transmission und Absorption von Strahlung bei einer Trennwand

Nach dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* (Abschn. 6.3.2, (6.90), ist die *spezifische Ausstrahlung* M_e eines grauen Temperaturstrahlers

$$M_e(T) = \varepsilon \sigma T^4 \; ; \tag{3.197}$$

$\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ ist die *Stefan-Boltzmann-Konstante*.

Beim Wärmetransport durch Wärmestrahlung sind die Flächen, die die elektromagnetische Energie übertragen, nicht mehr klein. In diesem Fall muss das *fotometrische Grundgesetz* (Abschn. 6.3.2., (6.78)) über die Strahlungsaustauschflächen A_1 und A_2 integriert werden. Zur dimensionslosen *Einstrahlzahl* φ_{12} wird der nur von der Geometrie abhängige Teil von (6.78) zusammengefasst:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{r^2} \, \mathrm{d}A_1 \, \mathrm{d}A_2 \; . \tag{3.198}$$

Hierbei ist r der Abstand der Flächen A_1 und A_2; β_1 und β_2 sind die Winkel zwischen der Strahlungsrichtung und den jeweiligen Flächennormalen.

Ein grauer Temperaturstrahler mit der *Strahldichte* $L_{e1} = M_{e1}/(\pi\Omega_0)$ (6.82), der Temperatur T_1, der Fläche A_1 und dem Emissionsgrad ε_1 strahlt also an eine Fläche A_2 die *Strahlungsleistung* Φ_{e1} ab:

$$\Phi_{e1} = A_1 \varepsilon_1 \varphi_{12} \sigma T_1^4 \; . \tag{3.199}$$

Der graue Temperaturstrahler mit den Strahlungskennwerten A_1, ε_1 und T_1 emittiert nicht nur die Strahlungsleistung Φ_{e1} an die Fläche A_2, sondern empfängt auch von dieser die Strahlungsleistung Φ_{e2}. Der von der Fläche A_1 mit der höheren absoluten Temperatur T_1 an die Fläche A_2 mit der niedrigeren absoluten Temperatur T_2 durch Wärmestrahlung transportierte Wärmestrom $\dot{Q}_{12}$ ist

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} A_1 \left(T_1^4 - T_2^4 \right) \; . \tag{3.200}$$

C_{12} mit der Maßeinheit $\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$ ist der *Strahlungsaustauschkoeffizient*. Aus der Bilanz der ausgetauschten Strahlungsleistungen zwischen den beiden grauen Körpern unterschiedlicher Temperatur folgt für den Strahlungsaustauschkoeffizienten

$$C_{12} = \frac{\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \sigma \, \varphi_{12}}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \frac{A_1}{A_2} \varphi_{12}^2} \; . \tag{3.201}$$

Für nichtmetallische Strahler mit $(1 - \varepsilon) < 0{,}1$ kann (3.201) näherungsweise ersetzt werden durch

$$C_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \, \sigma \, \varphi_{12} \; . \tag{3.202}$$

In Abb. 3.59 sind die Strahlungsaustauschkoeffizienten C_{12} einiger Spezialfälle zusammengestellt.

Beispiel

3.5-3 Wie groß ist die Wärmestromdichte j_{qS} des Wärmestrahlungsaustausches zwischen zwei sehr großen Platten mit den Oberflächentemperaturen T_1 und T_2 sowie den Emissionszahlen ε_1 und ε_2?

Lösung

Die von der Platte 1 abgestrahlte Gesamt-Ausstrahlung $M_{e,\,ges}^{(1)}$ ist die spezifische Ausstrahlung M_{e1} der Platte 1 zuzüglich der an der Oberfläche 1 reflektierten Gesamt-Ausstrahlung $M_{e,\,ges}^{(2)}$ der Platte 2. Dasselbe trifft auf die Ausstrahlung der Platte 2 zu. Mit der (3.197) gilt also, wenn für nichttransparente Platten (3.196) berücksichtigt wird

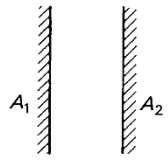
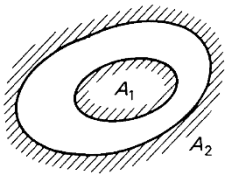
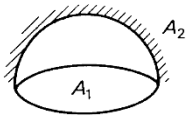
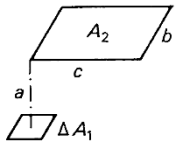
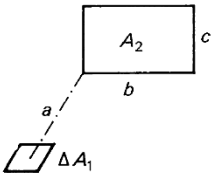
Geometrie	Strahlungsaustauschkoeffizient
 parallele Flächen	$C_{12} = \dfrac{\sigma}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ (3.203)
 konvexe Fläche A_1 von konkaver Fläche A_2 umschlossen	$C_{12} = \dfrac{\sigma}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$ (3.204)
 Halbraum A_2 über ebener Fläche A_1	$C_{12} = \dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{1 - \dfrac{1}{2}(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$ (3.205)
 Rechteckfläche parallel zum Flächenelement ΔA_1	$C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \arctan \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \right.$ $\left. + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \arctan \dfrac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$ (3.206)
 Rechteckfläche senkrecht zum Flächenelement ΔA_1	$C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dfrac{1}{2\pi}\left(\arctan \dfrac{b}{a} - \right.$ $\left. - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \arctan \dfrac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$ (3.207)

Abb. 3.59 Strahlungsaustauschkoeffizienten C_{12} für verschiedene Geometrien

$$M^{(1)}_{\mathrm{e,ges}} = \varepsilon_1\sigma T_1^4 + \varrho_1 M^{(2)}_{\mathrm{e,ges}}$$
$$= \varepsilon_1\sigma T_1^4 + (1-\varepsilon_1)M^{(2)}_{\mathrm{e,ges}},$$
$$M^{(2)}_{\mathrm{e,ges}} = \varepsilon_2\sigma T_2^4 + \varrho_2 M^{(1)}_{\mathrm{e,ges}}$$
$$= \varepsilon_2\sigma T_2^4 + (1-\varepsilon_2)M^{(1)}_{\mathrm{e,ges}}\,.$$

Werden aus diesen beiden Gleichungen die Gesamt-Ausstrahlungen der Platten

$$M^{(1)}_{\mathrm{e,ges}} = \frac{\varepsilon_1\sigma T_1^4 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2\sigma T_2^4}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \quad \text{und}$$
$$M^{(2)}_{\mathrm{e,ges}} = \frac{\varepsilon_2\sigma T_2^4 + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_1\sigma T_1^4}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$$

bestimmt, dann beträgt die Wärmestromdichte $j_{\mathrm{q\,S}}$ der Wärmestrahlung

$$j_{\mathrm{q\,S}} = M^{(1)}_{\mathrm{e,ges}} - M^{(2)}_{\mathrm{e,ges}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\,.$$

Ein Vergleich mit (3.200) bestätigt (3.203) für den Strahlungsaustauschkoeffizienten C_{12} zwischen zwei parallelen Flächen. Die Strahlungswärmestromdichte zwischen den beiden Scheiben einer Isolierverglasung ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}88$) mit den Temperaturen $\vartheta_{\mathrm{o1}} = 10\,^\circ\mathrm{C}$ und $\vartheta_{\mathrm{o2}} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ beträgt beispielsweise $j_{\mathrm{q\,s}} = 38{,}4\,\mathrm{W/m^2}$.

Die absoluten Temperaturen der Temperaturstrahler bestimmen den *Wärmetransport* durch *Wärmestrahlung*. Wird (3.200) umgeschrieben in

$$j_{\mathrm{q\,S}} = \frac{\dot{Q}_{12}}{A_1} \qquad (3.208)$$
$$= C_{12}\left(T_1^2 + T_2^2\right)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)\,,$$

so lässt sich entsprechend (3.162) als Proportionalitätskonstante zwischen der Wärmestromdichte der Wärmestrahlung $j_{\mathrm{q\,S}}$ und der Temperaturdifferenz $(T_1 - T_2)$ *ein Wärmeübergangskoeffizient für Wärmestrahlung* α^*_{S} definieren:

$$\alpha^*_{\mathrm{S}} = C_{12}\left(T_1^2 + T_2^2\right)(T_1 + T_2)\,. \qquad (3.209)$$

Er beschreibt den Wärmeübergang von der wärmeren Fläche A_1 zur kälteren Fläche A_2.

Die gesamte Strahlungswärmeabgabe oder -aufnahme einer Fläche A_1 ergibt sich, wenn der Strahlungsaustausch mit allen Flächen im Halbraum über der Fläche A_1 aufsummiert wird.

3.5.4 Wärmedurchgang

Die Kenngröße für den Wärmetransport von einem Medium 1 mit der Temperatur ϑ_{M1} in ein Medium 2 mit der Temperatur $\vartheta_{\mathrm{M2}} < \vartheta_{\mathrm{M1}}$ durch die Fläche A einer wärmedämmenden Trennwand, beispielsweise von der Raumluft durch die Außenwand an die Außenluft, ist der *Wärmedurchgangskoeffizient* k. Im Beharrungszustand ist der Wärmestrom

$$\dot{Q} = kA(\vartheta_{\mathrm{M1}} - \vartheta_{\mathrm{M2}})\,. \qquad (3.210)$$

Die Maßeinheit des Wärmedurchgangskoeffizienten ist $\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Bei gekrümmten wärmeübertragenden Flächen, wie beispielsweise einem dickwandigen Heizungsrohr, bezieht man den Wärmedurchgangskoeffizient auf die Innenoberfiäche A_{i} oder die Außenoberfläche A_{a}.

Eine Analyse der *Fourier'schen Wärmeleitungsgleichung* (3.135) ergibt, dass die unter stationären Bedingungen nach (3.210) ermittelten Wärmedurchgangskoeffizienten die Wärmedämmung auch beschreiben, wenn die Wärmeströme instationär, aber, wie beispielsweise bei einer Heizperiode, mit einer *Zykluszeit* t_{Z} periodisch verlaufen. In diesen Fällen sind die in (3.210) über die *Zykluszeit* t_{Z} gemittelten Werte

$$\overline{\dot{Q}} = \frac{1}{t_{\mathrm{Z}}}\int_0^{t_{\mathrm{Z}}} \dot{Q}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad (3.211)$$

$$\overline{\vartheta}_M = \frac{1}{t_Z}\int_0^{t_Z} \vartheta_M(t)\,dt \qquad (3.212)$$

einzusetzen. Der Wärmedurchgangskoeffizient ist also die wärmetechnische Kenngröße für die Wärmedämmung einer Trennwand.
Der Wärmedurchgang durch eine Trennwand setzt sich aus dem Wärmeübergang innen vom abgebenden Medium mit der Temperatur ϑ_{M1} auf die Trennwand mit der Oberflächentemperatur innen ϑ_{Oi}, der Wärmeleitung durch die Trennwand mit dem Temperaturgefälle zur Oberflächentemperatur außen ϑ_{Oa} und dem Wärmeübergang außen an das aufnehmende Medium mit der Temperatur ϑ_{M2} zusammen.

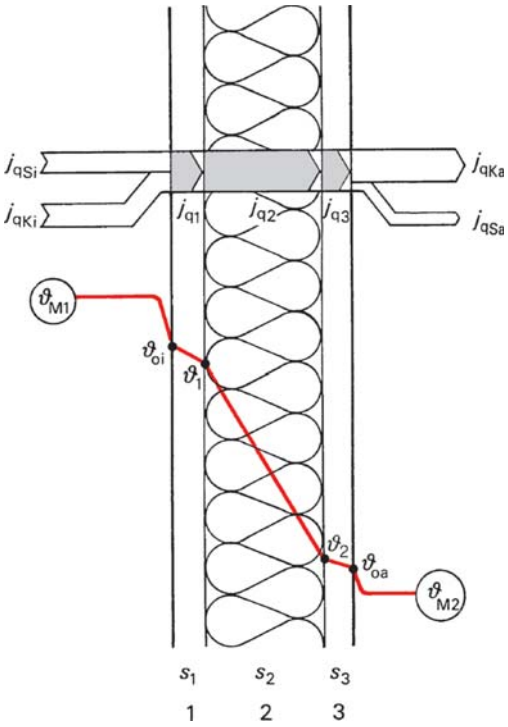


Abb. 3.60 Wärmedurchgang durch eine mehrschichtige Trennwand

Bei den Wärmeübergängen innen und außen addieren sich die Wärmeströme der Konvektion und Strahlung.

Sind die Umgebungsflächentemperaturen innen ϑ_{Ui} und außen ϑ_{Ua} etwa so hoch wie die jeweiligen Fluidtemperaturen ϑ_{M1} und ϑ_{M2}, dann können die einzelnen Wärmeübergangskoeffizienten addiert werden. Der Anteil der Wärmeleitung bei freier und erzwungener Konvektion wird nicht getrennt ausgewiesen, sondern ist in α_K^* enthalten (Abb. 3.57):

$$\alpha_i^* = \alpha_{Ki}^* + \alpha_{Si}^* \quad \text{und} \qquad (3.213)$$
$$\alpha_a^* = \alpha_{Ka}^* + \alpha_{Sa}^* \,. \qquad (3.214)$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient einer ebenen planparallelen Trennwand lässt sich einfach berechnen, auch wenn diese aus mehreren Schichten aufgebaut ist, wie in Abb. 3.60 verdeutlicht. Die Wärmestromdichten der einzelnen Wärmeströme

$$j_{qi} = \alpha_i^*(\vartheta_{M1} - \vartheta_{Oi})\,, \qquad (3.215)$$
$$j_{q1} = \frac{\lambda_1}{s_1}(\vartheta_{Oi} - \vartheta_1)\,, \qquad (3.216)$$
$$j_{q2} = \frac{\lambda_2}{s_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)\,, \qquad (3.217)$$
$$j_{q3} = \frac{\lambda_3}{s_3}(\vartheta_2 - \vartheta_{Oa}) \quad \text{und} \qquad (3.218)$$
$$j_{qa} = \alpha_a^*(\vartheta_{Oa} - \vartheta_{M2}) \qquad (3.219)$$

sind nach dem Energieerhaltungssatz bei wärmequellenfreien Trennwänden alle gleich und so groß wie die Wärmestromdichte $j_q = \dot{Q}/A$ des Wärmedurchgangs nach (3.210)

$$j_q = k(\vartheta_{M1} - \vartheta_{M2}) \,. \qquad (3.220)$$

Durch Umformen der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Medien zu

$$\begin{aligned}\vartheta_{M1} - \vartheta_{M2} = {} & (\vartheta_{M1} - \vartheta_{Oi}) + (\vartheta_{Oi} - \vartheta_1) \\ & + (\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_2 - \vartheta_{Oa}) \\ & + (\vartheta_{Oa} - \vartheta_{M2}) \qquad (3.221)\end{aligned}$$

und Einsetzen von (3.215) bis (3.220) in (3.221) lässt sich die Bestimmungsgleichung des *Wärmedurchgangskoeffizienten k* der *plattenförmigen Trennwand* aufstellen:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i^*} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a^*}} \,. \qquad (3.222)$$

Bei gekrümmten Trennwänden ist (3.222) nicht anwendbar. In einem solchen Fall müssen die Faktoren von (3.222) mit den Wärmeübertragungsflächen der Einzelschichten gewichtet werden, weshalb die Bestimmungsgleichungen des Wärmeübergangskoeffizienten mathematisch äußerst kompliziert sind.

Die Oberflächentemperaturen zu beiden Seiten der Trennwand werden berechnet, indem (3.220) in (3.215) oder (3.219) eingesetzt wird:

$$\vartheta_{Oi} = \vartheta_{M1} - \frac{k(\vartheta_{M1} - \vartheta_{M2})}{\alpha_i^*} \,, \qquad (3.223)$$

$$\vartheta_{Oa} = \vartheta_{M2} - \frac{k(\vartheta_{M1} - \vartheta_{M2})}{\alpha_a^*} \,. \qquad (3.224)$$

Die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 der Berührungsflächen der Trennwandschichten in Abb. 3.60 lassen sich dann über (3.157) und (3.158) bestimmen.

Zur Übung

Ü 3.5-1 Welchen konvektiven Wärmestrom gibt ein senkrechter Plattenheizkörper mit der Höhe $h = 0{,}6$ m und der Breite $b = 1{,}2$ m turbulent an die Umgebungs luft ab, wenn die gleichförmige Oberflächentemperatur $\vartheta_O = 40\,°C$ und die Lufttemperatur $\vartheta_L = 20\,°C$ beträgt?

Ü 3.5-2 Wie groß sind die Teilwärmeströme der Wärmeleitung, Konvektion (turbulent ohne Verknüpfung mit der Wärmeleitung) und Wärmestrahlung durch die 12 mm dicke Luftschicht einer 1 m mal 1 m großen Zweischeiben-Isolierverglasung (Außenscheibe 0 °C, Innenscheibe 10 °C)? Um welchen Prozentsatz vermindert sich der Gesamtwärmestrom, wenn eine der beiden Scheiben zur Luftschicht hin durch eine Bedampfung nur noch einen Emissionsgrad $\varepsilon = 0{,}08$ aufweist?

Ü 3.5-3 Das Flachdach über einer Halle mit einer Lufttemperatur $\vartheta_L = 20\,°C$ hat von außen nach innen den folgenden Aufbau: Dachhaut (UV-geschützt, Wärmedämmung vernachlässigbar), 60 mm Wärmedämmung ($\lambda = 0{,}04$ W/(m K)), 160 mm Stahlbetondecke ($\lambda = 2{,}1$ W/(m K)), 10 mm Innenputz ($\lambda = 0{,}70$ W/(m K). Man rechne mit den Norm-Übergangswiderständen $1/\alpha_i^* = 0{,}13\,m^2$ K/W und $1/\alpha_a^* = 0{,}035\,m^2$ K/W gemäß DIN 4108. Welchen Wärmedurchgangskoeffizienten hat dieses Flachdach? Wie groß ist zwischen Sommer und Winter der Temperaturunterschied an der Berührungsfläche von Betondecke und Wärmedämmung, wenn für die Sommerzeit mit einer durch Sonneneinstrahlung auf $\vartheta_O = 60\,°C$ angehobenen Oberflächentemperatur außen und für die Winterzeit mit einer Außenlufttemperatur $\vartheta_a = -15\,°C$ gerechnet wird?

Ü 3.5-4 Die Körperkerntemperatur des Menschen beträgt $\vartheta_K = 37\,°C$, der Wärmedurchlasswiderstand des menschlichen Gewebes etwa $R_G = 0{,}08\,m^2$ K/W. Wie groß ist die Wärmestromdichte auf der menschlichen Haut, wenn der Mensch, bekleidet mit einer Kleidung, deren Wärmedurchlasswiderstand $R_{KL} = 0{,}2\,m^2$ K/W beträgt, sich in einem Raum befindet, dessen Raumlufttemperatur $\vartheta_{Li} = 21\,°C$ ist und dessen Wände, Decke und Boden eine Oberflächentemperatur von $\vartheta_u = 14\,°C$ haben? Die Wärmeübergangskoeffizienten seien näherungsweise $\alpha_K^* = 3{,}3$ W/(m^2 K) und $\alpha_S^* = 5{,}1$ W/(m^2 K).

Kapitel 4
Elektrizität und Magnetismus

4

4

4 Elektrizität und Magnetismus

4.1 Physikalische Gesetze und Definitionen 270
4.1.1 Ladung 271
4.1.2 Stromstärke 273
4.1.3 Spannung 273
4.1.4 Widerstand und Leitwert 275
4.1.5 Ohm'sches Gesetz 278
4.1.6 Kirchhoff'sche Regeln im verzweigten Stromkreis 278
4.1.7 Schaltung von Widerständen 281
4.1.8 Messbereichserweiterung 283
4.1.9 Ausgewählte Messanordnungen 285
4.1.10 Klemmenspannung und innerer Widerstand 287
4.1.11 Schaltung von Spannungsquellen 288
4.1.12 Elektrische Leistung und elektrische Arbeit 290
4.2 Ladungstransport in Flüssigkeiten und Gasen 292
4.2.1 Ladungstransport in Flüssigkeiten 292
4.2.2 Ladungstransport im Vakuum und in Gasen 308
4.2.3 Plasmaströme 317
4.3 Elektrisches Feld 317
4.3.1 Allgemeiner Feldbegriff 317
4.3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes 318
4.3.3 Elektrische Feldstärke und Kraft 319
4.3.4 Elektrische Feldstärke und elektrostatisches Potential 321
4.3.5 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld 326
4.3.6 Leiter im elektrischen Feld 331
4.3.7 Nichtleiter im elektrischen Feld, elektrische Polarisation und Permittivitätszahl 340
4.3.8 Energieinhalt des elektrischen Feldes 350
4.4 Magnetisches Feld 351
4.4.1 Beschreibung des magnetischen Feldes 351
4.4.2 Magnetische Feldstärke und Durchflutungsgesetz 352
4.4.3 Magnetische Flussdichte und Kraftwirkungen im Magnetfeld 357
4.4.4 Materie im Magnetfeld 368
4.5 Instationäre Felder 383
4.5.1 Elektromagnetische Induktion 383
4.5.2 Periodische Felder (Wechselstromkreis) 390
4.5.3 Ein- und Ausschaltvorgänge in Stromkreisen 404
4.5.4 Messgeräte 408
4.5.5 Zusammenhang elektrischer und magnetischer Größen – Maxwell'sche Gleichungen 412

4 Elektrizität und Magnetismus

Die Eigenschaften der Elektrizität und des Magnetismus lassen sich nicht – wie in der Thermodynamik – aus der Mechanik ableiten. Ein Grund hierfür ist, dass eine neue Eigenschaft der Materie mit einbezogen werden muss: die *Ladung*. Sie ist *materiegebunden*, als Elementarladung *e quantisiert* und hat zwei Ausprägungen: *positive* und *negative* Ladungen. Abbildung 4.1 zeigt, wie die Gebiete Elektrizität und Magnetismus zusammenhängen. Grundsätzlich sind drei Bewegungszustände der Ladungen möglich:

- *Ruhende Ladungen*
  Dies ist das Gebiet der *Elektrostatik*. Kräfte zwischen zwei Ladungen werden durch das *Coulomb'sche Gesetz* beschrieben. Die Beschreibung der Kraftwirkung auf Ladungen (elektrisches Feld) erfolgt durch die am Ort der Ladung herrschende *elektrische Feldstärke* $\boldsymbol{E}$. Dieses elektrische Feld hat *Quellen* (positive Ladungen) und *Senken* (negative Ladungen), weshalb die Feldlinien nicht in sich geschlossen sind (*wirbelfrei*).
- *Ladungsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit*
  Dieses Gebiet nennt man *Magnetostatik*. Es „fließt" ein konstanter Strom, der ein zeitlich konstantes Magnetfeld erzeugt ($\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t = 0$). Es ist *quellenfrei*, da es keine magnetischen Elementarladungen gibt; und die magnetischen Feldlinien sind in sich geschlossen (*Wirbel*).
- *Beschleunigte Ladungsbewegung*
  Hierbei ändert sich das elektrische und magnetische Feld. Ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ induziert ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$, das zur Beschleunigung der Ladungen führen kann (*Induktionsgesetz*). Aus den Eigenschaften des elektrischen Feldes (Quellen, wirbelfrei) und des magnetischen Feldes (quellenfrei, Wirbel) ergeben sich in Verbindung mit dem Induktionsgesetz periodisch sich ändernde elektromagnetische Felder, die sich unabhängig von Materie ausbreiten können (*elektromagnetische Wellen*). – Die Kraftwirkung auf eine Ladung im elektrischen und magnetischen Feld wird durch die *elektromagnetische Kraft* beschrieben.

Elektrische und magnetische Felder in Materie führen zu einer Wechselwirkung mit den atomaren Bausteinen (*Polarisation*), sodass sich die im Material herrschende elektrische bzw. magnetische Feldstärke von der äußeren Feldstärke unterscheidet. Diese Wechselwirkung wird durch *Materialgleichungen* beschrieben: im elektrischen Feld durch $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ und im magnetischen Feld durch $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$. Eine weitere Materialgleichung verknüpft die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ über die Leitfähigkeit $\varkappa$ mit der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ (*Ohm'sches Gesetz*).

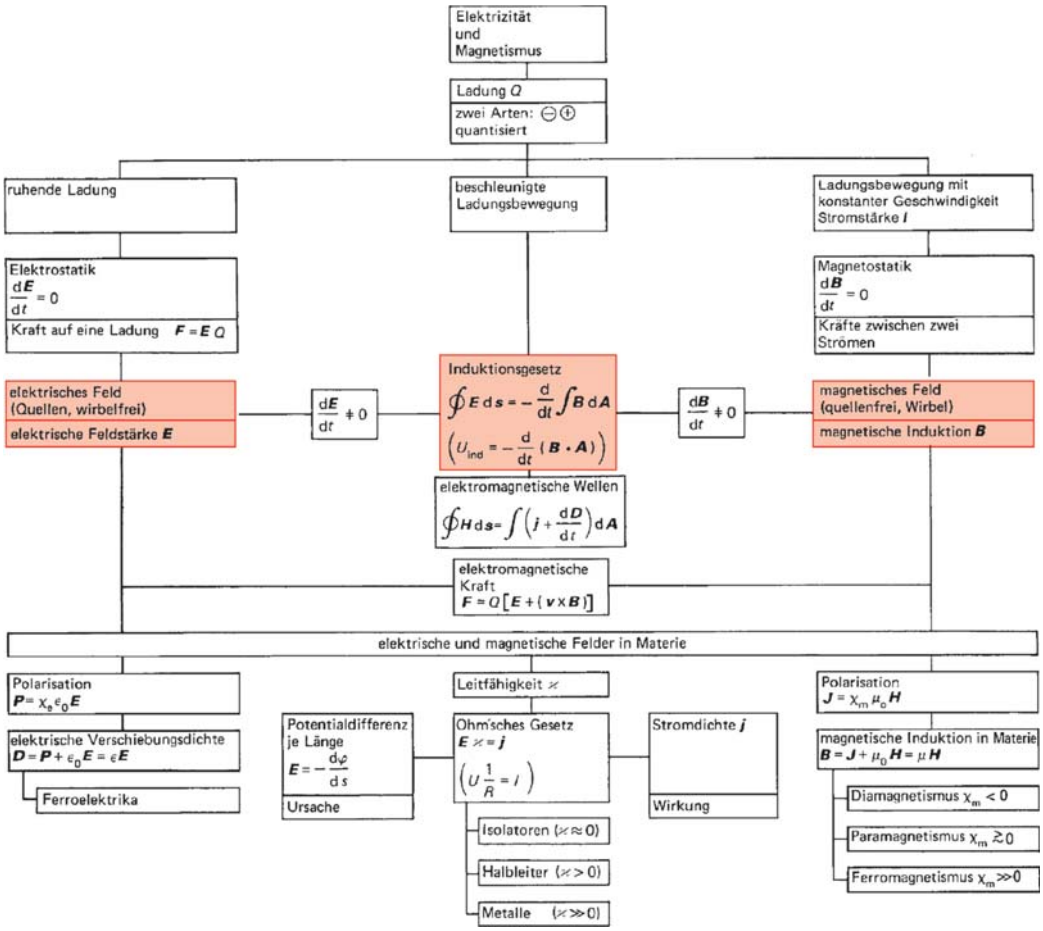


Abb. 4.1 Strukturbild Elektrizität und Magnetismus

Die gesamten elektrischen und magnetischen Erscheinungen (*Elektrodynamik*) werden in *vier Differentialgleichungen* (bzw. Vektorgleichungen) zusammengefasst, die die Feldgrößen $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{B}$ miteinander verknüpfen (*Maxwell'sche Gleichungen*). Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen sind die *drei Feldgleichungen* ($\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{j} = \varkappa \boldsymbol{E}$ erforderlich. Die Maxwell'schen Gleichungen beinhalten bereits die endliche Geschwindigkeit der Informationsausbreitung (Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c); aufgrund der *Relativitätstheorie Einsteins* (Abschn. 10.5) bedürfen sie deshalb keiner Korrektur.

4.1 Physikalische Gesetze und Definitionen

In diesem Abschnitt sind die grundlegenden Erscheinungen der Elektrizitätslehre beschrieben, die wichtigsten physikalischen Größen definiert und die physikalischen Gesetze am Beispiel des metallischen Leiters wiedergegeben.

4.1.1 Ladung

Die Ladung Q hat folgende Eigenschaften:

- Es gibt nur zwei Sorten von Ladungen: *positive und negative*. Sie dienen zur Erklärung der Abstoßung und Anziehung von Ladungen sowie der Ladungsneutralität.
- Die Ladung ist *quantisiert*, d. h., es gibt eine kleinste elektrische Ladungsmenge, die *Elementarladung e*. Sie ist eine Naturkonstante und hat den Wert

$$e = 1{,}602177 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\,. \tag{4.1}$$

  Diese Elementarladung tragen z. B. die Elementarteilchen *Proton* (positive Ladung) und *Elektron* (negative Ladung). Jede elektrische Ladung ist damit ein Vielfaches der elektrischen Elementarladung. So entspricht die Ladungseinheit von 1 C etwa der Ladung von $6{,}24 \cdot 10^{18}$ Elektronen. Die Messung der Elementarladung glückte erstmalig R. A. Millikan im Jahr 1910 (Abschn. 4.3.5.5).
- Die Ladung ist an Materie gebunden, sie ist – wie bereits ausgeführt – eine *diskrete Eigenschaft der Materie*. Elementarladungen tragen beispielsweise folgende Elementarteilchen (Abschn. 8.9):
  $+e$: Proton, Positron, + Myon, + Pion
  $-e$: Elektron, Antiproton, − Myon, − Pion
  0: Neutron, Neutrino, Photon, 0 Pion.
- Für die Ladung gilt der *Erhaltungssatz*: In einem abgeschlossenen System bleibt die *Nettoladung* (Menge aller positiver abzüglich Menge aller negativer Ladungen) *erhalten*.
- Im makroskopischen Bereich bedeutet negative Ladung Elektronenüberschuss und positive Ladung Elektronenmangel. Die Ladung wird durch Elektronen bzw. Ionen transportiert (Abschn. 4.2).

Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab und ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Für die anziehende oder abstoßende Kraft, die eine Punktladung Q_1 auf eine im Abstand r_{12} sich befindende Punktladung Q_2 ausübt, gilt das *Coulomb'sche Gesetz* (benannt nach dem französischen Physiker C. A. Coulomb, 1736 bis 1806):

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\,. \tag{4.2}$$

$\left(\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\text{: Einheitsvektor von } Q_1 \text{ nach } Q_2\right)$

Diese Kraft weist dabei in Richtung der Verbindungslinie beider Ladungen. Die Maßstabskonstante ε_0 ist die *elektrische Feldkonstante* bzw. die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums:

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}\,. \tag{4.3}$$

Mit ihr errechnet sich der Proportionalitätsfaktor des Coulomb'schen Gesetzes:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}988 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2}\,. \tag{4.4}$$

Das Coulomb'sche Gesetz gilt nicht nur für punktförmige Ladungen, sondern auch noch näherungsweise für Kugeln, wenn deren Abstand (von Kugelmitte zu Kugelmitte) groß im Vergleich zu den Kugelradien ist. Abbildung 4.2 zeigt den Verlauf der Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen in Abhängigkeit von der Ladungsentfernung. Es wird deutlich, dass die Coulomb-Kraft für kleine Ladungsabstände sehr groß ist, aber mit zunehmendem Ladungsabstand schnell an Bedeutung verliert.

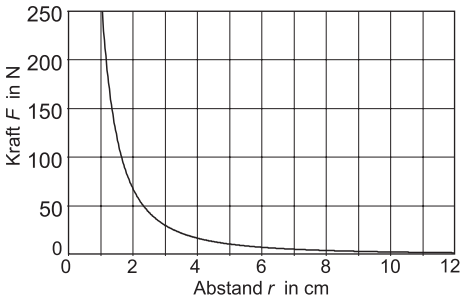


Abb. 4.2 Coulomb'sche Anziehungskraft zwischen zwei Ladungen mit $Q_1 = -10^{-6}$ C und $Q_2 = 3 \cdot 10^{-6}$ C

Die Coulomb-Kraft weist mathematisch dieselbe Struktur auf wie die Gravitationskraft, nämlich

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \,. \tag{2.137}$$

da sie

- eine Zentralkraft ist,
- quadratisch mit der Teilchenentfernung abnimmt und
- symmetrisch in den Ladungen ist.

In Tabelle 4.1 sind die wichtigsten Unterschiede zwischen der elektrischen Coulomb-Kraft und der Gravitationskraft zusammengestellt.

Sind mehr als zwei Ladungen vorhanden, so gilt das Coulomb'sche Gesetz für jedes Ladungspaar. Betragen die Ladungen $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$, so ist die Kraft, die beispielsweise auf Q_1 ausgeübt wird, die Resultierende der Kraftvektoren

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1n} \,.$$

Beispiel

4.1-1 Drei betragsmäßig gleiche Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich in den Eckpunkten eines gleichschenkligen Dreiecks gemäß Abb. 4.3. Wie groß ist die Kraft auf die Ladung Q_3?

Lösung

Es gilt:

$$|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| = 2\cos\varphi \cdot F_{31} = 2 \cdot \frac{d}{2r} \cdot F_{31} \,.$$

Tabelle 4.1 Unterschiede zwischen der Coulomb- und der Gravitationskraft

	Kräfte	
Unterscheidungsmerkmale	Coulomb-Kraft	Gravitationskraft
Ursache	Ladungen	Massen
Kraftrichtung	Anziehung oder Abstoßung, je nach Vorzeichen der Ladungen	Anziehung
Stärke	groß	sehr klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome	Zusammenhalt des Makrokosmos

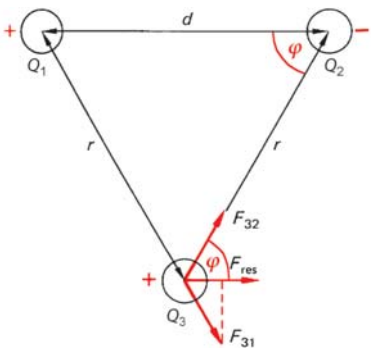


Abb. 4.3 Resultierende Kraft bei drei Ladungen (Kraftwirkung eines Dipols)

Daraus folgt

$$|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| = \frac{d}{r}F_{31} = \frac{d}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r^2} \,.$$

$$|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r^3} \,. \tag{4.5}$$

(Wird Q_1 und Q_2 im Abstand d als Dipol aufgefasst, dann ist $Q_1\, d$ *das Dipolmoment*. Dies bedeutet, dass die von einem Dipol auf eine Ladung Q_3 (in gleichem Abstand von Q_1 und Q_2) ausgeübte Kraft umgekehrt proportional zur dritten Potenz des Abstandes ist.)

4.1.2 Stromstärke

Wird in der Zeitspanne $\mathrm{d}t$ durch eine Querschnittsfläche die Ladung $\mathrm{d}Q$ hindurchbewegt, dann berechnet sich die Stromstärke I zu

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4.6}$$

Die Einheit der Stromstärke I ist nach dem französischen Physiker A. M. Ampère (1775 bis 1839) benannt.
Aus (4.6) folgt, dass auch die Ladung aus der Dauer des Stromflusses berechnet werden kann als

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{4.7}$$

Dies ist eine wichtige Methode der Ladungsbestimmung für zeitabhängige Ströme. Die Ladung ist anschaulich als Fläche unter der $I(t)$-Kurve zu verstehen. Ist die Stromstärke in der Zeit konstant, d. h. der Ladungstransport stationär, so gilt

$$Q = I\,t \,. \tag{4.8}$$

Die Stromstärke I ist im Internationalen Einheitensystem als Basisgröße über die Kraftwirkung zweier stromdurchflossener Leiter definiert (Abschn. 1.3):

> Eine Stromstärke I besitzt dann den Wert 1 Ampere, wenn die durch zwei im Abstand von 1 m befindliche geradlinige, parallele Leiter (mit Durchmesser null) fließende Stromstärke je Meter Länge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

Diese Definition wurde gewählt, um die elektrische Energie und die mechanische Energie in gleichen Einheiten messen zu können; es gilt

$$1\,\mathrm{V\,A\,s} = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} \,.$$

Als *Stromrichtung* wurde die Bewegungsrichtung von *plus* (+) nach *minus* (−) festgelegt. Diese sogenannte „technische" Stromrichtung ist entgegengesetzt der tatsächlichen Elektronenbewegung.
Die *Stromdichte* in einem stromdurchflossenen Draht des Querschnitts A ist definiert als

$$j = \frac{I}{A} \,. \tag{4.9}$$

Wie in nachfolgenden Abschnitten ausführlich erläutert ist, zeigt der elektrische Strom drei Wirkungen:

- *Wärmewirkung*
  Stromdurchflossene Leiter erwärmen sich, ändern ihre Länge (ihr Volumen) und oft andere temperaturabhängige Größen, z. B. den elektrischen Widerstand oder die Farbe.
- *Chemische Wirkung* (*Elektrochemie*)
  In elektrolytischen Leitern können Ladungen und Ionen transportiert und an Festkörpern, den sogenannten Elektroden, abgeschieden werden (Galvanotechnik). Diese Wirkung wurde früher zur Definition des Ampere herangezogen: 1 A scheidet nämlich in 1 s aus einer wässrigen Silbernitratlösung 1,118 mg Silber ab.
- *Magnetische Wirkung* (*Elektromagnetismus*)
  Stromdurchflossene, gerade Leiter werden von einem zylindersymmetrischen Magnetfeld umgeben.

4.1.3 Spannung

Die Spannung U ist ein Maß für die hineingesteckte Ladungstrennungsarbeit je Ladung:

$U = W/Q$. Sind positive und negative Ladungen räumlich getrennt als positiver oder negativer Pol, dann liegt zwischen diesen Polen eine Spannung, die *elektrische Urspannung* genannt wird. Werden diese Pole miteinander verbunden, so findet ein Ladungstransport und damit ein Stromfluss statt und die Ladungsunterschiede gleichen sich aus. In leitenden Festkörpern (z. B. Metallen) sind nur Elektronen frei beweglich, sodass am Plus-Pol Elektronenmangel und am Minus-Pol Elektronenüberschuss herrscht. Werden diese Pole miteinander verbunden, dann fließen die Elektronen vom Minus- zum Plus-Pol. Die *technische Stromrichtung* legt im Gegensatz zum physikalischen Verhalten folgendes fest:

> Bei passiven Bauelementen (z. B. Ohm'scher Widerstand) fließt im äußeren Stromkreis der Strom vom Pluspol der Spannungsquelle zu ihrem Minuspol.

Konsequent durchgeführt erhält man auch so keine physikalisch falschen Ergebnisse. Abbildung 4.4 zeigt die Pfeilrichtungen für die Stromstärke I und die Spannung U. Die Spannung U in V ist über die elektrische Energie definiert:

> Ein Volt liegt dann zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters, wenn beim Transport der Ladung von 1 Coulomb eine Energie von 1 Joule umgesetzt wird.

Es gilt

$$U = \frac{P_{\text{ab}}}{I} \,. \tag{4.10}$$

In Abschn. 4.3 ist der wichtige Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke, elektrischem Potential und Spannung hergeleitet. An dieser Stelle soll lediglich angemerkt werden, dass im Falle elektrischer Kräfte die Spannung U_{AB} zwischen zwei Punkten A und B gleich der Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ zwischen diesen Punkten ist:

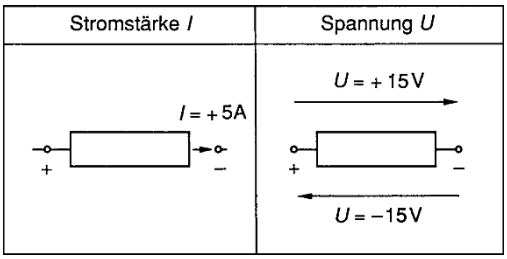


Abb. 4.4 Richtungssinn für Strom und Spannung

$$U_{\text{AB}} = -\Delta\varphi = \varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}} \,. \tag{4.11}$$

Spannungsquellen halten zwischen zwei Punkten eine Spannung aufrecht. Dies geschieht durch Umwandlung von chemischer Energie (galvanische Elemente), mechanischer Energie (Generatoren) oder Lichtenergie (Solarzellen) in elektrische Energie. Abbildung 4.5 gibt eine Übersicht. Die elektrochemischen Vorgänge in den galvanischen Elementen sind in Abschn. 4.2, die durch mechanische Änderung des Magnetflusses erzeugte Spannung in Abschn. 4.4.3 und

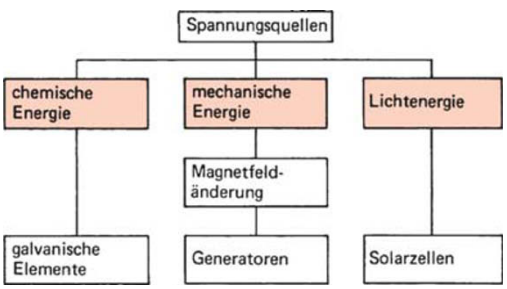


Abb. 4.5 Arten von Spannungsquellen

der fotovoltaische Umwandlungsprozess in Abschn. 9.4 ausführlich beschrieben.

4.1.4 Widerstand und Leitwert

Der elektrische Widerstand R ist ein Maß für die Hemmung des Ladungstransports und bestimmt deshalb die Stromstärke bei einer bestimmten Spannung. Er ist folgendermaßen definiert:

> Der elektrische Widerstand R beträgt 1 Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters beim Spannungsabfall von 1 Volt genau 1 Ampere fließt.

Die Einheit ist $1\,\mathrm{V/A} = 1\,\Omega$.
Mit der Entdeckung des *Quanten-Hall-Effektes* durch K. v. Klitzing (Abschn. 8.2.5) lässt sich das Ohm unabhängig von der Geometrie und den physikalischen Eigenschaften verschiedener Werkstoffe allein durch Naturkonstanten mit hoher Genauigkeit ($10^{-8}\,\Omega$) darstellen (h/e^2)=25 812,8 Ω; hierbei ist h das Planck'sche Wirkungsquantum $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ und e die Elementarladung.
Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes ist der Leitwert G:

$$G = \frac{1}{R}\,. \tag{4.12}$$

Er wird in Siemens S oder in Ω^{-1} gemessen.
Der elektrische Widerstand R eines metallischen Leiters der Länge l und dem Querschnitt A ist

$$R = \varrho\frac{l}{A}\,. \tag{4.13}$$

Die Proportionalitätskonstante ist der spezifische Widerstand ϱ (Resistivität).

$$\varrho = \frac{RA}{l}\,. \tag{4.14}$$

Er wird üblicherweise für Festkörper in $(\Omega\,\mathrm{mm^2})/\mathrm{m}$ und für Flüssigkeiten in $\Omega\,\mathrm{cm}$ gemessen.
Analog zum Leitwert ist der Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstandes die elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{l}{RA} = \frac{G\,l}{A}\,. \tag{4.15}$$

Abbildung 4.6 zeigt einen Überblick über die gängigen technischen Widerstände, über ihre Werkstoffe, ihre Eigenschaften, ihre normierten Bauausführungen (nach DIN) und ihre Anwendungsfelder. Zur besseren Anschauung sind einige Widerstandstypen abgebildet.
Widerstände können in feste oder einstellbare Widerstände eingeteilt werden. Die Festwiderstände lassen sich weiter untergliedern in lineare oder nichtlineare Widerstände. Die linearen Widerstände genügen dem Ohm'schen Gesetz (unter Berücksichtigung des Temperaturverhaltens). Sie bestehen aus Cr–Ni-Draht (wegen des geringen Temperaturkoeffizienten) oder aus Schichtmaterialien, wie z. B. Kohlenstoff, Cr–Ni, SnO_2, Au–Pt oder in Lack dispergierten Kohlenstoffteilchen. Abbildung 4.6 zeigt weitere Unterscheidungsmerkmale und die bevorzugten Anwendungsfelder.
Der Widerstandswert und die Toleranzen werden häufig als Farbringe aufgebracht. Bei den nichtlinearen Widerständen ist der Widerstand abhängig von folgenden physikalischen Größen:

- *Temperatur*
  - Heißleiter:
    fallender Widerstand bei zunehmender Temperatur (*NTC*: Negative Temperature

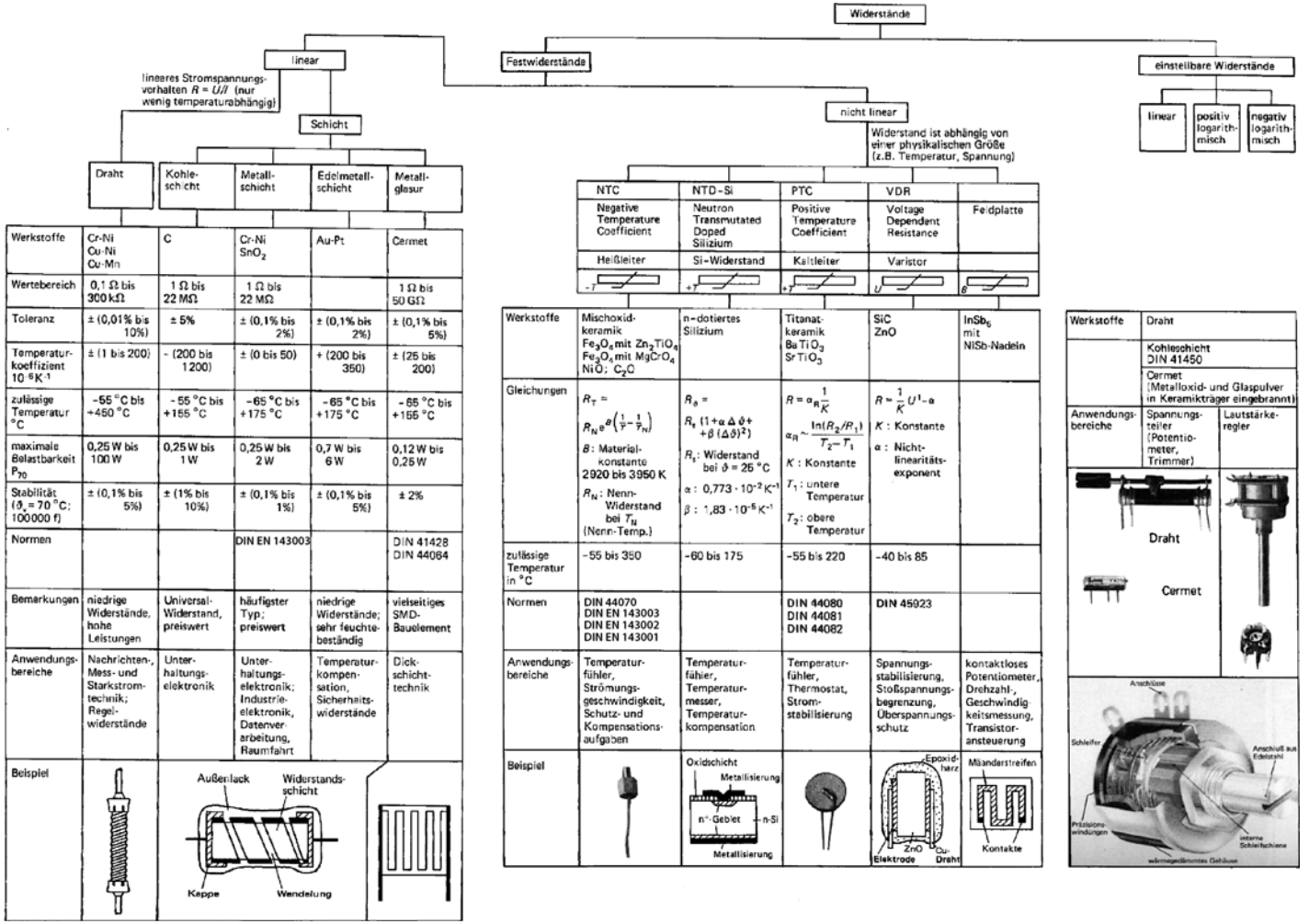


Abb. 4.6 Einteilung von Widerständen und ihre Bauarten

Coefficient). Sie werden als Temperaturfühler, zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten oder zur Spannungsstabilisierung verwendet und bestehen aus einer halbleitenden Oxidkeramik.

- Kaltleiter:
  stark zunehmender Widerstand bei zunehmender Temperatur (*PTC*: Positive Temperature Coefficient). Sie werden als Temperaturfühler, als Thermostat und zur Stromstabilisierung verwendet und bestehen aus Metalldrähten.

– *Spannung*
  VDR-Widerstände oder Variatoren (*VDR*: Voltage Dependent Resistance) sind stark spannungsabhängig und werden zur Spannungsstabilisierung und zur Stoßspannungsbegrenzung eingesetzt.
– *Licht*
  In diesem Fall handelt es sich um lichtempfindliche Widerstände (*LDR*: Light Dependent Resistance), die z. B. in Belichtungsmessern eingebaut werden.

Die einstellbaren Widerstände ändern den Widerstand entweder linear oder logarithmisch (positiv oder negativ). Linear einteilbare Widerstände werden als *Spannungsteiler* (Potentiometer oder Trimmer) eingesetzt, logarithmisch verstellbare Widerstände zur Lautstärkeregelung verwendet. Als Werkstoffe werden Draht, Kohleschichten und Cermet (Keramikträger mit eingebranntem Metalloxid und Glaspulver) eingesetzt.
Da der spezifische elektrische Widerstand zu denjenigen physikalischen Größen gehört, die den größten Messbereich abdecken (von $\varrho = 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ bei Edelmetallen bis zur $10^{13}\,\Omega\,\mathrm{m}$ bei Isolatoren; dies sind 21 Zehnerpotenzen), gibt seine Analyse oftmals genauen Aufschluss über die physikalischen Prozesse im atomaren Bereich.

Elektrischer Widerstand und spezifischer elektrischer Widerstand (und selbstverständlich auch Leitwert und elektrische Leitfähigkeit) sind temperaturabhängig. Abbildung 4.7 zeigt den prinzipiellen Verlauf des spezifischen elektrischer Widerstandes von der Temperatur T für einen metallischen Leiter, einen Halbleiter und einen Supraleiter. Beim metallischen Leiter nimmt der Widerstand R bzw. der spezifische elektrische Widerstand ϱ mit der Temperatur zu. Es gelten folgende lineare Näherungen:

$$R(\vartheta) = R_{20}(1 + \alpha(\vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C}))\,, \qquad (4.16)$$

$$\varrho(\vartheta) = \varrho_{20}(1 + \alpha(\vartheta - 20\,^\circ\mathrm{C}))\,. \qquad (4.17)$$

Hierbei ist R_{20} bzw. ϱ_{20} der Widerstand bzw. der spezifische elektrische Widerstand eines metallischen Leiters bei 20 °C, ϑ die Temperatur in °C und α der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes bei 20 °C.
Der Temperaturkoeffizient α gibt an, welche relative Widerstandsänderung $\Delta R/R$ der Leiter bei Änderung um $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$ erfährt:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_{20}\Delta T} = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_{20}\Delta T}\,. \qquad (4.18)$$

(Hinweis: Die Gleichungen sind lediglich lineare Näherungen.)

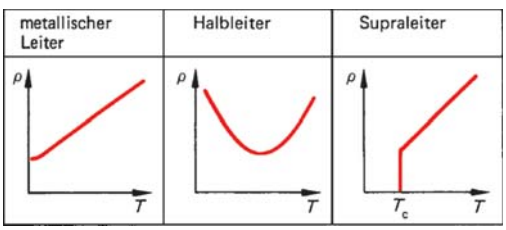


Abb. 4.7 Prinzipieller Verlauf des spezifischen elektrinscher Widerstandes für einen metallischen Leiter, einen Halbleiter und einen Supraleiter

Tabelle 4.2 Eigenschaften einiger Leiterwerkstoffe (Bezugswiderstand R_{20})

Werkstoff	spezifischer elektrischer Widerstand ϱ in $\Omega\,\mathrm{cm}$	Temperaturkoeffizient α in $10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$
Silber	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	3,8
Kupfer	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	3,9
Gold	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	3,9
Aluminium	$2{,}7 \cdot 10^{-6}$	4,7
Platin	$1 \cdot 10^{-5}$	3,9
Platin-Iridium	$3{,}2 \cdot 10^{-5}$	2
Platin-Rhodium	$2 \cdot 10^{-5}$	1,7
Zinn	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$	4,6

Tabelle 4.2 zeigt ausgewählte Zahlenwerte für den spezifischen elektrischen Widerstand ϱ (Resistivität) und den Temperaturkoeffizienten α. Bei vielen reinen Metallen liegt der Temperaturkoeffizient α bei $1/250\,\mathrm{K}^{-1}$. Kaum temperaturabhängige Speziallegierungen sind Konstantan (60% Cu, 40% Ni: $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$) und Manganin (86% Cu, 2% Ni, 12% Mn: $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$). Solche Werkstoffe werden beispielsweise zur Herstellung konstanter Widerstände verwendet.

Bei Halbleitern fällt der spezifische Widerstand mit steigender Temperatur zunächst und steigt dann entsprechend dem Widerstandsverhalten der Metalle mit zunehmender Temperatur an.

Supraleiter zeigen unterhalb der Sprungtemperatur T_C überhaupt keinen messbaren Widerstand mehr. Die Erklärungen für den unterschiedlichen Widerstandsverlauf in Abhängigkeit von der Temperatur erfolgen in Abschn. 9.2.

4.1.5 Ohm'sches Gesetz

Der Zusammenhang zwischen der Spannung U als Ursache des Ladungstransports und der Stromstärke I als Wirkung wird *Strom-Spannungs-Kennlinie* genannt. Abbildung 4.8 zeigt drei typische Verläufe für einen metallischen Leiter, der dem Ohm'schen Gesetz folgt, eine Halbleiterdiode und eine Gasentladungsröhre.

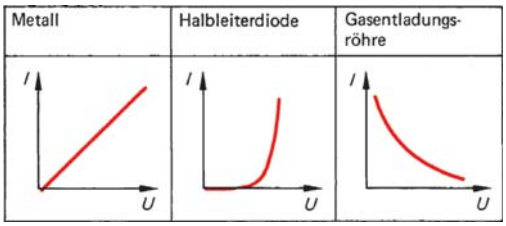


Abb. 4.8 Strom-Spannungs-Kennlinien für einen metallischen Leiter nach dem Ohm'schen Gesetz, eine Halbleiterdiode und eine Gasentladungsröhre

Ohm fand für viele Leiter einen linearen Zusammenhang zwischen Strom I und Spannung U: $I \sim U$. Für den Widerstand R gilt dann

$$R = \frac{U}{I}\,, \tag{4.19}$$

$$U = R\,I\,. \tag{4.20}$$

Es sei besonders betont, dass das Ohm'sche Gesetz zwar für Metalle und Elektrolyte bei konstanter Temperatur gut erfüllt ist, im Allgemeinen aber nur einen – wenn auch bedeutenden – Spezialfall darstellt.

4.1.6 Kirchhoff'sche Regeln im verzweigten Stromkreis

Die Kirchhoff'schen Regeln (G. Kirchhoff, 1824 bis 1887) beschreiben das Verhalten der elektrischen Ströme in einem verzweigten Stromkreis (*Knotenregel*) und der Spannungen in einem geschlossenen Stromkreis (*Maschenregel*).

1. Kirchhoff'sches Gesetz (Knotenregel)

Nach dem Gesetz der Ladungserhaltung müssen alle einem Stromknoten zugeführten La-

dungen (+) gleich den abfließenden Ladungen (−) sein. Dies bedeutet für die Ströme an einem Knoten:

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist null:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i = 0 \,. \tag{4.21}$$

Hierbei werden zufließende Ströme positiv und abfließende Ströme negativ eingesetzt. Dies zeigt Abb. 4.9. Danach gilt

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

oder

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \,.$$

Die Knotenregel spielt bei der Aufteilung des Stromflusses eine Rolle, wie dies bei Parallelschaltungen vorkommt. Hier gilt aufgrund des Ohm'schen Gesetzes $I = U/R$ für die Strom- bzw. Widerstandsverhältnisse:

In einer Parallelschaltung verhält sich der Gesamtstrom zu den einzelnen Teilströmen umgekehrt wie der Gesamtwiderstand zu den Teilwiderständen.

$$I_{\text{ges}} : I_1 : I_2 : I_3 : \ldots : I_n = \frac{1}{R_{\text{ges}}} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} : \ldots : \frac{1}{R_n} \,. \tag{4.22}$$

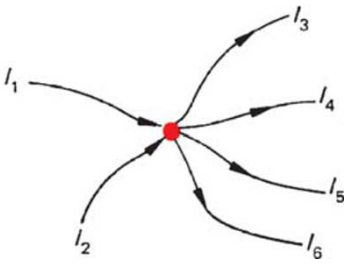


Abb. 4.9 Knotenregel

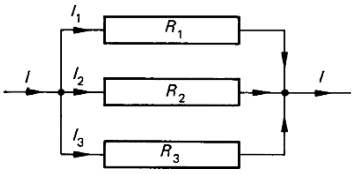


Abb. 4.10 Stromverteilung bei Parallellschaltung von drei Widerständen

Für den Fall dreier parallel geschalteter Widerstände gemäß Abb. 4.10 gilt z. B.

$$I : I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} \,.$$

Für den häufig vorkommenden Fall zweier parallelgeschalteter Widerstände schreibt man

$$I : I_1 : I_2 = \frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} \,.$$

Für die Stromstärke I_1 und I_2 folgt daraus

$$I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} \,,$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \,. \tag{4.23}$$

Die Teilströme verhalten sich in diesem Fall umgekehrt wie die zugehörigen Teilwiderstände.

2. Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel)

Nach dem Energieerhaltungssatz muss beim Transport einer elektrischen Ladung in einem geschlossenen Stromkreis (Masche) die zugeführte und die abgegebene elektrische Arbeit gleich groß sein. Für die elektrische Spannung U als Maß dafür gilt:

Die Summe aller treibenden Spannungen (U_{0i}) ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle (U_{abj}).

$$\sum_{i=1}^{k} U_{0i} = \sum_{j=1}^{n} U_{\text{abj}} \,. \tag{4.24}$$

Werden die Spannungspfeile entsprechend den Vorschriften (für Spannungsquellen von Plus nach Minus und für Spannungsabfälle in Richtung der Stromstärke, Abb. 4.4) eingesetzt, so kann die Maschenregel auch folgendermaßen formuliert werden:

Die Summe aller Spannungen eines Stromkreises (Masche) ist null.

$$\sum_{l=1}^{m} U_l = 0 \,. \tag{4.25}$$

Es sind *in* Zählrichtung verlaufende Spannungen *positiv* und *gegen* die Zählrichtung verlaufende Spannungen *negativ* einzusetzen. Für die vorliegende Masche gemäß Abb. 4.11 gilt also nach (4.25)

$$U_1 - U_{02} + U_4 + U_{03} - U_3 - U_2 - U_{01} = 0 \,.$$

Bei der Reihenschaltung von Widerständen gilt für die Teilspannungen nach der Maschenregel und wegen des Ohm'schen Gesetzes $U = R\,I$:

In einer Reihenschaltung verhalten sich die Teilspannungen wie die zugehörigen Widerstände.

$$U_1 : U_2 : U_3 : \cdots : U_n = \\ = R_1 : R_2 : R_3 : \cdots : R_n \,. \tag{4.26}$$

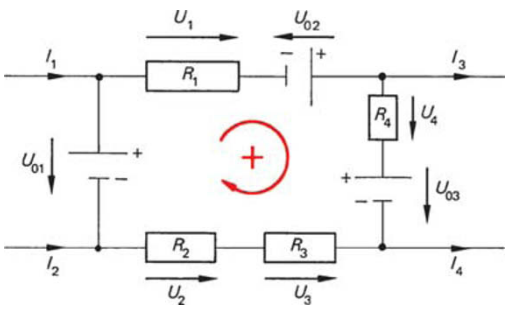


Abb. 4.11 Maschenregel

Für drei Reihenwiderstände lautet das Verhältnis

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3 \,.$$

Für den häufig vorkommenden Fall zweier Widerstände, wiedergegeben in Abb. 4.12, ergibt sich

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \,. \tag{4.27}$$

oder

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} \,,$$

hieraus folgt

$$U_1 = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} U_0 \,. \tag{4.28}$$

Diese Gleichung spielt bei der Spannungsteilerschaltung (Abschn. 4.1.9) eine wichtige Rolle.

Bestehen Stromkreise aus einer Vielzahl von Maschen (Maschenanzahl m) mit mehreren Verzweigungsknoten (Knotenanzahl k), dann liegt ein „Netzwerk" vor. Für die Anzahl z_I der Gleichungen zur Errechnung aller Teilströme gilt bei gegebenen Spannungsquellen und Widerständen

$$m + k > z_\mathrm{I} \,. \tag{4.29}$$

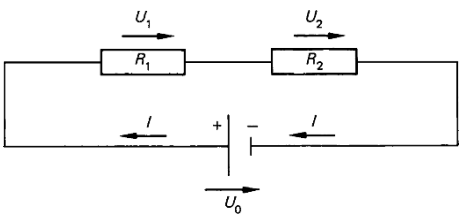


Abb. 4.12 Spannungsverteilung bei Reihenschaltung von zwei Widerständen

Dies bedeutet, dass die Summe aus der Anzahl der Maschen m und der Anzahl der Knoten k immer größer als die Anzahl z_I der zu errechnenden Teilströme ist. Somit stehen mehr Gleichungen als zu lösende Variablen zur Verfügung. Die nicht zur Lösung verwendeten Gleichungen werden sinnvollerweise zur Probe der errechneten Stromwerte eingesetzt.

4.1.7 Schaltung von Widerständen

Reihenschaltung

Abbildung 4.13 zeigt die Reihenschaltung von n Widerständen. Da keine Knoten vorhanden sind, kann keine Stromaufteilung erfolgen. Dies bedeutet, dass bei einer *Reihenschaltung* die *Stromstärke konstant* bleibt, d. h., alle Bauelemente werden von derselben Stromstärke durchlaufen.
Die zugehörige Maschenregel (4.24) lautet

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \,,$$
$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \cdots + R_n I \,.$$

Der gesamte Spannungsabfall kann auch durch einen Gesamtwiderstand ausgedrückt werden, sodass gilt

$$U = R_{\text{ges}} I \,.$$

Damit ergibt sich

$$R_{\text{ges}} I = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \cdots + R_n I$$

und nach Divsion durch die konstante Stromstärke I

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i \,, \tag{4.30}$$

$$\frac{1}{G_{\text{ges}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \cdots + \frac{1}{G_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i} = R_{\text{ges}} \,. \tag{4.31}$$

In einer Reihenschaltung ist der Gesamtwiderstand die Summe der Einzelwiderstände. Der Kehrwert des Gesamtleitwertes ist gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelleitwerte.

Parallelschaltung

Abbildung 4.14 zeigt die Parallelschaltung von Widerständen. Nach der Maschenregel muss in jedem Stromkreis dieselbe Spannung U abfallen. Dies bedeutet, dass bei einer *Parallelschaltung* die *Spannung konstant* bleibt,

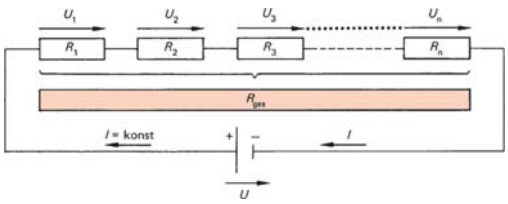


Abb. 4.13 Gesamtwiderstand bei der Reihenschaltung

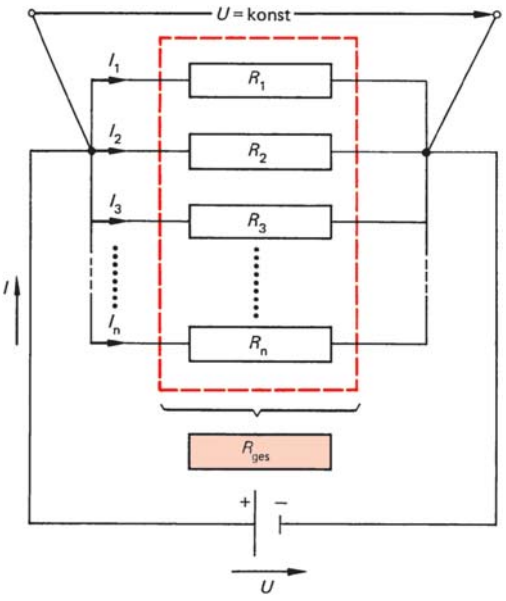


Abb. 4.14 Gesamtwiderstand bei der Parallelschaltung

d. h., an jedem Bauelement fällt dieselbe Spannung U ab. Das vorliegende Netzwerk hat einen Knoten und n Maschen.
Knotenregel:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n \qquad \text{(a)}$$

Maschenregel:

$$U = I_1 R_1 \quad \text{ergibt} \quad I_1 = \frac{U}{R_1}\,, \qquad \text{(b)}$$

$$U = I_2 R_2 \quad \text{ergibt} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}\,, \qquad \text{(c)}$$

$$U = I_3 R_3 \quad \text{ergibt} \quad I_3 = \frac{U}{R_3}\,, \qquad \text{(d)}$$

und so fort bis

$$U = I_n R_n \quad \text{ergibt} \quad I_n = \frac{U}{R_n}\,. \qquad (n+1)$$

Werden die aus den Maschenregeln berechneten Stromstärken I_1 bis I_n (Gleichungen (b) bis $(n+1)$) in die Formel für die Gesamtstromstärke I (a) eingesetzt, so ist

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \cdots + \frac{U}{R_n}\,.$$

Wird die gesamte Stromstärke I durch den Gesamtwiderstand R_{ges} ausgedrückt, so erhält man

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}}\,.$$

Somit ist

$$\frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \cdots + \frac{U}{R_n}$$

oder nach Division mit der konstanten Spannung U

$$\frac{I}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\,, \qquad (4.32)$$

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n = \sum_{i=1}^{n} G_i\,. \qquad (4.33)$$

In einer Parallelschaltung ist der Kehrwert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände. Dies hat zur Folge, dass der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand ist. Der gesamte Leitwert ist die Summe der Einzelleitwerte.

Beispiel

4.1-2 Gegeben seien die Widerstände einer Dreiecksschaltung (R_{D}) oder einer Sternschaltung (R_{S}) gemäß Abb. 4.15. Es sollen aus der Dreiecksschaltung die Sternwiderstände (Dreieck-Stern-Transformation) bzw. aus der Sternschaltung die Dreieckswiderstände (Stern-Dreieck-Transformation) errechnet werden. Wie groß sind die entsprechenden Widerstände, wenn a) alle Widerstände gleich, bzw. b) wenn $R_{\text{D12}} = 100\,\Omega, R_{\text{D23}} = 150\,\Omega, R_{\text{D31}} = 200\,\Omega$ und $R_{\text{S10}} = 12\,\Omega, R_{\text{S20}} = 48\,\Omega, R_{\text{S30}} = 72\,\Omega$ sind?

Lösung

a) Dreieck-Stern-Transformation für gleiche Widerstände:
Für den Widerstand zwischen zwei Klemmen (Abb. 4.15) gilt

$$2\,R_{\text{S}} = \frac{R_{\text{D}}(R_{\text{D}} + R_{\text{D}})}{3\,R_{\text{D}}} = \frac{2}{3} R_{\text{D}} \quad \text{oder} \qquad (4.34)$$

$$R_{\text{S}} = \frac{R_{\text{D}}}{3} \quad \text{und} \qquad (4.35)$$

$$R_{\text{D}} = 3\,R_{\text{S}}\,. \qquad (4.36)$$

b) Dreieck-Stern-Transformation für unterschiedliche Widerstände:

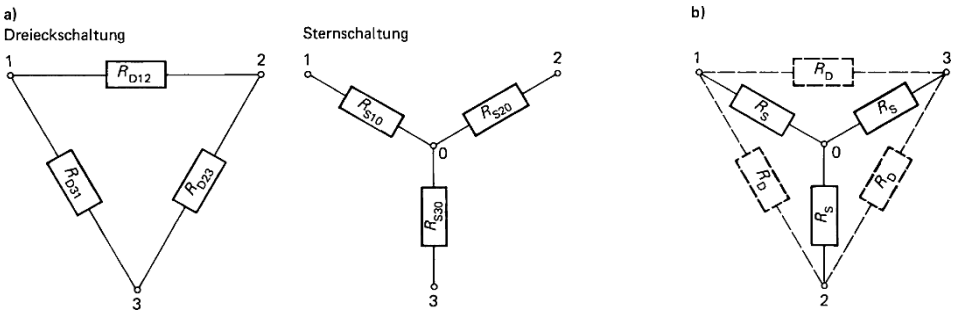


Abb. 4.15 Dreieck-Stern-Schaltung (**a**) und Stern-Dreieck-Schaltung (**b**) für gleiche Widerstände

Dabei geht man folgendermaßen vor. Zunächst bildet man die drei möglichen Summen zweier Sternwiderstände $R_{S1} + R_{S2}$ (4.37), $R_{S1} + R_{S3}$ (4.38) und $R_{S2} + R_{S3}$ (4.40). Wird (4.38) von (4.37) abgezogen, dann erhält man (4.39):

$$R_{S1} + R_{S2} = \frac{R_{D12}(R_{D23} + R_{D31})}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} \tag{4.37}$$

$$-(R_{S1} + R_{S3}) = \frac{R_{D31}(R_{D12} + R_{D23})}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} \tag{4.38}$$

$$R_{S2} - R_{S3} = \frac{R_{D12}R_{D23} + R_{D12}R_{D31} - R_{D31}R_{D12} - R_{D31}R_{D23}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} \tag{4.39}$$

Wird zu dieser Gleichung (4.40) addiert (Eliminierung des Sternwiderstands R_{S3}), erhält man folgenden Ausdruck für $2R_{S2}$ (4.41) bzw. (4.42):

$$+R_{S2} + R_{S3} = \frac{R_{D23}(R_{D12} + R_{D31})}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} \tag{4.40}$$

$$2R_{S2} = \frac{2R_{D12}R_{D23}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} \tag{4.41}$$

$$R_{S2} = \frac{R_{D12}R_{D23}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} . \tag{4.42}$$

Entsprechend gelten die Umrechnungsgleichungen

$$R_{S1} = \frac{R_{D12}\,R_{D31}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} , \tag{4.43}$$

$$R_{S3} = \frac{R_{D23}\,R_{D31}}{R_{D12} + R_{D23} + R_{D31}} . \tag{4.44}$$

Für die drei Unbekannten R_{D12}, R_{D23} und R_{D31} gelten folgende Umrechnungsbeziehungen:

$$R_{D12} = R_{S1} + R_{S2} + \frac{R_{S1}R_{S2}}{R_{S3}} , \tag{4.45}$$

$$R_{D23} = R_{S2} + R_{S3} + \frac{R_{S2}R_{S3}}{R_{S1}} , \tag{4.46}$$

$$R_{D31} = R_{S3} + R_{S1} + \frac{R_{S3}R_{S1}}{R_{S2}} . \tag{4.47}$$

Mit den angegebenen Widerständen errechnen sich die Sternwiderstände ((4.42) bis (4.44)) zu

$$R_{S1} = \frac{100 \cdot 200}{100 + 150 + 200}\,\Omega = 44{,}44\,\Omega ;$$

$$R_{S2} = \frac{100 \cdot 150}{100 + 150 + 200}\,\Omega = 33{,}33\,\Omega ;$$

$$R_{S3} = \frac{150 \cdot 200}{100 + 150 + 200}\,\Omega = 66{,}67\,\Omega .$$

Für die Dreieckswiderstände gelten nach (4.45) bis (4.47)

$$R_{D12} = 12\,\Omega + 48\,\Omega + \frac{12 \cdot 48}{72}\,\Omega = 68\,\Omega ;$$

$$R_{D23} = 48\,\Omega + 72\,\Omega + \frac{48 \cdot 72}{12}\,\Omega = 408\,\Omega ;$$

$$R_{D31} = 72\,\Omega + 12\,\Omega + \frac{72 \cdot 12}{48}\,\Omega = 102\,\Omega .$$

4.1.8 Messbereichserweiterung

Strommesser (Amperemeter)

Um die Stromstärke in einem Stromkreis messen zu können, muss der Strommesser im

Stromkreis (*Hauptschluss*) liegen. Der Innenwiderstand R_i des Strommessers muss möglichst klein sein, damit die volle Spannung U_0 am äußeren Widerstand R_a abfallen kann.

Müssen Ströme gemessen werden, die den Messbereich des Strommessers überschreiten würden, so muss der überschüssige Stromanteil am Amperemeter vorbeigeleitet werden. Dies bezweckt ein parallel geschalteter Widerstand R_p (Shunt, Nebenwiderstand). Abbildung 4.16 zeigt die Schaltung zur Messbereichserweiterung eines Strommessers. Wird die neu zu messende Stromstärke mit I_n und die höchstmögliche Stromstärke durch das Amperemeter mit I_a bezeichnet, so fließt durch den Parallelwiderstand R_p die Stromstärke $I_n - I_a$. Da sich gemäß (4.23) bei der Parallelschaltung die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten, gilt

$$\frac{I_a}{I_n - I_a} = \frac{R_p}{R_i} .$$

Daraus lässt sich der parallel zu schaltende Widerstand errechnen:

$$R_p = \frac{R_i}{\frac{I_n}{I_a} - 1} . \qquad (4.48)$$

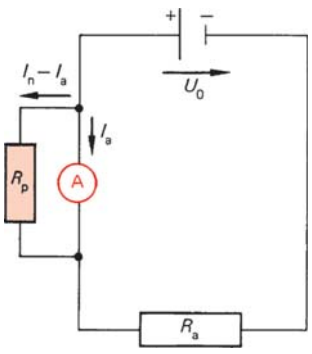


Abb. 4.16 Messbereichserweiterung eines Strommessers

Spannungsmesser (Voltmeter)

Um den Spannungsabfall in einem Stromkreis messen zu können, muss der Spannungsmesser parallel zum zu messenden Spannungsabfall (*Nebenschluss*) liegen. Der Innenwiderstand R_i des Spannungsmessers muss möglichst groß sein, damit möglichst wenig Strom durch das Voltmeter fließt und der ganze Strom durch R_a fließen kann.

Müssen Spannungen gemessen werden, die den Messbereich des Spannungsmessers überschreiten, so muss der die Höchstspannung übersteigende Teil der Spannung an einem Vorwiderstand R_V abfallen, verdeutlicht in Abb. 4.17. Die neu zu messende Spannung wird mit U_n und der höchstmögliche Spannungsabfall im Voltmeter mit U_a bezeichnet. Da sowohl der Vorwiderstand R_V als auch das Voltmeter von demselben Strom I durchflossen werden, gilt

$$I = \frac{U_n - U_a}{R_V} = \frac{U_a}{R_i} .$$

Daraus ergibt sich der Vorwiderstand

$$R_V = R_i \left(\frac{U_n}{U_a} - 1 \right) . \qquad (4.49)$$

Beispiel

4.1-3 a) Der Messbereich eines Amperemeters (I_a = 10 mA; R_i = 0,5 Ω) soll auf 100 mA, 1 A, 10 A und 20 A und b) der Messbereich eines Voltmeters (U_a =

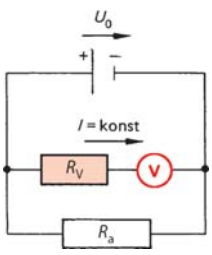


Abb. 4.17 Messbereichserweiterung eines Spannungsmessers

100 mV; $R_i = 100\,\Omega$) auf 1 V, 10 V, 100 V und 1 kV erweitert werden. Die entsprechenden Widerstände sind zu ermitteln.

Lösung

a) Messbereichserweiterung des Amperemeters:
Nach (4.48) gilt im vorliegenden Fall

$$R_p = \frac{0{,}5\,\Omega}{\frac{I_n}{0{,}01} - 1} .$$

Erweiterung auf

$$100\,\text{mA}: \; R_p = \frac{0{,}5\,\Omega}{10-1} = 0{,}055\,\Omega ;$$

$$1\,\text{A}: \; R_p = \frac{0{,}5\,\Omega}{100-1} = 5{,}050 \cdot 10^{-3}\,\Omega ;$$

$$10\,\text{A}: \; R_p = \frac{0{,}5\,\Omega}{1\,000-1} = 5{,}005 \cdot 10^{-4}\,\Omega ;$$

$$20\,\text{A}: \; R_p = \frac{0{,}5\,\Omega}{2\,000-1} = 2{,}501 \cdot 10^{-4}\,\Omega .$$

b) Messbereichserweiterung des Voltmeters:
Nach (4.49) gilt im vorliegenden Fall

$$R_V = 100\,\Omega \left(\frac{U_n}{0{,}1\,\text{V}} - 1 \right) .$$

Erweiterung auf

$$1\,\text{V}: \; R_V = 100\,\Omega \cdot (10-1) = 900\,\Omega ;$$
$$10\,\text{V}: \; R_V = 100\,\Omega \cdot (100-1) = 9\,900\,\Omega ;$$
$$100\,\text{V}: \; R_V = 100\,\Omega \cdot (1\,000-1) = 99\,900\,\Omega ;$$
$$1\,\text{kV}: \; R_V = 100\,\Omega \cdot (10\,000-1) = 999\,900\,\Omega .$$

4.1.9 Ausgewählte Messanordnungen

Wheatstone'sche Brücke

Mit der Wheatstone'schen Brücke (C. Wheatstone, 1802 bis 1875) lassen sich Ohm'sche Widerstände bestimmen. Abbildung 4.18 zeigt das Schaltschema der Wheatstone'schen Brücke.

Der zu messende Widerstand R_x wird zwischen die Klemmen C und B eingesteckt. Der Gleitkontakt wird auf einem Widerstandsdraht zwischen A und B so lange verschoben, bis über die Brücke CD kein Strom mehr fließt. (Punkt D ist der Gleitkontakt.) Dann gilt die Maschenregel (4.25) für

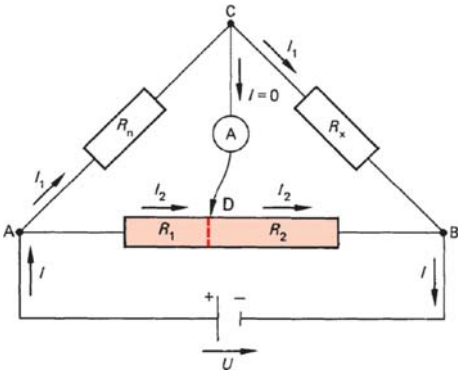


Abb. 4.18 Wheatstone'sche Brücke

Masche ACD:

$$R_n I_1 - R_1 I_2 = 0 \quad \text{oder} \quad R_n I_1 = R_1 I_2 \qquad \text{(a)}$$

Masche CBD:

$$R_x I_1 - R_2 I_2 = 0 \quad \text{oder} \quad R_x I_1 = R_2 I_2 \qquad \text{(b)}$$

Durch Division von (b) und (a) erhält man

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Damit errechnet sich der gesuchte Widerstand zu

$$R_x = R_n \frac{R_2}{R_1} . \qquad (4.50)$$

Potentiometerschaltung

Mit Hilfe der Schaltung entsprechend Abb. 4.19 wird eine Aufteilung der Gesamtspannung U_1 in kleinere Teilspannungen möglich (Spannungsteiler), indem ein Schleifkontakt den Gesamtwiderstand R_{ges} in die Anteile R_1 und R_2 aufteilt (zur technischen Ausführung s. Abb. 4.6). Für die abgegriffene Spannung U_x ist es entscheidend, ob der Spannungsteiler unbelastet (Abb. 4.19a) oder wegen des Stromflusses durch einen äußeren Widerstand R_a belastet ist (Abb. 4.19b).

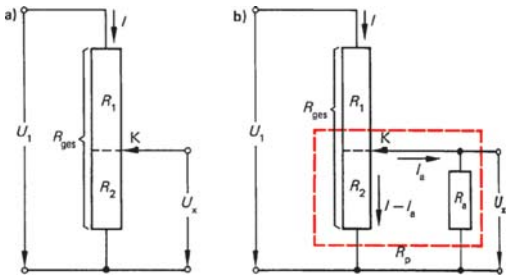


Abb. 4.19 Potentiometerschaltung

Für den unbelasteten Fall gilt

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2} \quad \text{(a)} \quad \text{und} \quad U_x = R_2 I \quad \text{(b)}\,.$$

Wird (a) in (b) eingesetzt, so ergibt sich für die gesuchte Teilspannung U_x

$$U_x = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{4.51}$$

Dies bedeutet, dass sich die Gesamtspannung U_1 im Verhältnis des Teilwiderstandes zum Gesamtwiderstand aufteilt.
Im Belastungsfall fließt durch R_a der Strom I_a und durch R_2 nur noch die Stromstärke $I - I_a$. Da R_2 und R_a parallel geschaltet sind, ist der Gesamtwiderstand

$$R_p = \frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}\,.$$

Wird dieser in (4.51) eingesetzt, dann beträgt die Spannung U_x'

$$U_x' = U_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p}$$

oder

$$U_x' = U_1 \frac{R_2 R_a}{R_1 R_2 + R_a(R_1 + R_2)}\,. \tag{4.52}$$

Gleichung (4.52) geht in (4.51) über, wenn $R_1 R_2 \ll R_a(R_1 + R_2)$ ist, bzw. $R_a \gg R_1 R_2/(R_1 + R_2)$. Dann ist der Strom I_a durch den Außenwiderstand R_a vernachlässigbar.

Beispiel

4.1-4 Eine Spannungsquelle mit $U_1 = 24\,\text{V}$ ist an einem Gesamtwiderstand von $8\,\Omega$ angeschlossen. An einem Teilwiderstand von $R_2 = 1\,\Omega$ wird die Spannung U_x abgegriffen. Wie groß ist sie im unbelasteten und im belasteten Zustand, wenn der äußere Widerstand a) gering ($R_a = 0{,}5\,\Omega$) bzw. wenn er b) hoch ist ($R_a = 100\,\Omega$)?

Lösung

a) Geringer äußerer Widerstand $R_a = 0{,}5\,\Omega$.

Unbelasteter Zustand: $U_x = 24\dfrac{1}{8}\,\text{V} = 3\,\text{V}$,

belasteter Zustand: $U_x' = 24\dfrac{1 \cdot 0{,}5}{7 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 8}\,\text{V} = 1{,}109\,\text{V}$.

b) Hoher äußerer Widerstand $R_a = 100\,\Omega$.

Unbelasteter Zustand: unverändert $U_x = 3\,\text{V}$,

belasteter Zustand: $U_x' = 24\dfrac{1 \cdot 100}{7 \cdot 1 + 100 \cdot 8}\,\text{V} = 2{,}97\,\text{V}$.

Der Wert der abgegriffenen Spannung U_x' im belasteten Fall weicht bei einem großen äußeren Widerstand kaum vom unbelasteten Fall ab (in diesem Beispiel lediglich um 1%).

Kompensationsmethode nach Poggendorf

Die nach J.C. Poggendorf (1796 bis 1877) benannte Methode gestattet es, die „Urspannung“ U_0 von solchen Spannungsquellen zu ermitteln, deren Spannung mit steigendem Stromdurchfluss absinkt (z. B. bei galvanischen Elementen, Abb. 4.5 und Abschn. 4.2). Dies geschieht dadurch, dass der Stromfluss durch eine entgegengesetzt gleich große Spannung „kompensiert“ wird (daher der Name Kompensationsmethode). Abbildung 4.20 zeigt die zugehörige Schaltung. Eine Spannungsquelle mit der Spannung U wird mit den gleichen Polen über einen Spannungsteiler an die zu messende Urspannung U_0 angeschlossen. Ein Schleifkontakt wird so verschoben, dass der Stromkreis mit der Urspannung U_0 stromlos wird ($I_0 = 0$). Dann fällt am Teilwi-

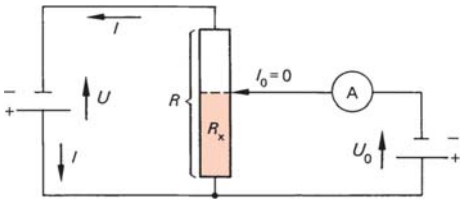


Abb. 4.20 Schema der Kompensationsmethode

derstand R_x die Spannung U_0 ab, sodass gilt $U_0 = R_x I$. Mit $I = U/R$ erhält man

$$U_0 = \frac{R_x}{R} U \,. \tag{4.53}$$

4.1.10 Klemmenspannung und innerer Widerstand

Spannungsquellen erzeugen zwischen zwei Punkten (den Klemmen) eine Spannung (Klemmenspannung U_{Kl}). Im Inneren der Spannungsquellen findet eine Umwandlung in elektrische Energie statt (z. B. bei galvanischen Elementen von chemischer in elektrische Energie, Abb. 4.5). Die dadurch erzeugte Urspannung U_0, angelegt an einen Stromkreis, führt zum Transport der Ladungsträger.
Wegen des inneren Widerstandes R_i der Spannungsquellen selbst (z. B. Widerstand der Elektrolytflüssigkeit bei einem galvanischen Element) fällt ein Teil der Urspannung als innerer Spannungsabfall $U_i = R_i I$ bereits in der Spannungsquelle ab, wie es Abb. 4.21 verdeutlicht. Damit steht zum Abfall an einem Verbraucherwiderstand nur noch die Klemmenspannung U_{Kl} zur Verfügung:

$$U_{Kl} = U_0 - U_i \,, \tag{4.54}$$

$$U_{Kl} = U_0 - R_i I \,. \tag{4.55}$$

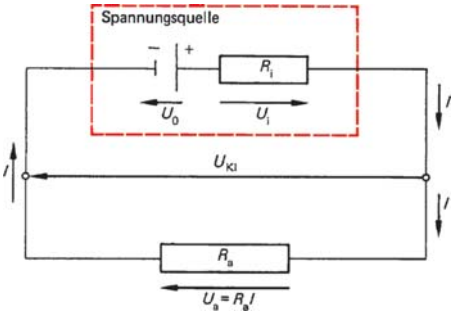


Abb. 4.21 Stromkreis mit Spannungsquelle (Urspannung U_0 und innerem Widerstand R_i) und äußerem Verbraucherwiderstand R_a

Aus (4.55) ist ersichtlich, dass die Klemmenspannung U_{Kl} umso kleiner wird, je größer die Stromstärke I ist. Diese errechnet sich nach dem Ohm'schen Gesetz zu

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a} \,. \tag{4.56}$$

Eingesetzt in (4.55) erhält man für die Klemmenspannung

$$U_{Kl} = \frac{U_0 R_a}{R_i + R_a} \,. \tag{4.57}$$

Hieraus lässt sich der innere Widerstand einer Spannungsquelle berechnen:

$$R_i = R_a \left(\frac{U_0}{U_{Kl}} - 1 \right) \,. \tag{4.58}$$

Beispiel

4.1-5 Eine Autobatterie hat eine Urspannung von 12,6 V und einen inneren Widerstand $R_i = 120\,\text{m}\Omega$. Der Zuleitungswiderstand zum Anlasser beträgt 10 mΩ. Zum Anlassen wird eine Stromstärke von 60 A benötigt. Wie groß ist beim Beginn des Anlassens die Klemmenspannung an der Batterie und am Anlasser sowie der Verbraucherwiderstand R_a?

Lösung

Für die Klemmenspannung gilt nach (4.55)

$U_{Kl} = U_0 - R_i I$.
$R_i = 0{,}12\ \Omega$ für Batterieklemmen:
$U_{Kl} = 12{,}6\ V - 0{,}12\ \Omega.\ 60\ A = 5{,}4\ V$;
$R_i = 0{,}13\ \Omega$ für Anlasserklemmen:
$U_{Kl} = 12{,}6\ V - 0{,}13\ \Omega \cdot 60\ A = 4{,}8\ V$.

Aus (4.56) folgt für den äußeren Verbraucherwiderstand

$$R_a = \frac{U_0}{I} - R_i = \frac{12{,}6}{60}\ \Omega - 0{,}13\ \Omega = 0{,}08\ \Omega\ .$$

4.1.11 Schaltung von Spannungsquellen

Soll die Stromstärke durch einen Stromkreis möglichst groß werden, so können Spannungselemente in Reihe oder parallel geschaltet werden. Ausschlaggebend ist der äußere Widerstand. Bei einem großen äußeren Widerstand R_a ist die Reihenschaltung und bei einem kleinen äußeren Widerstand R_a die Parallelschaltung vorteilhaft. Am Beispiel gleich großer Spannungselemente seien die Zusammenhänge erläutert.

Reihenschaltung

Werden n Spannungsquellen in Reihe geschaltet, wie es Abb. 4.22 zeigt, so addieren sich die Urspannungen zu $n\,U_0$ und die inneren Widerstände zu $n\,R_i$. Damit erhält man nach (4.56) für die Stromstärke I

$$I = \frac{n\,U_0}{R_a + n\,R_i}\ . \qquad (4.59)$$

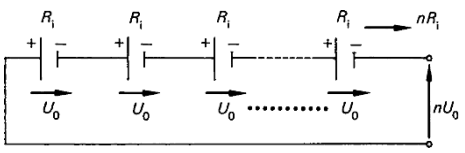


Abb. 4.22 Reihenschaltung von Spannungsquellen

Ist R_a klein im Vergleich zu R_i, so kann der äußere Widerstand vernachlässigt werden. Dann ist $I = U_0/R_i$, d. h., die Stromstärke ist nur so groß wie bei einem einzigen Spannungselement und die Schaltung bietet keinen Vorteil. *Ist dagegen R_a vergleichsweise zu nR_i groß, so ist $I = n\,U_0/R_a$, d. h. die Stromstärke wird proportional zur Anzahl der Spannungsquellen vergrößert.*

Parallelschaltung

Werden n Spannungsquellen gemäß Abb. 4.23 parallel geschaltet, so ist die Urspannung zwar gleich der eines einzelnen Elementes, aber der gesamte Innenwiderstand vermindert sich auf R_i/n. Damit beträgt die Stromstärke I nach (4.56)

$$I = \frac{U_0}{R_a + \dfrac{R_i}{n}}\ . \qquad (4.60)$$

Bei einem großen Verbraucherwiderstand R_a im Vergleich zum inneren Widerstand R_i ist R_i/n vernachlässigbar klein, sodass die Stromstärke nur so groß ist wie bei einem einzigen Spannungselement und die Schaltung bietet keinen Vorteil. *Ist dagegen R_a vergleichsweise vernachlässigbar zu R_i/n, dann steigt die Stromstärke um das n-fache an.*

Gruppenschaltung

Werden n Spannungsquellen hintereinander und m solcher Reihen parallel geschaltet, so liegt eine Gruppenschaltung vor. Abbildung 4.24 zeigt das Prinzip. Die gesamte

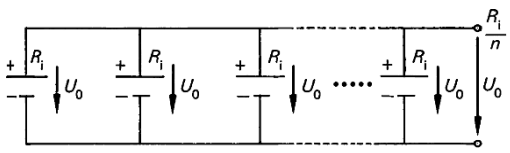


Abb. 4.23 Parallelschaltung von Spannungsquellen

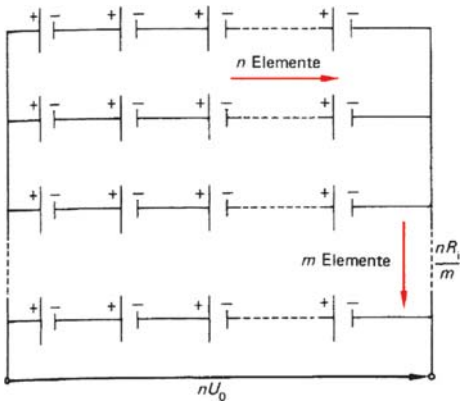


Abb. 4.24 Gruppenschaltung von Spannungsquellen

Urspannung beträgt dann nU_0 und der gesamte innere Widerstand nR_i/m. Damit ist die Stromstärke I nach (4.56)

$$I = \frac{n\,U_0}{R_a + \dfrac{n\,R_i}{m}} \,. \qquad (4.61)$$

Beispiel

4.1-6 Zehn Trockenbatterien mit einer Nennspannung von je 1,5 V und einem Innenwiderstand von $R_i = 7\,\text{k}\Omega$ werden an einen Verbraucher mit $R_a = 80\,\Omega$ angeschlossen. Wie groß ist die Stromstärke bei a) Reihenschaltung, b) Parallelschaltung und c) bei der Gruppenschaltung $2 \cdot 5$ sowie $5 \cdot 2$? Bei welcher Schaltung ist die Stromstärke am größten?

Lösung

a) Reihenschaltung.
Nach (4.59) gilt

$$I = \frac{10 \cdot 1{,}5}{80 + 10 \cdot 7\,000}\,\text{A} = 2{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{A} \,.$$

b) Parallelschaltung.
Nach (4.60) gilt

$$I = \frac{1{,}5}{80 + \dfrac{7\,000}{10}}\,\text{A} = 1{,}92 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \,.$$

c) Gruppenschaltung $2 \cdot 5$.
Nach (4.61) gilt

$$I = \frac{2 \cdot 1{,}5}{80 + \dfrac{2 \cdot 7\,000}{5}}\,\text{A} = 1{,}04 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \,.$$

Gruppenschaltung $5 \cdot 2$.
Nach (4.61) gilt

$$I = \frac{5 \cdot 1{,}5}{80 + \dfrac{5 \cdot 7\,000}{2}}\,\text{A} = 4{,}27 \cdot 10^{-4}\,\text{A} \,.$$

Die Stromstärke bei der Parallelschaltung ist am größten ($R_a \gg R_i$).

Beispiel

4.1-7 Für eine Gruppenschaltung soll die Stromstärke maximiert werden. Gegeben ist die Gesamtanzahl $z = m\,n$ Elemente.

Lösung

Nach (4.61) gilt

$$I = \frac{n\,U_0}{R_a + \dfrac{n\,R_i}{m}} \,, \quad \text{da} \quad n = \frac{z}{m} \,;$$

$$I = \frac{z\,m\,U_0}{m^2 R_a + z R_i} \,.$$

Für eine maximale Stromstärke gilt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}m} = 0 = \frac{(m^2 R_a + z\,R_i)\,z\,U_0 - z\,m\,U_0(2m\,R_a)}{(m^2 R_a + z\,R_i)^2} \,.$$

Da der Nenner ungleich 0 ist, kann mit diesem die Gleichung multipliziert werden, sodass nur noch der Zähler gleich 0 übrig bleibt:

$$(m^2 R_a + z\,R_i)\,z\,U_0 - z\,m\,U_0(2\,m\,R_a) = 0 \,,$$

$$m^2\,z\,R_a U_0 + z^2\,R_i U_0 - 2\,m^2\,z\,R_a U_0 = 0 \,|:z\,U_0 \,,$$

$$m^2\,R_a + z\,R_i - 2\,m^2\,R_a = 0 \,,$$

$$m^2\,R_a = z\,R_i \,,$$

$$m = \sqrt{z\,\frac{R_i}{R_a}} \,.$$

Setzt man für $z = m\,n$, so gilt $m^2 R_a = m\,n\,R_i$ oder

$$\frac{m}{n} = \frac{R_i}{R_a} \,.$$

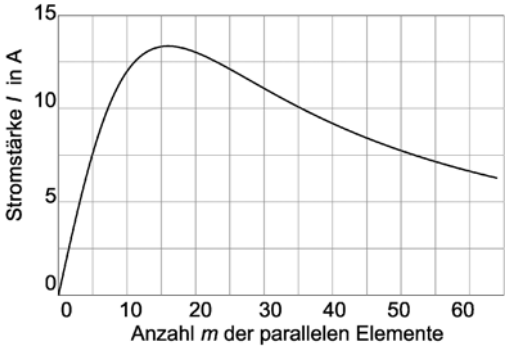


Abb. 4.25 Verlauf der Stromstärke in Abhängigkeit von der Anzahl m parallel geschalteter Spannungsquellen für $U_0 = 2\,\mathrm{V}$

Das Maximum der Stromstärke ist von der Urspannung unabhängig. Für $R_\mathrm{i} = 1{,}2\,\Omega$, $R_\mathrm{a} = 0{,}3\,\Omega$ und $z = mn = 64$ gilt

$$m = \sqrt{64\,\frac{1{,}2}{0{,}3}} = 16 \quad \text{und} \quad n = 4\,.$$

Abbildung 4.25 zeigt den Verlauf der Stromstärke in Abhängigkeit von der Anzahl m der parallel geschalteten Spannungselemente. Wie bereits ermittelt, liegt das Maximum der Stromstärke bei $m = 16$.

4.1.12 Elektrische Leistung und elektrische Arbeit

Wie bereits in Abschn. 4.1.3 erläutert, ist die Spannung U über die abgegebene Leistung definiert (4.10), sodass man für die Leistung schreibt

$$P = U\,I\,. \tag{4.62}$$

Die Einheit ist 1 VA = 1 W (Watt). Gebräuchlich ist auch die Einheit kW = 10^3 W.
Mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes kann die Leistung in weiteren Schreibweisen dargestellt werden. In Tabelle 4.3 sind die mit der elektrischen Leistung P zusammenhängenden Gleichungen für U, R und I zusammengestellt.
Die Arbeit ist definiert als Produkt aus Leistung und Zeit:

$$W = P\,t\,. \tag{4.72}$$

Dies bedeutet, dass alle Gleichungen in Tabelle 4.3 für die elektrische Arbeit entsprechend (4.72) anwendbar sind. Wird für P das Produkt $U\,I$ gesetzt, so erhält man

$$W = U\,I\,t\,. \tag{4.73}$$

Die Umrechnung mit dem Ohm'schen Gesetz (4.20) und (4.67) ergibt

$$W = R\,I^2\,t\,, \tag{4.74}$$

$$W = \frac{U^2}{R}\,t\,. \tag{4.75}$$

Tabelle 4.3 Gleichungen zur elektrischen Leistung

Elektrische Leistung P		Spannung U		Widerstand R		Stromstärke I	
$P = U\,I$	(4.62)	$U = R\,I$	(4.19)	$R = \frac{U}{I}$	(4.18)	$I = \frac{U}{R}$	(4.69)
$P = \frac{U^2}{R}$	(4.63)	$U = \frac{P}{I}$	(4.65)	$R = \frac{U^2}{P}$	(4.67)	$I = \frac{P}{U}$	(4.70)
$P = I^2\,R$	(4.64)	$U = \sqrt{R\,P}$	(4.66)	$R = \frac{P}{I^2}$	(4.68)	$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$	(4.71)

Da $I\,t = Q$ ist, kann (4.73) auch geschrieben werden

$$W = U\,Q\,. \tag{4.76}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Beziehungen für die elektrische Leistung bzw. Arbeit, in denen die Stromstärke I vorkommt, nur dann gültig sind, wenn die Stromstärke I *konstant* ist. In diesem Fall ist die abgegebene Arbeit W proportional zur Zeit, sodass die Leistung P konstant ist. Fließt dagegen keine konstante Stromstärke, so muss die Momentanleistung bestimmt werden, die als Differentialquotient der Arbeit W nach der Zeit t definiert ist (vgl. dazu die Ausführungen in der Mechanik, Abschn. 2.6.2, (2.70)):

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.70}$$

Daraus ergibt sich

$$W = \int P(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.77}$$

und mit $P = U\,I(t)$

$$W = \int U\,I(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.78}$$

Die elektrische Arbeit hat die Einheit VA s = W s = N m = J. Damit ist die Gleichheit der elektrischen und der mechanischen Arbeit hergestellt, die es direkt gestattet, elektrische Größen in mechanische umzurechnen. Gebräuchlich als Einheit für die elektrische Arbeit ist auch 1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ W s (Nm oder J).

Die Arbeit des elektrischen Stroms besteht sehr häufig in der Reibungsarbeit der fließenden Ladungsträger (Elektronen), die Stromwärme oder Joule'sche Wärme erzeugen. Die engen Beziehungen zwischen Wärme und elektrischer Leitfähigkeit sind in Abschn. 9.3.2 (thermoelektrische Effekte) ausführlich beschrieben.

Die Zusammenhänge zwischen elektrischer Arbeit, elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der elektrischen Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}}$ sind in Abschn. 4.3 hergeleitet.

Beispiel

4.1-8 An einer Spule mit einem Widerstand von 8 Ω liegt eine konstante Spannung von 12 V. Der Strom steigt in 0,3 s von 0 auf 1,5 A und bleibt dann konstant. Wie groß ist die elektrische Arbeit nach 0,3 s und nach 1 s? – Wird die abgegebene Leistung bei 0,5 A, 1 A und 1,5 A nach den Beziehungen $P = U\,I$ oder $P = I^2/R$ berechnet, so ergeben sich teilweise unterschiedliche Werte. Warum treten diese Abweichungen auf und welche Gleichung beschreibt die Leistungsabgabe richtig?

Anmerkung: Der zeitlich lineare Stromanstieg ist eine Vereinfachung. Der exakte Verlauf ist durch (4.343) in Abschn. 4.5.3.2 gegeben.

Lösung

a) Arbeit innerhalb $t = 0{,}3$ s.
Da die Stromstärke bis zur Zeit $t = 0{,}3$ s stetig zunimmt, muss (4.78) angewendet werden:

$$W_{\mathrm{el}} = \int_0^{0{,}3\ \mathrm{s}} U\,I(t)\mathrm{d}t \text{ mit } I(t) = kt$$

(k: Konstante) .

Damit gilt

$$W_{\mathrm{el}} = \int_0^{0{,}3\ \mathrm{s}} U\,k\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}U\,k\,t^2\Big|_0^{0{,}3\ \mathrm{s}}\,. \tag{a}$$

Für die Konstante ergibt sich

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{1{,}5\ \mathrm{A}}{0{,}3\ \mathrm{s}}, \text{ in (a) eingesetzt ergibt}$$

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1{,}5}{0{,}3} \cdot 0{,}3^2\ \mathrm{VAs} = 2{,}7\ \mathrm{Ws}\,.$$

b) Arbeit innerhalb $t = 1$ s.
Von 0,3 s bis 1 s, d. h. 0,7 s lang fließt der konstante Strom von 1,5 A. Dann gilt nach (4.73)

$$W_{el} = U\,I\,t = 12 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}7\ \text{VAs} = 12{,}6\ \text{Ws}\ .$$

Insgesamt beträgt die elektrische Arbeit dann

$$W_{el} = 2{,}7\ \text{Ws} + 12{,}6\ \text{Ws} = 15{,}3\ \text{Ws}\ .$$

c) Leistungsberechnung.

$$\begin{aligned} &0{,}5\ \text{A}: && P = I^2R = 2\ \text{W}; && P = U\,I = 6\ \text{W}; \\ &1\ \text{A}: && P = I^2R = 8\ \text{W}; && P = U\,I = 12\ \text{W}; \\ &1{,}5\ \text{A}: && P = I^2R = 18\ \text{W}; && P = U\,I = 18\ \text{W}\ . \end{aligned}$$

Die gesamte Leistungsabgabe wird durch die Beziehung $P = U\,I$ ermittelt. Die Gleichung $P = I^2R$ beschreibt lediglich die Leistungsabgabe in Form von Wärme (Wärmeleistung). Die Leistungsdifferenz $P = U\,I - I^2R$ wird zum Aufbau eines Magnetfeldes in der Spule verwendet (Abschn. 4.4.2).

Zur Übung

Ü 4.1-1 Für den in Abb. 4.26 angegebenen „Stromkreis“ sind der Gesamtwiderstand, die zum Mittelpunkt M führenden Teilströme I_{1M}, I_{2M} und I_{3M} sowie der gesamte Leistungsverbrauch zu bestimmen.

Ü 4.1-2 Bei einer Heizwicklung soll zur Werkstoffauswahl der spezifische Widerstand ermittelt werden. Die Wicklung ist 5 m lang, 0,15 mm dick (Durchmesser) und muss bei einer Spannung von 230 V eine Stromstärke von 3 A tragen können.

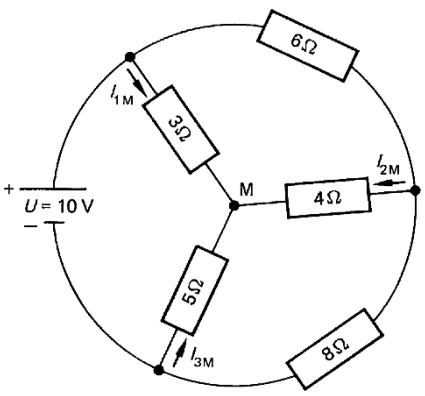


Abb. 4.26 Schaltung zu Ü 4.1-1

Ü 4.1-3 Zwei gleichnamig geladene Kugeln mit der Masse $m = 2$ g hängen an einem als masselos zu betrachtenden Faden mit der Länge $l = 75$ cm und sind wegen der Wirkung der abstoßenden Kraft $s = 25$ cm voneinander entfernt. Wie groß ist die Ladung Q der Kugeln?

4.2 Ladungstransport in Flüssigkeiten und Gasen

4.2.1 Ladungstransport in Flüssigkeiten

Die Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten gehören zu den komplizierten Gebieten der physikalischen Chemie, speziell der *Elektrochemie*. In diesem Abschnitt sollen nur die wichtigsten Erscheinungen und die einfachsten Gesetze beschrieben werden.

4.2.1.1 Dissoziation und Elektrolyse

In metallisch leitenden Festkörpern bewegen sich beim Stromdurchgang *Elektronen*. Im Unterschied dazu wandern in Flüssigkeiten *Ionen*, dies sind positiv oder negativ geladene Atome oder Moleküle. Diese Ladungsträger entstehen dadurch, dass sich Salze, Säuren oder Laugen beim Eintragen in Lösungsmitteln in positiv oder negativ geladene Moleküle aufspalten: sie *dissoziieren*.
Die Ladungsträger eines Salzes (Kupfersulfat, $CuSO_4$), einer Säure (Salzsäure, HCl) und einer Lauge (Natronlauge, NaOH) sind in Tabelle 4.4 aufgeführt. Die Ionen tragen elektrische Elementarladungen entsprechend ihrer chemischen Wertigkeit.

Tabelle 4.4 Dissoziation (Beispiele)

Stoff	Kation	Anion
$CuSO_4$	Cu^{2+}	SO_4^{2-}
HCl	H^+	Cl^-
NaOH	Na^+	OH^-

Bei der Dissoziation in Wasser schieben sich die Wassermoleküle durch ihr anisotropes Dipolmoment (Beispiel 4.1-1 und Abb. 4.3) zwischen die Ionen und ordnen sich um diese an, etwa wie es Abb. 4.27 zeigt. Die Ionen sind in diesem Fall *hydratisiert*, d. h. von einer Wolke von Wasserdipolen umgeben.

Da die positiven Ionen zur Kathode (Minuspol) wandern, werden sie *Kationen* genannt, im Gegensatz zu den *Anionen*, die zur Anode (Pluspol) wandern. Elektrisch leitende Lösungen, die aus Kationen und Anionen bestehen, heißen *Elektrolyte*.

Werden zwei *Elektroden* (Kathode und Anode) gemäß Abb. 4.28 in einen Elektrolyten getaucht und an eine Spannungsquelle angeschlossen,

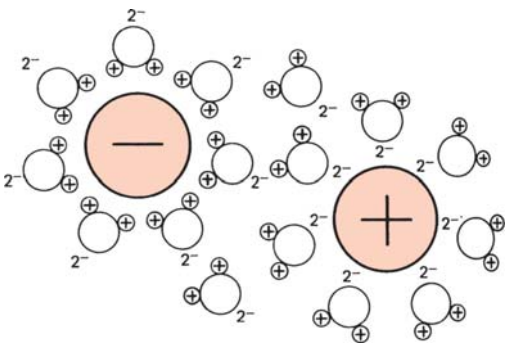


Abb. 4.27 Hydratisierung von Ionen

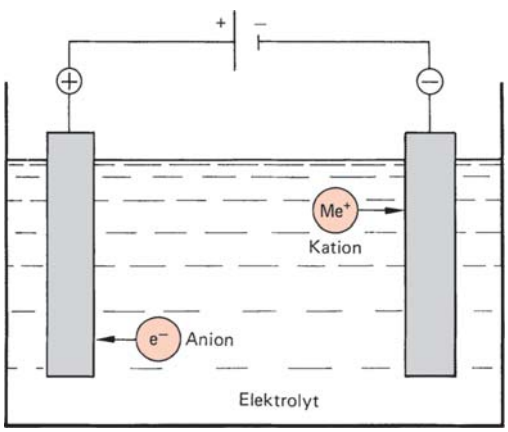


Abb. 4.28 Elektrolyse (schematisch)

dann findet eine elektrolytische Stromleitung statt (*Elektrolyse*). Sie unterscheidet sich von der metallischen Leitung sehr wesentlich, weil zusammen mit den Ionen nicht nur Elementarladungen, sondern auch Materie transportiert wird. Grundsätzlich laufen an den Elektroden folgende Reduktions- bzw. Oxidationsprozesse, die *Redoxreaktionen*, ab:

An die Anode werden vom Elektrolyten Elektronen abgegeben; es findet eine Oxidation statt. Für eine metallische Anode gilt

$$\mathrm{Me} \rightarrow \mathrm{Me^+} + \mathrm{e^-} \,.$$

Dies bedeutet: Das Metall löst sich an der Anode auf und geht in Lösung. An der Kathode findet dagegen durch Elektronenaufnahme immer eine Reduktion statt. Bei dem genannten Beispiel wird das Metallion zum Metall reduziert:

$$\mathrm{Me^+} + \mathrm{e^-} \rightarrow \mathrm{Me} \,.$$

In diesem Fall wird das Metall an der Kathode abgeschieden.

Die Elektrolyse spielt in der Technik bei dem Aufbringen von Metallüberzügen, dem *Galvanisieren* (nach L. Galvani, 1737 bis 1798), eine wichtige Rolle. Die häufigsten galvanischen Metallüberzüge bestehen aus Chrom, Nickel, Cadmium, Gold und Silber. Sie dienen vor allem zur Erhöhung der mechanischen (Hartverchromen) oder chemischen Widerstandsfähigkeit (Vernickeln von Eisen), zur Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit (Vergolden oder Versilbern von Kontakten) oder aber auch nur zur Verschönerung. Selbst auf Kunststoffen können galvanische Überzüge abgeschieden werden (Galvanoplastik).

Auch zur Metallgewinnung werden elektrolytische Verfahren eingesetzt. In diesem Fall verwendet man eine unlösliche Anode und eine Metallsalzlösung dient als Elektrolyt. An der Kathode wird dann das sehr reine Metall (99,9%) abgeschieden. Ein spezielles Verfahren zur Metallgewinnung auf diesem Wege

ist die *Schmelzfluss-Elektrolyse*. Hierbei werden niedriger schmelzende Metallgemische erschmolzen und aus dieser Schmelze das Metall an der Kathode elektrolytisch abgeschieden. Bei Aluminium besteht die Schmelze aus Aluminiumoxid (Al_2O_3) in geschmolzenem Kryolith (Na_3AlF_6). Der Schmelzpunkt für Al_2O_3 ist 2 000 °C; durch das Zusatzmittel Kryolith wird er auf 935 °C herabgesetzt. Auf diese Weise werden außer Aluminium auch Magnesium, Beryllium und Cer gewonnen.
Außerdem setzt man die Elektrolyse ein, um aus Wasser *Knallgas* oder *Wasserstoff* herzustellen oder um *Ätznatron* bzw. *Ätzkali* zu gewinnen.
An der Anode können auch Oxidschichten abgeschieden werden (*anodische Oxidation*). Besondere Anwendung findet dies beim *Eloxalverfahren* (elektrolytisch oxidiertes Aluminium), in dem der anodisch gepolte Aluminiumkörper mit einer einfärbbaren korrosionsbeständigen Oxidhaut überzogen wird. Beim *elektrolytischen Polieren* (z. B. von Aluminium und Edelstahl) wird das Metall anodisch so abgetragen, dass besonders glatte Oberflächen entstehen. In einem fertigungstechnischen Verfahren können auch elektrolytisch feinste Löcher gebohrt (*Elektroerosion*) oder gezielt Bohrlöcher entgratet werden.

4.2.1.2 Faraday'sche Gesetze

Die beiden Faraday'schen Gesetze (M. Faraday, 1791 bis 1867) beschreiben den Zusammenhang zwischen *transportierter Masse* und *Ladung*. Die transportierte Masse wird durch das Produkt aus der Stoffmenge n und der Molmasse M bestimmt: $m = n\,M$. Die Molzahl n errechnet sich aus der Molekülanzahl N dividiert durch die Avogadro-Konstante N_A:

$$n = \frac{N}{N_A} \,. \tag{4.79}$$

Die Molekülanzahl N lässt sich auch aus dem Quotienten aus transportierter Ladung Q und Ladung je transportiertem Molekül $z\,e$ (e ist die Elementarladung) errechnen:

$$N = \frac{Q}{z\,e} = \frac{I\,t}{z\,e} \,. \tag{4.80}$$

Mit (4.79) und (4.80) gilt für die Masse in Abhängigkeit der transportierten Ladung
$m = n\,M = Q/(z\,e\,N_A)M$,

$$m = \frac{M}{z\,N_A\,e} I\,t \,. \tag{4.81}$$

Dies ist das erste Faraday'sche Gesetz:

> Die Masse m des abgeschiedenen Stoffes ist nur der transportierten Ladungsmenge $Q = I\,t$ proportional. Sie hängt weder von der Geometrie der Elektroden noch von der Konzentration des Elektrolyten ab.

Aufgrund des ersten Faraday'schen Gesetzes ist es möglich, die Stromstärke I bzw. die elektrische Ladung Q durch die abgeschiedenen Stoffmengen zu messen (*Voltameter* nach A. Volta, 1745 bis 1827, bzw. *Coulombmeter* nach A. Coulomb, 1736 bis 1806). Für Silber gilt $Ä = 1{,}11817$ mg/(As). Dies bedeutet, dass bei einer Stromstärke von 1 A in 1 s $m = 1{,}11817$ mg Silber abgeschieden werden (frühere Definition des Ampère als Einheit der Stromstärke).
Weiterhin gelten folgende Definitionen:
Das Produkt aus Avogadro-Konstante N_A und Elementarladung e wird *Faraday-Konstante* F genannt:

$$F = N_A\,e = 96\,485 \text{ As/mol} \,. \tag{4.82}$$

Tabelle 4.5 Elektrochemische Daten einiger Elemente

Element	Wertigkeit	Molmasse $\frac{g}{mol}$	$\frac{\text{Molmasse}}{\text{Wertigkeit}}$ $\frac{g}{mol}$	elektrochemisches Äquivalent $10^{-3}\,\frac{g}{As}$	Faraday-Konstante $\frac{As}{mol}$
Wasserstoff	1	1,00797	1,00797	0,01046	96 364
Sauerstoff	2	15,9994	7,9997	0,08291	96 487
Aluminium	3	26,9815	8,9938	0,09321	96 490
Eisen	3	55,847	18,616	0,19303	96 441
Nickel	2	58,71	29,355	0,30415	96 515
Kupfer	2	63,54	31,77	0,32945	96 433
Zink	2	65,37	32,685	0,33875	96 487
Silber	1	107,870	107,870	1,11817	96 470
Zinn	4	118,69	29,673	0,30755	96 482
Platin	4	195,09	48,773	0,50588	96 412

Das elektrochemische Äquivalent $\ddot{A}$ ist definiert als

$$\ddot{A} = \frac{M}{z\,F} = \frac{m}{Q}\,. \tag{4.83}$$

Das elektrochemische Äquivalent $\ddot{A}$ hat die Einheit kg/(A s) und gibt an, wie viel kg eines Stoffes bei einer Stromstärke von 1 A in 1 s abgeschieden werden. Gemäß (4.83) ist die Masse m proportional zur Molmasse M, aber umgekehrt proportional zur Wertigkeit z (Anzahl der Elementarladungen), sodass gilt

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{z_1} : \frac{M_2}{z_2} = \frac{\ddot{A}_1}{\ddot{A}_2}\,. \tag{4.84}$$

Somit lautet das zweite Faraday'sche Gesetz:

> Die von gleichen Elektrizitätsmengen abgeschiedenen Massen (elektrochemische Äquivalente) verhalten sich wie die Molmassen je Wertigkeit.

In Tabelle 4.5 sind die Wertigkeiten, die Molmassen, die Molmassen je Wertigkeit und die elektrochemischen Äquivalente angegeben. Zur Kontrolle wurde in der letzten Spalte aus den Zahlenwerten (Division der Molmasse je Wertigkeit mit dem elektrochemischen Äquivalent) die Faraday-Konstante errechnet.

4.2.1.3 Elektrochemische Spannungsquellen

Wird ein Metall in einen Elektrolyten getaucht, so gibt es – wie im vorhergehenden Abschnitt an einer Anodenreaktion gezeigt – positive Ionen ab. Dadurch entsteht, wie Abb. 4.29 zeigt, eine *elektrische Doppelschicht* zwischen positivem Elektrolyt und negativer Elektrode. Je mehr Metallionen in Lösung gehen, umso größer wird die Gegenkraft des elektrischen Feldes der Doppelschicht, bis der Lösungsprozess zum Stillstand kommt. Die dann erreichte Spannung zwischen Metall und Elektrolyt wird *Urspannung* genannt. Sie kann nur mit einer zweiten Elektrode gemessen werden. Üblicherweise wird als Bezugselektrode die *Standardwasserstoffelektrode* (*SWE*) gewählt. Abbildung 4.30 zeigt eine Ausführung.

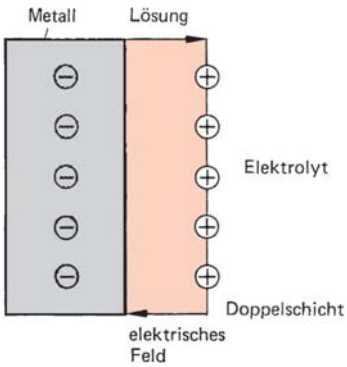


Abb. 4.29 Elektrische Doppelschicht (schematisch)



Abb. 4.30 Standardwasserstoffelektrode

Tabelle 4.6 Elektrochemische Spannungsreihe der Metalle

Metall	Spannung U in V
Li/Li^+	−3,02
Cs/Cs^+	−2,92
K/K^+	−2,92
Ca/Ca^{2+}	−2,84
Na/Na^+	−2,71
Mg/Mg^{2+}	−2,38
Al/Al^{3+}	−1,66
Mn/Mn^{2+}	−1,05
Zn/Zn^{2+}	−0,76
Fe/Fe^{2+}	−0,44
Cd/Cd^{2+}	−0,40
Ni/Ni^{2+}	−0,25
Sn/Sn^{2+}	−0,136
Pb/Pb^{2+}	−0,126
H/H^+	±0
Cu/Cu^{2+}	+0,34
Cu/Cu^+	+0,52
Hg/Hg_2^{2+}	+0,798
Ag/Ag^+	+0,80
Hg/Hg^{2+}	+0,854
Pt/Pt^{2+}	+1,2
Au/Au^+	+1,42
Au/Au^{3+}	+1,5

Sie besteht aus einem Platinblech, das in eine wässrige Lösung von H_3O^+-Ionen taucht und gleichzeitig von Wasserstoffgas umspült wird. Das Potential dieser Elektrode wird willkürlich gleich null gesetzt. Mit dieser Anordnung misst man die *elektrochemische Spannungsreihe* der Metalle. Tabelle 4.6 zeigt die elektrochemische Spannungsreihe der wichtigsten Metalle (bei 25 °C). Im oberen Teil sind die Metalle mit negativem (d. h. Elektronen werden abgegeben) und im unteren Teil mit positivem elektrochemischen Potential (Abschn. 4.3.4) zusammengestellt.

Tauchen zwei unterschiedliche Metalle in denselben Elektrolyt, dann entsteht zwischen ihnen eine Spannung, die gleich der Potentialdifferenz der elektrochemischen Einzelpotentiale ist. So gilt beispielsweise für eine Kombination von Zink und Kupfer $U = U_{Cu} - U_{Zn} = 0{,}34 - (-0{,}76)\,V = 1{,}1\,V$. Solche Kombinationen werden *galvanische Zellen* genannt. Sie liefern Strom aufgrund des umgekehrten Vorgangs der Elektrolyse. Mehrere zusammengeschaltete galvanische Zellen ergeben eine *Batterie*. Abbildung 4.31 zeigt eine Einteilung der galvanischen Elemente. In ihnen findet immer eine Umwandlung von chemischer in elektrische Energie statt. Ist diese Umwandlung nicht mehr rückgängig zu machen (nicht aufladbar), wird von *Primärelementen* gesprochen, ist dagegen eine Rückwandlung möglich (wieder

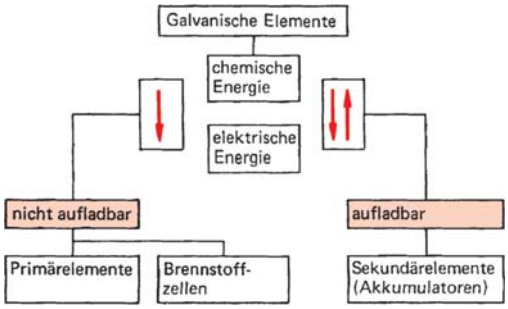


Abb. 4.31 Einteilung der galvanischen Elemente

aufladbar), so liegen *Sekundärelemente* (Akkumulatoren) vor. Im Unterschied zu galvanischen Zellen befinden sich in Brennstoffzellen die Reaktionspartner nicht in derselben Zelle, sondern werden als Brennstoffe von außen zugeführt. Zudem kommt es in den Zellen nicht zu einer Abscheidung von festen Reaktionsprodukten. Die Brennstoffzellen werden den Primärelementen zugerechnet.

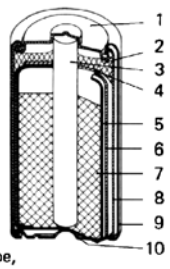
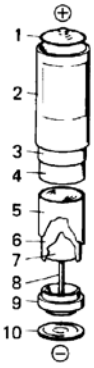
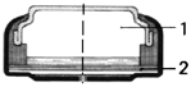
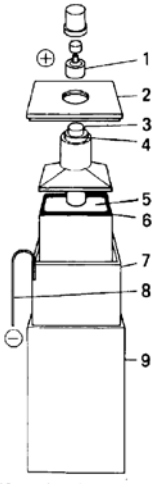
Aufgrund der elektrochemischen Spannungsreihe (Tabelle 4.6) sind eine Vielzahl von Primärelementen denkbar. Die in der Praxis am häufigsten eingesetzten chemischen Systeme zeigt Abb. 4.32. Es sind die zugehörigen chemischen Reaktionen beschrieben und folgende wichtige Kenngrößen gegenübergestellt: volumen- bzw. gewichtsbezogene Energiedichte in Wh/l bzw. in Wh/kg, Nennspannung in V und Strombelastung in mA/cm^2. Ferner sind die wichtigsten Einsatzgebiete aufgeführt sowie der Aufbau und die Ausführung einiger galvanischen Zellen gezeigt.

Wie Abb. 4.32 zu entnehmen ist, liegt bei den Primärelementen der Schwerpunkt bei den Zink- und Lithium-Systemen. Die chemische Reaktion, die den elektrischen Strom erzeugt, ist trotz unterschiedlicher Reaktionspartner grundsätzlich immer dieselbe: An der negativen Elektrode (Anode) wird ein Metall (in diesem Fall Zink oder Lithium) oxidiert (Freisetzung von Elektronen) und eine oxidische Metallverbindung (Mangan-, Silber-, Quecksilberoxid) als positive Elektrode (Kathode) reduziert. Für Primärelemente sind die Normen DIN EN 60 086-1 bis -05 maßgebend.

Eine wichtige Vergleichsgröße sind die volumen- bzw. gewichtsbezogenen Energiedichten. Hierbei wird deutlich, dass das Leclanché-System den niedrigsten Wert hat und die alkalischen Zink/Luft- sowie die Lithium-Systeme die höchsten Energiedichten aufweisen. Eine Fülle weiterer Einflussgrößen, wie z. B. Selbstentladung, Materialpreis und Herstellkosten, erklären die Typenvielfalt der Primärelemente und ihre unterschiedlichen Einsatzbereiche. So sind beispielsweise *Silber-* und *Lithium-Systeme* vom Materialpreis her über 100-mal teurer als die Zink/Braunstein-Elemente. Deshalb finden für den gewöhnlichen Batterieeinsatz (Taschenrechner, Radios, Taschenlampen, Spielgeräte u. a.) die preiswerten Leclanché-Elemente Verwendung. Die teuren Silber- und Lithium-Systeme sind für spezielle Anwendungsfälle geeignet, z. B. das Zink/Silberoxid-System für Armbanduhren und Hörgeräte. Die *Lithium/Braunstein-Elemente* werden wegen ihrer hohen Energiedichte, ihrer Auslaufsicherheit und des großen Temperaturbereiches (von −40 °C bis +70 °C) in Kameras, Computern und medizinischen Geräten bevorzugt eingesetzt. Einem ganz speziellen Verwendungszweck dient die *Lithium/Thionylchlorid-Batterie* als Stromlieferant für den Herzschrittmacher.

In den letzten Jahrzehnten gewannen Lithium-Batterien immer mehr an Bedeutung. Sie bestechen durch ihre hohe Energiedichte. *Lithium-Batterien* gibt es sowohl als primäre als auch als sekundäre Systeme. Sie können in einem wesentlich weiteren Temperaturbereich eingesetzt werden als Batterien mit wässrigen Elektrolyten (typisch −30 °C bis 100 °C).

Die ersten in Massenproduktion hergestellten Lithium-Batterien waren primäre Rund-

Bezeichnung	Zink/ Braunstein (Leclanché)	Zink/ Braunstein (alkalisch)	Zink/ Luft (alkalisch)	Zink/ Luft (sauer)
positive Elektrode	$MnO_2 + e^- + NH_4^+ \rightarrow MnOOH + NH_3$	$MnO_2 + e^- + H_2O \rightarrow MnOOH + OH^-$	$O_2 + 4e^- + 2H_2O \rightarrow 4OH^-$	$O_2 + e^- + NH_4^+ \rightarrow 2OH^- + NH_3$
negative Elektrode	$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$	$Zn + 2OH^- \rightarrow ZnO + H_2O + 2e^-$	$Zn + 2OH^- \rightarrow ZnO + H_2O + 2e^-$	$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$
Zellenreaktion	$Zn + 2MnO_2 + 2NH_4Cl \rightarrow 2MnOOH + Zn(NH_3)_2Cl_2$	$Zn + 2MnO_2 + H_2O \rightarrow 2MnOOH + ZnO$	$2Zn + O_2 + 2H_2O \rightarrow 2Zn(OH)_2$	$2Zn + O_2 + 4NH_4Cl \rightarrow 2H_2O + 2Zn(NH_3)_2Cl_2$
Energiedichte in Wh/l	120 bis 190	200 bis 300	650 bis 800	200 bis 300
Energiedichte in Wh/kg	25 bis 70	80 bis 120	300 bis 380	130 bis 170
Nennspannung in V	1,5	1,5	1,4	1,45
Strombelastung in mA/cm^2	2	2	2	2
Einsatzgebiete	Konsumtechnik: Taschenlampen, Messgeräte, Spielzeug, Radio, Tonband, Haushalt	Hörgeräte, Nachrichtengeräte (Sender), Rechner, Großuhren, Messgeräte	Langzeitanwendungen, Hörgeräte	Langzeitanwendungen, Fernmeldegeräte, Baustellenbeleuchtung, Weidezaun
	 1 Pluskontaktkappe, Stahl verzinnt 2 Bitumenverguss 3 positive Ableitung (Kohlestift) 4 Abdeckscheibe, polyethylenbeschichtet 5 mehrlagiger Scheidercup mit Kaschierung auf Basis vernetzter Stärke, Ammonium- und Zinkchlorid 6 negative Lösungselektrode (Zinkbecher) 7 positive Elektrodenmasse, Manganoxid, Ruß, Grafit, Elektrolyt 8 Isolierhülle, Kraftpapier mit Polyethylen laminiert 9 Stahlmantel 10 Minuskontaktscheibe, Stahl verzinnt	 1 positive Abschlusskappe 2 Metallmantel 3 Isolierhülse 4 Stahlbecher, vernickelt (positiver Zellenpol) 5 positive Elektrode Ringelektrode 6 negative Lösungselektrode (Zink, Zinkpulver) 7 Separator 8 negative Elektrodenableitung 9 Kunststoffdichtung 10 negativer Zellenpol Bodenkontaktscheibe	  1 Zinkpulveranode 2 Kathode "Luftelektrode"	 1 Kontaktschraube 2 Abdeckscheibe 3 Kohlestift 4 Luftzuführung 5 positive Elektrode mit Gaze umwickelt 6 Elektrolytpaste 7 Zinkbecher 8 Drahtableitung 9 Isolierbecher

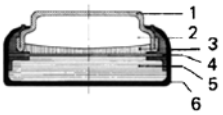
	Zink/ Silberoxid	Cadmium/ Quecksilber	Zink/ Quecksilber	Lithium/ Braunstein	Lithium/ Thionylchlorid
	$Ag_2O + 2e^- + H_2O \rightarrow 2Ag + 2OH^-$	$HgO + 2e^- + H_2O \rightarrow Hg + 2OH^-$	$HgO + 2e^- + H_2O \rightarrow Hg + 2OH^-$	$MnO_2 + e^- + Li^+ \rightarrow MnO_2(Li^+)$	$2SOCl_2 + 4e^- \rightarrow SO_2 + S + 4Cl^-$
	$Zn + 2OH^- \rightarrow ZnO + H_2O + 2e^-$	$Cd + 2OH^- \rightarrow CdO + H_2O + 2e^-$	$Zn + 2OH^- \rightarrow ZnO + H_2O + 2e^-$	$Li \rightarrow Li^+ + e^-$	$Li \rightarrow Li^+ + e^-$
	$Zn + Ag_2O \rightarrow ZnO + 2Ag$	$Cd + HgO \rightarrow Hg + CdO$	$Zn + HgO \rightarrow Hg + ZnO$	$Li + MnO_2 \rightarrow MnO_2(Li^+)$	$4Li + 2SOCl_2 \rightarrow 4LiCl + SO_2 + S$
	350 bis 650	250 bis 350	400 bis 520	500 bis 800	700 bis 900
	70 bis 100	50 bis 70	90 bis 120	300 bis 500	500 bis 700
	1,55	1,03	1,35	1,5 bis 3,8	3,7
	2	2	2	0,5	0,5
	Armbanduhren, Hörgeräte	militärische Anwendungen	Fotos, Blitzgeräte, Hörgeräte, Belichtungsmesser, Uhren	Konsumtechnik: Fotos, Blitzgeräte, Computer, Notstrom, Medizintechnik	Speichersicherung für CMOS-RAM Bojenbeleuchtung Echtzeituhren Heizkostenverteiler
	 1 Deckel, Trimetall Kupfer,Stahl, Nickel 2 Zinkpulveranode 3 Elektrolyt-Vlies 4 Scheider 5 Kathode 6 Zellenbecher, Stahl, nickelplattiert				

Abb. 4.32 Primärelemente (Werkfotos: Sonnenstein und VARIA)

zellen in Wickeltechnik. Sie haben eine sehr hohe Strombelastbarkeit und werden vorwiegend in Fotoapparaten für Blitze und Winder, aber auch in digitalen Kameras eingesetzt.

Primäre Lithium-Rundzellen in Massentechnologie (analog zu Alkali-Mangan-Batterien) haben eine wesentlich geringere Strombelastbarkeit, aber eine höhere Kapazität, d. h. Laufzeit. Dadurch sind sie für Langzeitanwendungen mit geringen Strömen prädestiniert (z. B. Heizkostenzähler).

Die kleinsten Lithium-Batterien sind wiederaufladbare Knopfzellen. Sie werden in Baugrößen mit etwa 5 mm Durchmesser und 1 mm Höhe gefertigt. Ihr Einsatzbereich ist der Er-

		Batterietypen		
		Blei	Nickel/Cadmium	Nickel/Eisen
Eigenschaften	positive Elektrode	PbO_2	NiOOH	NiOOH
	negative Elektrode	Pb	Cd	Fe
	Elektrolyt	$H_2SO_4 + H_2O$	$KOH + H_2O$	
	Reaktion	$2\,PbSO_4 + H_2O$ Laden → ← Entladen $PbO_2 + 2\,H_2SO_4 + Pb$	$Cd(OH)_2 + 2\,Ni(OH)_2$ Laden → ← Entladen $Cd + 2\,NiOOH + H_2O$	$Fe(OH)_2 + 2\,Ni(OH)_2$ Laden → ← Entladen $Fe + 2\,NiOOH + H_2O$
	Kapazität in Ah	1 bis 63	10^{-2} bis 15	bis 100
	Energiedichte in Wh/l	10 bis 100	30 bis 80	30 bis 70
	Energiedichte in Wh/kg	25 bis 35	15 bis 45	10 bis 32
	Zellspannung in V	2	1,20	1,20
	Strombelastung in A	1 bis 20	$2 \cdot 10^{-3}$ bis 24	bis 300
	Lade-/Entladezyklen	500 bis 1 500	bis 8 000	bis 4 000
	Normen	DIN EN 600 DIN EN 60254 DIN EN 60896 DIN EN 61056	DIN EN 61951-1 DIN EN 61959 DIN EN 62133 DIN EN 62259	DIN EN 61951-2 DIN EN 61959 DIN EN 62133
	Einsatzbereiche	Notstrom Starter Antriebe	Konsumelektronik Hörgeräte Kameras Datensicherung	Schienenfahrzeuge Schiffe

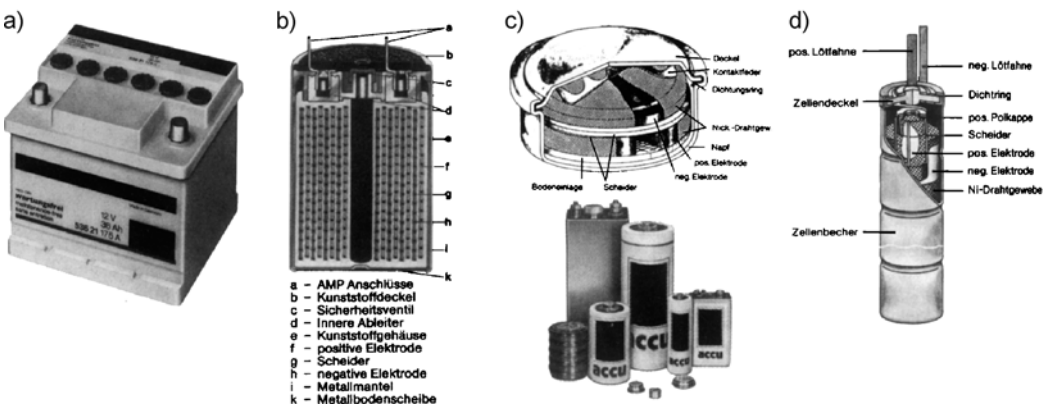


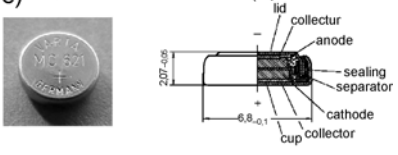
Abb. 4.33 Sekundärelemente (Werkfotos: VARTA, VARTA Microbattery)

halt des Speicherinhalts (Memory Back-up) in tragbaren elektronischen Geräten (z. B. Handy, Minicomputer, PDA).

Für die Energieversorgung mit höheren Strömen wurden *wiederaufladbare Lithium-Batterien* entwickelt, bei denen dünne Folien zu Rollen gewickelt werden. Diese Rundzellen versorgen größere tragbare Geräte mit Energie (z. B. Laptops und Notebooks). Aufgrund der hohen Energiedichte und des niedrigen Innenwiderstands müssen sie durch eine Schutzelektronik geschützt werden. Diese

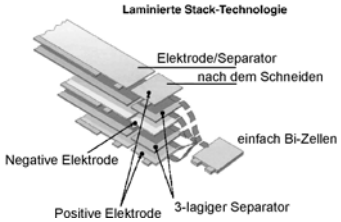
	Lithium
	$LiCoO_2$, $LiMN_2O_4$
	Li, in Grafit
	Organisch
	LiC_6 $2MnO_2$ Laden Entladen (vereinfacht) $6C + LiMn_2O_4$
	0,1 bis 2
	250 bis 400
	150 bis 250
	3 bis 3,7
	bis 5
	bis 1.000
	DIN EN 61960 DIN EN 61233
	Tragbare elektronische Geräte, Handy, Notebook, Personal Digital Assistant (PDA)

e) Wiederaufladbare Li-Ion-Batterie (3V)



Wiederaufladbare Lithium-PoliFlex-Batterie

Laminierte Stack-Technologie



verhindert Tiefentladung, Überladung und Kurzschlüsse.

Besonders interessant sind wiederaufladbare Lithium-Batterien, bei denen die Folien zu Stapeln laminiert werden. Sie verbinden die hohe Belastbarkeit mit einer großen Flexibilität in der Formgebung. So lassen sich optimale Ausnutzungen der Gerätegehäuse und damit maximale Betriebszeiten erzielen.

Auch in Zukunft steht zu erwarten, dass Lithium-Batterien weitere Bereiche der Anwendungen erobern werden. Das bezieht sich besonders auf ultradünne Batterien in intelligenten Chip-Karten und gedruckte Batterien für Etiketten.

Bei den wiederaufladbaren galvanischen Elementen (Sekundärelemente oder Akkumulatoren) spielen in der technischen Anwendung vor allem die bewährten *Blei* (Pb/PbO_2)- und die *Stahlakkumulatoren* in der Kombination Ni/Fe oder Fe/Cd eine wichtige Rolle. In Abb. 4.33 sind sie vergleichend gegenübergestellt. Wie viele Lade- und Entladezyklen ein Akkumulator unbeschadet überstehen kann, ist besonders wichtig für die Lebensdauer der wiederaufladbaren Systeme.

In Abb. 4.33 sind außerdem die Einsatzbereiche der Akkumulatortypen angegeben sowie deren Aufbau gezeigt. Alle Systeme können als offene oder als geschlossene (gasdichte) Ausführungen verwendet werden. So ist beispielsweise außer dem als Starterbatterie bekannten *Blei-Akkumulator* (Abb. 4.33a) auch eine gasdichte Ausführung in zylindrischer Form abgebildet (Abb. 4.33b). Bei ihr befindet sich die galvanische Zelle in einem dichten Polypropylengehäuse mit einer schlagfesten Metallummantelung. Die dünnen Elektroden (PbO_2 und Pb) sind als Wickel in der Zelle untergebracht. Ein saugfähiges Glasfaservlies dient zur elektrischen Potentialtrennung sowie zur Aufnahme und Bindung des Elektrolyten.

Die Blei-Akkumulatoren finden hauptsächlich in drei Bereichen Anwendung, für die Normen vorliegen:

- *Starterbatterien*
  (Batterien zum Anlassen von Verbrennungsmotoren; DIN 72 310, DIN 72 311, DIN 72 331 bis DIN 72 333, DIN EN 50 342,

DIN EN 60 095, DIN IEC 60 095-2, SN EN 50 342, SN EN 60 095),
- *Antriebsbatterien* (DIN 40 540, DIN 43 534 bis DIN 43 539, DIN 43 595, DIN EN 60 254),
- *ortsfeste Bleibatterien* (DIN 40 734 bis DIN 40 744, DIN EN 60 896).

Die herkömmliche Bleibatterie ist kostengünstig und hat ihre Vorteile vor allem bei einer stark wechselnden Stromentnahme, z. B. als Starter- oder Antriebsbatterie. In vielen Anwendungsbereichen tritt sie in Konkurrenz zu den Nickel/Cadmium-Stahlakkumulatoren. Diese zeichnen sich vor allem durch die Möglichkeit eines lageunabhängigen Einbaus, eine lange Lebensdauer und eine hohe Belastbarkeit aus.

In zunehmendem Maß ersetzen die wiederaufladbaren *Nickel/Cadmium-Zellen* die Primärbatterien. Deshalb sind sie, mit diesen austauschbar, baugleich auf dem Markt (Abb. 4.33d). Allerdings sind die volumen- und gewichtsbezogenen Energiedichten bei den Nickel/Cadmium-Zellen bedeutend ungünstiger als bei vergleichbaren Primärbatterien (Abb. 4.32 im Vergleich mit Abb. 4.33), sie sind jedoch wieder aufladbar.

Gasdichte Nickel/Cadmium-Akkumulatoren unterscheiden sich im Elektrodenaufbau. Es gibt die Ausführung mit einer Masse- oder einer Sinterelektrode (Abb. 4.33c und d). Die Sinterelektroden bestehen aus einem hochporösen Gerüst (Pluspol: Nickel-Sauerstoff; Minuspol: Cadmium-Sauerstoff), das vom Elektrolyten (Kalilauge) durchtränkt ist. Die Isolierung der Elektroden erfolgt durch einen Separator aus Kunststoffgewebe. Die Sinterzellen sind besonders für hohe Belastungen geeignet (100facher Nennstrom). Deshalb ist auch ein Schnellladen bei völliger Entladung möglich.

Seit etwa 15 Jahren findet in diesem Bereich ein Verdrängungsprozess statt. Das moderne System *Nickel/Metallhydrid* hat schon in den meisten Bereichen das System Nickel/Cadmium ersetzt. Die Vorteile der Nickel/Metallhydrid-Batterien sind:

- Höhere Kapazität,
- Cadmium-frei, dadurch wesentlich umweltfreundlicher,
- kein „Memory-Effekt".

Dem gegenüber steht die momentan noch etwas geringere Belastbarkeit des Nickel/Metallhydrids. Deswegen konnten bisher Nickel/Cadmium-Batterien im Bereich der niedrigen und mittleren Leistungen (z. B. Rasierer, digitale Kamera, Elektrozahnbürste) ersetzt werden. Allerdings werden die Hochstrom-Anwendungen, wie elektrische Werkzeuge, heute noch weitestgehend mit Nickel/Cadmium-Batterien ausgerüstet.

Ein weiterer Vorteil der wieder aufladbaren Nickel/Cadmium-Zellen besteht in ihren hervorragenden Eigenschaften bei tiefer Temperatur.

Die ebenfalls zu den Stahlakkumulatoren zählenden *Nickel/Eisen-Systeme* sind wegen des Nachteils der schnellen Selbstentladung durch die Nickel/Cadmium-Akkumulatoren ersetzt worden. Ihr Einsatzgebiet liegt noch in Schienenfahrzeugen und Schiffen.

Beispiel

4.2-1 Eine alkalische Zink/Braunstein-Babybatterie (IEC LR 14) hat eine Masse $m = 64{,}5\ \text{g}$ und ein Volumen $V = 26{,}53\ \text{cm}^3$. Berechnet werden soll die Nutzungsdauer bei einem konstanten Stromverbrauch von $I = 30\ \text{mA}$ und einer mittleren Lastspannung von $U = 1{,}2\ \text{V}$.

Lösung

Gemäß Abb. 4.32 gilt für die Energiedichte des Elementes $W = 100\ \text{Wh/kg}$. Daraus errechnet sich die Energie $E = 100\ \text{Wh/kg} \cdot 0{,}0645\ \text{kg} = 6{,}45\ \text{Wh}$. Für die gespeicherte Ladung errechnet sich $Q = 6{,}45\ \text{Wh}/1{,}2\ \text{V} =$

5,4 Ah. Bei einem Stromverbrauch von 0,03 A ergibt dies eine Nutzungsdauer von t_N = 5,4 Ah/0,03 A = 180 h.

4.2.1.4 Brennstoffzellen

Die direkte Gewinnung elektrischer aus chemischer Energie (kalte Verbrennung) findet in Brennstoffzellen statt. Der Umweg über die heiße Verbrennung, bei der zunächst Wärme erzeugt wird, die dann über einen thermodynamischen Kreisprozess in mechanische und schließlich elektrische Energie umgewandelt wird, entfällt. Damit ist auch der Wirkungsgrad einer Brennstoffzelle nicht durch den Carnot'schen Wirkungsgrad (Abschn. 3.3.5.1) begrenzt, sondern kann höhere Werte annehmen. Die klassische Brennstoffzelle „verbrennt" Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser. Dies ist die Umkehrreaktion zur Elektrolyse, bei der unter Zufuhr von elektrischer Energie mithilfe von Platinelektroden Wasser in seine Bestandteile Wasserstoff und Sauerstoff zerlegt wird. Bereits 1839 wurde von Sir William Grove eine derartige Zelle vorgestellt.

Funktionsweise

Im Prinzip besteht eine Brennstoffzelle aus zwei Elektroden, an denen Redoxreaktionen ablaufen, und einem elektronisch isolierenden Elektrolyten, der aber Ionen leitend ist (Abb. 4.34). Bei einer H_2/O_2-Zelle wird an der Anode Wasserstoff oxidiert (Elektronenabgabe):

$$2H_2 \rightarrow 4H^+ + 4e^- \ .$$

Das Redoxpotenzial dieser Reaktion gegenüber der Normalwasserstoffelektrode (NHE, Abb. 4.30) beträgt $\varphi = 0$ V.
Während die gebildeten Protonen durch die Membran zur Kathode gelangen, fließen die Elektronen über den äußeren Stromkreis und können dort an einem Verbraucher mit dem

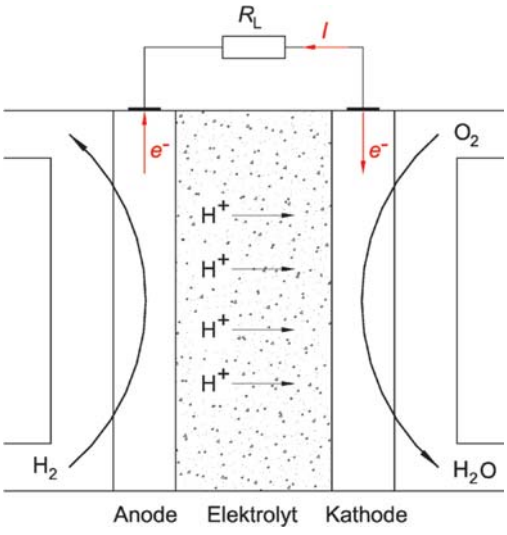


Abb. 4.34 Prinzipieller Aufbau einer H_2/O-Brennstoffzelle mit Protonen leitendem Elektrolyten (PEM FC)

Lastwiderstand R_L elektrische Arbeit verrichten.
An der Kathode findet eine Reduktion (Elektronenaufnahme) des zugeführten Sauerstoffs statt, der dann mit den Protonen zu Wasser reagiert:

$$O_2 + 4e^- \rightarrow 2O^{2-} \quad \text{und}$$
$$2O^{2-} + 4H^+ \rightarrow 2H_2O \ .$$

Das Redoxpotenzial dieser Reaktion liegt bei $\varphi \approx 1{,}23$ V (NHE). Im Leerlauf könnte eine H_2/O_2-Zelle also eine Urspannung von U_0 = 1,23 V liefern.
Die Reaktionen finden an der *Dreiphasengrenze* Gasraum/Elektronenleiter/Ionenleiter statt. Der *Ionenleiter*, durch den die Protonen wandern, besteht meist aus einer perfluorierten und mit Sulfonylgruppen (SO_3^-) modifizierten Kunststofffolie (Nafion^{TM}). Im Prinzip wirkt die Folie wie ein wasserhaltiger Schwamm, der von nanometerbreiten Kanälen durchzogen ist, durch welche die Protonen von einer Seite auf die andere gelangen.

Brennstoffzellen mit Protonen leitenden Membranen werden als *PEMFC* (Proton Exchange Membrane Fuel Cell) bezeichnet. Die Kunststofffolien sind stabil unterhalb ca. 120 °C. Sie werden meist für mobilen Einsatz im Kraftfahrzeug verwendet oder als Batterieersatz im Kleinleistungsbereich.

Es gibt auch die Möglichkeit, anstatt des Protonentransports von der Anode zur Kathode, einen Transport von Sauerstoffionen (O^{2-} aber auch OH^- oder CO_3^{2-}) von der Kathode zur Anode durchzuführen, wo dann ebenfalls Wasser entsteht. Sauerstoff leitende Materialien sind meist keramische Werkstoffe, die erst bei Temperaturen von 600 °C bis 1 000 °C eine ausreichende Ionen-Leitfähigkeit aufweisen. Sie werden vorzugsweise bei stationären Anlagen wie Kraftwerke oder Blockheizkraftwerke eingesetzt. Brennstoffzellen mit keramischen Elektrolyten werden als *SOFC* (Solid Oxide Fuel Cell) bezeichnet.

Die Elektroden setzen sich aus einer Mischung von Nanometer großen Platin- oder Platin-Rutheniumpartikeln und Kohlenstoffpartikeln (Graphit) zusammen. Am katalytisch wirksamen (teuren) Platin laufen die Redoxreaktionen ab. Es ist ebenso wie der (billigere) Kohlenstoff ein Elektronenleiter. Auf diese Elektroden werden jeweils Gasdiffusionselektroden, das sind poröse Elektronen leitende Kohlenstoff-Fasermatten, gepresst, die zur Stromableitung und Gasversorgung dienen. Die Zelle wird von außen durch elektrisch voneinander isolierte abdicht- und verschraubbare Metallrahmen zusammengehalten. Darin sind Ein- und Ableitungen für die Gasversorgung sowie für das überschüssige Wasser und die elektrischen Kontakte angebracht.

Kenngrößen der H_2/O_2-Brennstoffzelle

Eine typische Strom-Spannungs-Kennlinie eines H_2/O_2-Zellenstapels ist in Abb. 4.35 dargestellt. Die Leerlaufspannung von ca. 1 V pro Zelle ist kleiner als die theoretische Zellenspannung von 1,26 V. Mit steigendem Strom nimmt die Spannung ab. Die Kennlinie hängt u. a. ab von der Temperatur, dem Innenwiderstand der Zelle, der Reinheit der Gase, vom Katalysator und der Menge an zugeführtem Wasserstoff.

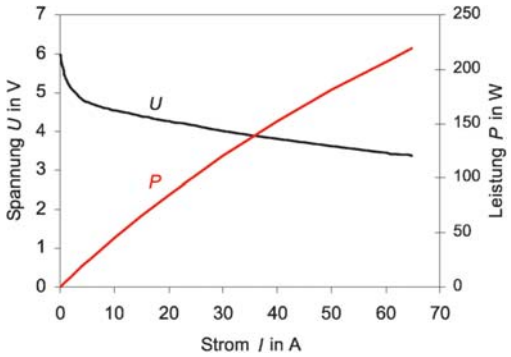


Abb. 4.35 Spannung und Leistung eines H_2/O_2-Brennstoffzellenstapels aus 6 Zellen in Abhängigkeit vom Strom. Nutzungsgrad der Kathode 20%. Zentrum für Solarenergie- und Wasserstoffforschung (ZWS), Ulm

Die Leistung P, die der Zelle entnommen werden kann, ergibt sich als Produkt aus Strom und Spannung und ist ebenfalls in Abb. 4.35 dargestellt. Die Leistungsdichte, die einer H_2/O_2-Zelle entnommen werden kann, ist etwa 1 W/cm^2.

Wirkungsgrad

Bei einem Verbrennungsmotor ist der maximale Wirkungsgrad durch den thermodynamischen Carnot-Wirkungsgrad ((3.76), Abschn. 3.3.5.1) begrenzt (tatsächlich ist der reale Wirkungsgrad deutlich kleiner):

$$\eta_{\mathrm{th,C}} = \frac{|W|}{\Delta H} = 1 - \frac{T_1}{T} \,.$$

$|W|$ ist die abgegebene Nutzarbeit, ΔH die zugeführte Enthalpie (Wärme). Der Prozess verläuft zwischen der hohen Temperatur T und

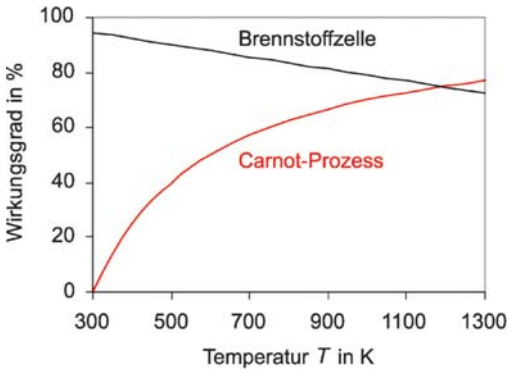


Abb. 4.36 Maximaler Wirkungsgrad einer H_2/O_2-Brennstoffzelle bezogen auf den (unteren) Heizwert in Abhängigkeit von der Temperatur im Vergleich zum thermodynamischen Carnot-Wirkungsgrad (tiefe Temperatur 300 K)

der tiefen Temperatur T_1. In Abb. 4.36 ist der Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses in Abhängigkeit von der hohen Temperatur T dargestellt. Offensichtlich werden hohe Wirkungsgrade nur bei hohen Temperaturen erreicht.
Bei einer Brennstoffzelle reagiert Wasserstoff mit Sauerstoff zu Wasser:
$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$ mit $\Delta G = -237$ kJ/mol und $\Delta H = -286$ kJ/mol bei 25 °C.
Im Idealfall wird die gesamte freie Enthalpie (Gibbs'sches Potenzial, Abschn. 3.3.7) ΔG als elektrische Arbeit nutzbar:

$$-\Delta G = n\,F\,U_0\,. \qquad (4.85)$$

n: Anzahl der Elektronen, die bei der Reaktion fließen (hier: $n = 2$),
F: Faraday-Konstante (4.82),
U_0: Leerlauf-Zellenspannung im thermodynamischen Gleichgewicht (hier: $U_0 = 1{,}23$ V).
Der maximale Wirkungsgrad der idealen Zelle ist damit

$$\eta_{\text{Zelle}} = \frac{-\Delta G}{-\Delta H} = \frac{n\,F\,U_0}{-\Delta H}\,. \qquad (4.86)$$

Für 25 °C ergibt sich mit den oben angegebenen Werten als maximaler Wirkungsgrad $\eta = 83\%$. Bezieht man die nutzbare Energie auf den Heizwert (unterer Heizwert H_u) anstatt auf den Brennwert (oberer Heizwert H_o), dann wird der Wirkungsgrad sogar 94,5%.
Aus der Definition $G = H - TS$ der freien Enthalpie nach (3.100) folgt bei konstanter Temperatur $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ und daraus für den Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Zelle}} = \frac{\Delta H - T\Delta S}{\Delta H} = 1 - \frac{\Delta S}{\Delta H}T\,. \qquad (4.87)$$

Der Wirkungsgrad einer Brennstoffzelle nimmt mit steigender Temperatur ab (Abb. 4.36). Offensichtlich erreicht der Carnot-Prozess den Wirkungsgrad der Brennstoffzelle erst bei sehr hohen Temperaturen.
Der Wirkungsgrad einer Brennstoffzelle kann experimentell bestimmt werden aus dem Verhältnis der gewonnenen elektrischen Energie und dem Energieinhalt (unterer Heizwert H_u, da die Kondensationswärme des entstehenden Wassers in der Regel nicht genutzt wird). Dieser Wert wird auch als *Energiewirkungsgrad* bezeichnet. Der Wirkungsgrad hängt vom Strom ab. Er ist im Teillastbereich bei geringer Strom- und Leistungsentnahme am günstigsten.

Brennstoffzellentypen

Anhand des verwendeten Elektrolyten und seiner erforderlichen Betriebstemperatur werden verschiedene Brennstoffzellen unterschieden. Tabelle 4.7 zeigt eine Zusammenstellung. Im Gegensatz zu den Verbrennungsprozessen, die als Volumenprozesse mit steigender Leistung spezifisch günstiger werden, laufen die Redoxreaktionen der Brennstoffzellen an der Oberfläche von Elektrode und Elektrolyt ab. Mit steigender Leistung nehmen Masse und Volumen der Zellen daher nicht spezifisch ab

Tabelle 4.7 Daten verschiedener Brennstoffzellen. BZ: Brennstoffzelle, FC: Fuel Cell, BHKW: Block-Heizkraftwerk

Zellentyp	Betriebstemperatur in °C	Elektrolyt	Brennstoff	wanderndes Ion	Wirkungsgrad in %	Anwendungen
Polymer-Elektrolyt-Membran-BZ **PEMFC** (Proton Exchange Membrane FC)	60 bis 100	Polymer-Membran (Nafion^{TM})	H_2 CH_3OH	$H^+ \cdot nH_2O$	50 bis 70	Kfz-Antrieb portable Stromversorgung Klein-BHKW
Alkalische BZ **AFC** (Alkaline FC)	50 bis 120	KOH	H_2 CH_3OH	OH^-	60 bis 70	Raumfahrt, portable Stromversorgung
Phosphorsaure BZ **PAFC** (Phosphoric Acid FC)	190 bis 210	H_3PO_4	CH_4 reformiert H_2	$H^+ \cdot nH_2O$	35 bis 555	BHKW
Schmelzkarbonat-BZ **MCFC** (Molten Carbonate FC)	600 bis 700	$Li_{2-x}K_xCO_3$ Schmelze	CH_4 reformiert, CO H_2	CO_3^{2-}	55 bis 65	Kraftwerke BHKW
Oxidkeramische BZ **SOFC** (Solid Oxide FC)	800 bis 1 050	Y_2O_3/ZrO_2 Keramik	CH_4 reformiert, CO, H_2, CH_4	O_2^-	60 bis 65	Kraftwerke BHKW

wie bei Motoren und Turbinen. Dafür werden hohe Wirkungsgrade bereits bei kleinen Zellgrößen erzielt.



Abb. 4.37 Stack aus sechs Brennstoffzellen. Zentrum für Solarenergie- und Wasserstoffforschung (ZSW), Ulm

Die Fläche einer Brennstoffzelle kann aus technischen Gründen nicht beliebig groß gemacht werden. Für die Entnahme größerer Leistungen werden daher mehrere Einzelzellen zu Stapeln (Stacks) gekoppelt (Abb. 4.37). Die typischen Leistungen für einen PEM-Brennstoffzellenstapel reichen von wenigen Watt bis zu 300 kW.

4.2.1.5 Elektrokinetische Vorgänge

Bewegt sich aufgrund entgegengesetzter Ladungsverteilung die feste Phase relativ zur flüssigen, so treten elektrokinetische Effekte auf, von denen zwei von besonderer technischer Bedeutung sind:

- *Elektrophorese* (Bewegung kleinster Teilchen in einer Flüssigkeit aufgrund eines elektrischen Feldes) und
- *Elektroosmose* (Bewegung einer stromführenden Flüssigkeit durch einen porösen Festkörper).

Im Gegensatz zur Elektrolyse findet eine Ladungsträgerbewegung nur in einer Richtung statt (unipolare Wanderung).

Bei der Elektrophorese (gr. phor, tragen) werden Teilchen kolloidaler Größenordnung (10^{-6} mm bis 10^{-4} mm) dispergiert, die sich gegenüber dem Dispersionsmittel aufladen. In einem elektrischen Feld bewegen sich die Teilchen zur gegenpoligen Elektrode. Abbildung 4.38 zeigt, wie sich durch Elektrophorese feinste geladene Kieselgurteilchen (10^{-5} mm Durchmesser) auf einem metallischen Filtersieb niedergeschlagen haben. Solche kieselgurbeschichteten Metallsiebe dienen z. B. in Brauereien zur Bierfiltration. Im Vergleich zum mechanischen Anströmen von Kieselgur ist die elektrophoretisch aufgebrachte Schicht wesentlich gleichmäßiger. Ist die Filterschicht verbraucht, so kann durch Umpolen des elektrischen Feldes die verschmutzte Kieselgurschicht vom Metallsieb entfernt werden.

Unterschiedliche Teilchen weisen verschiedene Wanderungsgeschwindigkeiten auf, sodass eine elektrophoretische Trennung von Substanzen möglich ist. Dies wird beispielsweise in der Biomedizin zur Analyse von Proteinen ausgenutzt.

Das *elektrophoretische Tauchlackieren* (*ETL*) ist ein in der Automobilindustrie weit verbreitetes Verfahren zur Grund- und Einschichtlackierung von Karossen und Fahrzeugteilen. Man unterscheidet zwischen *anodisch* und *kathodisch* abgeschiedenen Lackmaterialien (*ATL* und *KTL*). Das *KTL-Verfahren* hat sich in den letzten Jahren fast überall durchgesetzt. Als wesentliche Vorteile seien genannt:

- *Vollständiger Umgriff*
  Beim Beschichten von Automobilkarossen werden zuerst die Außenhautteile beschichtet. Diese isolieren sich bei höherer Schichtdicke von selbst, sodass die elektrische Stromdichte von außen nach innen in die Hohlräume wandert.
- *Unterwanderungsbeständigkeit*
  Die Unterwanderungsbeständigkeit der KTL-Materialien ist im Vergleich zu den ATL-Lacken um den Faktor drei besser.
- *Gute Haftung*
  KTL-Lackschichten sind sehr gleichmäßig und haften mechanisch sehr fest auf der Phosphatierung.

Abbildung 4.39 zeigt eine Kataphoreseanlage. In dem Tauchbecken befinden sich in Wasser gelöste, positiv geladene Lackteilchen. Wird das metallische Werkstück negativ und der Tauchbeckenrand bzw. geeignete Anoden positiv geladen, so wandern die Lackkolloide

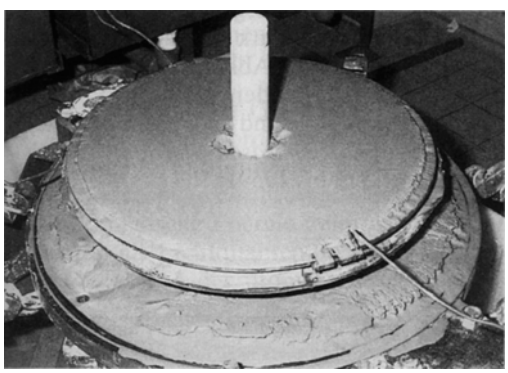


Abb. 4.38 Elektrophoretisch abgeschiedene Kieselgur

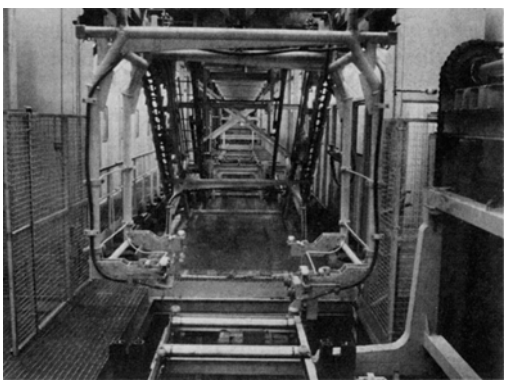


Abb. 4.39 Kataphorese-Anlage. Werkfoto: Dürr

zum Werkstück. Normalerweise beträgt die Schichtdicke bei einer Spannung von 80 V bis 350 V und einer Beschichtungsdauer von 2 bis 43 Minuten etwa 10 µm bis 35 µm.

Bei der *Elektroosmose* läuft der Wanderungsprozess umgekehrt ab. Ein poröser Körper wird beispielsweise von zwei entgegengesetzt geladenen Wassersäulen umgeben, wie es Abb. 4.40a zeigt. An den Porenwänden bilden sich entgegengesetzte Ladungen. So entstehen z. B. positive Ionen, die auf ihrer Wanderung zum negativen Pol noch hydratisierte Wasserdipole mitschleppen, etwa gemäß Abb. 4.40b. Auf diese Weise steigt der Wasserspiegel auf der rechten Seite und sinkt auf der linken. Mit Hilfe elektroosmotischer Wasserbewegungen können u. a. Mauerwerke oder Schlamm-Massen entwässert werden.

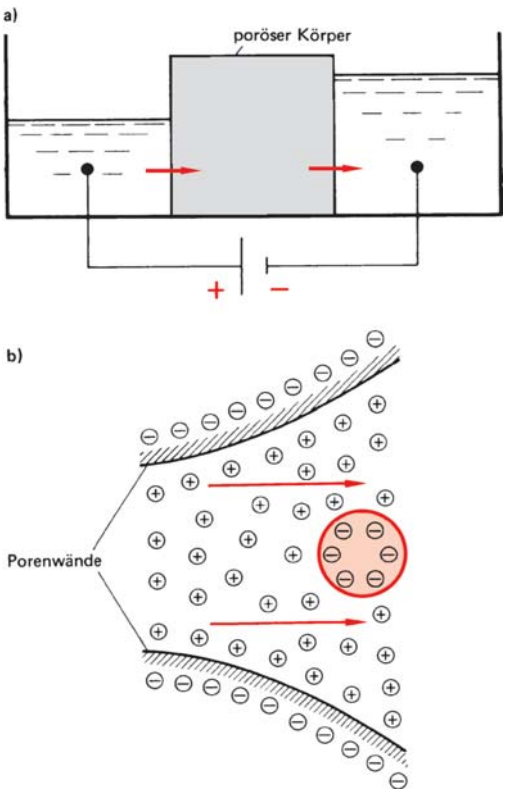


Abb. 4.40 Elektroosmose, schematisch

4.2.2 Ladungstransport im Vakuum und in Gasen

4.2.2.1 Ladungstransport im Vakuum

Für einen Ladungstransport im Vakuum (bei einem Druck von etwa 10^{-2} Pa bis 10^{-4} Pa) müssen freie Ladungsträger erzeugt werden. Dieser Vorgang wird *Ladungsträgerinjektion* oder *Emission* genannt. Von großer praktischer Bedeutung ist die *Elektronenemission*. Elektronen sind im Metallverbund zwar leicht beweglich, doch werden sie an der Oberfläche wegen der Anziehungskräfte der zurückbleibenden Atomrümpfe, die die *Austrittsarbeit* W_A erfordern, am Verlassen gehindert. Abbildung 4.41 zeigt, dass hierfür die Zufuhr von kinetischer Energie in Form von Wärme (*thermische Emission*), Licht (*Fotoemission*) und elektrischer Energie (*Feldemission*) nötig ist oder dass kinetische Energie durch Stoßprozesse bereits erzeugter Ladungsträger (*Sekundärelektronenemission*) zugeführt werden muss.

Thermische Emission (Glühemission)

Durch Erwärmen der Glühkathode nimmt die mittlere kinetische Energie der Elektronen an den Elektroden so stark zu, dass Elektronen austreten können. Die Abhängigkeit der Stromdichte j der austretenden Elektronen von der Austrittsarbeit W_A und der Temperatur T beschreibt die *Richardson-Gleichung* (O. Richardson, 1879 bis 1959):

$$j = A\,T^2\,\mathrm{e}^{-\frac{W_A}{kT}}\,. \qquad (4.88)$$

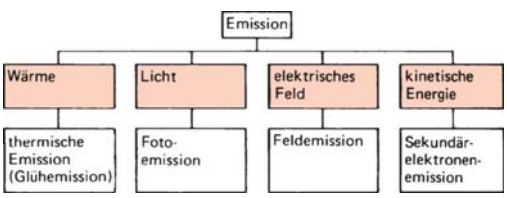


Abb. 4.41 Arten der Elektronenemission

Die Richardson-Konstante A ist materialabhängig und liegt zwischen 10^6 A/(m^2 K^2) (Wolfram) und 10^2 A/(m^2 K^2) (Metalloxide). Die ebenfalls werkstoffabhängige Austrittsarbeit W_A liegt zwischen 1 eV bei Metalloxiden und 5 eV bei Nickel (zum Begriff eV, Elektronenvolt, Abschn. 4.3.5.1, (4.108)).

4.2.2.1.1 Fotoemission

Werden Lichtquanten mit der Energie $W = hf$ (Abschn. 6.5.1.1) auf eine Metalloberfläche gestrahlt, dann lösen sich Elektronen aus dem Metallverbund, wenn die Energie der Photonen größer als die Austrittsarbeit W_A ist. Diese Elektronen werden als Fotostrom außerhalb des Metalls registriert. Der Fotostrom ist ein Maß für die Lichtintensität. Als Kathode wird eine mit Cadmium, Cäsium oder Kalium verspiegelte evakuierte Glasröhre verwendet, die bei Lichteinfall Elektronen zur ringförmigen Anode aussendet. Die kinetische Energie W_{kin} der freigesetzten Elektronen berechnet sich dann zu

$$W_{kin} = hf - W_A \,. \tag{4.89}$$

Innerhalb bestimmter Grenzen ist in diesen *Fotozellen* der gemessene Fotostrom proportional zur Intensität des Lichtes. Die Fotozellen ersetzt man in zunehmendem Maß durch Halbleiter-Fotodetektoren (Abschn. 9.4).

Feldemission

Zur Überwindung der Austrittsarbeit W_A bedarf es elektrischer Feldstärken von etwa 10^9 V/m (Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke E und Spannung U, Abschn. 4.3.4, (4.96)). Um diese hohen Feldstärken für verhältnismäßig geringe Spannungen (etwa 100 V) zu erzeugen, wird die Kathode zu einer feinen Spitze geformt (Radius der Spitze etwa 10^{-7} m).

Als Anode dient eine Glaskugel, die um die Kathodenspitze angeordnet ist und mit einer Leuchtschicht (ZnS) überzogen ist. Die von der Kathodenspitze emittierten Elektronen geben ihre kinetische Energie beim Aufprall auf die Anode als Lichtquanten ab. Dadurch entsteht ein Abbild der atomaren Struktur des Kathodenmaterials auf dem Leuchtschirm (*Feldelektronenmikroskop*, Abb. 4.42).

Sekundärelektronenemission

Die kinetische Energie der bereits freigesetzten Elektronen kann wiederum die Austrittsarbeit W_A überwinden und nochmals Elektronen (Sekundärelektronen) freisetzen. Der *Sekundäremissionsfaktor* gibt an, wie viele Sekundärelektronen im Verhältnis zu den Primärelektronen emittiert werden. Er liegt bei reinen Metallen bei 1, für Halbleiter zwischen 2 und 15. Durch geeignet angeordnete Elektroden (*Dynoden*), zwischen denen Beschleunigungsspannungen liegen, können sehr kleine Ströme rauscharm bis auf das 10^{10}-fache verstärkt werden. Als Foto-Multiplier wird er zur Messung sehr kleiner Lichtintensitäten (sogar einzelner Lichtquanten) eingesetzt.

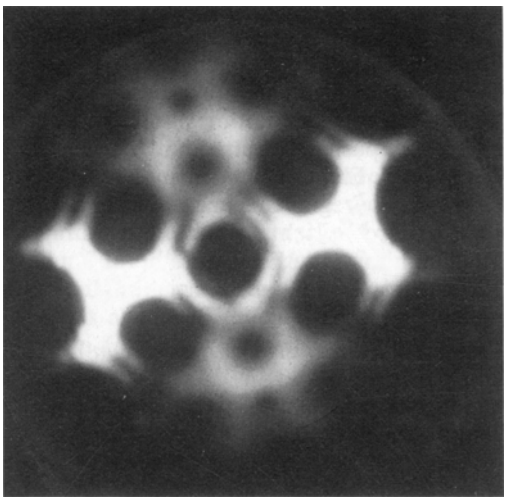


Abb. 4.42 Monoatomarer Thorium-Film auf Wolfram

4.2.2.2 Ladungstransport in Gasen

Gase sind gewöhnlich Nichtleiter. Um sie elektrisch leitend zu machen, müssen entweder Ladungsträger eingebracht (Ladungsträgerinjektion) oder die Gase ionisiert werden. Geschieht die Ionisation des Gases durch äußere Einwirkung, wie z. B. durch Bestrahlung mit UV-Licht, durch radioaktive Strahlung oder Röntgenstrahlung oder durch Wärmezufuhr, so findet eine *unselbstständige Gasentladung* statt. Bei einer *selbstständigen Gasentladung* werden die Gase durch die Bewegung ihrer eigenen Moleküle selbst ionisiert, z. B. durch ihre kinetische Energie in starken elektrischen Feldern.

Unselbständige Gasentladung

Befindet sich ein ionisiertes Gas zwischen zwei Elektroden der Spannung U, dann ist der in Abb. 4.43 typische Strom-Spannungsverlauf zu beobachten. Im Bereich I gilt das Ohm'sche Gesetz. Die Gasionen stoßen auf dem Weg zur gegenpoligen Elektrode auf den Widerstand anderer Gasatome. Ferner können sie durch Anlagern an Ionen entgegengesetzter Ladung wieder zu neutralen Gasatomen werden (*Rekombination*). Dieser Bereich wird daher *Rekombinationsbereich* genannt. Steigt die Spannung zwischen den Elektroden weiter, dann gelangen die Gasionen so schnell zur entsprechenden Elektrode, dass keine Rekombinationsprozesse mehr ablaufen können. Es fließen also alle Gasionen ab. Der jetzt messbare Strom hat deshalb den größtmöglichen Wert, er heißt Sättigungsstrom. Der zugehörige Spannungsbereich ist der *Sättigungsbereich* (Bereich II). Werden die Ionen durch zunehmende Spannung so stark beschleunigt, dass ihre kinetische Energie die neutralen Gasatome zu ionisieren vermag, dann werden Sekundärelektronen erzeugt (Bereich III) und es läuft eine selbständige Gasentladung ab.

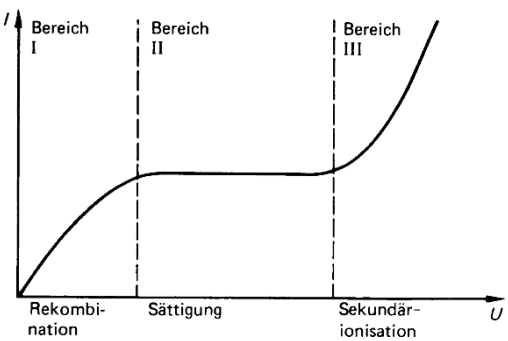


Abb. 4.43 Strom-Spannungsverlauf bei einer unselbständigen Gasentladung

Selbständige Gasentladung

Bei einer selbständigen Gasentladung findet ein Ladungsfluss ohne äußere Einwirkung statt. Die Gasatome vermögen durch ihre eigene kinetische Energie andere durch Stoß zu ionisieren (*Stoßionisation*). Die dazu erforderliche kinetische Energie stammt aus der Energie des elektrischen Feldes: $W_{el} = QU = eEl$ (die Ladung Q besteht im Allgemeinen aus der Elementarladung e; l ist die mittlere freie Weglänge). Da die mittlere freie Weglänge umso größer ist, je weniger Gasatome vorhanden sind (je geringer der Gasdruck p ist), gilt

$$W \sim \frac{eE}{p} .$$

Daraus lässt sich der Ionisierungskoeffizient s ermitteln. Er gibt an, wie viel Ionen (dN) pro Wegstrecke (dx) zusätzlich erzeugt werden und ist eine Funktion von E/p, sodass gilt

$$s = f(E/p) .$$

Dies bedeutet, dass der Ionisierungskoeffizient eine Funktion des Quotienten aus elektrischer Feldstärke und Gasdruck ist. Jedes Gas kann ab einer bestimmten Feldstärke bzw. Spannung (bezogen auf den gleichen Druck) ionisiert werden. Die Ionisierung läuft lawinenartig ab; jedes Ion ionisiert seinerseits ein anderes, das wiederum neue zu ionisieren vermag.

Mit der lawinenartigen Zunahme der Ionen – entsprechend einer Kettenreaktion – nimmt der innere Widerstand zwischen den Elektroden ab. Um den Strom zu begrenzen, muss man deshalb Vorwiderstände einschalten. Hierzu dient vielfach der induktive Wechselstromwiderstand einer Spule (Abschn. 4.5.2.2).

Während die meisten unselbständigen Gasentladungen ohne Leuchterscheinungen ablaufen, spielen die Lichtausstrahlungen der selbständigen Gasentladungen in der Technik eine wichtige Rolle. Sie sind sehr stark von der Gasart, dem Gasdruck, der Temperatur und der Elektrodengeometrie abhängig.

Glimmentladung

Bei einer Glimmentladung in einem zylindrischen Rohr erkennt man eine Reihe von hellen und dunklen Zonen. Abbildung 4.44 zeigt schematisch die Leuchtbereiche zwischen Kathode und Anode (a), den Verlauf der Raumladung ϱ (b), der Feldstärke E (c) und der Spannung U (d). Zwischen der Kathode und dem *Kathodenlicht* liegt ein kleiner dunkler Bereich, der *Aston'sche Dunkelraum*. In diesem Bereich ist die Feldstärke E am größten. Durch den Aufprall positiver Ionen auf die Kathode werden Elektronen freigesetzt (negative Raumladung), die zunehmend Feldenergie aufnehmen. Im Bereich des *Hittorf'schen Dunkelraums* werden durch die schnellen Elektronen viele Gasatome ionisiert, sodass eine starke positive Raumladung entsteht. Die Energie der Elektronen wird im *kathodischen Glimmlicht* (beginnend mit einem Glimmsaum) durch Lichtaussendung verbraucht. Deshalb nimmt die Feldstärke bis auf null ab und es entsteht eine große negative Ladungsdichte.

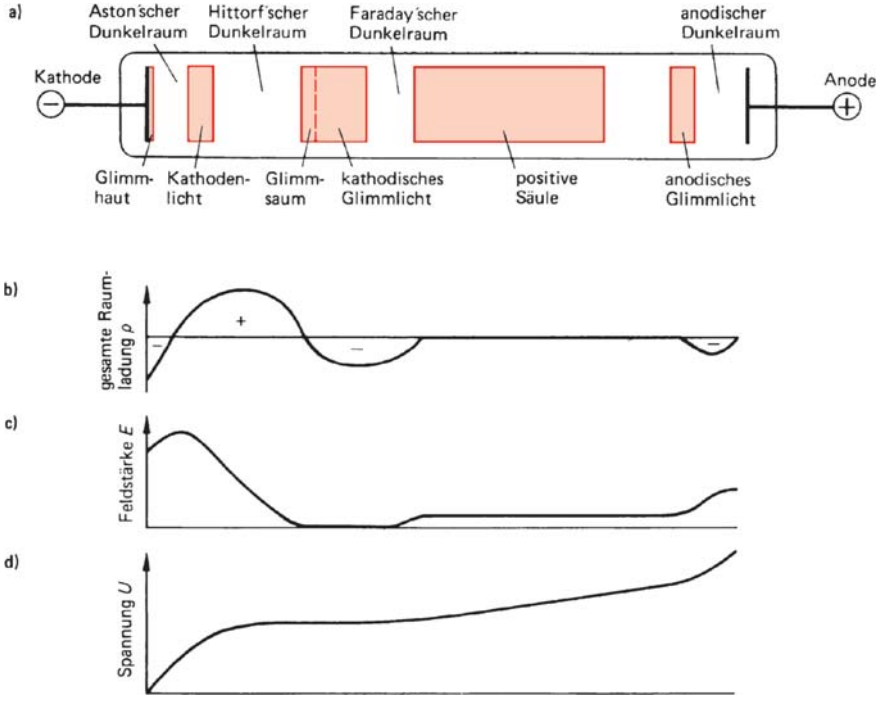


Abb. 4.44 Vorgänge bei einer Glimmentladung

Nach dem *Faraday'schen Dunkelraum* leuchtet eine *positive Säule*. In diesem Gebiet sind gleich viel (negative) Elektronen wie positive Ionen vorhanden (*quasineutrales Plasma*). Hier diffundieren fortwährend Elektronen und Ionen an die Wand und rekombinieren dort unter Lichtausstrahlung. Die Energie zur Erzeugung neuer Ladungsträger wird dem konstanten elektrischen Feld entnommen. Die positive Säule ist der längste leuchtende Teil einer Glimmentladung. Zwischen ihr und der Anode kann ein kleiner glimmender Bereich liegen (*anodisches Glimmlicht*). Unmittelbar vor der Anode ist ein Feldstärkeanstieg festzustellen, der von der negativen Raumladung der schnell abfließenden Elektronen herrührt.

Bogen- und Funkenentladung

Fließen durch eine Gasentladungsröhre große Ströme, dann werden die Elektroden sehr heiß. Die glühende Kathode sendet sehr viele Elektronen aus, sodass die Leuchtstärke in der positiven Säule entsprechend groß wird. Dies ist eine *Bogenentladung*. Sie kann sowohl bei kleinem Druck (*Vakuumbogenentladung*) als auch bei hohem Druck (10^6 Pa bis 10^7 Pa in *Hochdrucklampen*) stattfinden. Rasch gelöschte und deshalb nur kurz aufleuchtende Bogenentladungen werden *Funkenentladungen* genannt.

Kathoden- und Kanalstrahlen

Wird in einer Gasentladungsröhre der Druck auf 10 Pa bis 1 Pa vermindert, so ist die Wahrscheinlichkeit für Stoßprozesse gering. Aus diesem Grunde können die Elektronen aus der Kathode das Feld nahezu ungestört und mit unverminderter Geschwindigkeit geradlinig durchlaufen. Diese Elektronenstrahlen werden *Kathodenstrahlen* genannt. Mit abnehmendem Druck werden zunächst die Dunkelräume größer und die positive Säule verschwindet, bis eine Glimmerscheinung aus dem Hittorf'schen Dunkelraum übrig bleibt. Bei weiterer Druckabnahme hört die Glimmerscheinung auf und die Wände beginnen zu fluoreszieren.

Wird statt einer massiven Kathode eine Lochplatte verwendet, dann setzt sich die Leuchterscheinung hinter der Kathode fort. Die durch das Kathodenloch hindurchtretenden positiven Ionen werden *Kanalstrahlen* genannt. Da sie sich im feldfreien Raum bewegen, bleibt ihre Geschwindigkeit konstant.

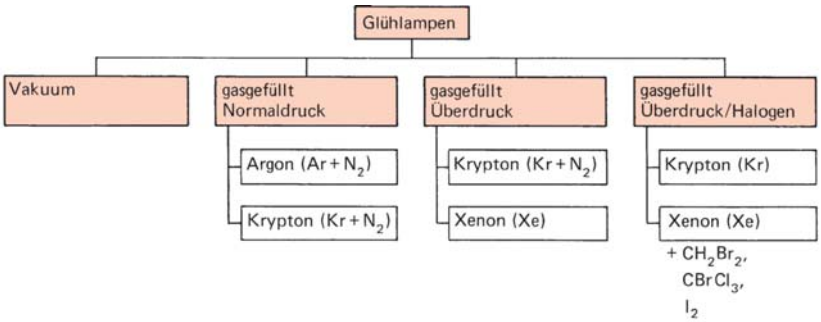
Die wichtigste Anwendung der Strahlung glühender Körper ist die *Glühlampe* zur Beleuchtung von Objekten und Räumen. Abbildung 4.45 zeigt eine Übersicht der unterschiedlichen Arten und Anwendungsbereiche. Eine Anwendung der Entladungserscheinungen ist die *Entladungslampe*. Die gebräuchlichsten Arten sind in Abb. 4.46 zusammengestellt. *Festkörperlichtquellen* stellen eine weitere Anwendung von Strahlung aus anorganischen Kristallen und organischen Polymeren dar. Die beiden wichtigsten Repräsentanten sind die Leuchtdiode (LED) und organische Leuchtdiode (OLED, Abb. 4.46 rechts).

Glühlampen zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Kontinuierliches Spektrum (Temperaturstrahler);
- Über alle Spannungsbereiche ohne Vorschaltgeräte betreibbar
- Sofort betriebsbereit (d. h. kein Zündvorgang und keine Einbrennzeit)

Die wichtigsten Vorzüge von Entladungslampen sind:

- Lichtausbeute ist größer als bei Glühlampen
- Lebensdauer ist höher als bei Glühlampen
- Farbspektrum ist durch Zusätze und Leuchtstoffe beeinflussbar



Leistung in W	bis 25	5 bis 2 000	10 bis 60	2,4 bis 10 000
Lichtausbeute in lm/W	bis 10	bis 25	bis 20	bis 40
Leuchtkörper-temperatur in K	2 000 bis 2 400	2 200 bis 3 200	2 500 bis 3 000	2 900 bis 3 400
Normen	DIN 49846 DIN 49851	DIN 49810 DIN 49812 IEC-Publ.64 DIN 49818	DIN EN 14744	DIN EN 60357 DIN 72601
Anwendungsbereiche	Allgemeinbeleuchtung Anzeigelampen	Allgemeinbeleuchtung Kfz-Lampen Photolampen	Eisenbahn- und Verkehrssignallampen (Niedervolt)	Allgemeinbeleuchtung Scheinwerfer Kfz, Foto, Studio, Bühne



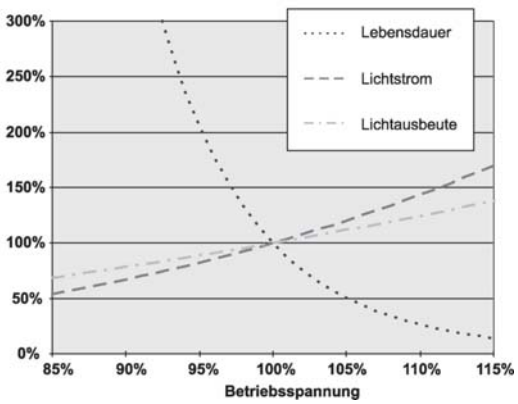
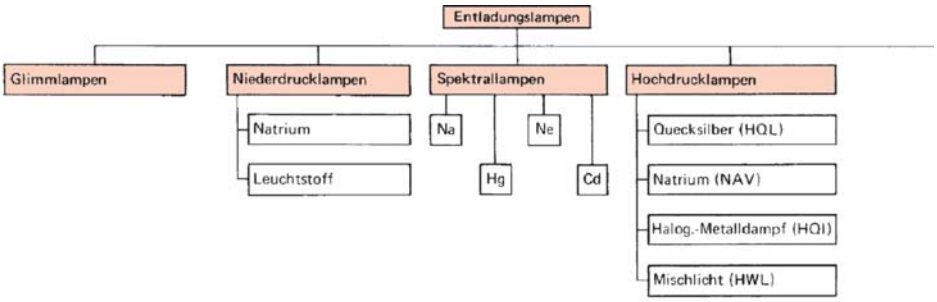


Abb. 4.45 Arten der Glühlampen

Leuchtdioden besitzen folgende Merkmale:

- Schmalbandiges Emissionsspektrum (farbige Lichtemission je nach Halbleitermaterial)
- Hohe Lebensdauer bis zu 100 000 h
- Geringe Größe
- Schnelle Ein-Aus-Schaltvorgänge.

Abbildung 4.45 zeigt eine Einteilung der Glühlampen, ihre besonderen Eigenschaften,



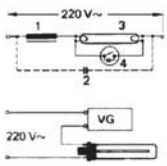
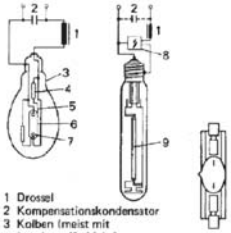
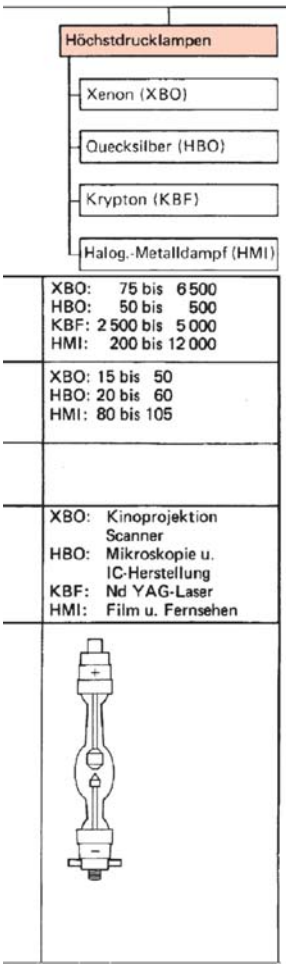
Leistung in W	0,25 bis 2	Na: 18 bis 200 Leuchtstoff: 4 bis 140		HQL: 50 bis 1 000 NAV: 50 bis 1 000 HQI: 70 bis 3 500 HWL: 160 bis 1 000
Lichtausbeute in lm/W		Na-L.: 100 bis 183 L-L.: 39 bis 96		HQL: 32 bis 60 NAV: 70 bis 130 HQI: 55 bis 95 HWL: 20 bis 35
Normen	DIN 49850	DIN IEC 60081, 49866 49867 IEC-Publ. 81, 192		DIN 49861 IEC-Publ. 188
Anwendungs-bereiche	Signalanzeige	Na-L.: Außenbeleuchtung L-L.: Innen- und Außen-beleuchtung	Optik, Strahlungsphysik, Spektroskopie, Medizin	Außenbeleuchtung mit hoher Lichtausbeute (Stadionbeleuchtung, Schaufenster)
		 1 Drossel 2 Kompensations-kondensator 3 Lampe 4 Starter		

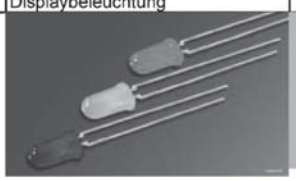
Abb. 4.46 Entladungs- und Festkörperlampen (Werksfoto: OSRAM)

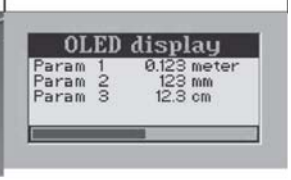
ihre Normvorschriften und typische Anwendungsbereiche sowie einige typische Bauarten. Das zugehörige Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen Lichtstrom, Lichtausbeute und Lebensdauer in Abhängigkeit von der Spannung. Im gemeinsamen Schnittpunkt aller Kurven ist 100% Lebensdauer, Lichtstrom und Lichtausbeute bei 100% Spannung.

Die stark nichtlinearen Abhängigkeiten werden zum Beispiel bei Betrachtung einer 12 V-Halogenlampe besonders deutlich. Betreibt man eine 12 V-Lampe anstatt bei der Nennspannung von 12,0 V bei 12,6 V so resultiert aus dieser Spannungserhöhung um 5% eine Lebensdauerreduzierung um 50%. Die Halogenlampe fällt also bereits nach der Hälfte der Nennlebensdauer aus. Dagegen steigert diese 5%ige Spannungserhöhung den Lichtstrom um 20% und die Lichtausbeute verbessert sich um 12%. Bei einer geringfügigen Spannungsabsenkung kann entsprechend deutlich die Lebensdauer der Halogenlampe unter Absenkung des Lichtstroms und der Lichtausbeute erhöht werden.



	Festkörperlampen	
	Halbleiter (LED)	Organische Polymere (OLED)
Medium	III/V-Halbleiter, z.B. Rot: InGaAlP Amber: InGaAlP Gelb: InGaAlP Grün: InGaN Blau: InGaN Weiß: InGaN + Leuchtstoff	Organische Polymere, z.B. Rot: Polythiophen Grün: Polyphenylenvinylen Blau: Polyfluoren
Lichtausbeute in lm/W	Rot: bis 50 Amber: bis 62 Gelb: bis 32 Grün: bis 37 Blau: bis 10 Weiß: bis 30	
Anwendungsbeispiele	Anzeigelampen KFZ-Beleuchtung Displaybeleuchtung	Aktives Display







Je nach Füllgas und Fülldruck können Glühlampen eingeteilt werden in *Vakuumlampen, gasgefüllte Lampen mit Normal- und Überdruck* sowie in *gasgefüllte Überdrucklampen mit Halogenzusätzen* (Halogenlampen). Bei Lampen mit geringer Leistungsaufnahme (z. B. Allgebrauchsglühlampen bis 15 W) sind Vakuumlampen infolge geringerer Verluste durch fehlende Wärmeableitung über das Füllgas im Vergleich zu gasgefüllten vorteilhafter. Bei höheren Leistungen kann dieser Wärmeverlust durch höhere Temperaturbelastung des Leuchtkörpers ausgeglichen, die damit verbundene Erhöhung der Verdampfungsgeschwindigkeit des Wolframs (Leuchtkörper) durch Größe und Anzahl (Fülldruck) der Gasmoleküle (inaktive Edelgase wie Argon (Ar), Xenon (Xe) oder Krypton (Kr)) reduziert und somit der Schwärzungsprozess durch Wolframablagerungen an den kalten Lampenteilen (Kolben) verzögert werden.

Halogenzusätze zum Füllgas in Form halogenierter Kohlenwasserstoffe oder Jod (I_2) bewirken einen Kreisprozess zwischen den

vom Leuchtkörper abdampfenden Wolframteilchen und dem Halogen. Bei Temperaturen um 250 °C (also in der Nähe der kälteren Kolbenwand) verbinden sich diese Wolframteilchen mit dem Halogen zu Wolframhalogeniden. Gelangen diese infolge von Konvektion wieder in Temperaturbereiche um 1 500 °C (in Leuchtkörpernähe), so zerfallen diese Verbindungen wieder in Wolfram und Halogen. Damit stehen die freigewordenen Halogenbestandteile erneut zum Kreisprozess zur Verfügung. Durch diesen Kreisprozess wird bewirkt, dass sich die abdampfenden Wolframteilchen nicht auf der kälteren Kolbenwandung niederschlagen, sodass eine Schwärzung des Lampenkolbens während der Lebensdauer weitgehend unterbunden wird.

Halogenglühlampen können heute in Leistungsstufen zwischen 1 W und 20 000 W hergestellt werden. Halogenzusätze in Verbindung mit der Überdrucktechnik ermöglichen in Relation zur herkömmlichen Glühlampentechnik auch bei Lampen mit hoher Leistung kleine Bauabmessungen sowie höhere Temperaturbelastungen des Leuchtkörpers oder alternativ hierzu längere Lebensdauern. Typische Anwendungsgebiete sind Fahrzeugscheinwerfer, Allgemeinbeleuchtung (z. B. Flutlichtanlagen, Effektbeleuchtung) und Foto-, Studio- und Bühnenbeleuchtung.

In Abb. 4.46 sind die Entladungslampen in Glimm-, Niederdruck-, Spektral-, Hochdruck- und Höchstdrucklampen eingeteilt, die entsprechenden Kenngrößen zusammengestellt, die wichtigsten Normen erwähnt und hauptsächlichen Anwendungsfelder aufgezeigt sowie einige Lampentypen exemplarisch dargestellt. Bei den Entladungslampen werden beim Stromdurchgang Gase oder Metalldämpfe (z. B. Quecksilber oder Natrium) angeregt. Die dabei aufgenommene kinetische Energie wird als Strahlung wieder abgegeben. Je nach Gas, Druck, Leuchtstoffen und anderen Zusätzen in der Lampe können Lichtfarbe, Lichtstrom und Strahlenintensität beeinflusst und gezielt eingestellt werden.

Entladungslampen benötigen im Gegensatz zu Glühlampen eine *Zündhilfe* (z. B. Glimmstarter, Zündelektrode oder Zündgerät) und strombegrenzende Vorschaltgeräte (VG), z. B. Drosselspulen, Streufeldtransformatoren oder elektronische Vorschaltgeräte (EVG). Infolge der geringen Leistungsaufnahme bei gleicher Lichtemission (z. B. 9 W-Leuchtstofflampe statt 60 W-Glühlampe oder in Form von Energiesparlampen) sowie wegen der wesentlich höheren Lebensdauer haben Entladungslampen in vielen lichttechnischen Anwendungen die Glühlampen ersetzt.

Neben der Lichterzeugung durch Glüh- und Entladungslampen werden immer häufiger Festkörperlampen in zahlreichen Anwendungen eingesetzt (Abb. 4.50). Im Fall der *Leuchtdiode* (*LED*) wird ein Festkörperkristall aus verschiedenen Halbleitermaterialschichten durch einen Stromfluss zum Leuchten angeregt (Aschn. 9.4.1.1, Abb. 9.72). Je nach Art des verwendeten Materials strahlt die Leuchtdiode in unterschiedlichen Farben mit schmalbandigem Spektrum ($\Delta\lambda \approx 15$ nm bis 30 nm). Als Halbleitermaterial kommen die Verbindungen InGaAlP (Rot, Amber, Gelb) und InGaN (Grün, Blau) zum Einsatz. Das Licht einer weißen LED wird aus der Farbmischung einer blau leuchtenden LED und einem gelb emittierenden Leuchtstoff erzeugt. Dieser Leuchtstoff befindet sich unmittelbar auf der LED und wird durch das blaue Licht der LED zur Luminiszenz angeregt.

Wesentliche Vorteile der LED im Vergleich zur Glühlampe sind die kompakte Bauform und die hohe Lebensdauer. So verdrängte bereits im Automobilbereich zur Beleuchtung des Armaturenbretts die LED weitgehend die Glühlampe. Im Bereich der Signal- und Anzeigenanwendung liegt die Stärke der LED in

der hohen Effizienz der farbigen Lichterzeugung. Bei der Lichterzeugung von farbigen Licht mittels Glühlampen müssen verlustbehaftete Farbfilter eingesetzt werden, die die Gesamteffizienz des Systems erheblich reduzieren. LEDs lassen sich in allen Betriebsarten, wie Sofortstart, Blinken und Dimmen von 0% bis 100% mit relativ einfachen Betriebsgeräten bei niedrigen Betriebsspannungen anwenden. *Organische Leuchtdioden* (*OLED*) sind im Vergleich zur LED nicht aus Halbleiterkristallen, sondern aus verschiedenen dünnen organischen Polymerschichten aufgebaut. Aufgrund der Polymereigenschaften und der geringen Gesamtdicke einer OLED von etwa 0,5 µm lassen sich flexible, flächige und farbige Lichtquellen herstellen. Hauptanwendungen der OLED sind aktive Matrix-Displays für die Text- und Bilddarstellung.

4.2.3 Plasmaströme

Ein Plasma besteht aus positiven Ionen und negativen Elektronen großer Dichte. Wegen der annähernd vollständigen Ionisation der Materie (bis zu 99%) wird der Plasmazustand auch als *vierter Aggregatszustand* bezeichnet. Ein Beispiel eines quasineutralen Plasmas (gleich viel positive wie negative Ladungsträger) ist die positive Säule einer Glimmentladung (Abb. 4.44a).

Das physikalische Verhalten von Materie im Plasmazustand spielt vor allem in der Astrophysik und in der Kernphysik eine Rolle. Die Ladungsträgerkonzentrationen liegen z. B. in der Ionosphäre bei 10^{10} Ladungsträgern je m^3, in der Sternatmosphäre bei 10^{20} je m^3 und im Sterninnern sogar bei 10^{30} je m^3. Diese hohen Konzentrationen werden durch extrem hohe Temperaturen (10 000 bis 30 000 K) verursacht. Die Atomkerne und die Elektronen werden bei einer Temperatur von 10^8 K völlig voneinander getrennt, sodass es zu einer Atomkernverschmelzung (Kernfusion) kommen kann (Abschn. 8.8.4).

Beim *magnetohydrodynamischen Generator* (*MHD-G.*) wird ein Plasmastrom durch ein transversales Magnetfeld geschickt. Ähnlich wie beim Hall-Effekt (Abschn. 4.4.3.2, Abb. 4.108) werden positive und negative Teilchen getrennt, sodass eine elektrische Spannung auftritt. Dadurch wird thermische direkt in elektrische Energie umgewandelt.

Zur Übung

Ü 4.2-1 Für ein Aluminiumwerk mit 20 Schmelzöfen steht in einer Entfernung von 500 m ein Generator eines Kraftwerks, der diese mit Strom versorgt. Die Verbindungsleitungen bestehen aus Kupfer (ϱ_{Cu} = 0,018 $\Omega \cdot mm^2/m$; Querschnitt $A = 64\,cm^2$). Die Aluminiumöfen sind in Reihe geschaltet und an jedem liegt eine Spannung von 4,6 V. Jeder Ofen soll je Schicht (8 h) 100 kg Aluminium erzeugen ($\ddot{A}$ = 0,09321 mg/(As)). Wie groß muss die am Generator erzeugte Leistung sein?

Ü 4.2-2 Ein Stahlzylinder (Länge l = 1,50 m; Radius r = 5 cm) soll galvanisch mit einer Schichtdicke $d = 5 \cdot 10^{-2}$ mm vernickelt werden (ϱ_{Ni} = 8,7 kg/dm^3; $\ddot{A}$ = 0,30415 mg/(As)). Welche Stromstärke ist dazu erforderlich und wie lange muss das Werkstück im Bad bleiben, wenn die Stromdichte j = 25 A/m^2 nicht überschritten werden darf?

4.3 Elektrisches Feld

4.3.1 Allgemeiner Feldbegriff

In der Physik tritt die Bezeichnung *Feld* in verschiedenen Zusammenhängen auf (z. B. in Abschn. 2.12.2.1). Ein *Feld* ist allgemein eine physikalische Größe Z, die nicht nur in einem einzigen Punkt, sondern im gesamten Raum wirksam und damit messbar ist. Ein Feld kann daher mathematisch beschrieben werden:

$$Z = Z(x, y, z; t)\ . \qquad (4.90)$$

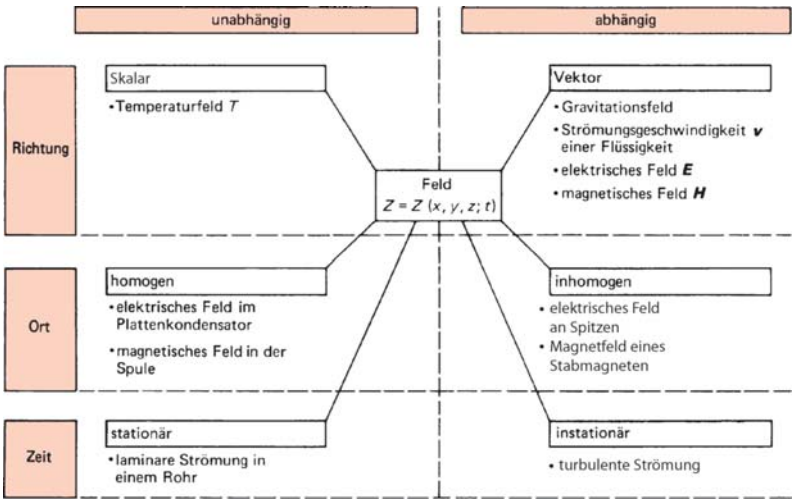


Abb. 4.47 Einteilung der Felder

Abbildung 4.47 zeigt, dass Felder eingeteilt werden können je nach ihrer Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit von bestimmten Größen:

- *Richtung*
  Richtungsunabhängige Felder sind *skalare* (z. B. Temperaturfelder) und *richtungsabhängige* sind *Vektorfelder*.
- *Ort*
  Im allgemeinen Fall sind die Felder *abhängig vom Ort* (*inhomogen*). Nur in Spezialfällen sind sie *unabhängig vom Ort* (*homogen*), z. B. das elektrische Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators oder das magnetische Feld im Innern einer lang gestreckten Spule.
- *Zeit*
  Zeitunabhängige Felder werden *stationär* (z. B. laminare Strömung durch ein Rohr) und *zeitabhängige Felder instationär* genannt.

4.3.2 Beschreibung des elektrischen Feldes

Aus Abschn. 4.1 geht hervor, dass eine der Ursachen für elektrische Kraftwirkungen die Ladungen sind. Diese elektrischen Kräfte lassen sich nach dem Coulomb'schen Gesetz (4.2) berechnen (nicht für zeitlich sich ändernde Felder). Sie wirken nicht nur im Ort der Ladung selbst, sondern auch in deren Umgebung. Es ist deshalb ein *elektrisches Feld* vorhanden:

> Das elektrische Feld wird mathematisch durch ein Vektorfeld beschrieben. Es rührt von elektrischen Ladungen her und beschreibt die Wirkungslinien der elektrischen Kräfte in Betrag und Raumrichtung. Als anschauliches Hilfsmittel verwendet man hierfür den Begriff *elektrische Feldlinien*.

Die elektrischen Feldlinien weisen folgende Eigenschaften auf:

- Sie beschreiben die *elektrischen Kraftwirkungen*:
  - die Tangente an die Feldlinie gibt die *Kraftrichtung* an;
  - die Kraftwirkungen sind eindeutig, d. h. die Feldlinien schneiden sich nicht;

- die *Dichte der Feldlinien* gibt Anhaltspunkte für die Stärke der Kraftwirkungen an verschiedenen Stellen;

– sie besitzen einen *Anfang* (positive Ladung) und ein *Ende* (negative Ladung). Dies bedeutet, dass es keine in sich geschlossenen Feldlinien gibt. Die Richtung von positiver zu negativer Ladung ist willkürlich festgelegt;
– positiv geladene Körper werden in Richtung der Feldlinien beschleunigt, negativ geladene den Feldlinien entgegen;
– da auf metallischen Leitern die Elektronen frei beweglich sind, werden sie so lange verschoben, bis keine tangentiale Kraftkomponente mehr vorhanden ist. Dies bedeutet, dass auf *elektrischen Leitern* die *elektrischen Feldlinien senkrecht* stehen;
– befinden sich metallische Körper im elektrischen Feld, so sitzen die Ladungen immer an der Oberfläche. Dies bedeutet, dass das *Innere* von metallischen Körpern immer *feldfrei* ist, wie es in Abb. 4.48f angedeutet ist. Mit metallischen Umhüllungen können deshalb elektrische Felder abgeschirmt werden (*Faraday'scher Käfig*).

Abbildung 4.48 zeigt den Verlauf der elektrischen Feldlinien für eine positive Ladung (a), für zwei gleich große, entgegengesetzte Ladungen (b), für zwei gleich große gleichnamige Ladungen (c), für zwei gleich große Metallplatten (d), für eine Metallplatte und eine Metallspitze (e) und für einen Metallrahmen zwischen zwei Metallplatten (f).

4.3.3 Elektrische Feldstärke und Kraft

Wird in ein elektrisches Feld eine punktförmige Prüfladung Q gebracht, so spürt diese eine Kraft $\boldsymbol{F}$. Der Quotient aus der Kraft $\boldsymbol{F}$ und der Prüfladung Q wird elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ genannt:

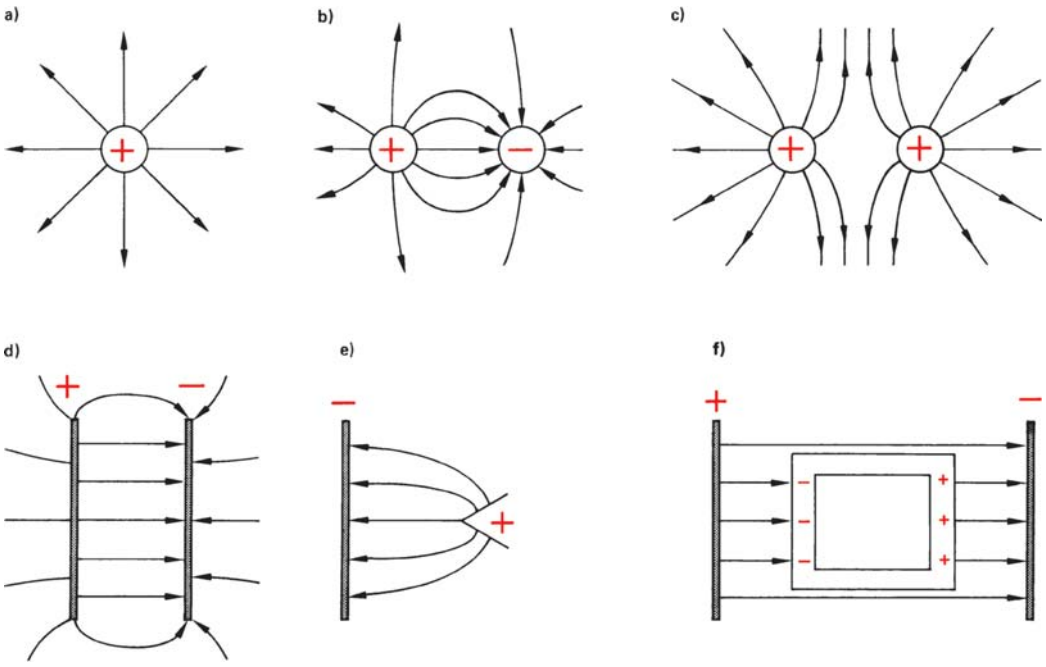


Abb. 4.48 Feldlinienbilder

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} \,. \tag{4.91}$$

Die Maßeinheit ist 1 N/C = 1 V/m.
Die elektrische Feldstärke ist ein Vektor in Richtung der Kraft. Die Definition der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ als Kraft je Probeladung erfolgt analog der Gravitationsfeldstärke $\boldsymbol{g}$ (Gravitationskraft pro Masse, Abschn. 2.10.3). Für die Kraft im elektrischen Feld ergibt sich aus (4.91)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}\, Q \,. \tag{4.92}$$

Am Beispiel einer Punktladung kann der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Kraft gut gezeigt werden. Nach dem Coulomb'schen Gesetz (4.2) gilt

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,.$$

Für die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ der Punktladung Q_1 am Ort der Prüfladung Q_2 folgt nach (4.91)

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^3} \boldsymbol{r} \,. \tag{4.93}$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}$ der Abstandsvektor des Aufpunktes von der felderzeugenden Punktladung Q_1.
Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\mathrm{P}_0)$ am Ort P_0 einer Prüfladung errechnet sich bei n felderzeugenden Ladungen Q_1, Q_2 bis Q_n zu

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{P}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_{10}^3} \boldsymbol{r}_{10} + \frac{Q_2}{r_{20}^3} \boldsymbol{r}_{20} + \ldots + \frac{Q_n}{r_{n0}^3} \boldsymbol{r}_{n0} \right) \,.$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}_{n_0}$ der Abstand der n-ten Ladung vom Ort der Prüfladung.

Die Feldlinien gehen strahlenförmig (radial) von der Punktladung aus (Abb. 4.48a) oder führen zu ihr hin und die Feldstärke nimmt quadratisch mit der Entfernung von der Punktladung Q_1 ab.
In inhomogenen Feldern (Abb. 4.47) ist die elektrische Feldstärke und damit die Kraftwirkung in unterschiedlichen Raumpunkten verschieden groß. In homogenen Feldern dagegen, z. B. zwischen zwei geladenen parallelen Platten (Abb. 4.48d), ist die elektrische Feldstärke und folglich die Kraft überall gleich groß. Für die Spannung U zwischen den Platten gilt: $U = \int \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}$. Für homogene Felder ergibt sich

$$U = E \cdot d$$

oder für die elektrische Feldstärke E

$$E = \frac{U}{d} \,. \tag{4.94}$$

Diese Beziehung beschreibt als Spezialfall die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ zwischen zwei geladenen Platten (Plattenkondensator, Abschn. 4.3.6.2) in Abhängigkeit vom Abstand d. Für den allgemeinen (inhomogenen) Feldfall jedoch muss man auf (4.91) zurückgreifen.

Beispiel

4.3-1 An den Eckpunkten eines Quadrates mit der Seitenlänge von 10 cm befinden sich gleiche Ladungen Q_1 bis Q_4 von je $5 \cdot 10^{-7}$ C, wie es Abb. 4.49 verdeutlicht. Ermitteln Sie mit einem Rechenprogramm die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ (Betrag und Richtung) im Mittelpunkt P des Quadrates für folgende vier Ladungsanordnungen:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
a)	–	–	–	–
b)	–	–	+	+
c)	–	+	–	+
d)	–	–	+	–

Fassen Sie das Programm so ab, dass beliebige Ladungen in den Eckpunkten sitzen können und die Ladungsabstände unterschiedlich sein können.

a)
```
LADUNG Q1= -0.0000005C
LADUNG Q2= -0.0000005C
LADUNG Q3= -0.0000005C
LADUNG Q4= -0.0000005C
ABSTAND D= 0.01M
FAKTOR (R)= 1.
DARSTELLUNG:
-. . . .-
.       .
.   P   .
.       .
-. . . .-
ERGEBNIS:
E-FELD IM PUNKT P=
0.V/M
KEIN WINKEL
```

b)
```
LADUNG Q1= -0.0000005C
LADUNG Q2= -0.0000005C
LADUNG Q3= 0.0000005C
LADUNG Q4= 0.0000005C
ABSTAND D= 0.01M
FAKTOR (R)= 1.
DARSTELLUNG:
-. . . .-
.       .
.   P   .
.       .
+. . . .+
ERGEBNIS:
E-FELD IM PUNKT P=
254326643.V/M
WINKEL=
0.GRAD
```

c)
```
LADUNG Q1= -0.0000005C
LADUNG Q2= 0.0000005C
LADUNG Q3= -0.0000005C
LADUNG Q4= 0.0000005C
ABSTAND D= 0.01M
FAKTOR (R)= 1.
DARSTELLUNG:
-. . . .+
.       .
.   P   .
.       .
-. . . .+
ERGEBNIS:
E-FELD IM PUNKT P=
254326643.V/M
WINKEL=
90.GRAD
```

d)
```
LADUNG Q1= -0.0000005C
LADUNG Q2= -0.0000005C
LADUNG Q3= 0.0000005C
LADUNG Q4= -0.0000005C
ABSTAND D= 0.01M
FAKTOR (R)= 1.
DARSTELLUNG:
-. . . .-
.       .
.   P   .
.       .
+. . . .-
ERGEBNIS:
E-FELD IM PUNKT P=
179836093.9V/M
WINKEL=
315.GRAD
```

e)
```
LADUNG Q1= -1.C
LADUNG Q2= 2.C
LADUNG Q3= 5.C
LADUNG Q4= -1.5C
ABSTAND D= 1000.M
DARSTELLUNG:
-. . . .+
.       .
.   P   .
.       .
+. . . .-
ERGEBNIS:
E-FELD IM PUNKT P=
54695.01268V/M
WINKEL=
305.537677BGRAD
```

Abb. 4.49 Rechnerausdruck der Lösungen von Beispiel 4.3-1

Lösung

Für die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ der Punktladung Q_1 am Ort P gilt nach (4.93)

$$|E_{Q,P}| = \frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon_0 \left(\frac{D}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{Q_1}{8\,\pi\varepsilon_0 \left(\frac{D}{2}\right)^2}\,.$$

D ist der Ladungsabstand. Durch Vektoraddition werden alle vier elektrischen Feldstärken (herrührend von den vier Ladungen) im Punkt P addiert und ergeben die resultierende Feldstärke $\boldsymbol{E}$ am Ort P in Betrag und Richtung.

Im Programm werden die Ladungen Q_1 bis Q_4 und der Ladungsabstand D eingegeben. Ausgegeben werden eine kurze Darstellung des Problems und der Vektor der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im Punkt P in Betrag und Richtung. Die Richtungsangabe erfolgt in Grad, 0° bedeutet die Linie senkrecht nach oben. Der Winkel wird in mathematisch positiver Richtung größer. Abbildung 4.49 zeigt den Ausdruck für die Fälle a) bis d) sowie für eine beliebige Ladungseingabe (Fall e)).

Man erhält folgende Ergebnisse:

Für den Fall gleicher Ladungen (Fall a)) gibt es keine Feldstärke im Punkt P. Im Fall b) herrscht eine Feldstärke von $2{,}54 \cdot 10^8$ V/m senkrecht nach oben (Winkel gleich 0°). Im Fall c) herrscht dieselbe Feldstärke um 90° verschoben und im Fall d) beträgt die Feldstärke $1{,}79 \cdot 10^8$ V/m in einem Winkel von 315°.

Im allgemeinen Fall e) seien als Ladungen eingegeben: $Q_1 = -1$ C, $Q_2 = 2$ C, $Q_3 = 5$ C und $Q_4 = -1{,}5$ C sowie ein Ladungsabstand von 1 000 m. Man erhält eine Feldstärke von $5{,}46 \cdot 10^4$ V/m und einen Winkel von 305,54°.

4.3.4 Elektrische Feldstärke und elektrostatisches Potential

Um eine positive, punktförmige Probeladung Q im elektrischen Feld vom Punkt A nach Punkt B zu verschieben (Abb. 4.50), muss

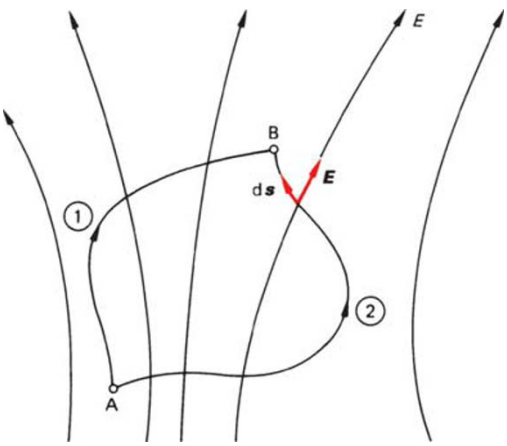


Abb. 4.50 Verschiebung von Ladung im elektrischen Feld

gegen die Feldkraft $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ eine Verschiebungsarbeit verrichtet werden:

$$W_{AB} = -\int_A^B \boldsymbol{F}(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$W_{AB} = -\int_A^B Q\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad \text{oder}$$

$$W_{AB} = -Q\int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{4.95}$$

Wegen des Energieerhaltungssatzes muss diese Verschiebungsarbeit unabhängig vom Weg von A nach B (z. B. ① oder ② in Abb. 4.50) sein, sodass gilt

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_B^A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0\,,$$

d. h., die Aufsummierung aller skalaren Produkte $\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,(= |\boldsymbol{E}| \cdot |\mathrm{d}\boldsymbol{s}| \cdot \cos(\boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{s}))$ entlang eines geschlossenen Weges muss null sein.
Der Quotient aus negativer Verschiebungsarbeit W_{AB} und Ladung Q ist die elektrische Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B.

$$U_{AB} = -\frac{W_{AB}}{Q} = \int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{4.96}$$

Wird im Feld einer Punktladung Q_1 eine positive Probeladung Q vom Ort A (r_A) zum Ort B (r_B) verschoben, so ist mit Hilfe von (4.93) die Spannung zwischen den Punkten A und B

$$U_{AB} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)\,. \tag{4.97}$$

Wird die Probeladung Q vom Unendlichen ($r_A = \infty$) zum Punkt B geführt, dann ist die Spannung zwischen unendlich und Punkt B

$$U_{\infty B} = \int_\infty^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B}\,.$$

Sie hängt also nur von der Lage des Punktes B im elektrischen Feld ab. Als elektrisches Potential φ_B des Punktes B wird bezeichnet:

$$\varphi_B = -\int_\infty^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{W_{\infty B}}{Q}\,. \tag{4.98}$$

Die elektrische Spannung U_{AB} zwischen zwei Punkten A und B eines elektrischen Feldes lässt sich durch Kombination von (4.96) und (4.97) als Differenz der elektrischen Potentiale φ_B und φ_A darstellen, wie Abb. 4.51 zeigt:

$$-U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi\,. \tag{4.99}$$

Somit schreibt man für den Zusammenhang zwischen Ladungsverschiebearbeit W_{AB}, Spannung U_{AB}, Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ und elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{E}$

$$-\frac{W_{AB}}{Q} = U_{AB} = -\Delta\varphi = \int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{4.100}$$

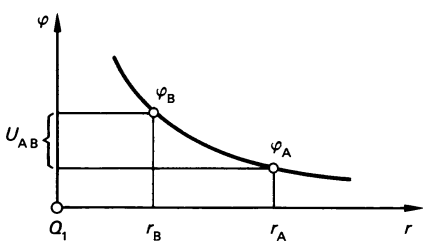


Abb. 4.51 Elektrostatisches Potential und Spannung zwischen zwei Punkten

Für sehr kleine Verschiebungen ist

$$\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -|\boldsymbol{E}| \cdot |\mathrm{d}\boldsymbol{s}| \cos(\boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \,.$$

Findet diese sehr geringe Verschiebung in Feldrichtung statt ($\cos(\boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{s}) = 1$), so gilt

$$|\boldsymbol{E}| = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \tag{4.101}$$

oder für die räumlichen Komponenten des Feldes

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = -\left(\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}_{E_x}\boldsymbol{i} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{E_y}\boldsymbol{j} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{E_z}\boldsymbol{k}\right) \tag{4.102}$$

Gleichung (4.102) kann auch mit dem *Vektoroperator Gradient*

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

formuliert werden:

$$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi \,. \tag{4.103}$$

Folglich kann man die Komponenten des elektrischen Feldes durch die Potentialänderung in den entsprechenden Richtungen bestimmen. Das Minuszeichen besagt, dass der Vektor $\boldsymbol{E}$ in Richtung abnehmenden Potentials zeigt (entsprechend der Feldrichtung von + nach −). Der Vektor $\boldsymbol{E}$ zeigt dabei in Richtung der maximalen Änderung des Potentials φ. Ein Vergleich von (4.100) und (4.103) zeigt:

- Wird dem Punkt ∞ das Potential 0 zugeordnet, dann erhält man das Potential des Aufpunktes P durch Integration der elektrischen Feldstärke auf dem Weg von P nach ∞. Das Ergebnis ist unabhängig vom genauen Verlauf des Weges.
- Aus dem elektrostatischen Potential φ lässt sich durch Anwendung des Vektoroperators Gradient die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ (bzw. deren Komponenten E_x, E_y und E_z) errechnen ((4.102) bzw. (4.103)).
- Beide Beschreibungsweisen des elektrischen Feldes, also durch die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und andererseits durch das elektrostatische Potential φ, sind gleichberechtigt.

Äquipotentialflächen

Auf Äquipotentialflächen herrscht immer gleiches Potential (φ = konstant), d. h., der Potentialunterschied ist null ($\Delta\varphi = 0$). Dann folgt nach (4.100)

$$0 = \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = |\boldsymbol{E}||\mathrm{d}\boldsymbol{s}| \cos(\boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \,. \tag{4.104}$$

Das Skalarprodukt $\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ wird null, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen, wie es Abb. 4.52 zeigt (dann ist $\cos(\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}) = 0$), sodass gilt $\boldsymbol{E} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

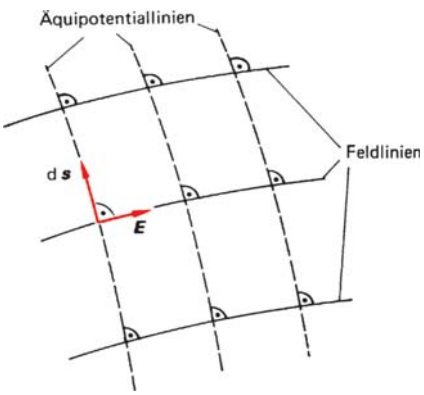


Abb. 4.52 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien

In der Zeichenebene entsprechen den Äquipotentialflächen die Äquipotentiallinien. Diese Aussage bedeutet:

- Wird die Ladung auf den Äquipotentiallinien verschoben, so ist aufgrund (4.100) die Verschiebungsarbeit $W_{AB} = 0$.
- *Die elektrischen Feldlinien stehen immer senkrecht auf den Äquipotentiallinien.* Da die elektrischen Feldlinien ihrerseits immer senkrecht auf den metallischen Oberflächen stehen, sind die Oberflächen von metallischen Leitern immer Äquipotentialflächen.

Die Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld lässt sich gut mit der reibungsfreien Bewegung von Wasserteilchen in einer bergigen Landschaft vergleichen. Dies rührt u. a. von der Ähnlichkeit der Gravitationskraft mit der elektrostatischen Coulomb-Kraft her. Wie Abb. 4.53 zeigt, ist der Verlauf des elektrostatischen Potentials einem Gebirge vergleichbar, in dem die Äquipotentiallinien den Höhenlinien (Linien gleicher potentieller Energie) entsprechen. Wie die Wasserteilchen senkrecht zu den Höhenlinien in Richtung des Gefälles reibungsfrei nach unten laufen, so werden die Ladungen senkrecht zu den Äquipotentiallinien beschleunigt. In Richtung des steilsten Abfalls sind die Höhenlinien wie die Äquipotentiallinien dicht gedrängt und dies ist die bevorzugte Bewegungsrichtung.

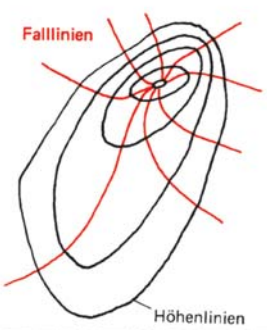
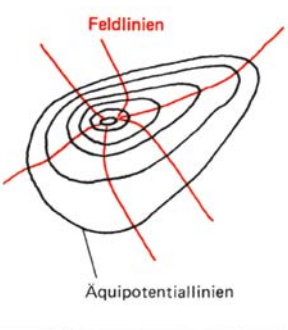
	Gravitationsfeld	elektrisches Feld
Kraft	Massenanziehungskraft (Gravitationskraft) $\boldsymbol{F}_{Gr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{r}_0$ $\boldsymbol{F}_{Gr} = m\boldsymbol{g};\ \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}_{Gr}}{m}$	Ladungsanziehungskraft (Coulombkraft) $\boldsymbol{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\boldsymbol{r}_0$ $\boldsymbol{F}_{el} = Q\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_{el}}{Q}$
Energie	$W_{Gr} = m\varphi_{Gr}$	$W_{el} = Q\varphi_{el}$
Potentialänderung	$\mathrm{d}\varphi_{Gr} = -\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$	$\mathrm{d}\varphi_{el} = -\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$
Potentiallinien	Linien gleicher potentieller Energie (Höhenlinien) $\varphi_{Gr} = \text{const}$	Linien gleichen elektrischen Potentials (Äquipotentiallinien) $\varphi_{el} = \text{const}$
Teilchenbeschleunigung	senkrecht zu den Höhenlinien in Richtung des steilsten Abfalls $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{grad}\,\varphi_{Gr}$	senkrecht zu den Äquipotentiallinien in Richtung der größten Potentialänderung $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}\,\varphi_{el}$
Veranschaulichung		

Abb. 4.53 Vergleich Gravitationsfeld und elektrisches Feld

Wegen dieser Eigenschaft, dass die elektrischen Feldlinien immer senkrecht zu den Linien gleichen Potentials stehen, ist es häufig weniger aufwändig, aus den Linien gleichen Potentials – die leicht zu messen sind – die elektrischen Feldlinien (die schwieriger zu messen wären) zu ermitteln. In der Praxis setzt man dazu Äquipotentiallinienschreiber ein; hierbei zeichnet man die Leitergeometrien mit Leitsilber auf Widerstandspapier und ermittelt bei angelegter Spannung zwischen den Leitsilberlinien die Linien gleicher Spannung mit einem Voltmeter. Abbildung 4.54 zeigt einen automatisch arbeitenden Äquipotentiallinienschreiber, der mikroprozessorgesteuert die Linien gleicher Spannung selbsttätig abfährt und programmgesteuert die Äquipotentiallinien ermittelt, sie sofort mit Schreiber aufzeichnet und über ein Computerprogramm gleichzeitig die elektrischen Feldlinien registrieren kann.

Abbildung 4.55 stellt die Äquipotentiallinien bzw. die elektrischen Feldlinien zwischen einer ebenen Platte und einer metallischen Spitze dar. Es wird deutlich, wie dicht die Äquipotentiallinien oder wie stark das elektrische Feld oder die elektrischen Kräfte in unmittelbarer Umgebung der Spitze sind. Es kann gezeigt werden, dass die Feldstärke



Abb. 4.54 Automatischer Äquipotentiallinienschreiber

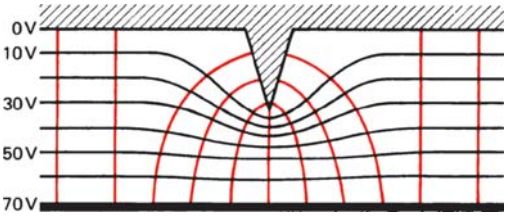


Abb. 4.55 Äquipotentiallinien und elektrische Feldlinien an einer metallischen Spitze

- umso größer ist, je kleiner der Spitzenradius ist und
- kaum von der Geometrie der Gegenelektrode beeinflusst wird.

Die hohe elektrische Feldstärke und damit die großen elektrischen Kräfte um metallische Spitzen nutzt man in der Technik

- beim Blitzableiter,
- im Geiger'schen Spitzenzähler zum Nachweis ionisierender Strahlung (Abschn. 8.8.1.4) und
- Im Feldelektronenmikroskop zur Untersuchung atomarer Strukturen (Abschn. 4.2.2.1).

Beispiel

4.3-2 Eine Ladung Q wird mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zum Punkt C über die Strecke ABC bewegt (Abb. 4.56). Berechnet werden soll die Potentialdifferenz zwischen den Punkten C und A (U_{CA}).

Lösung

Nach (4.100) gilt $U_{AB} = -\int_A^B \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$. Somit ergibt sich

$$U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B E\cos\alpha\,\mathrm{d}l = \frac{E}{\sqrt{2}}\int_A^B \mathrm{d}l$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2}}l = \frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,d = E\,d\,.$$

Die Punkte B und C haben gleiches Potential, da die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ senkrecht zum Wegelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ steht, sodass $\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$ wird. Es handelt sich also um die Äquipotentiallinie (BC), sodass gilt $U_{CA} = U_{BA} = E\,d$.

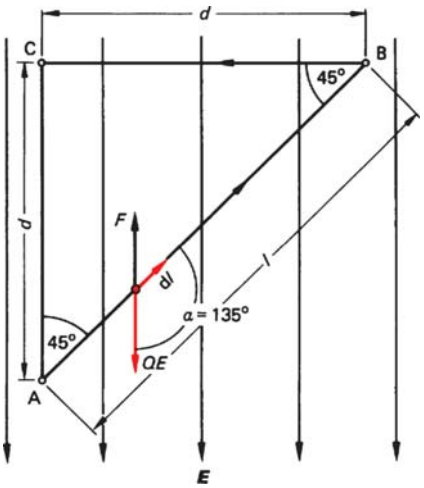


Abb. 4.56 Zu Beispiel 4.3-2. Eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ bewegt eine Ladung Q auf dem Weg ABC

4.3.5 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

4.3.5.1 Grundlegende Betrachtungen

Ein elektrisch geladenes Teilchen (z. B. ein Elektron oder ein Proton) wird im elektrischen Feld der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ wegen der elektrischen Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = Q\,\boldsymbol{E}$ in Feldrichtung beschleunigt, sodass das Teilchen mit der Masse m nach dem Newton'schen Grundgesetz der Dynamik eine Beschleunigung erfährt:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = m\,\boldsymbol{a}\,,$$
$$Q\,\boldsymbol{E} = m\,\boldsymbol{a}\,.$$

Daraus ergibt sich die Beschleunigung

$$\boldsymbol{a} = \frac{Q}{m}\,\boldsymbol{E}\,. \tag{4.105}$$

Ist das elektrische Feld *homogen*, so durchläuft ein geladenes Teilchen eine Bewegung mit *konstanter* Beschleunigung. Deshalb nimmt die kinetische Energie E_{kin} ständig zu, und zwar auf Kosten der potentiellen Energie, d. h. des Potentialunterschieds entlang des Beschleunigungswegs. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = -\Delta E_{\mathrm{pot}}\,,$$
$$\frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = -Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = Q\,U\,,$$

$$\frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = Q\,U\,. \tag{4.106}$$

Man erkennt, dass die kinetische Energie proportional zur durchlaufenden Beschleunigungsspannung U zunimmt. Falls die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist, setzt man an

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = Q\,U\,. \tag{4.107}$$

In der Atom- und Kernphysik (Abschn. 8) werden die Energien von Elementarteilchen üblicherweise in Elektronenvolt (eV) gemessen:

Ein Elementarteilchen mit der Elementarladung $e = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ As erhält beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 V eine Energiezunahme von

$$1\ \text{Elektronenvolt (eV)} = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}\ \text{J}\,. \tag{4.108}$$

Außer der Einheit eV werden auch andere größere Einheiten verwendet:

$$1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV} = 1{,}60219 \cdot 10^{-13}\ \text{J}\,,$$
$$1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV} = 1{,}60219 \cdot 10^{-10}\ \text{J}\,. \tag{4.109}$$

Aus (4.107) lässt sich die Endgeschwindigkeit geladener Teilchen berechnen:

$$v = \sqrt{\frac{2\,Q\,U}{m}}\,. \tag{4.110}$$

Gleichungen (4.106), (4.107) und (4.110) sind nur für kleine Geschwindigkeiten gültig. Für sehr schnelle fliegende Teilchen (ab etwa 10% der Vakuumlichtgeschwindigkeit c; bei Elektronen schon bei der relativ kleinen Spannung von 2 500 V) ist der relativistische Massenzuwachs spürbar (Abschn. 10.4):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,.$$

Hierin ist m_0 die Ruhmasse des Teilchens und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Es gilt nach (10.16) für die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = m\,c^2 - m_0\,c^2$. Eingesetzt in (4.107) resultiert

$$\begin{aligned} Q\,U &= (m - m_0)\,c^2 \\ &= m_0\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right), \end{aligned} \tag{4.111}$$

und für v errechnet sich nach (4.111)

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{Q\,U}{m_0\,c^2}+1\right)^2}}\,. \tag{4.112}$$

Beispiel

4.3-3 Für ein Elektron (Ruhemasse $m_0 = 9{,}11\ 10^{-31}$ kg) sollen anhand eines Programms für die durchlaufenen Spannungen von 1 V bis 10^{10} V (in 10 V-Schritten) die Elektronengeschwindigkeit v, die Elektronenmasse m sowie die relative Massenzunahme m/m_0 errechnet werden. Bei wie viel eV ist die Elektronenmasse im Vergleich zur Ruhemasse um 5%, 10%, …, 100% größer? Zeichnen Sie v in Abhängigkeit von U im klassischen und im relativistischen Fall auf.

Lösung

a) Es sind folgende Beziehungen zu verwenden:

$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $\quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C;

$c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s .

Für ein Elektron gilt weiterhin die Elektronengeschwindigkeit (klassisch)

$$v_{\mathrm{e}}^{\mathrm{k}} = 5{,}93 \cdot 10^{5}\sqrt{U/\mathrm{V}}\ \mathrm{m/s}\,, \tag{4.113}$$

relativistisch

$$v_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}} = 2{,}998 \cdot 10^{8}\sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}957 \cdot 10^{-6}\,U/\mathrm{V} + 1)^2}}\ \mathrm{m/s}, \tag{4.114}$$

$$m = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}}}{2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}\right)^2}}\,, \tag{4.115}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}}}{2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}\right)^2}}\,. \tag{4.116}$$

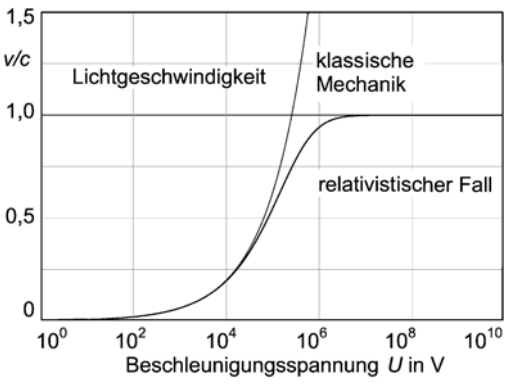


Abb. 4.57 Elektronengeschwindigkeit v normiert auf die Lichtgeschwindigkeit c in Abhängigkeit von der Spannung im klassischen und relativistischen Fall

b) Abbildung 4.57 zeigt die Abhängigkeit der Elektronengeschwindigkeit von der Spannung im klassischen bzw. im relativistischen Fall: Die Geschwindigkeit nach der klassischen Formel würde ab 10^5 V sehr schnell ins Unendliche anwachsen, während sie im relativistischen Fall in die Gerade $v_{el} = c$ einmündet.

4.3.5.2 Bewegung eines geladenen Teilchens quer zum elektrischen Feld

Es sei angenommen, dass Elektronen nach (4.110) mit einer Geschwindigkeit von

$$v_{ox} = \sqrt{\frac{2\,e}{m_e} U_a}$$

in ein homogenes Querfeld $\boldsymbol{E}$ einströmen. Dieses Feld kann durch einen Plattenkondensator der Plattenlänge l und dem Plattenabstand d erzeugt werden. Dies geschieht u. a. beim Elektronenstrahl-Oszilloskop (Abschn. 4.3.5.4) und ist schematisch in Abb. 4.58 dargestellt. Die Bahnkurve des Elektrons entspricht der eines waagrechten Wurfes (Abschn. 2.2.1.3), da

- in *x-Richtung* eine Bewegung mit *konstanter Geschwindigkeit* v_{ox} und
- in *y-Richtung* eine Bewegung mit *konstanter Beschleunigung* $a_y = e\,E/m_e$ (4.105) erfolgt.

(Die Gravitationskraft kann im Vergleich zur Feldkraft vernachlässigt werden.) Daraus errechnet sich eine Geschwindigkeit in y-Richtung von $v_y = a_y t$.
Analog zum waagerechten Wurf erhält man für die Bewegung in x-Richtung $x = v_{ox} t$ und in y-Richtung $y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{e\,E}{2\,m_e} t^2$.
Durch Eliminieren von t ergibt sich die Bahngleichung (s. waagrechter Wurf, (2.17) in Abschn. 2.2.2.3):

$$y = \frac{a}{2\,v_{ox}^2} x^2 \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{e\,E}{2\,m_e v_{ox}^2} x^2 \,. \tag{4.117}$$

Da für die elektrische Feldstärke im Kondensator $E = U_{Kond}/d$ gesetzt werden kann und $v_{ox}^2 = 2\,e\,U_a/m_e$ ist, erhält man

$$y = \frac{U_{Kond}}{4\,d\,U_a} x^2 \,. \tag{4.118}$$

Für den Ablenkwinkel φ gilt

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_{ox}} = \frac{e\,E}{m_e v_{ox}} t \,. \tag{4.119}$$

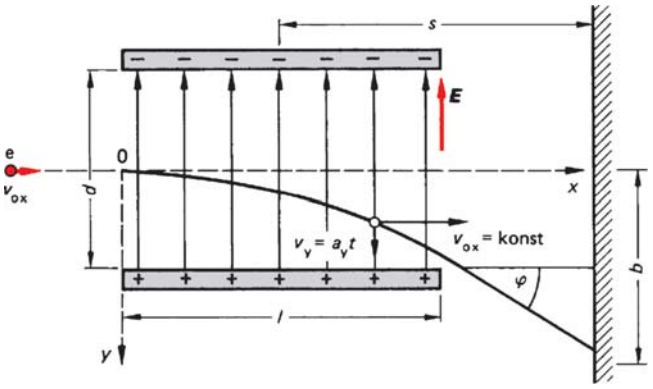


Abb. 4.58 Flugbahn eines Elektrons im homogenen elektrischen Querfeld

Wegen $t = l/v_{ox}$ gilt nach Verlassen des Feldes

$$\tan\varphi = \frac{e\,E\,l}{m_e v_{ox}^2} \,. \tag{4.120}$$

Mit (4.94) für E und (4.110) für v_{ox}^2 erhält man

$$\tan\varphi = \frac{l\,U_{\mathrm{Kond}}}{2\,d\,U_a} \,. \tag{4.121}$$

Für die Ablenkung aus der Flugrichtung nach Verlassen des Feldes bedeutet dies:

- Je größer l (oder die Flugdauer t), desto größer die Ablenkung;
- je größer die Kondensatorspannung U_{Kond} oder die Feldstärke $E = U_{\mathrm{Kond}}/d$, desto größer die Ablenkung und
- je größer die Anodenspannung U_a (oder die Geschwindigkeit v), desto kleiner die Ablenkung.

Wenn sich im Abstand s von der Kondensatormitte ein Auffangschirm befindet, dann kann die Ablenkung b (Abb. 4.58) berechnet werden gemäß

$$b = y_A + \left(s - \frac{l}{2}\right)\tan\varphi \,.$$

Mit den Beziehungen für y_A (4.117) und $\tan\varphi$ (4.120) ergibt sich

$$b = \frac{e\,E}{2\,m_e v_{ox}^2} l^2 + \left(s - \frac{l}{2}\right)\frac{e\,E\,l}{m_e v_{ox}^2} =$$

$$= \frac{eEl}{m_e v_{ox}^2}\left(\frac{l}{2} + s - \frac{1}{2}\right) \,,$$

$$b = \frac{eE\,l\,s}{m_e v_{ox}^2} = \frac{e\,U_{\mathrm{Kond}}\,l\,s}{m_e\,d\,v_{ox}^2} = \frac{l\,s}{2\,d}\frac{U_{\mathrm{Kond}}}{U_a} \,. \tag{4.122}$$

4.3.5.3 Bewegung eines geladenen Teilchens parallel zum elektrischen Feld

Als Beispiel sei ein positiv geladenes Teilchen gewählt, ein Proton mit der Masse m_P und der Ladung $+e$. Wie Abb. 4.59 zeigt, entspricht die elektrische Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = e\,\boldsymbol{E}$ der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Gr}} = m\,\boldsymbol{g}$ (s. dazu auch Abb. 4.53). Die konstante Beschleunigung des Protons errechnet sich nach (4.105) zu

$$\boldsymbol{a} = \frac{e\,\boldsymbol{E}}{m_P} \,.$$

Es ergeben sich die bekannten Beziehungen der Mechanik für den freien Fall, wenn anstelle von $\boldsymbol{g}$ der obige Ausdruck für $\boldsymbol{a}$ gesetzt wird: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,t$,

$$\boldsymbol{v} = \frac{e\,\boldsymbol{E}}{m_P} t \,. \tag{4.123}$$

Für den Weg gilt $y = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\,t^2$,

$$y = \frac{1}{2}\frac{e\,\boldsymbol{E}}{m_P} t^2 \,, \tag{4.124}$$

für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Beschleunigung und Weg $v = \sqrt{2\,a\,y}$,

$$v = \sqrt{\frac{2\,e\,E}{m_P} y} \,. \tag{4.125}$$

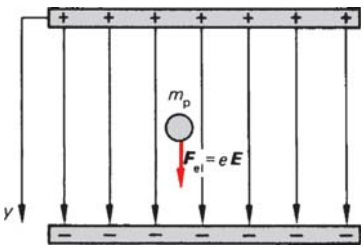


Abb. 4.59 Bewegung eines geladenen Teilchens parallel zum elektrischen Feld

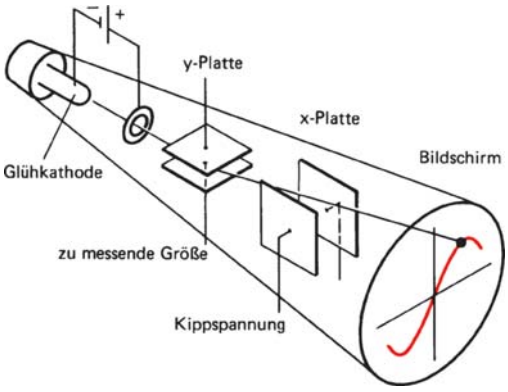


Abb. 4.60 Braun'sche Röhre, schematisch

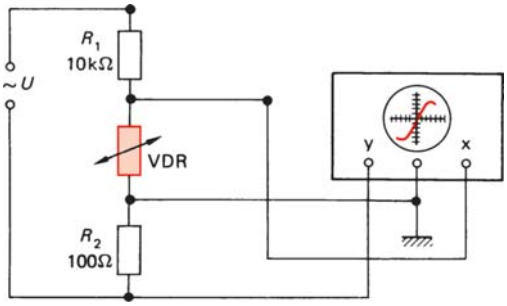


Abb. 4.61 Messanordnung zur Bestimmung des Verlaufs der Strom-Spannungskennlinie eines spannungsabhängigen Widerstandes (VDR)

4.3.5.4 Elektronenstrahl-Oszilloskop

In der sogenannten *Braun'schen Röhre* des *Elektronenstrahl-Oszilloskops* (F. Braun, 1850 bis 1918) fließen die aus der Heizkathode austretenden und durch die Anodenspannung beschleunigten Elektronen nicht über die Anode zurück, sondern treten aufgrund ihrer Trägheit durch das Anodenblech hindurch und treffen am anderen Ende der Röhre auf eine lumineszierende Substanz (z. B. Zinksulfid) auf, die durch die Energieabsorption der auftreffenden Elektronen zum Aussenden von sichtbarem Licht angeregt wird. Zur Horizontal- und Vertikalablenkung des Elektronenstrahls dienen um 90° versetzt angeordnete Ablenkkondensatoren. Abbildung 4.60 lässt das Prinzip des Aufbaus erkennen.

In Abb. 4.61 wird als Beispiel die Schaltung zur Messung der Strom-Spannungs-Kennlinie eines spannungsabhängigen Widerstandes (VDR) gezeigt. Die horizontale Ablenkung (x) wird von der am VDR-Widerstand abfallenden Spannung bestimmt, während die vertikale Ablenkung (y) einer Spannung entspricht, die dem Stromfluss durch den VDR-Widerstand proportional ist.

Bei der Messung eines Spannungssignals wird die zu messende Spannung an die Vertikalplatte angelegt; an der Horizontalplatte befindet sich in diesem Fall eine zeitlich einstellbare, interne Sägezahnspannung (*Kippspannung*). Wird die zeitliche Ablenkung (von links nach rechts) synchron zur Ablenkung der zu untersuchenden Messgröße geschaltet (*getriggert*), dann entsteht auf dem Schirm ein stehendes Bild.

4.3.5.5 Bewegung elektrisch geladener Körper in einer Flüssigkeit und im elektrischen Feld

Es sei angenommen, dass sich in einem senkrechten elektrischen Feld ein geladener Körper in einer Flüssigkeit befindet. Es wirken auf ihn drei Kräfte, wie Abb. 4.62a zeigt: die des elektrischen Feldes $\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}}$, die Auftriebskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Auftrieb}}$ und die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$. Wird das elektrische Feld so eingestellt, dass der geladene Körper schwebt, dann muss die Summe aller äußeren Kräfte gleich null sein ($\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{außen}} = 0$):

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Auftrieb}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = 0\,. \qquad (4.126)$$

In Abb. 4.62b ist zusammengestellt, wie mit dieser Anordnung die Bestimmung

- der Ladung Q der Kugel,
- der Dichte ϱ_{Fl} der Flüssigkeit und
- der Dichte ϱ_{K} des festen Körpers

erfolgen kann. Dabei ist V_{K} das Volumen der Kugel, Q die Ladungsmenge des Körpers, E die

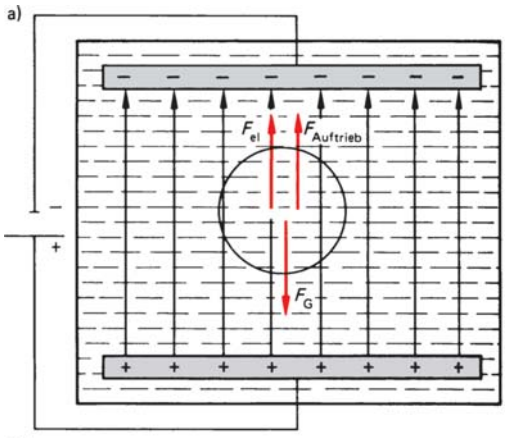


Abb. 4.62 **a** Kräfte auf einen geladenen Körper in einer Flüssigkeit, **b** Kräftegleichgewicht beim Schweben eines Körpers in einer Flüssigkeit unter der Wirkung eines elektrischen Feldes

elektrische Feldstärke und g die Erdbeschleunigung.
Mit einer ähnlichen Messanordnung (mit Luftfüllung) gelang es im Jahr 1910 R. A. Millikan (1868 bis 1953), die *Elementarladung* zu bestimmen und ihre *Quantisierung* nachzuweisen. Für diesen Schwebezustand gilt dann (ohne die Auftriebskraft der Flüssigkeit)

$$F_{el} + F_G = 0 \,,$$
$$Q \frac{U}{d} = m g \,,$$

$$Q = \frac{m g d}{U} \,. \qquad (4.127)$$

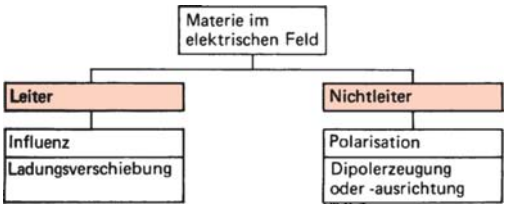


Abb. 4.63 Materie im elektrischen Feld

Die Teilchenmasse kann durch die Sinkgeschwindigkeit im Gravitationsfeld unter Berücksichtigung der *Stokes'schen Reibungskraft* (Abschn. 2.12.2.3, (2.237)) bestimmt werden; hierbei wird der Radius des Masseteilchens mikroskopisch ermittelt.

4.3.6 Leiter im elektrischen Feld

Befindet sich Materie in einem elektrischen Feld, so wirkt auf alle Ladungen in dieser Materie eine elektrische Kraft. Wegen der unterschiedlichen Beweglichkeit der Ladungsträger im Leiter (frei beweglich) und im Nichtleiter (gering beweglich) lassen sich die in Abb. 4.63 zusammengestellten Effekte beobachten:

- Im Leiter werden die beweglichen Elektronen relativ zu den Atomrümpfen verschoben und dadurch positive und negative Ladungsträger getrennt (*Influenz*).
- Im Nichtleiter werden die Ladungsträger nur geringfügig verschoben (*Polarisation*).

Nachfolgend sind die Erscheinungen in Leitern, in Abschn. 4.3.7 die in Nichtleitern beschrieben.

4.3.6.1 Elektrische Influenz, elektrische Verschiebungsdichte und elektrische Feldstärke

In einem Leiter sind die Ladungsträger (im Allgemeinen Elektronen) frei beweglich. Das Leiterinnere ist deshalb immer feldfrei; zusätzlich aufgebrachte Ladungen sitzen stets an der Oberfläche. Sie haben alle das gleiche Potenzial.

Die *Flächenladungsdichte* σ ist ein Maß dafür, wie viel Teilladung ΔQ sich auf einer Teilfläche ΔA befindet:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \,. \tag{4.128}$$

Die Maßeinheit ist $[\sigma] = 1\ \mathrm{C/m^2} = 1\ \mathrm{As/m^2}$. Anhand der Messung der influenzierten Ladung ist eine Beschreibung und Berechnung des elektrischen Feldes möglich. Bringt man beispielsweise gemäß Abb. 4.64a ein metallisches Doppelplättchen in ein homogenes elektrisches Feld, so werden Ladungen auf dem Doppelplättchen getrennt (Abb. 4.64b). Werden anschließend die Plättchen innerhalb des Feldes getrennt (Abb. 4.64c), so verbleibt der Raum zwischen den Plättchen feldfrei. Dies ist nur möglich, wenn die Flächenladungsdichte σ auf den Influenzplättchen genau so groß ist, wie diejenige auf den Kondensatorplatten. Die Ladung ΔQ, die auf den Influenzplättchen sitzt, kann nun außerhalb des elektrischen Feldes gemessen werden, beispielsweise nach (4.3) über den Entladestrom (Abb. 4.64d). Es zeigt sich, dass die so bestimmte Ladungsdichte auf den Influenzplatten der elektrischen Feldstärke proportional ist. Die Proportionalitätskonstante ist die elektrische Feldkonstante ε_0:

$$\sigma = \varepsilon_0 E \,.$$

Das vektorielle Produkt $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ ist eine interessante Feldgröße, die allerdings erst dann wichtig wird, wenn sich Materie im elektrischen Feld befindet (Abschn. 4.3.7). Sie wird als *elektrische Verschiebungsdichte* $\boldsymbol{D}$ bezeich-

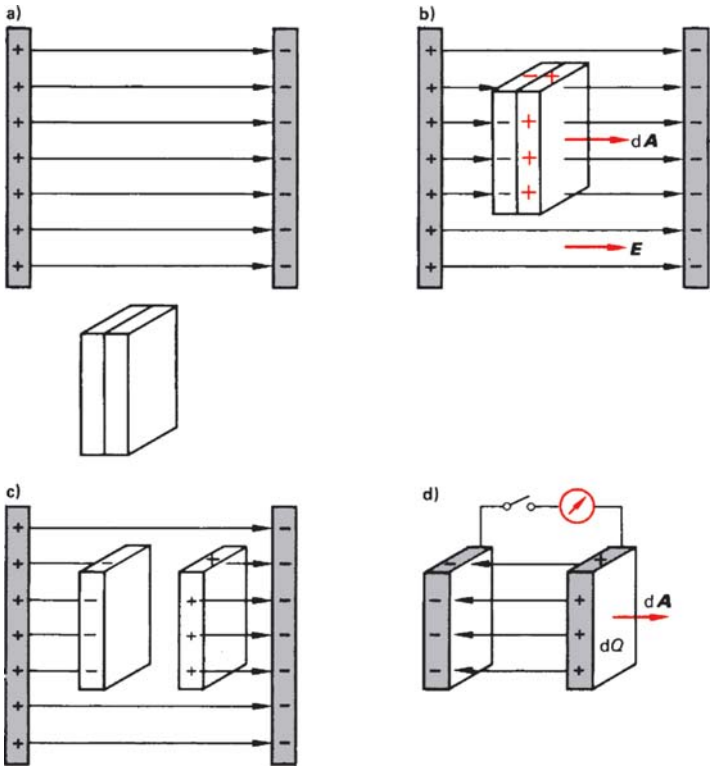


Abb. 4.64 Influenzplatten im homogenen elektrischen Feld

net, weil sie durch Verschieben von Influenzplättchen gemessen werden kann:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \,. \tag{4.129}$$

Ihr Zahlenwert entspricht der *influenzierten Flächenladungsdichte* auf den Metallplatten:

$$|\boldsymbol{D}| = \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \,. \tag{4.130}$$

Ihre Maßeinheit ist $[D] = 1\ \mathrm{C/m^2} = 1\ \mathrm{As/m^2}$.
Die elektrischen Feldlinien haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den Stromlinien der Strömungsmechanik (Abschn. 2.12.2). Wie dort kann man einen *elektrischen Fluss* ψ definieren, der eine bestimmte Fläche A durchsetzt. Die Größe kann interpretiert werden als ein Maß für die Gesamtzahl der Feldlinien, die eine Fläche senkrecht durchsetzen. Abbildung 4.65a zeigt eine Fläche A, die in einem homogenen Feld senkrecht zu den Feldlinien steht. Der Fluss durch diese Fläche ist definiert als

$$\psi = A\, D = A\, \varepsilon_0\, E \,.$$

Die Verschiebungsdichte D spielt damit die Rolle der *Flussdichte*:

$$D = \frac{\psi}{A} \,.$$

Ist das elektrische Feld inhomogen und die Bezugsfläche gegenüber den Feldlinien um den Winkel φ gekippt (Abb. 4.65b), dann sind Fluss und Flussdichte differentiell zu definieren:

$$\mathrm{d}\psi = \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \text{ und } D = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}A_\perp} \,. \tag{4.131}$$

Die elektrische Verschiebungsdichte ist gleich dem elektrischen Fluss je Flächen-Einheit.

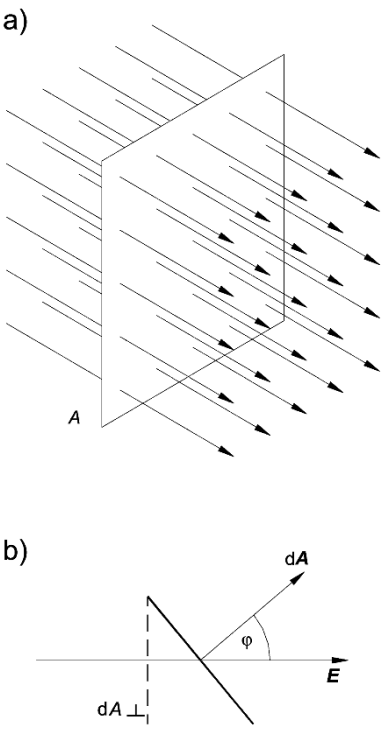


Abb. 4.65 Elektrischer Fluss durch eine Fläche

Der gesamte Fluss ψ durch eine größere Fläche ergibt sich durch Integration über die Fläche:

$$\psi = \int_A \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \,. \tag{4.132}$$

Als Beispiel soll der Fluss durch eine Kugeloberfläche mit Radius R berechnet werden, in deren Zentrum sich die Ladung Q befindet (Abb. 4.66).
Nach (4.93) ist die elektrische Feldstärke einer Punktladung im Abstand R

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \,.$$

Die Feldlinien weisen radial vom Zentrum weg (Abb. 4.66). Damit ist in jedem Punkt der Oberfläche der Normalenvektor $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ parallel zur Ver-

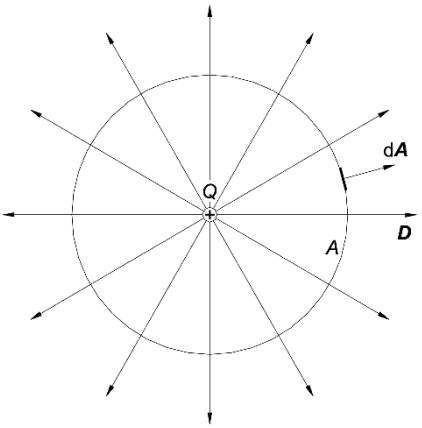


Abb. 4.66 Fluss durch eine Kugeloberfläche

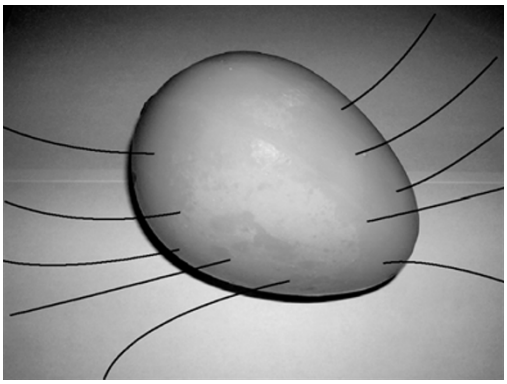


Abb. 4.67 Elektrischer Fluss durch eine geschlossene Oberfläche, in deren Innenraum sich keine Ladungen befinden

schiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ bzw. der Feldstärke $\boldsymbol{E}$. Für das Integral von (4.132) ergibt sich

$$\psi = \oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$
$$= \frac{Q}{4\pi R^2} \oint \mathrm{d}A = Q.$$

Der von einer Punktladung ausgehende Fluss durch eine beliebige konzentrische Kugelfläche entspricht also der Ladung Q der Punktladung. Hätte man anstatt der Kugel eine beliebige andere geschlossene Fläche um die Ladung Q gelegt, dann wäre wegen des Skalarproduktes $\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ dasselbe Ergebnis heraus gekommen.

Sitzen innerhalb einer geschlossenen Fläche n Ladungen Q_i, dann ist der Fluss durch die Oberfläche gleich der Summe der Ladungen. Dieses Ergebnis wird als *Gauß'scher Satz* (C. F. Gauss, 1777 bis 1855) bezeichnet:

$$\psi = \oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,. \qquad (4.133)$$

Der durch eine geschlossene, beliebig geformte Oberfläche gehende elektrische Fluss ist gleich der Summe der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladungen.

Befindet sich innerhalb einer geschlossenen Oberfläche keine Ladung, so ist nach (4.133) der Fluss durch diese Fläche null. Dies hängt einfach damit zusammen, dass der Fluss ein Maß ist für die Zahl der Feldlinien, die eine Fläche durchdringen. Da jede Feldlinie, die in den Raum eintritt, diesen auch wieder verlassen muss (sie kann ja nicht auf einer Ladung im Innern enden), ist der Gesamtfluss null (Abb. 4.67).

Beispiel

4.3-4 Die elektrische Feldstärke im Innern eines Plattenkondensators ist zu bestimmen, wenn auf den Platten der Fläche A die Ladung Q sitzt.

Lösung

Im Idealfall eines Plattenkondensators mit großer Plattenfläche und kleinem Plattenabstand ist der Außenraum feldfrei und im Innern liegt ein homogenes Feld vor (Abb. 4.68). Denkt man sich nun die geschlossene rote Fläche um eine Platte gelegt, dann ist der Fluss durch die Fläche

$$\psi = \oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = D\,A = \varepsilon_0\,E\,A\,.$$

Dieser Fluss muss nach dem Gauß'schen Satz gleich sein der Summe aller Ladungen innerhalb der Bezugsfläche. Also gilt

$$\psi = \varepsilon_0\,E\,A \text{ oder } E = \frac{Q}{\varepsilon_0\,A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

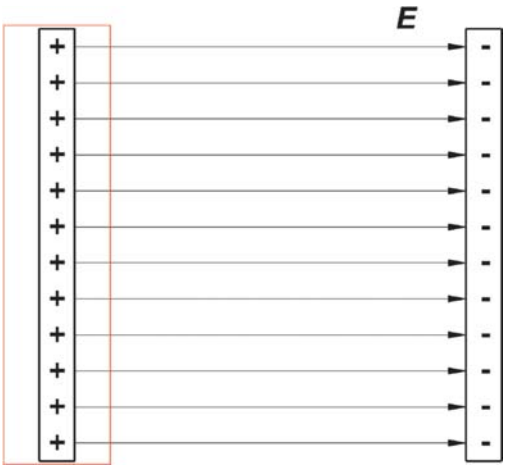


Abb. 4.68 Zur Berechnung der Feldstärke im Plattenkondensator nach Beispiel 4.3-4

Der Gauß'sche Satz ermöglicht bei gewissen geometrischen Konstellationen die Berechnung der Feldstärke aus der Ladungsverteilung. In Abb. 4.70 ist die Feldstärke E in der Umgebung von geladenen Körpern unterschiedlicher Geometrie zusammengestellt.

4.3.6.2 Kondensator und Kapazität

Kondensatoren sind zwei gegeneinander isolierte, entgegengesetzt geladene Leiteroberflächen beliebiger Geometrie, zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ oder eine Spannung U herrscht, wie Abb. 4.69 zeigt. Ein Kondensator ist ein wichtiges elektrisches Bauelement und dient u. a. zur Speicherung elektrischer Ladung und elektrischer Energie.

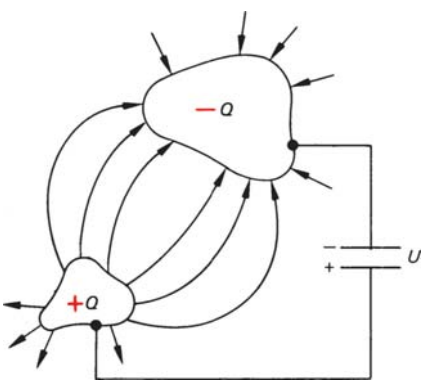


Abb. 4.69 Kapazität beliebiger Körper

Die Geometrie und der Abstand der Leiteroberflächen bestimmen die Ladungstrennungsarbeit und damit die Spannung, die je getrennte Ladungsmenge Q entsteht. Das Maß dafür ist die Kapazität C des Kondensators, d. h. die Ladungsmenge Q, die bei einer Spannung U auf den Kondensatoroberflächen gespeichert wird. Es gilt

$$C = \frac{Q}{U}\,, \qquad Q = C\,U\,. \tag{4.134}$$

Allgemein schreibt man

$$C = \frac{\int \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}}\,. \tag{4.135}$$

Die Kapazität C gibt an, wie viel Ladung Q je Spannungseinheit 1 V gespeichert werden kann.

Die Einheit der Kapazität ist das Farad F: 1 F = 1 As/V.

Ein Farad ist eine sehr große Einheit; in der Praxis sind kleinere Einheiten üblich, z. B. $\mu F = 10^{-6}$ F, $nF = 10^{-9}$ F, $pF = 10^{-12}$ F.

Abbildung 4.71 zeigt das Schaltungssymbol eines Kondensators mit den Messvorschriften für Ladung und Spannung.

Kapazität eines Plattenkondensators

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten im Abstand d (Abb. 4.72). Liegt zwischen ihnen die Spannung U, dann herrscht an jeder Stelle dieselbe elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ (homogenes Feld). Nach Beispiel 4.3-4 ist der Zusammenhang zwischen der Feldstärke und der Ladung auf den Platten

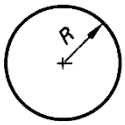
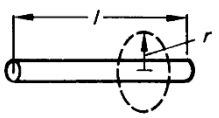
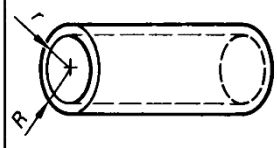
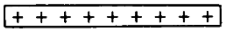
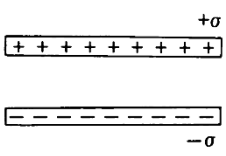
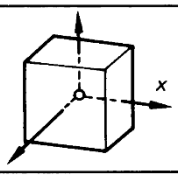
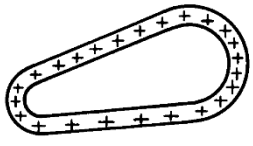
Körper	Geometrie	Ort	elektrische Feldstärke
homogene Kugelladung		innen außen	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r$ (4·134) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ (4·135)
homogen belegte Kugelschicht		innen außen	$E = 0$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ (4·136)
Stab	 λ: Ladung je Länge	außen	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$ (4·137)
Zylinder		innen	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R^2}r$ (4·138)
dünne Platte	 σ: Flächenladungsdichte	beide Seiten	$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma$ (4·139)
zwei dünne Platten		zwischen	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$ (4·140)
dicke Platte	ρ: Raumladungsdichte 	Abstand x von der Mittellinie	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho x$ (4·141)
Leiter		Oberfläche	$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$ (4·142)

Abb. 4.70 Elektrische Feldstärke von geladenen Körpern verschiedener Geometrien

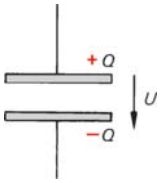


Abb. 4.71 Symbol für die Kapazität

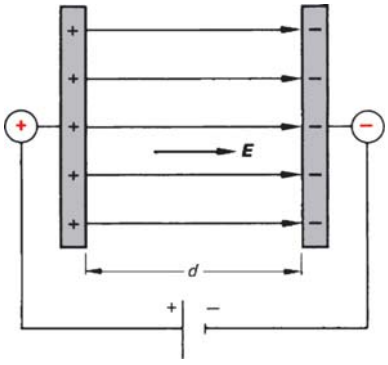


Abb. 4.72 Plattenkondensator

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} .$$

Nach (4.94) und Beispiel 4.3-2 gilt $E = U/d$ und damit

$$Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} U .$$

Hieraus folgt für die Kapazität des Plattenkondensators C_{Pl}

$$\frac{Q}{U} = C_{\mathrm{Pl}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} . \qquad (4.136)$$

Diese Beziehung ist nur gültig, wenn zwischen den Platten Vakuum (oder näherungsweise Luft) ist. In anderen Fällen ist ε_0 durch die *Permittivität* $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ zu ersetzen (Abschn. 4.3.7). Wie man aus (4.136) folgern kann, ist die Kapazität eines Plattenkondensators C_{Pl} nur abhängig von der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d. Sie ist umso größer, je größer die Plattenfläche A und je kleiner der Plattenabstand d ist. In der Technik vergrößert man die Fläche durch Aufwickeln von Metallfolie (oder Aufrauen der Oberfläche durch Ätzen bei Elektrolytkondensatoren) und verkleinert die Abstände, indem man dünne Kunststofffolien (oder Oxidschichten) als Zwischenlagen verwendet. Für einen Kondensator mit n Platten gilt

$$C = \varepsilon_0 \frac{(n-1)\,A}{d} . \qquad (4.137)$$

Kapazität eines Kugelkondensators

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrisch angeordneten Hohlkugeln mit den Radien r_1 und r_2 gemäß Abb. 4.73. Ist der Abstand der beiden Hohlkugeln Δr sehr klein, dann kann näherungsweise die Bestimmung der Kapazität nach (4.136) für den Plattenkondensator erfolgen; hierbei ist die Fläche $A = 4\pi r^2$ und $d = \Delta r$, sodass sich

$$C_{\mathrm{Kug}} = 4\pi\,\varepsilon_0 \frac{r^2}{\Delta r} \qquad (4.138)$$

ergibt. Für größere Abstände der beiden Hohlkugeln gilt

$$C_{\mathrm{Kug}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1\, r_2}{(r_2 - r_1)} . \qquad (4.139)$$

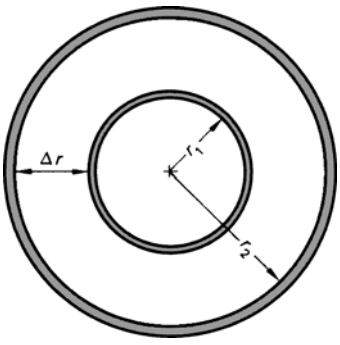


Abb. 4.73 Kugelkondensator

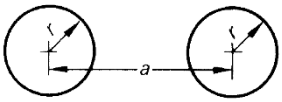
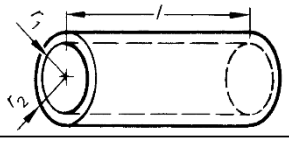
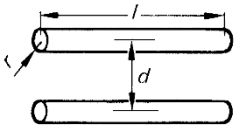
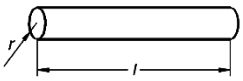
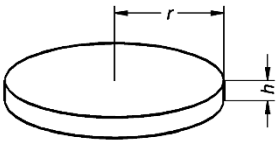
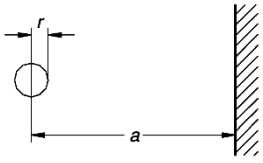
Körper	Geometrie	Kapazität
zwei gleiche Kugeln		$C = 2\pi\varepsilon_0 r\left[1 + \frac{r(a^2-r^2)}{a(a^2-ar-r^2)}\right]$ (4.141)
Zylinder-kondensator		$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$ (4.142)
Koaxial-leitung		$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d}{r}\right)}$ (4.143)
langer Zylinder $l \gg r$		$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{l}{r}\right)}$ (4.144)
flache Scheibe $r \gg h$		$C = \frac{8\varepsilon_0 r}{1-\frac{h}{\pi r}} \approx 8\varepsilon_0 r$ (4.145)
dünner Draht gegen Wand $a \gg r$		$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2a}{r}\right)}$ (4.146)

Abb. 4.74 Kapazitäten von Körpern verschiedener Geometrien

Die Kapazität einer einzigen Kugel mit dem Radius r ist

$$C_{\text{Kug}} = 4\pi\,\varepsilon_0\,r\,. \qquad (4.140)$$

Abbildung 4.74 gibt die Gleichungen für die Kapazitäten anderer Geometrien wieder.

Beispiel

4.3-5 Die Gleichung für die Kapazität eines Zylinderkondensators (4.151) soll hergeleitet werden.

Lösung

Nach (4.132) und (4.133) gilt $\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$.

Für eine geschlossene Fläche im Abstand r entsprechend Abb. 4.75 und unter Berücksichtigung der Länge l des Zylinders gilt

$$\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = E(2\pi r)l = Q/\varepsilon_0\,,$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\,2\pi r l}\,.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten beträgt nach (4.100)

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0 l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\,.$$

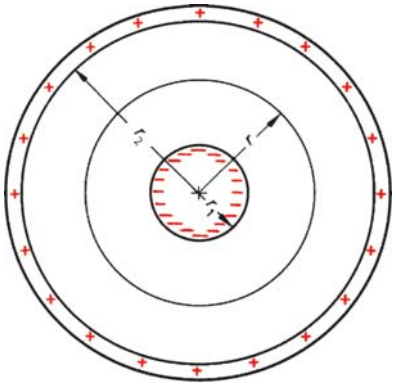


Abb. 4.75 Querschnitt eines Zylinderkondensators

Für die Kapazität gilt

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q 2\pi\varepsilon_0 l}{Q \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} .$$

Beispiel

4.3-6 Die Erdkugel ist stets negativ geladen mit der Ladung $Q \approx -900\,000$ C. Die positive Gegenladung sitzt in den höheren Schichten der Atmosphäre ($h = 100$ km). Wie groß ist die Kapazität dieses riesigen Kugelkondensators?

Lösung

Nach (4.139) gilt

$$C_{\text{Kug}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)} = 45{,}85 \text{ mF} .$$

Schaltung von Kapazitäten

Bei der Parallelschaltung addieren sich die speichernden Flächen für die Speicherung der negativen bzw. positiven Ladungen (4.136) und deshalb ist die Gesamtkapazität gleich der Summe der parallelen Einzelkapazitäten. Bei der Reihenschaltung addieren sich jedoch die Einzelspannungen und somit die Kehrwerte der Kapazitäten (4.136). In Abb. 4.76 sind die Gleichungen für die Ersatzkapazitäten bei der Parallel- und Reihenschaltung zusammengestellt.

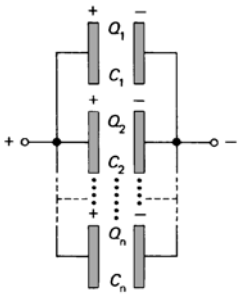
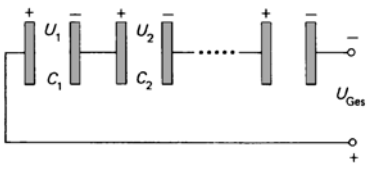
Schaltungsart	Parallelschaltung	Reihenschaltung
konstante Größe	Spannung U = konstant	Ladung Q = konstant
Anordnung		
Addition	Gesamtladung $Q_{\text{Ges}} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$	Gesamtspannung $U_{\text{Ges}} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$
Ersatz-kapazität	$C_{\text{Ges}} U = C_1 U + C_2 U + \ldots C_n U$ $C_{\text{Ges}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ $C_{\text{Ges}} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ (4.147)	$\frac{Q}{C_{\text{Ges}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n}$ $\frac{1}{C_{\text{Ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$ $C_{\text{Ges}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$ (4.148)

Abb. 4.76 Ersatzkapazität bei Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren

4.3.7 Nichtleiter im elektrischen Feld, elektrische Polarisation und Permittivitätszahl

In Nichtleitern (Isolatoren) sind die Ladungsträger nicht frei beweglich. Deshalb ist auch das Innere eines Nichtleiters im elektrischen Feld nicht feldfrei. Das Feld greift gleichsam durch den Isolator hindurch. Solche Stoffe werden deshalb auch *Dielektrika* genannt (nach dem griechischen Wort „dia“ für „durch“).
Abbildung 4.77 zeigt die Vorgänge in einem Plattenkondensator. Vor Einbringen des Dielektrikums herrsche die elektrische Feldstärke $E_0 = U_0/d$ (Abb. 4.77a). Wird ein Dielektrikum zwischen die Platten gebracht, so verschieben sich die Ladungen auf dem Isolator, sodass ein geringeres Feld E_m im Dielektrikum zwischen den Platten herrscht (Abb. 4.77b). Es ist $E_\mathrm{m} < E_0$ und deshalb $U_\mathrm{m} < U_0$; es gilt

$$\frac{E_0}{E_\mathrm{m}} = \frac{U_0}{U_\mathrm{m}} = \varepsilon_\mathrm{r} \,. \qquad (4.149)$$

Wegen $C = Q/U$ führt dies bei konstanter Ladung zu

$$\frac{C_\mathrm{m}}{C_0} = \varepsilon_\mathrm{r} \,, \quad C_\mathrm{m} = \varepsilon_\mathrm{r}\, C_0 \,. \qquad (4.150)$$

Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld gebracht, so nimmt die elektrische Feldstärke gegenüber der des Vakuums auf den ε_r-ten Teil ab, während die Kapazität durch das Einbringen des Dielektrikums auf das ε_r-fache steigt.

Die Größe ε_r wird *Permittivitätszahl* oder *relative Dielektrizitätszahl* genannt und ist dimensionslos. Ihr Wert ist stets $\geqq 1$. Wie Abb. 4.77b zeigt, wird die ursprüngliche Feldstärke $\boldsymbol{E}_0$ um das Gegenfeld $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$, d. h. um das elektrische Feld der Polarisationsladungen im Dielektrikum geschwächt:

$$E_\mathrm{m} = \frac{E_0}{\varepsilon_\mathrm{r}} = E_0 - E_\mathrm{P} \,. \qquad (4.151)$$

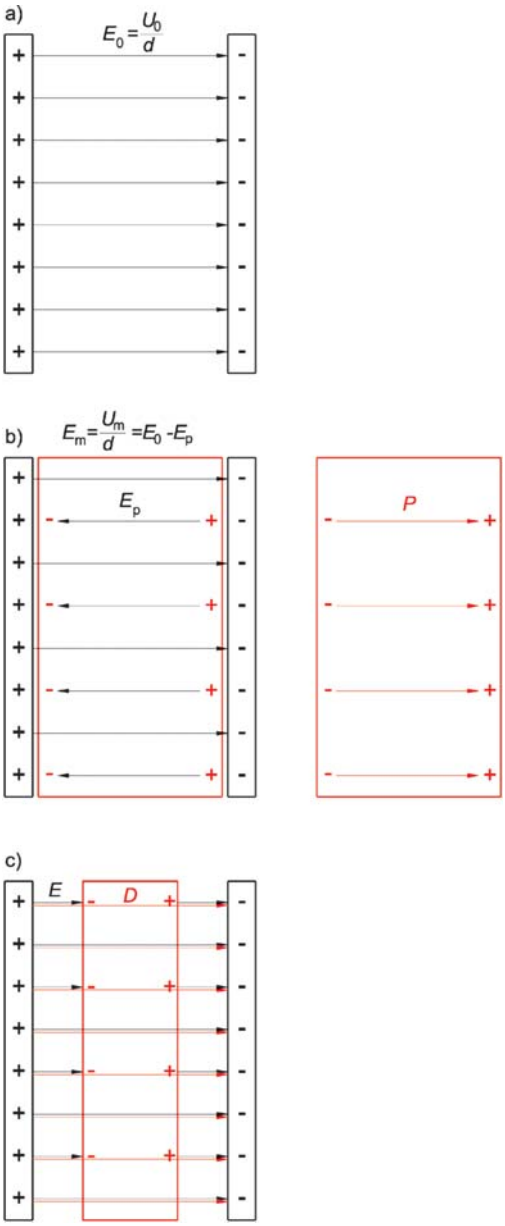


Abb. 4.77 Feldverlauf zwischen den Platten eines Kondensators mit und ohne Dielektrikum, $\varepsilon_\mathrm{r} = 2$

Wird der Kondensator an die Spannungsquelle angeschlossen, so können so viele Ladungen auf die Plattenoberfläche des Kondensators nachfließen, dass das Polarisationsfeld $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$ (*Elektrisierung*) kompensiert wird und wieder das ursprüngliche Feld herrscht. Dann nimmt aber die Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}_\mathrm{m}$ auf das ε_r-fache zu oder wird um die *elektrische Polarisation* $\boldsymbol{P}$, d. h. um die Dichte der Polarisationsladungen auf der Dielektrikumsoberfläche erhöht:

$$\boldsymbol{D}_\mathrm{m} = \varepsilon_\mathrm{r}\, \boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P}\,. \tag{4.152}$$

Da die Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$ ist (4.140), ergibt sich

$$\boldsymbol{D}_\mathrm{m} = \varepsilon_0\, \varepsilon_\mathrm{r}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m} = \varepsilon\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m} = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m} + \boldsymbol{P}\,. \tag{4.153}$$

Ferner gilt

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_\mathrm{r}\,. \tag{4.154}$$

Für das elektrische Feld in einem Dielektrikum steht bei allen physikalischen Gleichungen statt ε_0 das Produkt $\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_\mathrm{r}$ (*Permittivität*).

Tabelle 4.8 zeigt die Permittivitätszahl einiger wichtiger Dielektrika. Aus (4.153) folgt für die elektrische Polarisation

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_\mathrm{m} - \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m} = \varepsilon_0\, \varepsilon_\mathrm{r}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m} - \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m}$$

oder

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m}\, (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\,. \tag{4.155}$$

Der Faktor $(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)$ ist die *elektrische Suszeptibilität* χ_e. Somit gilt

Tabelle 4.8 Permittivitätszahl einiger Werkstoffe

Werkstoffe	Permittivitätszahl ε_r
Paraffin	2,2
Polypropylen	2,2
Polystyrol	2,5
Polycarbonat	2,8
Polyester	3,3
Kondensatorpapier	4 bis 6
Zellulose	4,5
Al_2O_3	12
Ta_2O_5	27
Wasser	81
Keramik (NDK)	10 bis 200
Keramik (HDK)	10^3 bis 10^4

$$\boldsymbol{P} = \chi_\mathrm{e}\, \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_\mathrm{m}\,. \tag{4.156}$$

Für das zur Polarisation $\boldsymbol{P}$ gehörende elektrische Gegenfeld $\boldsymbol{E}_\mathrm{P}$ folgt aus (4.151) unter Berücksichtigung von (4.155)

$$E_\mathrm{P} = E_0 - E_\mathrm{m} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right) E_0 = \chi_\mathrm{e}\, E_\mathrm{m}\,. \tag{4.157}$$

Für Dielektrika ist $\varepsilon_\mathrm{r} > 1$ und deshalb $\chi_\mathrm{e} > 0$. Für Vakuum gilt $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ bzw. $\chi_\mathrm{e} = 0$.
Bei einer Verbindung einer Spannungsquelle mit einem Kondensator ist die Spannung U und damit E konstant, während bei Trennung des Kondensators von der Spannungsquelle die Ladung Q und damit die Verschiebungsdichte D gleich bleibt. In beiden Fällen steigt die Kapazität auf das ε_r-fache an, wenn ein Dielektrikum in den Kondensator eingebracht wird. Bleibt der Kondensator mit der Spannungsquelle verbunden, dann erhöht sich die elektrische Energie W_el auf das ε_r-fache, wäh-

Tabelle 4.9 Kondensator und Dielektrikum

	Kondensator bleibt mit der Spannungsquelle verbunden	Kondensator wird von der Spannungsquelle getrennt
konstante Größen	elektrische Spannung U, elektrische Feldstärke $E = \frac{U}{d}$	Ladung Q, Verschiebungsdichte $D = \frac{Q}{A}$
sich ändernde Größen	Ladung Q bzw. Verschiebungsdichte D, $Q = D\,A \sim \varepsilon_r$, Kapazität $C = \frac{Q}{U} \sim \varepsilon_r$, elektrische Energie $W = \frac{1}{2} C\,U^2 \sim \varepsilon_r$	Spannung U bzw. Feldstärke E, $U = E\,d \sim \frac{1}{\varepsilon_r}$, Kapazität $C = \frac{Q}{U} \sim \varepsilon_r$, elektrische Energie $W = \frac{1}{2} C\,U^2 \sim \frac{1}{\varepsilon_r}$

rend sie sich im anderen Fall auf den ε_r-ten Teil verringert.

Tabelle 4.9 zeigt in den Spalten die beiden Fälle (Kondensator mit der Spannungsquelle verbunden oder getrennt) und in den Zeilen, welche der elektrischen Größen konstant bleiben bzw. sich ändern.

Abbildung 4.77c zeigt den Fall eines teilweise gefüllten Kondensators. Schwarz gezeichnet sind die Feldlinien des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ und rot diejenigen des Feldes der Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$. Während $\boldsymbol{E}$ im Innenraum der Materie reduziert wird, also an der Grenzfläche einen Sprung erleidet, ist $\boldsymbol{D}$ überall konstant. Das bedeutet, dass das D-Feld eine Grenzfläche stetig durchsetzt. Bei schräg zu den Feldlinien verlaufenden Grenzflächen gilt dies für die Normalkomponente (Abb. 4.83).

Kondensatoren als Bauelemente in der Elektrotechnik

Kondensatoren gehören zu den wichtigsten Bauelementen in der Elektrotechnik. Die Werte für die Kapazitäten erstrecken sich über zwölf Dekaden (von 1 pF bis 1 F). In sehr unterschiedlichen Bereichen werden Kondensatoren eingesetzt, beispielsweise

- beim *Speichern von Ladung* und *elektrischer Energie* (Elektronen-Blitzgerät, Plasmaerzeugung, Laser, Kopierer);
- bei der *Trennung* von Gleich- und Wechselstrom bzw. von Wechselströmen unterschiedlicher Frequenzen (Lautsprecherankopplung, Verstärker, Störschutz) sowie zur Siebung und Glättung von pulsierenden Gleichspannungen (Brumm-Siebung bei netzbetriebenen Elektrogeräten);
- in *Schwingkreisen*, beispielsweise zur Senderabstimmung bei Rundfunk- und Fernsehempfängern;
- in *Zeitkreisen* (RC-Glieder, Blinkschaltungen, Anzugs- und Abfallsverzögerungen für Relais);
- als *Phasenschieber*
  - zur *Blindstromkompensation* (Leuchtstofflampen mit Spule oder Leistungskondensatoren nach VDE 0560-4);
  - zur *Drehfelderzeugung* (Hilfsphase für Motoranlauf oder Motorbetrieb an ein Ein-Phasen-Netz, Motorbetriebs-Kondensatoren nach VDE 0560-8);
- in der *Leistungselektronik* (Bedämpfen von Spannungsspitzen, Kommutierung, Filtern von Oberwellen).

Abbildung 4.78 zeigt eine Einteilung von Fest-Kondensatoren nach ihren Technologien sowie die einstellbaren Kondensatoren. Diese Übersicht enthält die einzelnen Kondensatortypen, ferner die zugehörigen Nennspannungs- und Kapazitätsbereiche, die Verlustfaktoren, wichtige Normen und typische Anwendungsfelder. Schnittbilder, Prinzipskizzen und Bilder veranschaulichen die Funktionsweise bzw. die Bauformen von Kondensatoren. Das Diagramm rechts zeigt, für welche Spannungs-Kapazitäts-Bereiche die entsprechenden Kondensatorentypen Verwendung finden.

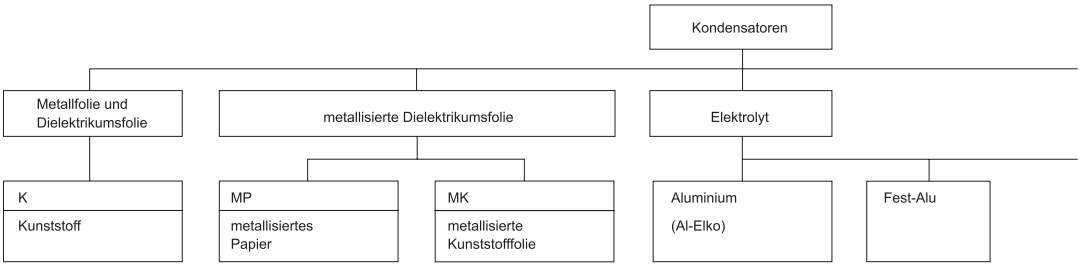
Bei den *Folien-Kondensatoren* bestehen die Kondensatorplatten aus Metallfolien (meist Aluminium) und die Dielektrika aus Papier- oder aus Kunststofffolien. Metallfolien und Dielektrika werden aufgewickelt. Kunststofffolien haben wegen ihres niedrigeren Verlustfaktors, ihrer großen Homogenität und ihrer kleineren Dicken (bis zu 1,5 µm) Papier als Dielektrikum zum Teil verdrängt. Papier ist pflanzlicher Herkunft, das oft die geforderten engen Toleranzen elektrischer Werte nicht einhalten kann. Abbildung 4.79 zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme von Kondensatorpapier (32 000-fach vergrößert). Hierbei wird die zerklüftete Oberflächenstruktur deutlich.

Von den Kunststoffen sind als Dielektrikum vor allem Polycarbonat (C), Polypropylen (P), Polystyrol (S) und Polyester (Polyethylenterephthalat (T)) im Einsatz. Die in Klammern gesetzten Abkürzungen werden zur Kennzeichnung des Kunststoffes verwendet. Der wichtigste Kunststoff ist *Polypropylen* (P). Besondere Bedeutung hat auch *Polystyrol* (S) im „Styroflex"-Kondensator, da dieser Kunststoff einen negativen Temperaturkoeffizienten aufweist und damit gut zur Temperaturkompensation verwendet werden kann. Ein spezielles Anwendungsgebiet für Kunststofffolien-Kondensatoren ist in der *Leistungselektronik* der Bereich hoher Spannungen (100 V bis 6,6 kV) und hoher Kapazitäten (0,1 µF bis 15 mF). Diese Kondensatoren werden als *Leistungs-Kondensatoren* (Lei-Ko) bezeichnet.

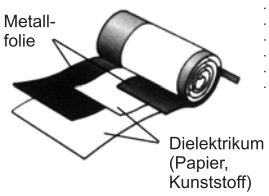
Bei Kondensatoren mit *metallisierten Elektroden* werden die Dielektrika mit Metall (meist Aluminium oder Zink) bedampft. Metallisierte Papierfolien werden häufig mit MP, metallisierte Kunststofffolien mit MK abgekürzt. Bei den Kunststoffen dient ein weiterer Buchstabe zur Kennzeichnung der Kunststoffart (z. B. MKP: metallisierte Kunststofffolie aus Polypropylen).

Die Kunststofffolien werden in Dicken bis unter 2 µm verwendet. Eine wichtige Eigenschaft der MK-Kondensatoren ist die Fähigkeit zur Ausheilung nach erfolgten Durchschlägen.

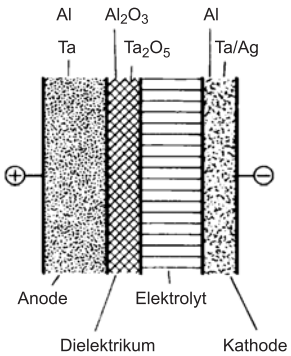
Die *Elektrolytkondensatoren* überdecken den größten Bereich an Spannung und Kapazität und zählen zu den zuverlässigsten Bauelementen. Außer dem verhältnismäßig preisgünstigen Aluminium-Elektrolyt-Kondensator (*Alu-Elko*) ist der *Tantal-Elko* (Ta-Elko) vor allem wegen seiner hohen Ladungsdichte begehrt. Bei einem Elko besteht die Anode aus Metall (Al oder Ta). In Al-Elkos werden Aluminiumfolien (100 µm dick) verwendet, deren Oberfläche durch Ätzen etwa um das 20- bis 100-fache vergrößert ist. Bei Tantal wird die große Oberfläche durch Sintern von Tantal-Pulver erzeugt (1 cm^3 gesintertes Ta-Pulver hat eine Oberfläche bis zu etwa 30 000 cm^2, d. h. 3 m^2). Abbildung 4.80 zeigt eine Aufnahme mit dem Rasterelektronenmikroskop (3 000-fache Vergrößerung) von der Oberfläche einer geätzten Aluminium-Folie. Die größere Oberfläche und die doppelt so große Permittivität von Tantaloxid ($\varepsilon_r = 27$) im Vergleich zu Aluminiumoxid ($\varepsilon_r = 12$) erlauben für Tantal-Elkos kleinere Bauformen bei gleichen Kapazitätswerten. Das Dielektrikum eines Elkos be-



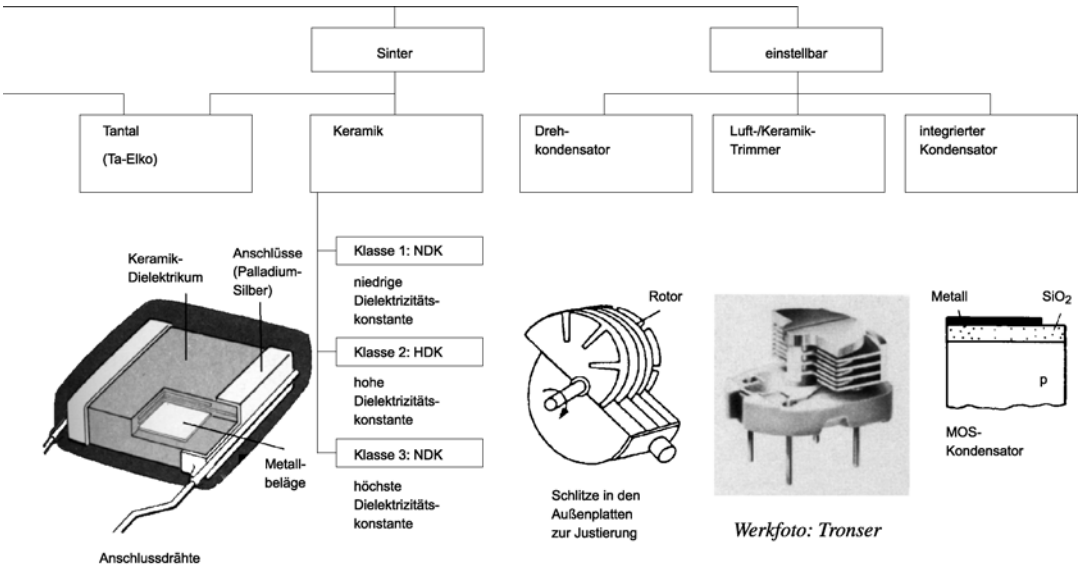
· KC (Polycarbonat)
· KI (Polyphenylensulfid)
· KP (Polypropylen)
· KS (Polystrol „Styroflex")
· KT (Polyethylenterephthalat)



· MKC
· MKI
· MKP
· MKS
· MKT
· MKU (Zellulose)



	Kunststoff	metallisiertes Papier	metallisierte Kunststofffolie	Aluminium (Alu-Elko)	Tantal (Ta-Elko)	Keramik
Nenn-spannung	50 V bis 630 V	100 V bis 7 kV	50 V bis 6 kV	6 V bis 600 V	2,5 V bis 50 V	10 V bis 500 V
Kapazitäts-bereich	2 pF bis 500 nF	100 pF bis 15 mF	100 pF bis 10 µF	1 µF bis 1 F	100 nF bis 1,5 mF	1 pF bis 4 µF
Verlustfaktor tan $\delta \cdot 10^{-3}$	10 kHz: 0,1 bis 1	1 kHz: 4 bis 15	10 kHz: 0,25 bis 15	50 Hz: 50	120 Hz: 30 bis $10 \cdot 10^3$	1 kHz: ≤ 60
gespeicherte Energie pro Volumen	mittel	mittel	mittel	hoch	hoch	gering (Klasse 3: mittel)
Güte	1000	1000	1000	gering	gering	Klasse 1: hoch bis sehr hoch Klasse 2, 3: gering
Frequenz-bereich	Gleichspannung und Niederfrequenz bis MHz-Bereich			NF und Gleichspannung	NF und Gleichstrom	NF und HF
Normen	DIN IEC 60384-11/12/13 EN 130100 EN 130900 EN 131700 EN 131800		DIN IEC 60384-16 CECC 30400 CECC 32200 EN 130500 EN 131200 DIN 45910-11/28	DIN IEC 60384-4 CECC 30301-801… 811	CECC 30800	CECC 30600 CECC 31100 CECC 31400 CECC 31600 EN 60384-9 EN 132100
Anwendungs-bereiche	Schwingkreis Koppel-Filter-Kondensator, Kfz-Elektronik, Schaltnetzteile, Impulsschaltungen	Motorkondensator, Filterkondensator, Stosskondensator, Funkentstörkondensator		Energiespeicher, Sieben bei niedrigen und hohen Frequenzen	Mess- und Regeltechnik, Datentechnik, Kfz-Elektronik, Kommunikations-technik, Schaltnetzteile	Datentechnik, Kfz-Elektronik, Kommunikations-technik
Bauformen	BT SA CFC			KS ES V (Chip)		



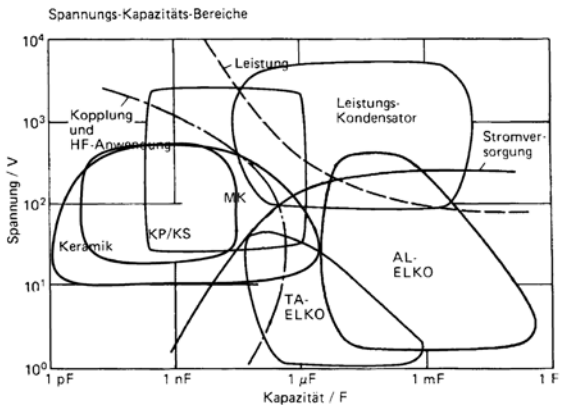


Abb. 4.78 Einteilung der Kondensatoren

steht aus einer atomaren Oxidschicht (Al_2O_3 bzw. Ta_2O_5). Durch einen flüssigen Elektrolyten wird die Leitung zur negativen Kathodenfolie aus hochreinem Metall sichergestellt. Die Elkos müssen polungsrichtig eingebaut werden. Häufig kennzeichnet der längere Anschlussdraht den positiven Pol. Den Aufbau für Al- bzw. Ta-Elkos zeigt eine Skizze in Abb. 4.78.

Außer den gesinterten Ta-Elkos werden auch *Keramik-Kondensatoren* in Sintertechnik hergestellt. Man unterscheidet drei Typen:

– *Typ-I-Kondensatoren*
Das Dielektrikum besteht aus einer Keramikschicht mit niedriger Dielektrizitätszahl (ND; ε_r von 10 bis 200), z. B. Titandioxid und Magnesiumtitanat;



Abb. 4.79 Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Kondensatorpapiers (32 000-fache Vergrößerung)

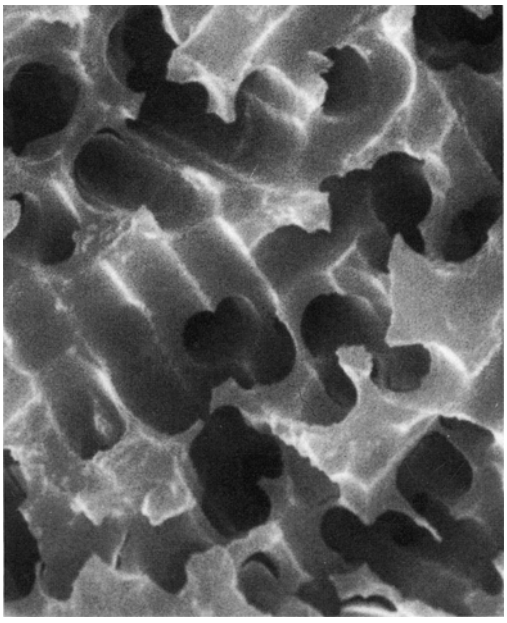


Abb. 4.80 Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme einer geätzten Aluminiumfolie (3 000-fache Vergrößerung)

- *Typ-II-Kondensatoren*
  Die dielektrische Keramikschicht besitzt eine hohe Dielektrizitätszahl (HD; ε_r von 700 bis 10^4), z. B. Bariumtitanat;
- *Typ-III-Kondensatoren*
  Als Ausgangsmaterial wird eine ferroelektrische Scheibe verwendet (z. B. Bariumtitanat), die durch Reduktions- und Oxidationsprozesse Halbleitersperrschichten bildet, die wie ein Dielektrikum wirken. Diese Kondensatoren haben spannungsabhängige Kapazitätswerte.

Die Keramik-Kondensatoren werden häufig in Chip-Ausführung als *Vielschicht-Kondensator* hergestellt. Besonders geschätzt sind die erzielbaren kleinen Abmessungen, die hohe Volumenkapazität sowie die gute Lötbarkeit auf Leiterplatten.

Bei den einstellbaren Kondensatoren wird zwischen Drehkondensatoren, Luft- und Keramiktrimmern und Kapazitätsdioden unterschieden. *Drehkondensatoren* bestehen aus Plattenpaketen mit je einer festen Einheit (Stator) und einer drehbaren Platte (Rotor). Bis zu vier Plattenpakete werden üblicherweise hintereinander geschaltet. Werden die Rotorplatten gedreht, dann ändern sich die Kapazitäten (linear oder logarithmisch). *Trimmer* dienen zum Feinabgleich von Kapazitätswerten. Die Plattenflächen werden entweder wie beim Drehkondensator gedreht oder bestehen aus konzentrisch angeordneten zylindrischen Elektroden (aus Aluminium oder verzinktem Messing). Die *Kapazitätsdioden* sind die modernsten Bauelemente für einstellbare Kapazitäten, wie sie u. a. beim automatischen Sendeabgleich in Rundfunkgeräten Einsatz finden.

Das Diagramm rechts in Abb. 4.78 zeigt die *Spannungs-Kapazitäts-Bereiche* der verschiedenen Kondensatortypen. Leistungskondensatoren (Lei-Ko) werden u. a. in der Leistungselektronik eingesetzt, z. B. zur Unterdrückung von Spannungsspitzen an Leis-

tungshalbleitern (Trägerstaueffekt). Für den Bereich der Stromversorgung werden überwiegend Elektrolytkondensatoren verwendet. Bei der Kopplung und HF-Anwendung spielen die Keramikkondensatoren, die metallisierten Folien-Kondensatoren sowie die Metall- und Kunststofffolien-Kondensatoren eine bedeutende Rolle.

Atomistische Deutung der elektrischen Polarisation

Fallen die Schwerpunkte der positiven Ladung $+Q$ und der negativen Ladung $-Q$ nicht in einem Punkt zusammen, so entsteht ein elektrischer Dipol. Dieser wird durch das *elektrische Dipolmoment* $\boldsymbol{p}$ beschrieben:

$$\boldsymbol{p} = Q\,\boldsymbol{d}\,. \tag{4.158}$$

$\boldsymbol{d}$ ist der Abstand der beiden Ladungen. Der Vektor $\boldsymbol{p}$ zeigt von der negativen zur positiven Ladung. Die Summe aller Dipolmomente geteilt durch das Probenvolumen ist die in Abb. 4.77 eingeführte Polarisation P:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_\mathrm{i}}{V} = \frac{N}{V}\bar{\boldsymbol{p}}\,.$$

Wird nichtleitende Materie in ein elektrisches Feld gebracht, so verschieben sich die Ladungsschwerpunkte der Moleküle, sie werden elektrisch *polarisiert*. Grundsätzlich sind zwei Arten von Polarisation möglich, wie Abb. 4.81 verdeutlicht:

- *Verschiebungspolarisation* (*dielektrische* Polarisation).
- *Orientierungspolarisation* (*paraelektrische* Polarisation).

Bei der Verschiebungspolarisation werden die ursprünglich zusammenfallenden positiven und negativen Ladungen verschoben, sobald diese Moleküle ins elektrische Feld geraten. (Die leichter beweglichen Elektronenhüllen werden auf die positive Seite gezogen.) Das so induzierte Dipolmoment ist in bestimmten Grenzen von der Feldstärke abhängig und im elektrischen Feld immer wirksam, vorausgesetzt, es liegt kein permanenter Dipol vor. Beim Abschalten des Feldes verschwindet der Dipol und die Ladungsschwerpunkte fallen wieder in einem Punkt zusammen.

Die paraelektrische Polarisation (in Analogie zum Paramagnetismus, Abschn. 4.4.4.2) oder Orientierungspolarisation tritt nur bei Molekülen mit einem Dipolmoment auf (z. B. Wasser). Im elektrischen Feld erfolgt eine Orientie-

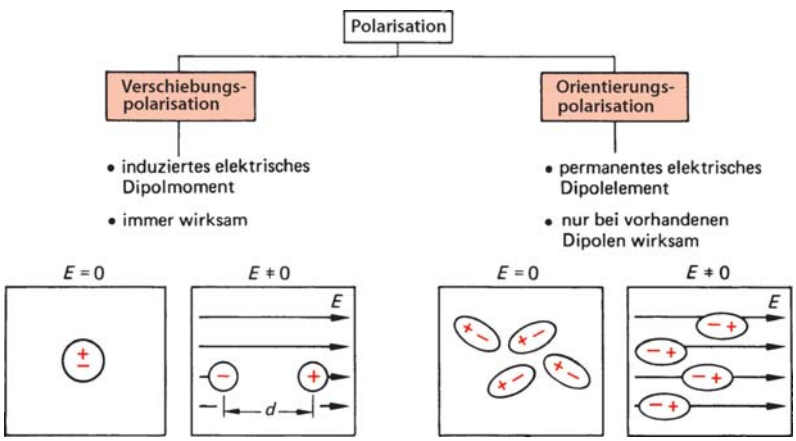


Abb. 4.81 Arten der elektrischen Polarisation

rung der Dipole. Da die Wärmebewegung die Orientierung behindert, ist die paraelektrische Polarisation stark temperaturabhängig.
Ist die Verschiebungspolarisation oder die paraelektrische Polarisation in allen drei Raumrichtungen gleich groß, so liegt ein *isotropes Verhalten* vor. Die drei Vektoren elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ und Polarisation $\boldsymbol{P}$ stehen parallel zueinander und können anhand von (4.153) und (4.156) umgerechnet werden. Für den Fall einer *richtungsabhängigen*, d. h. *anisotropen Polarisation* wird ε_r ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. So gilt für die Umrechnung des Vektors der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ in den Vektor der elektrischen Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}(x, y, z)$ (4.153)

$$\boldsymbol{D}(x,y,z) = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, \boldsymbol{E}(x,y,z)$$

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} . \qquad (4.159)$$

Dabei stellt z. B. das Element ε_{xz} den ε_r-Wert dar, der von der x-Komponente der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ herrührt und einen Beitrag zur z-Komponente der elektrischen Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ liefert. Die Zeilen des Tensors ε_r geben deshalb die Aufteilung der Raumkom-

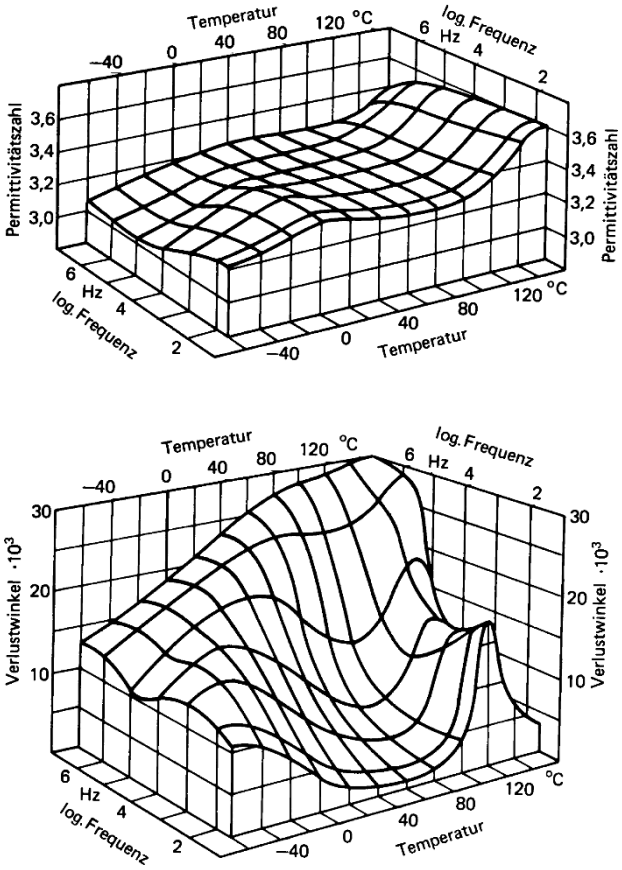


Abb. 4.82 Temperatur- und Frequenzabhängigkeit der Permittivitätszahl und des Verlustwinkels von Polyester

ponenten von $\boldsymbol{E}$ und die Spalten die Herkunft der Raumkomponenten von $\boldsymbol{D}$ wieder.
Die Permittivitätszahl ε_r ist häufig auch noch temperatur- und frequenzabhängig. Abbildung 4.82 zeigt die Permittivitätszahl und den Verlustwinkel (Abschn. 4.5.2.3) von Polyester in Abhängigkeit von der Temperatur und der Frequenz.

Elektrische Feldstärke und elektrische Verschiebungsdichte an Grenzflächen

Abbildung 4.77c zeigt, dass sich bei senkrechtem Verlauf der elektrischen Feldlinien zur Grenzfläche die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ an der Grenzfläche zwischen Vakuum und Dielektrikum sprungartig ändert, während die Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ stetig die Grenzfläche durchdringt.
Verlaufen die elektrischen Feldlinien schräg zur Grenzfläche der Dielektrika, so gelten gemäß Abb. 4.83 für die Normal- bzw. Tangentialkomponenten des $\boldsymbol{E}$- bzw. $\boldsymbol{D}$-Vektors folgende Gesetzmäßigkeiten:

$$\tan\varphi_1 = \frac{D_1^t}{D_1^n}, \quad \tan\varphi_2 = \frac{D_2^t}{D_2^n};$$

daraus folgt

$$\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2} = \frac{D_1^t}{D_2^t}$$

und mit (4.169)

$$\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \tag{4.162}$$

Die elektrischen Feldlinien an der Grenzfläche zweier unterschiedlicher Dielektrika gehorchen einem Brechungsgesetz (analog zur Optik).

Das Brechungsgesetz sagt aus, dass beim Eintritt in einDielektrikum mit größerem ε_r (kleinerem ε_r) die Feldlinien (für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$) vom Lot weg (zum Lot hin) gebrochen werden.

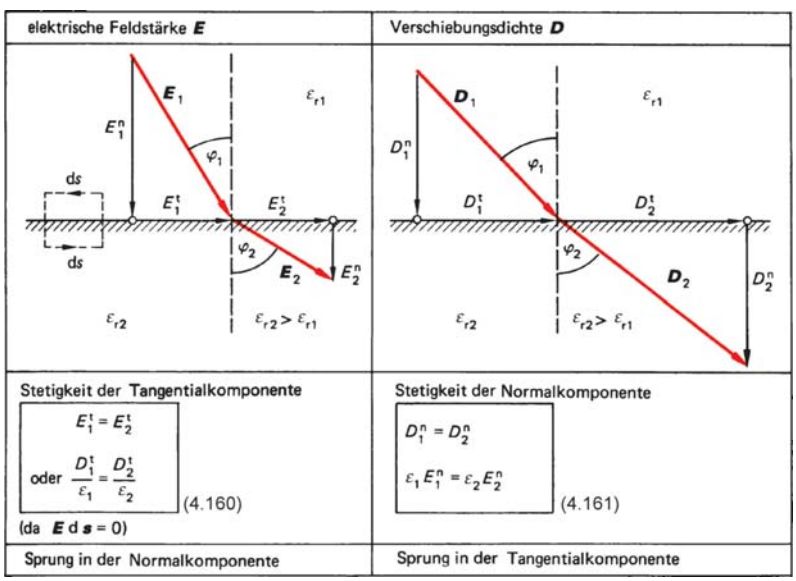


Abb. 4.83 Elektrische Feldstärke und Verschiebungsdichte an der Grenzfläche zweier unterschiedlicher Dielektrika

4.3.8 Energieinhalt des elektrischen Feldes

Für die elektrische Energie gilt gemäß (4.76)

$$W_{\mathrm{el}} = \int_0^{Q_{\max}} U(Q)\,\mathrm{d}Q\,, \tag{4.163}$$

und wegen $U(Q) = \frac{Q}{C}$ lauten die Umformungen

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\,U = \frac{1}{2}C\,U^2\,. \tag{4.164}$$

W_{el} gibt die elektrische Arbeit an, die benötigt wird, um einen Kondensator mit der Kapazität C auf eine Spannung U aufzuladen. Für den speziellen Fall des Plattenkondensators ist $U = E\,d$ und $C = \varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,A/d$. Deshalb gilt für die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\frac{A}{d}\right)(E\,d)^2\,,$$

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}(A\,d)\,E^2\,. \tag{4.165}$$

Da $A\,d$ das Volumen zwischen den Kondensatorplatten ist, schreibt man für die elektrische Energiedichte

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{W_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{E}^2 \tag{4.166}$$

oder wegen $\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}$

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{W_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{E}\,. \tag{4.167}$$

Gleichung (4.167) ist nicht nur für den Plattenkondensator, sondern allgemein gültig.

Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten

Aus dem Zusammenhang zwischen Arbeit und Kraft $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ errechnet sich die Anziehungskraft zu

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}\,.$$

Da $\mathrm{d}W = \frac{1}{2}Q\,\mathrm{d}U$ ist, gilt

$$F = \frac{Q\,\mathrm{d}U}{2\,\mathrm{d}s} \quad \text{und wegen} \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = E$$

$$F = \frac{Q\,E}{2}\,. \tag{4.168}$$

Wird für $Q = C\,U$ und für $E = \frac{U}{d}$ gesetzt, dann ist

$$F = \frac{C\,U^2}{2\,d} \tag{4.169}$$

und wegen $C = \varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,\frac{A}{d}$

$$F = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,A\,U^2}{2\,d^2}\,. \tag{4.170}$$

Zur Übung

Ü 4.3-1 Zwei Platten mit einem Radius $r = 8$ cm befinden sich im Abstand $d = 4$ mm voneinander. Welche Kapazität hat der Kondensator? Wie groß ist die elektrische Feldstärke zwischen den Platten und wie groß ist die Ladung und die Verschiebungsdichte auf jeder der beiden Platten bei $U = 10$ V?

Ü 4.3-2 Ein Wattebausch mit der Masse $m = 3 \cdot 10^{-2}$ g ist mit einer Ladung $Q = 4 \cdot 10^{-8}$ C geladen. Wie groß muss die Spannung zwischen den Platten eines waagrecht liegenden Kondensators (Plattenabstand $d = 5$ cm) sein, damit der Wattebausch schwebt?

Ü 4.3-3 Berechnet werden soll die Gesamtkapazität der Kondensator-Anordnung nach Abb. 4.84.

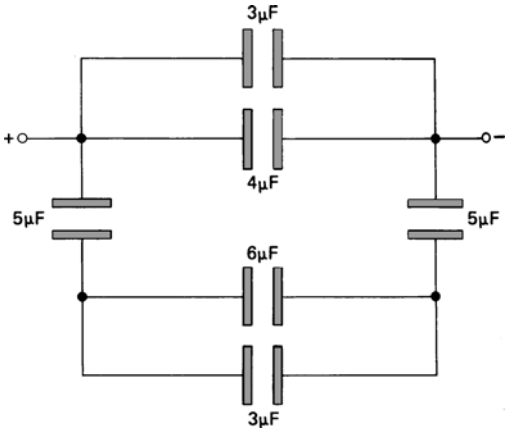


Abb. 4.84 Schaltung von Kapazitäten gemäß Ü 4.3-3

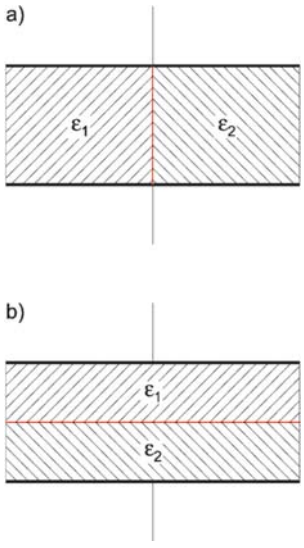


Abb. 4.85 Plattenkondensator (Fläche A, Plattenabstand d) mit verschiedenen Füllungen. Zu Ü 4.3-4

Ü 4.3-4 Ein Plattenkondensator ist mit zwei unterschiedlichen Dielektrika (ε_{r1} und ε_{r2}) nach Abb. 4.85a und 4.85b gefüllt. Ermittelt werden soll jeweils die Gleichung für die Gesamtkapazität.

4.4 Magnetisches Feld

4.4.1 Beschreibung des magnetischen Feldes

Stromdurchflossene Leiter und Werkstoffe, deren atomare Elektronenströme speziell ausgerichtet sind, die *Magnete*, üben aufeinander Kräfte aus, die sich von der Coulomb-Kraft und der Gravitationskraft bezüglich Stärke und Richtung grundlegend unterscheiden. Die magnetischen Kräfte wirken jedoch genau wie diese im gesamten Raum. Die Stärke und die Richtung der magnetischen Kraft an einem Ort lassen sich durch die Kraftwirkung auf einen kleinen Probemagneten (Magnetnadel) oder einen kleinen stromdurchflossenen Leiter bestimmen und werden durch ein Vektorfeld, das *magnetische Feld*, beschrieben:

> Das magnetische Feld rührt von elektrischen Strömen her. Von deren Richtung hängt die Richtung der magnetischen Kräfte ab. Diese beiden Richtungen müssen nicht übereinstimmen. Das magnetische Feld beschreibt die Wirkungslinien der magnetischen Kräfte in Betrag und Richtung.

Entsprechend Abb. 4.86 sind folgende Bezeichnungen und Richtungen charakteristisch für magnetische Kräfte: Ein Magnet besitzt einen *Nord-* und einen *Südpol*. Außerhalb des Magneten laufen die Feldlinien vom Nord- zum Südpol (positive Feldrichtung). Gleichnamige Pole stoßen sich ab und ungleichnamige ziehen sich an.

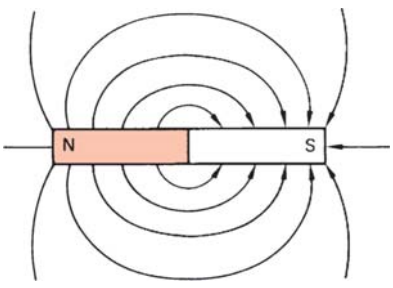


Abb. 4.86 Stabmagnet und magnetische Feldlinien

Die magnetischen Feldlinien weisen analog zu den elektrischen Feldlinien bestimmte Eigenschaften auf:

- die *Tangente an die Feldlinien* gibt die *Kraftrichtung* an;
- die Kraftwirkung ist eindeutig, d. h., die *Feldlinien schneiden sich nicht*;
- die *Dichte* der gezeichneten Feldlinien ist ein Maß für die *Stärke der Kraftwirkungen*.

Im Gegensatz zum elektrischen Feld zeigt das magnetische Feld Besonderheiten:

- es gibt *keine* magnetischen *Monopole*,
- die magnetischen Feldlinien sind *in sich geschlossen*, sie haben keinen Anfang und kein Ende.

Das Magnetfeld der Erde

Die Erde ist von einem Magnetfeld umgeben. Der magnetische Südpol liegt in der Nähe des geografischen Nordpols (74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge auf der Halbinsel Boothia im Norden Kanadas). Der magnetische Nordpol befindet sich in der Nähe des geografischen Südpols (72° südlicher Breite und 155° östlicher Länge in der Antarktis). Die Abweichung des Erdmagnetfeldes von der geografischen Nord-Süd-Richtung wird *Deklination* genannt und beträgt für Deutschland etwa $\varphi = 2°$ westlich. Die magnetischen Feldlinien verlaufen am Äquator parallel zur Erdoberfläche. An den anderen Orten sind sie gemäß Abb. 4.87 zur Horizontalen geneigt (*Inklination*), und zwar umso stärker, je näher die Pole sind. Das Magnetfeld der Erde ist nicht ortsfest, sondern wandert geringfügig.

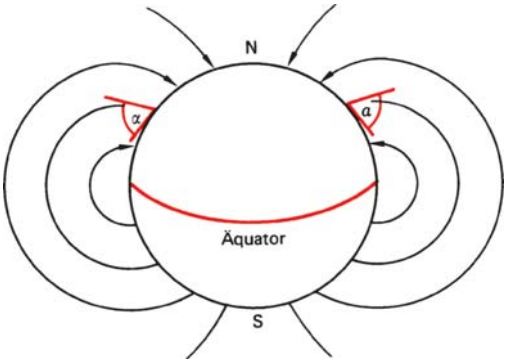


Abb. 4.87 Erdmagnetfeld

4.4.2 Magnetische Feldstärke und Durchflutungsgesetz

Experimentell kann festgestellt werden, dass ein stromdurchflossener gerader Leiter ein Magnetfeld aufweist, dessen Feldlinien konzentrische Kreise in der Ebene senkrecht zum stromdurchflossenen Leiter sind, wie es Abb. 4.88 zeigt. Dieser fundamentale Zusammenhang wurde 1820 von H. C. Oersted (1777 bis 1851) entdeckt. Die Stromstärke I und das zugehörige Magnetfeld bilden vektoriell ein Rechtssystem, d. h., bei positivem Stromfluss (von unten nach oben) ist die Feldlinienrichtung mathematisch positiv (entgegen dem Uhrzeigersinn).
Dies lässt sich gut merken: Zeigt der Daumen der *rechten Hand* in die Stromrichtung, dann weisen die gekrümmten Finger in Feldrichtung.

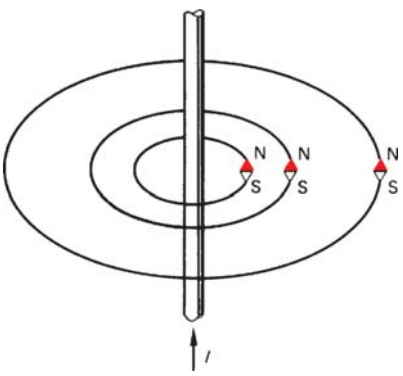


Abb. 4.88 Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters

Wird die Stärke des magnetischen Feldes entlang der magnetischen Feldlinien mit $\boldsymbol{H}$ bezeichnet, so beschreibt das *Durchflutungsgesetz* (Ampère'sches Gesetz) den Zusammenhang zwischen Stromdichte $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{I}/\mathrm{A}$ und magnetischer Feldstärke (magnetischer Erregung) $\boldsymbol{H}$:

$$\Theta = \oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{A}} \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} I_i\,. \tag{4.171}$$

Das Integral der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ längs einer geschlossenen Umlauflinie ist gleich dem gesamten durch diese Fläche hindurchfließenden Strom I.

Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ hat die Maßeinheit 1 A/m.

Analog zur elektrischen Spannung $U = \int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ wird $\int \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ als *magnetische Spannung* bezeichnet. Der Wert der magnetischen Spannung auf einer geschlossenen magnetischen Feldlinie $\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ist die magnetische Randspannung Θ. Das Integral der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ über die Fläche innerhalb der geschlossenen magnetischen Feldlinie, bei einzelnen Stromfäden wie in Abb. 4.89 also die Summe der Ströme $I_1 + I_2 + \ldots$, ist die elektrische Durchflutung Θ der magnetischen Feldlinie: $\Theta = \int_{\mathrm{A}} \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$. Bei mehreren Strömen innerhalb eines Integrationsweges überlagern sich also deren Magnetfelder, und es gilt beispielsweise für den Fall in Abb. 4.89 nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6\,.$$

Umschließt der in sich geschlossene Integrationsweg keine Ströme, dann gilt, da $\boldsymbol{j} = 0$,

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0\,. \tag{4.172}$$

Das Durchflutungsgesetz ist allgemein gültig. Mit ihm kann die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ beliebig verlaufender stromführender Leiter berechnet werden.

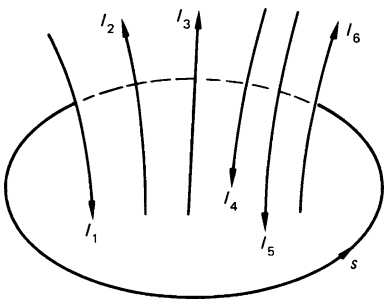


Abb. 4.89 Zum Begriff Durchflutung

Magnetische Feldstärke eines geradlinigen, stromdurchflossenen Leiters

Das Durchflutungsgesetz lautet in diesem Fall nach (4.171)

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{n} I_i = I\,.$$

Experimentell zeigt sich, dass die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ auf konzentrischen Kreisen um den stromdurchflossenen Leiter konstant ist. Der Weg auf der geschlossenen Feldlinie in Abb. 4.90 mit dem Radius r beträgt $s = 2\pi r$, sodass gilt

$$H \cdot 2\pi\, r = I\,,$$

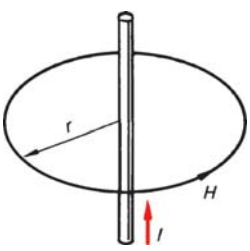


Abb. 4.90 Magnetische Feldstärke H um einen einzelnen geradlinigen stromdurchflossenen Leiter

$$H = \frac{I}{2\pi r} \,. \qquad (4.173)$$

Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ nimmt also mit zunehmender Entfernung proportional zu $1/r$ ab.

Magnetische Feldstärke einer Zylinderspule

Die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ in einer im Vergleich zum Durchmesser langen, stromdurchflossenen Zylinderspule (*Solenoid*) gemäß Abb. 4.91 ist parallel zur Spulenachse und über die gesamte Querschnittsfläche hinweg konstant; die Feldliniendichte ist groß (Abb. 4.91b). Außerhalb der Spule ist das Magnetfeld sehr schwach; die Feldliniendichte ist gering ($\boldsymbol{H}_\mathrm{a} \approx 0$).

Da eine geschlossene magnetische Feldlinie N Windungen mit jeweils der Stromstärke I umschließt (Abb. 4.91a), gilt nach dem Durchflutungsgesetz (4.168)

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{H}_\mathrm{i}(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\mathrm{i} + \int \boldsymbol{H}_\mathrm{a}(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\mathrm{a} = N\,I \,.$$

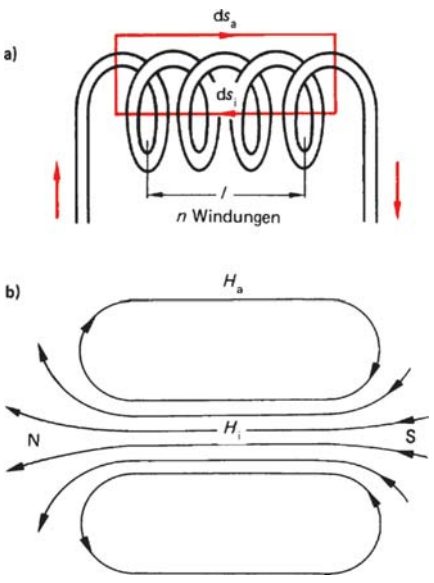


Abb. 4.91 Magnetische Feldlinien in einer Zylinderspule (Solenoid)

Im Innern der Spule ist $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}(\boldsymbol{s})$ konstant: $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} = \boldsymbol{H}$, das Wegintegral ergibt die Spulenlänge l: $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{s} = H\,l$. Der Integralanteil außerhalb der Spule ist wegen $\boldsymbol{H}_\mathrm{a} \ll \boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ vernachlässigbar klein. Für das Magnetfeld im Innern einer langen Zylinderspule gilt deshalb

$$H = \frac{N\,I}{l} \,. \qquad (4.174)$$

Die magnetische Polung einer Zylinderspule lässt sich folgendermaßen merken: Zeigen die Finger der rechten Hand in Stromrichtung, dann weist der Daumen zum Nordpol der Spule.

Magnetische Feldstärke einer Ringspule

Das magnetische Feld im Innern einer dicht gewickelten ringförmigen Spule gemäß Abb. 4.92 ist kreisförmig innerhalb der Grenzen

$$R - \frac{d}{2} \leqq r \leqq R + \frac{d}{2} \,.$$

Nach dem Durchflutungsgesetz gilt

$$H\,2\,\pi\,r = N\,I \,.$$

Ist der Radius der Spule $R \gg d/2$, dann herrscht in der Spule ein annähernd homogenes kreisförmiges Feld (Abb. 4.92b) mit der magnetischen Feldstärke

$$H = \frac{N\,I}{2\,\pi\,R} \,. \qquad (4.175)$$

Magnetische Feldstärke stromdurchflossener Leiter beliebiger Geometrie

Ein kleines Leiterstück der Länge ds liefert in einem Punkt P in der Entfernung r den Beitrag

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2} \sin\varphi$$

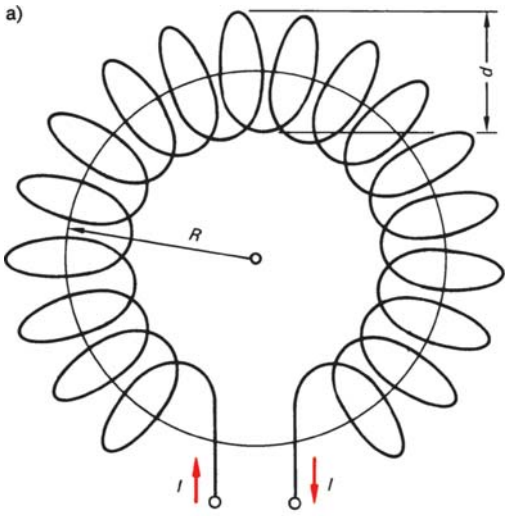


Abb. 4.92 Magnetische Feldlinien in einer Ringspule (Toroid)

zur magnetischen Feldstärke (Abb. 4.93). Vektoriell gilt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,. \qquad (4.176)$$

Gleichung (4.176) ist das *Biot-Savart'sche Gesetz* (J.B. Biot, 1774 bis 1862, und F. Savart, 1791 bis 1841). Dieses ist, wie die Beispiele

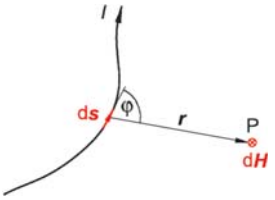


Abb. 4.93 Zum Biot-Savart'schen Gesetz

4.4-1 und 4.4-2 zeigen, die differentielle Form des Durchflutungsgesetzes (4.171) und diesem völlig äquivalent. Mit seiner Hilfe werden im Folgenden die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Kreisstroms und die magnetische Feldstärke in einer kurzen Zylinderspule berechnet.

Beispiel

4.4-1 Die magnetische Feldstärke H im Mittelpunkt eines kreisförmig fließenden Stroms ($I = 10$ A, $r = 10$ cm) ist zu berechnen.

Lösung

Da der Radius r gemäß Abb. 4.94 senkrecht zum Linienelement $\mathrm{d}s$ steht, ist $\sin\varphi = 1$. Somit lautet das Biot-Savart'sche Gesetz (4.176)

$$\mathrm{d}H = \frac{I}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}s \quad \text{oder} \quad H = \frac{I}{4\pi r^2}\oint \mathrm{d}s\,.$$

Das geschlossene Wegintegral $\oint \mathrm{d}s$ ist der Umfang des Kreises $2\pi r$. Man schreibt also

$$H = \frac{I}{4\pi r^2}\,2\pi r\,.$$

Daraus ergibt sich für die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt des stromdurchflossenen Kreises

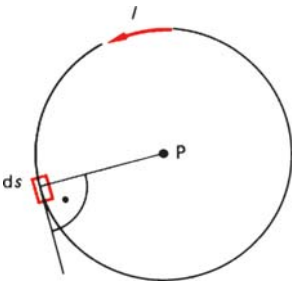


Abb. 4.94 Magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Kreisstroms

$$H = \frac{I}{2r} . \qquad (4.177)$$

Es resultiert $H = \frac{10}{2 \cdot 0{,}1} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 50 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$.

Beispiel

4.4-2 Die magnetische Feldstärke auf der Symmetrieachse einer kurzen Spule ist zu berechnen. Welche Feldstärke ergibt sich in der Mitte und am Rand, wenn die Länge $l = 1$ cm und der Durchmesser $d = 0{,}8$ cm beträgt? Der Strom durch die Spule mit $N = 12$ Windungen ist $I = 8$ A. Wie groß ist der Fehler, wenn (4.174) für die lange Zylinderspule verwendet wird?

Lösung

Zunächst wird nur eine Stromschleife mit Radius $R = d/2$ betrachtet. Die magnetische Feldstärke in einem Punkt A auf der Symmetrieachse (Abb. 4.95) wird mithilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes (4.176) berechnet:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} .$$

Der Winkel φ zwischen Leiterelement $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ und Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ ist 90°, sodass gilt

$$\mathrm{d}H = \frac{I}{4\pi r^2} \mathrm{d}s . \qquad (4.178)$$

Der Feldstärkeanteil in Achsenrichtung ist $\mathrm{d}H \cdot \sin\beta$. Durch Integration über den kompletten Ring erhält man die magnetische Feldstärke in Achsenrichtung im Punkt A:

$$H = \frac{I \sin\beta}{4\pi r^2} \oint \mathrm{d}s = \frac{I \sin\beta}{4\pi r^2} 2\pi R . \qquad (4.179)$$

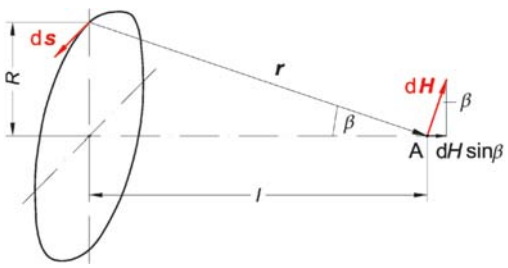


Abb. 4.95 Feldstärke eines Kreisstroms auf der Symmetrieachse nach dem Gesetz von Biot-Savart

Nun gilt $r = \frac{R}{\sin\beta}$ und damit

$$H = \frac{I}{2R} \sin^3\beta . \qquad (4.180)$$

Im Mittelpunkt des Kreisrings ist $\beta = 90°$. Daraus folgt für die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines Ringstromes die bereits von (4.177) bekannte Beziehung.
Mit $\sin\beta = \frac{R}{r}$ und $r = \sqrt{R^2 + l^2}$ lässt sich (4.180) umformen in

$$H = \frac{I R^2}{2\left(\sqrt{R^2 + l^2}\right)^3} . \qquad (4.181)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für große Abstände vom Kreisleiter ($l \gg R$) folgende Näherungslösung herleiten:

$$H = \frac{I R^2}{2 l^3} . \qquad (4.182)$$

Aus (4.180) lässt sich die Feldstärke auf der Symmetrieachse einer Spule berechnen. Dazu denkt man sich nach Abb. 4.96 die Spule aufgebaut aus dünnen Ringen der Dicke dh.

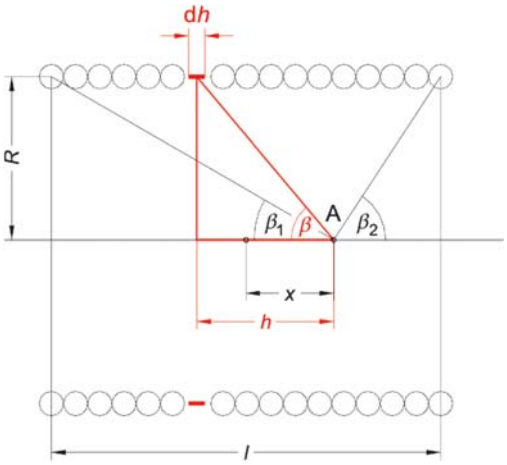


Abb. 4.96 Kurze Zylinderspule. Die Variable x wird aus der Spulenmitte heraus gemessen

Ein solcher Ring erzeugt im Punkt A ein Magnetfeld der Stärke

$$\mathrm{d}H = \frac{\sin^3\beta}{2R}\,\mathrm{d}I\,.$$

Wenn auf die Länge l der Spule N Windungen kommen, dann ist der Anteil des Stromes I, der auf die Schleife der Dicke dh entfällt

$$\mathrm{d}I = \frac{NI}{l}\,\mathrm{d}h\,.$$

Damit ergibt sich

$$\mathrm{d}H = \frac{NI}{2Rl}\sin^3\beta\,\mathrm{d}h\,.$$

Zur Integration empfiehlt sich eine Integration über alle möglichen Winkel β. Mit

$$\cot\beta = \frac{h}{R} \text{ ergibt sich } \mathrm{d}h = -\frac{R}{\sin^2\beta}\,\mathrm{d}\beta \text{ und}$$

$$\mathrm{d}H = -\frac{NI}{2Rl}\sin^3\beta\frac{R}{\sin^2\beta}\,\mathrm{d}\beta = -\frac{NI}{2l}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Die Integration

$$H = -\frac{NI}{2l}\int_{180°-\beta_2}^{\beta_1}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta \text{ ergibt}$$

$$H = \frac{IN}{2l}\left(\cos\beta_1 + \cos\beta_2\right)\,. \tag{4.183}$$

Nun gilt

$$\cos\beta_1 = \frac{\frac{l}{2}+x}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}+x\right)^2}} \text{ und}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\frac{l}{2}-x}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}\,.$$

Damit wird die Feldstärke in Abhängigkeit von x:

$$H(x) = \frac{NI}{2l}\cdot\left(\frac{\frac{l}{2}+x}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}+x\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}-x}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}\right) \tag{4.184}$$

In der Spulenmitte, bei $x = 0$ ergibt sich

$$H_{\text{Mitte}} = \frac{NI}{2\sqrt{R^2+\frac{l^2}{4}}} = \frac{NI}{\sqrt{d^2+l^2}}\,. \tag{4.185}$$

Für eine langgestreckte Zylinderspule mit $l \gg d$ folgt der bereits bekannte Ausdruck

$$H_{\text{Mitte}} = \frac{NI}{l}\,. \tag{4.174}$$

Am Rand der Spule, bei $x = l/2$ gilt

$$H_{\text{Rand}} = \frac{NI}{2\sqrt{R^2+l^2}}\,. \tag{4.186}$$

Bei einer langgestreckten Spule ist die Feldstärke am Rand halb so groß wie in der Mitte:

$$H_{\text{Rand}} = \frac{NI}{2l} = \frac{1}{2}H_{\text{Mitte}}\,.$$

Gemäß (4.185) ergibt sich mit den oben genannten Zahlenwerten

$$H_{\text{Mitte}} = 7{,}5\cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}}\,.$$

Aus (4.174) für die lange Spule folgt

$$H_{\text{Mitte}} = 9{,}6\cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}}\,.$$

Der relative Fehler der Näherungslösung nach (4.174) ist 28%.

4.4.3 Magnetische Flussdichte und Kraftwirkungen im Magnetfeld

4.4.3.1 Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte

Aus dem vorhergehenden Abschnitt geht hervor, dass die Ursache für das Auftreten eines Magnetfeldes ein Fließen elektrischer Ladungen bzw. das Vorhandensein einer Stromstärke I ist. In diesem Magnetfeld kann man folgende Wirkungen beobachten: Wird eine

im Magnetfeld befindliche Leiterschleife aus dem Magnetfeld gezogen, wie es Abb. 4.97a zeigt, so wird ein *Spannungsstoß* $\int U\,\mathrm{d}t$ gemessen (Abb. 4.97b). Der Spannungs-Zeit-Verlauf ist bei einer schnellen Durchquerung des Magnetfeldes steiler und bei einer langsameren flacher. Die Flächen unter diesen Kurven sind jedoch immer gleich groß.

Der Spannungsstoß ist davon abhängig, wie viele magnetische Feldlinien beim Herausziehen durch die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche gekreuzt werden und aus wie vielen Windungen N die Leiterschleife gewickelt ist. Dies bedeutet, dass der Spannungsstoß der Anzahl der parallel zur Flächennormalen $\mathrm{d}A_\mathrm{n}$ befindlichen magnetischen Feldlinien entspricht (Abb. 4.97a). Die Anzahl der magnetischen Feldlinien wird in Analogie zu Wasserflüssen der *magnetische Fluss* Φ genannt. Der Fluss durch die Leiterschleife ändert sich durch das Herausziehen der Leiterschleife von ursprünglich Φ auf null um $\Delta\Phi = \Phi - 0 = \Phi$. Die Änderung des magnetischen Flusses wird direkt dem Spannungsstoß zugeordnet:

$$\Delta\Phi = \frac{\int U(t)\,\mathrm{d}t}{N} \,. \tag{4.187}$$

Entsprechend gilt für den Spannungsstoß

$$\int U(t)\,\mathrm{d}t = N\Delta\Phi \,. \tag{4.188}$$

Der Spannungsstoß $\int U\,\mathrm{d}t$ ist gleich der Änderung des magnetischen Flusses Φ, der die Fläche eines Leiters senkrecht durchsetzt.

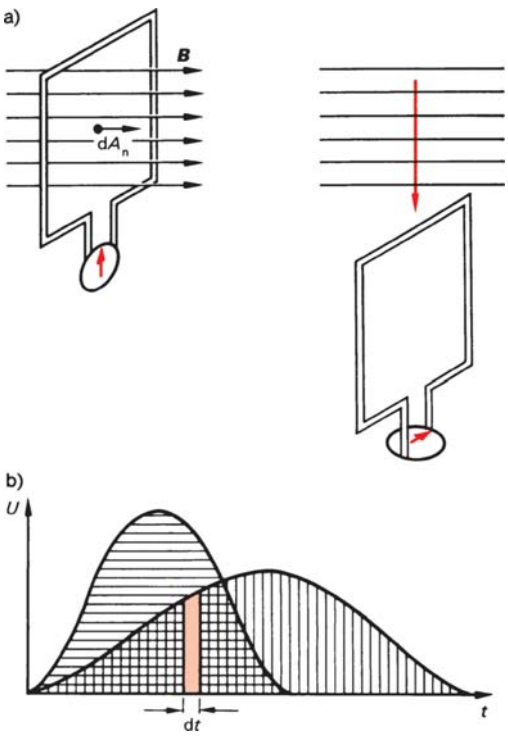


Abb. 4.97 Spannungsstoß und magnetischer Fluss

Die Einheit des Flusses ist 1 Vs = 1 Wb (Weber).

Wegen der Abhängigkeit des Spannungsstoßes von der Größe und der Orientierung der Leiterschleifenfläche zur Richtung des magnetischen Flusses wird außer der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ eine weitere vektorielle magnetische Feldgröße, die *magnetische Flussdichte* oder die *magnetische Induktion* $\boldsymbol{B}$ definiert:

$$B = \frac{\Phi}{A_\perp} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A_\perp} \,. \tag{4.189}$$

Die magnetische Induktion oder Flussdichte $\boldsymbol{B}$ beschreibt den magnetischen Fluss Φ pro Flächeneinheit senkrecht zu den Feldlinien.

Die Einheit der magnetischen Induktion ist $1\ \mathrm{Vs/m^2} = 1\ \mathrm{T}$ (Tesla).

Aus (4.189) lässt sich der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche z. B. einer beliebig orientierten Leiterschleife berechnen:

$$\Phi = \int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int B\cos\varphi\,\mathrm{d}A\,. \qquad (4.190)$$

Sind also die magnetischen Feldlinien unter einem Winkel φ zur Flächennormalen geneigt, so ist nur die Flussdichte senkrecht zur Fläche $B\cos\varphi$ maßgebend, wie Abb. 4.98 zeigt.
Die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ dienen beide zur Beschreibung der Richtung und Stärke einer magnetischen Wirkung. Im Vakuum sind die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$, z. B. in einer langen Zylinderspule, und die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$, z. B. bestimmt aus dem Spannungsstoß in einer nach Abb. 4.98 im Winkel φ zur Zylinderspulenachse herausgezogenen Leiterschleife, stets gleichgerichtet und zueinander proportional. Es gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}\,. \qquad (4.191)$$

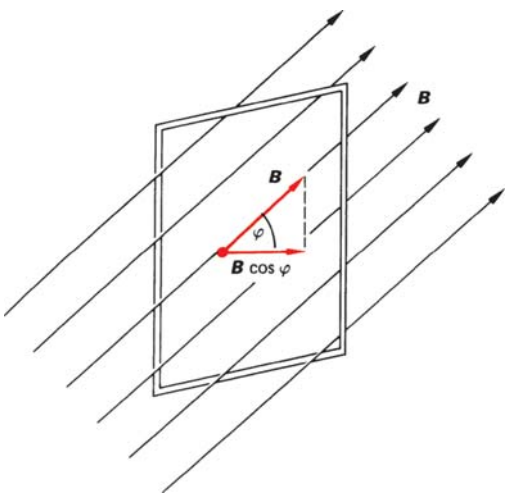


Abb. 4.98 Beliebig orientierte Leiterschleife im Magnetfeld

Die Proportionalitätskonstante ist die *magnetische Feldkonstante* μ_0. Ihr Zahlenwert ergibt sich aus den Kraftwirkungen elektrischer Ströme (s. Definition des Ampère in Abschn. 1.3.1 und 4.1.2).
Die magnetische Feldkonstante beträgt demnach

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \approx 1{,}257\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}\,. \qquad (4.192)$$

Gleichung (4.191) gilt nur im *materiefreien* Raum.

4.4.3.2 Kraftwirkungen im Magnetfeld

Verschiedene Magnetfelder überlagern sich zu einem resultierenden Magnetfeld, z. B. das Magnetfeld eines Permanentmagneten und das eines stromdurchflossenen Leiters. Aus diesem resultierenden Feld lassen sich Kraftwirkungen ableiten.

Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld

Abbildung 4.99a zeigt einen stromdurchflossenen Leiter im Feld eines Permanentmagneten. Die im mathematisch negativen Sinne umlaufenden magnetischen Feldlinien des stromdurchflossenen Leiters überlagern sich mit den vom Nord- zum Südpol laufenden Feldlinien des Permanentmagneten, wie Abb. 4.99b zeigt. Das resultierende Feld hat in diesem Fall eine Feldlinienverdichtung auf der linken und eine Feldlinienverdünnung auf der rechten Seite. Auf den Leiter wird eine Kraft in Richtung der Feldverdünnung (nach rechts) wirksam.
Experimentell gilt für den Kraftbeitrag $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ eines stromdurchflossenen Leiterelementes der Länge $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})\,. \qquad (4.193)$$

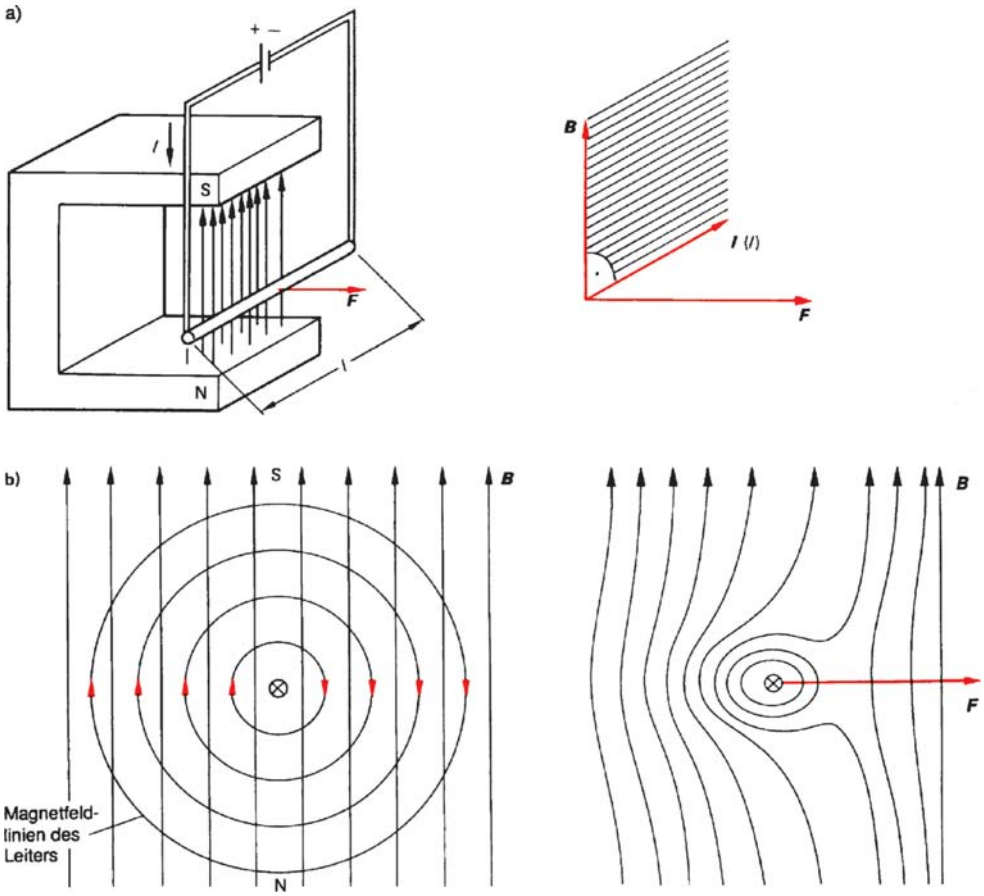


Abb. 4.99 Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

Verläuft der stromführende Leiterabschnitt mit der Länge l senkrecht zum Magnetfeld, so gilt

$$\boldsymbol{F} = I \int_0^l (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) = -I \int_0^l \boldsymbol{B} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= -I\,\boldsymbol{B} \times \int_0^l \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

$$\boldsymbol{F} = -I\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{l} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{F} = I\,(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{4.194}$$

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter hat den Betrag

$$F = I\,l\,B \sin\varphi\,. \tag{4.195}$$

φ ist der Winkel zwischen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ und dem geraden Leiterstück $\boldsymbol{l}$.

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge $\boldsymbol{l}$ in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ wirkt senkrecht zur Fläche, die von den Vektoren $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird.

(Veranschaulichung durch die Rechte-Hand-Regel: Daumen in Stromrichtung, Zeigefinger in magnetischer Feldrichtung: dann zeigt der Mittelfinger in Kraftrichtung.)

Befindet sich der stromdurchflossene Leiter senkrecht zum Magnetfeld, dann gilt (da $\sin\varphi = 1$):

$$F = I\,l\,B\,. \tag{4.196}$$

Gemäß (4.196) lässt sich die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ über die Kraftwirkung im Magnetfeld erklären:

$$B = \frac{F}{I\,l}\,. \tag{4.197}$$

Die magnetische Flussdichte B gibt an, wie groß die Kraft ist, die je Stromstärke- und je Längeneinheit auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkt.

Die Einheit von B ist damit auch 1 N/Am.

Beispiel

4.4-3 Zwischen den kreisförmigen Polen eines Permanentmagneten befindet sich ein Weicheisenkern, der 100 Wicklungen einer quadratischen Leiterschleife mit der Kantenlänge $l = 3$ cm trägt (Prinzip des Drehspulinstrumentes gemäß Abb. 4.100). Die Induktion beträgt $B = 2{,}5$ T und die Wicklungen werden von einer Stromstärke $I = 4{,}8$ A durchflossen.
a) Welches Drehmoment erfährt ein Zeiger und wie groß ist der Winkelausschlag bei einer Winkelrichtgröße von $k_t = 3 \cdot 10^{-2}$ N m/°? b) Wie groß ist die Stromstärke bei einem Zeigerausschlag von 40°?

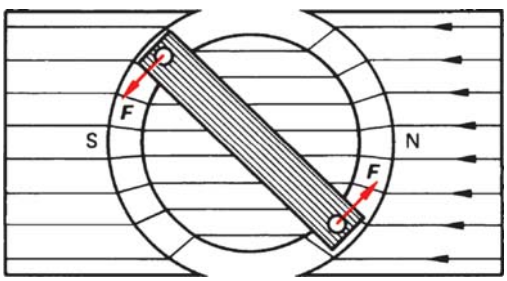


Abb. 4.100 Prinzip des Drehspulinstrumentes

Lösung

Für die magnetische Kraft F_{magn} gilt nach (4.196) $F_{magn} = N\,I\,l\,B$
a) Es ergibt sich ein Drehmoment von

$$M = F_{magn}\,l = N\,I\,B\,l^2 = 1{,}08\ \text{N m}\,.$$

Ferner gilt

$$M = k_t\varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{M}{k_t} = 36°\,.$$

b) Es gilt für das Drehmoment $M = k_t\varphi = N\,I\,B\,l^2$. Daraus folgt für die Stromstärke

$$I = \frac{k_t\varphi}{N\,B\,l^2} = 5{,}33\ \text{A}\,.$$

Magnetisches Moment

Eine kleine Kompassnadel dreht sich im Magnetfeld stets so, dass sie parallel zu den Feldlinien ausgerichtet ist. Dreht man sie im Feld, so entsteht ein rücktreibendes Drehmoment. Dasselbe gilt für einen elektrischen Dipol (Abschn. 4.3.7), wie Abb. 4.101a zeigt.
Auf jede Ladung Q des Dipols wirkt eine Kraft $F = Q\,E$. Das Drehmoment dieses Kräftepaars ist (Abschn. 2.9.2)

$$M = F\,d\sin\varphi = Q\,\mathrm{d}E\,\sin\varphi\,.$$

Mit der Definition des elektrischen Dipolmoments

$$\boldsymbol{p} = Q\,\boldsymbol{d} \tag{4.158}$$

Ist das Drehmoment auf den Dipol

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}\,. \tag{4.198}$$

Das Drehmoment wird null, wenn der Dipol sich parallel zu den Feldlinien ausgerichtet hat, d. h. wenn $\boldsymbol{p} \| \boldsymbol{E}$ liegt.
In einem inhomogenen Feld verbleibt übrigens eine resultierende Kraft, sodass der Dipol

nicht nur gedreht, sondern in Richtung größter Feldstärke gezogen wird.
Da die Kompassnadel im Magnetfeld ein Drehmoment erfährt, wie der elektrische Dipol im elektrischen Feld, liegt es nahe, auch von magnetischen Dipolen und ihrem magnetischen Dipolmoment zu reden. Jede vom Strom durchflossene Leiterschleife erfährt im Magnetfeld ein Drehmoment, besitzt also ebenfalls ein magnetisches Dipolmoment. Abbildung 4.101b zeigt eine Schleife der Länge l und Breite b, die vom Strom I durchflossen wird, in einem Magnetfeld der Flussdichte $\boldsymbol{B}$. Während sich die Kräfte $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0$ aufheben, bilden die beiden Kräfte $\boldsymbol{F}$ ein Kräftepaar, das die Schleife dreht. Mit

$$F = I\,l\,B$$

wird das Drehmoment des Kräftepaars

$$M = F\,b\sin\varphi = I\,l\,b\,B\sin\varphi = I\,A\,B\sin\varphi\,.$$

Dabei ist $A = l\,b$ die Fläche der Leiterschleife. Um eine formale Ähnlichkeit mit dem elektrischen Dipolmoment herzustellen, definiert man

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{A}\,I\,. \tag{4.199}$$

als *magnetisches Dipolmoment*, gelegentlich auch als *Ampere'sches Dipolmoment* bezeichnet; $[m] = 1\,A\cdot m^2$. $\boldsymbol{A}$ ist der Flächennormalenvektor, der dem Stromfluss im Richtungssinn einer Rechtsschraube zugeordnet ist (Abb. 4.101b).

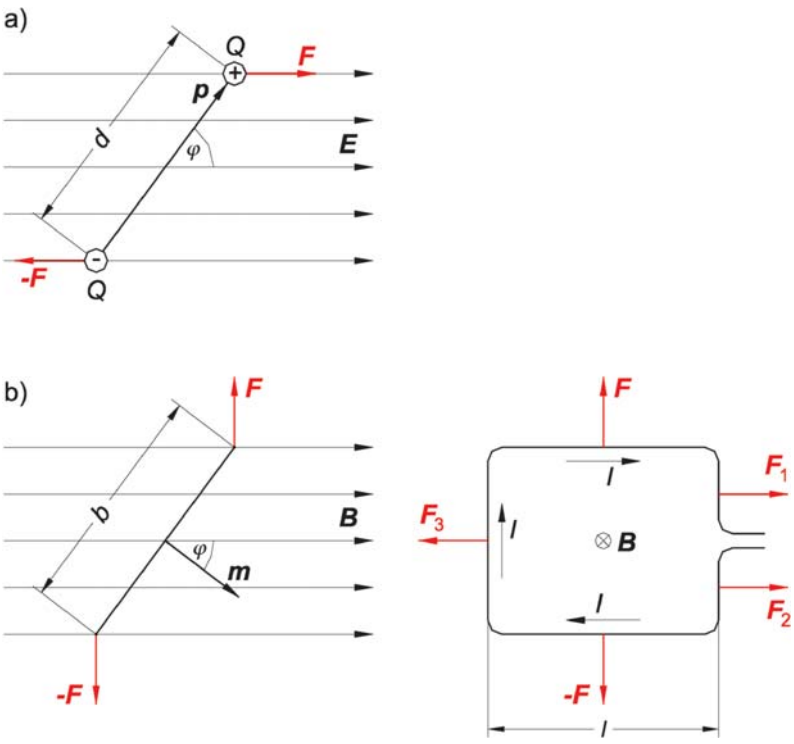


Abb. 4.101 Dipole im homogenen Feld: **a** elektrischer Dipol im $\boldsymbol{E}$-Feld, **b** magnetischer Dipol im $\boldsymbol{B}$-Feld, *links* Seitenansicht, *rechts* Draufsicht

Damit ist das Drehmoment, das die Leiterschleife im Magnetfeld erfährt

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{4.200}$$

Ohne Beweis sei angefügt, dass obige Aussagen für beliebig geformte Leiterschleifen der Fläche A gilt.
Gelegentlich wird auch das *Coulomb'sche Moment*

$$\boldsymbol{m}_\mathrm{C} = \mu_0 \boldsymbol{A}\, I \,. \tag{4.201}$$

benutzt. Das Drehmoment eines Dipols im Magnetfeld wird dann

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_\mathrm{C} \times \boldsymbol{H} \,.$$

Beispiel

4.4-4 Das magnetische Moment m eines Elektrons, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r um den Atomkern kreist, ist zu berechnen.

Lösung

Es gilt nach (4.199) $m = A\, I$.
Es ist $I = \dfrac{e}{T_0} = \dfrac{e\omega}{2\pi}$, sodass man schreiben kann

$$m = \pi r^2 \frac{e\,\omega}{2\pi} = \frac{e\,\omega\, r^2}{2} \,.$$

Für ein Elektron mit Drehimpuls $\hbar$ wird das magnetische Moment

$$m = \frac{e\,\hbar}{2\, m_\mathrm{e}} = 9{,}27 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{A\,m^2} \,.$$

Dieser Wert wird als *Bohr'sches Magneton* μ_B bezeichnet (Abschn. 8.3).

Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Leitern

Befinden sich zwei stromdurchflossene Leiter im Abstand d voneinander, so spürt der Leiter 1 das Magnetfeld des Leiters 2. Dessen magnetische Flussdichte ist gemäß (4.173 und 4.191)

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d} \,.$$

Für die Kraft zwischen zwei Leitern gilt entsprechend (4.196)

$$F_{12} = I_1\, l\, B_2$$

und unter Berücksichtigung von B_2

$$F_{12} = \frac{\mu_0\, I_1\, I_2\, l}{2\pi d} \,. \tag{4.202}$$

Abbildung 4.102 zeigt die Überlagerung der magnetischen Feldlinien für zwei parallele stromdurchflossene Leiter. Bei zwei gleichgerichteten Strömen wirkt zwischen den Leitern eine Anziehungskraft (Abb. 4.102a), während bei entgegengesetzt fließenden Strömen zwischen den Leitern eine Abstoßungskraft wirkt (Abb. 4.102b).

Kraft auf bewegte Ladungsträger im Magnetfeld

Bewegte Ladungsträger erfahren im Magnetfeld eine Kraft. Gleichung (4.193)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

lässt sich für diesen Fall umformen: Für die Geschwindigkeit der Ladungsträger gilt $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t$, hieraus folgt $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$. Eingesetzt ergibt dies

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}t(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \,.$$

Mit $I\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q$ erhält man $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ oder

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = Q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \,. \tag{4.203}$$

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch ein Magnetfeld der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$, so spürt die Ladung eine Kraft. Diese wirkt senkrecht zu $\boldsymbol{v}$ und senkrecht zu $\boldsymbol{B}$.

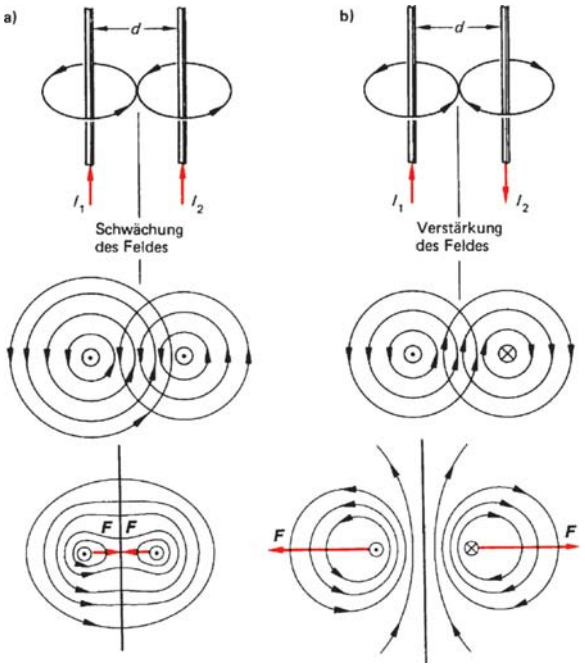


Abb. 4.102 Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Leitern

Abbildung 4.103 verdeutlicht den Zusammenhang. Die Kraft wird nach ihrem Entdecker *Lorentz-Kraft* genannt (H. A. Lorentz, 1853 bis 1928). Der Betrag der Lorentz-Kraft ist

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{L}| = Q\,v\,B\sin(\boldsymbol{v},\boldsymbol{B})\,. \qquad (4.204)$$

Die Lorentz-Kraft ist demnach maximal, wenn $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ senkrecht zueinander stehen und null, wenn sich die Ladungsträger in Richtung des magnetischen Feldes bewegen.

Sind die fließenden Ladungen in einem Leiter Elektronen, so erfahren die mit einer Geschwindigkeit v_el in x-Richtung fließenden Elektronen in einem Querfeld B_y in y-Richlung

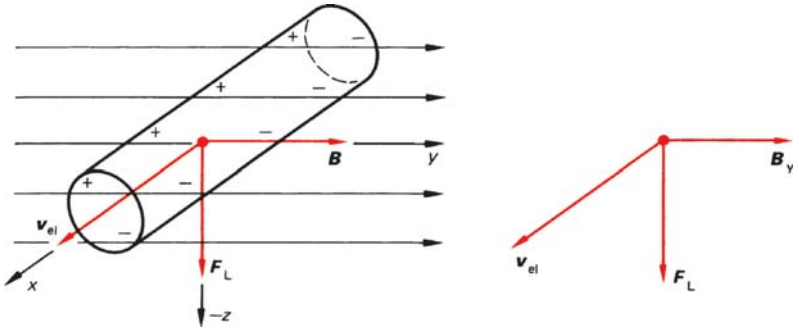


Abb. 4.103 Kraft auf bewegte (negative) Ladungsträger im Magnetfeld

eine Lorentz-Kraft in z-Richtung. Sie beträgt je Elektron

$$F_{Lz} = -e\,(v_x \cdot B_y)\,. \tag{4.205}$$

Sie wirkt wegen der negativen Ladung der Elektronen in die negative z-Richtung.

Hall-Effekt

Durch ein leitendes Plättchen mit der Breite b und der Dicke d fließe in x-Richtung ein Strom I_x. Senkrecht hierzu herrsche ein Magnetfeld B_z. Dann wirkt auf jedes Elektron die Lorentz-Kraft

$$F_{Ly} = -e\,v_x\,B_z\,.$$

Durch diese Lorentz-Kraft werden die Elektronen in y-Richtung verschoben, sodass an der linken Stirnseite ein Elektronenüberschuss und an der rechten Stirnseite ein Elektronenmangel herrscht, wie Abb. 4.104 zeigt. Dies hat zur Folge, dass in y-Richtung ein elektrisches Gegenfeld aufgebaut wird und eine elektrische Gegenkraft $F_{el} = -e\,E_y$ auftritt. Die Verschiebung der Elektronen aufgrund der Lorentz-Kraft kommt dann zum Stillstand, wenn sich ein Gleichgewicht der Kräfte einstellt:

$$F_{el} = F_{Ly} \quad \text{oder} \quad -e\,E_y = -e\,v_x\,B_z\,.$$

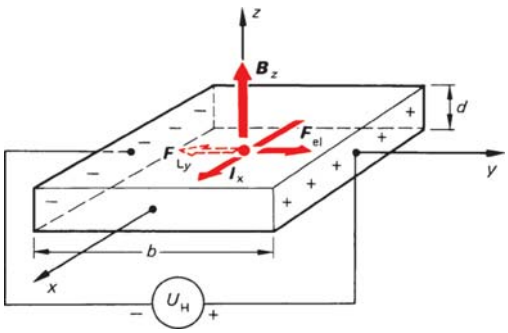


Abb. 4.104 Hall-Effekt (negative Ladungsträger)

Es ist $E_y = U_y/b$, sodass für die zwischen den Stirnseiten in y-Richtung messbare Spannung U_y folgt

$$U_y = B_z\,v_x\,b = U_H\,. \tag{4.206}$$

Die Spannung U_H wird *Hall-Spannung* genannt (E. H. Hall, 1855 bis 1938).
Die Stromdichte j_x der Elektronen in x-Richtung ist

$$j_x = n\,e\,v_x = \varkappa\,E_x\,. \tag{4.207}$$

Dabei ist n die Anzahl der Elektronen je Volumen und e die Elementarladung. Eingesetzt in die Gleichung für die Hall-Spannung ergibt sich

$$U_H = \frac{1}{n\,e}\,j_x\,B_z\,b\,. \tag{4.208}$$

Der Faktor $\frac{1}{n\,e}$ wird Hall-Koeffizient A_H genannt:

$$A_H = \frac{1}{n\,e}\,. \tag{4.209}$$

Somit kann (4.208) geschrieben werden

$$U_H = A_H\,j_x\,B_z\,b\,. \tag{4.210}$$

Wegen $j_x = I_x/(b\,d)$ gilt

$$U_H = \frac{A_H\,B_z}{d}\,I_x = R_H\,I_x\,. \tag{4.211}$$

Da die Hall-Spannung proportional zur magnetischen Induktion B ist, werden *Hall-Sonden* zur Messung von Magnetfeldern

verwendet. In *Hall-Generatoren* geschieht die Multiplikation zweier elektrischer Größen ($I_x B_z$) durch Messung der Hallspannung U_H. Bei dem von K. v. KLITZING entdeckten *Quanten-Hall-Effekt* ist der *Hall-Widerstand* R_H gequantelt. Er hat eine große Bedeutung als Widerstandsnormal (Abschn. 4.1.4 und 8.2.5).
Mit Hilfe des Hall-Koeffizienten A_H können folgende physikalische Größen ermittelt werden:

- die Ladungsträgerkonzentration n (wichtig u.a. bei Halbleitern, s. Abschn. 9.2.3),
- das Vorzeichen der Ladungsträger (Löcherleitung plus und Elektronenleitung minus),
- die Ladungsträgerbeweglichkeit $\mu = \varkappa A_H$.

Tabelle 4.10 zeigt die Werte des Hall-Koeffizienten A_H für einige ausgewählte Werkstoffe.

Beispiel

4.4-5 Durch eine 0,1 mm dicke Silberfolie fließt ein Strom von 4 A. Im senkrecht zur Folie befindlichen Magnetfeld ($B = 6{,}2\ \mathrm{Vs/m^2}$) wird eine Hall-Spannung $U_H = -22\ \mu\mathrm{V}$ gemessen. Bestimmt werden sollen die Hall-Konstante A_H von Silber, die Ladungsträgerkonzentation n und die Elektronenbeweglichkeit μ.

Lösung

Nach (4.211) gilt für den Hall-Koeffizienten

$$A_H = \frac{U_H\, d}{I\, B} = -8{,}87 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{C}}\ .$$

Aus (4.209) ergibt sich $n = \frac{1}{A_H\, e} = 7 \cdot 10^{28}\,\frac{1}{\mathrm{m^3}}$.
Aus $A_H = \frac{\mu}{\varkappa}$ resultiert

$$\mu = A_H\, \varkappa \left(\varkappa_{\mathrm{Silber}} = 6{,}25 \cdot 10^7\,\frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}\right)$$

$$= 5{,}54 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}\ .$$

Tabelle 4.10 Hall-Koeffizienten einiger Werkstoffe

Werkstoff		A_H in $10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{C}}$
	Elektronenleitung	
Kupfer	Cu	−5,5
Gold	Au	−7,5
Natrium	Na	−25
Caesium	Cs	−28
	Löcherleitung	
Cadmium	Cd	+6
Zinn	Sn	+14
Beryllium	Be	+24,4
	Halbleiter	
Wismut	Bi	$-5 \cdot 10^4$
Indium-Arsenid	InAs	-10^7

Kraftwirkungen auf frei bewegliche Ladungsträger

Bewegen sich freie Ladungsträger (z. B. Elektronen in einem Oszilloskop oder Protonen in einem Beschleuniger) mit einer konstanten Geschwindigkeit v in einem magnetischen Querfeld, so wirkt auf sie die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}_L = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Sie steht – analog zur Zentripetalkraft einer Kreisbewegung in der Mechanik – senkrecht zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und ändert lediglich die Richtung, nicht aber den Betrag der Teilchengeschwindigkeit, wie Abb. 4.105a zeigt. Deshalb führen die geladenen Teilchen im Magnetfeld eine Kreisbewegung aus, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in ein homogenes magnetisches Querfeld gelangen (Abb. 4.105b). Durchlaufen geladene Teilchen einen Kreis mit dem Radius r, so ist die Zentrifugalkraft gleich der Lorentz-Kraft:

$$\frac{m\,v^2}{r} = Q\,v\,B \quad \text{oder}$$

$$r = \frac{m\,v}{Q\,B}\ . \tag{4.212}$$

Diese Beziehung zeigt, dass bei konstantem magnetischen Querfeld der Bahnradius umso kleiner wird, je größer das Magnetfeld ist. Mit zunehmender Geschwindigkeit der geladenen

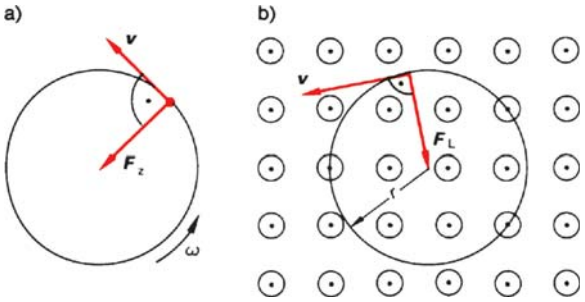


Abb. 4.105 Kreisbewegung freier Elektronen im Magnetfeld

Teilchen wird der Radius größer. Dies wird bei den Teilchenbeschleunigern ausgenutzt. In Abb. 4.106 erkennt man das Prinzip. Bei einem *Zyklotron* herrscht ein konstantes Magnetfeld, und die Teilchen werden durch ein elektrisches Wechselfeld zwischen den Bereichen I und II auf höhere Geschwindigkeiten gebracht (Abb. 4.106a). Dadurch entsteht eine spiralförmige Bahn, die aus aneinandergrenzenden Halbkreisen besteht. (Bei hohen Teilchengeschwindigkeiten ist der relativistische Massenzuwachs zu berücksichtigen, s. Abschn. 10.4.) In einem *Synchrotron* (Abb. 4.106b) bleibt der Radius der beschleunigten Teilchen gleich, weil entsprechend der zunehmenden Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ebenfalls erhöht wird.

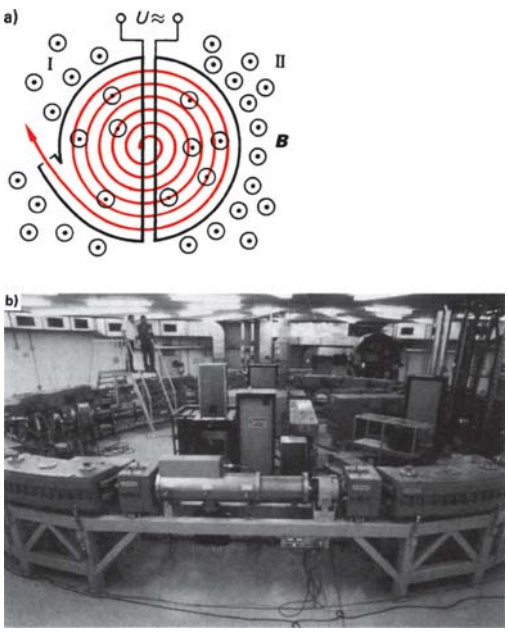


Abb. 4.106 **a** Zyklotron, schematisch und **b** Synchrotron

Aus (4.212) ist auch die *spezifische Ladung* eines Elementarteilchens bestimmbar:

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{r\,B}\,. \tag{4.213}$$

Für ein Elektron gilt dann

$$\frac{Q}{m} = \frac{-e}{m_{\mathrm{el}}} = -1{,}76 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\,. \tag{4.214}$$

Entsprechend der spezifischen Ladung von Teilchen entstehen unterschiedliche Auftreffpunkte. Mit einem geeignet konstruierten *Massenspektrograph* nach F.W. Aston (1877 bis 1945) können diese sichtbar gemacht und somit die relativen Atommassen ermittelt werden.

Beispiel

4.4-6 In einem Zyklotron werden Protonen in einem Magnetfeld von $B = 2$ T beschleunigt. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Umläufe je Sekunde von der Teilchengeschwindigkeit und vom Radius unabhängig ist. Berechnen Sie diese im vorliegenden Fall.

Lösung

Nach (4.213) gilt $v = \frac{Q}{m} r B$. Für die Frequenz gilt $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \frac{v}{r}$.
Wird v in die Gleichung für die Frequenz eingesetzt, so ergibt sich

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{Q B}{2\pi m} . \tag{4.215}$$

Im vorliegenden Fall ermittelt man mit $Q_P = 1{,}602\ 10^{-19}$ C und $m_P = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg; f =30,49 MHz.

Kraftwirkung im elektrischen und magnetischen Feld

Bewegen sich geladene Teilchen sowohl in einem elektrischen als auch in einem magnetischen Feld, dann wirkt die resultierende Kraft

$$\boldsymbol{F} = Q\,\boldsymbol{E} + Q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) . \tag{4.216}$$

Sind beide Felder – d. h. das elektrische und das magnetische Feld – parallel, so bewegen sich geladene Teilchen auf einer *Schraubenbahn*, da das Magnetfeld eine Kreisbahn um die Magnetfeldachse erzwingt und das elektrische Feld eine Kraft in Längsrichtung bewirkt.

Die formale Ähnlichkeit der Feldgleichungen im Vakuum

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}$,

bzw. in Materie

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B} = \mu_r\,\mu_0\,\boldsymbol{H}$,

suggeriert, dass sich

$\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{H}$, sowie $\boldsymbol{D} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$

entsprechen. Tatsächlich zeigen die Kraftwirkungen auf elektrische Ströme oder allgemeiner auf bewegte Ladungen im Magnetfeld, sowie auf ruhende und bewegte Ladungen im elektrischen Feld, dass

$\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{D} \Leftrightarrow \boldsymbol{H}$

miteinander korrespondieren.

4.4.4 Materie im Magnetfeld

4.4.4.1 Grundbegriffe

Wird Materie in ein magnetisches Feld gebracht, so ändert sich – analog zur Materie im elektrischen Feld (Abschn. 4.3.7) – die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$. Es ist

$$\mu_r = \frac{|\boldsymbol{B}_m|}{|\boldsymbol{B}_0|} . \tag{4.217}$$

Die Permeabilitätszahl μ_r ist eine dimensionslose Verhältniszahl, sie gibt an, um das Wievielfache sich die magnetische Flussdichte mit Materie ($\boldsymbol{B}_m$) im Verhältnis zur magnetischen Flussdichte ohne Materie ($\boldsymbol{B}_0$) verändert.

Aus (4.217) folgt

$$\boldsymbol{B}_m = \mu_r\,\boldsymbol{B}_0 = \mu_0\,\mu_r\,\boldsymbol{H}_0 . \tag{4.218}$$

Analog zum elektrischen Feld wird die durch die Materie zusätzlich hervorgerufene magnetische Flussdichte *magnetische Polarisation* $\boldsymbol{J}$ genannt:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}_m - \boldsymbol{B}_0 . \tag{4.219}$$

Mit $\boldsymbol{B}_m = \mu_r \boldsymbol{B}_0$ ergibt sich aus (4.219)

$$\boldsymbol{J} = (\mu_r - 1)\,\boldsymbol{B}_0 = (\mu_r - 1)\,\mu_0\,\boldsymbol{H}_0 . \tag{4.220}$$

Der Faktor $(\mu_r - 1)$ heißt analog zur elektrischen Suszeptibilität (4.156) *magnetische Sus-*

zeptibilität χ_m. Somit formt sich (4.220) um zu

$$\boldsymbol{J} = \chi_m \boldsymbol{B}_0 = \chi_m \mu_0 \boldsymbol{H} , \tag{4.221}$$

$$\chi_m = \frac{|\boldsymbol{J}|}{|\boldsymbol{B}_0|} = \frac{|\boldsymbol{J}|}{\mu_0 |\boldsymbol{H}|} . \tag{4.222}$$

Die magnetische Suszeptibilität χ_m beschreibt das Verhältnis von Polarisation $\boldsymbol{J}$, hervorgerufen durch Materie im Magnetfeld, und der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}_0$ (ohne Materie).

Wird am System außer dem Einbringen von Materie nichts geändert, dann bleibt der eingeprägte Strom in der Spule konstant und damit auch die Feldstärke; $\boldsymbol{H}$ ist also im Vakuum und in Materie gleich ($\boldsymbol{H}$ invariant). Für die *Magnetisierung* $\boldsymbol{M}$ gilt:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{J}}{\mu_0} . \tag{4.223}$$

Nach weiteren Umformungen ergeben sich folgende Formulierungen:

$$\boldsymbol{M} = (\mu_r - 1)\,\boldsymbol{H} = \chi_m \boldsymbol{H} . \tag{4.224}$$

Für die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}/\mu_0) \\ &= \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \end{aligned} \tag{4.225}$$

Die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ entspricht der Summe aller magnetischen Dipolmomente $\boldsymbol{m}$ dividiert durch das Probenvolumen:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum \boldsymbol{m}_i}{V} = \frac{N}{V}\overline{\boldsymbol{m}} .$$

Die Magnetisierung ist bei vielen Stoffen proportional zur magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$. Ausgenommen hiervon sind die *nichtlinearen magnetischen Werkstoffe* (z. B. die Ferromagnetika). Werkstoffe können nach ihrem Verhalten im Magnetfeld ($\mu_r = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_0$) gemäß Abb. 4.107 eingeteilt werden in

- *diamagnetische Stoffe*
  μ_r wenig kleiner als 1 bzw. χ_m geringfügig negativ, Beispiele: Cu, Bi, Pb;

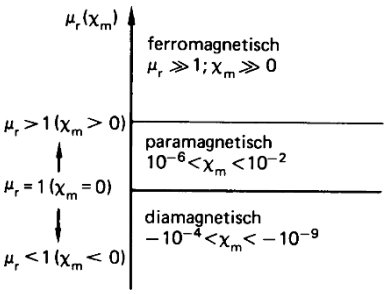


Abb. 4.107 Einteilung magnetischer Werkstoffe nach den Zahlenwerten von μ_r bzw. χ_m

Tabelle 4.11 Magnetische Suszeptibilität magnetischer Werkstoffe

Werkstoff	magnetische Suszeptibilität
	Ferromagnetika
Mu-Metall (75 Ni-Fe)	bis $9 \cdot 10^4$
Fe (rein)	10^4
Fe-Si	$6 \cdot 10^3$
Ferrite (weich)	$1 \cdot 10^3$
AlNiCo	3
Ferrite (hart)	0,3
	Paramagnetika
O_2 (flüssig)	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Pt	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$
Al	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$
O_2 (gasförmig)	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$
	Diamagnetika
N_2 (gasförmig)	$-6{,}75 \cdot 10^{-9}$
Bi	$-1{,}5 \cdot 10^{-4}$
Au	$-2{,}9 \cdot 10^{-5}$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
H_2O	$-7 \cdot 10^{-6}$

- *paramagnetische Stoffe*
  μ_r wenig größer als 1 bzw. χ_m geringfügig positiv, Beispiele: Al, Pt, Ta;
- *ferromagnetische Stoffe*
  μ_r wesentlich größer als 1 bzw. χ_m deutlich positiv, Beispiele: Co, Fe, Ni.

Tabelle 4.11 vermittelt eine Übersicht über die magnetische Suszeptibilität einiger dia-, para- und ferromagnetischer Werkstoffe bei Raumtemperatur.

4.4.4.2 Stoffmagnetismus

Das unterschiedliche magnetische Verhalten von Materie ist auf deren Elektronenstruktur zurückzuführen. Die Elektronen erzeugen als sich bewegende elektrische Ladungen magnetische Momente, und zwar durch

- die Bahnbewegung ein *magnetisches Bahnmoment* $\boldsymbol{m}_{\text{Bahn}}$ senkrecht zur Umlauffläche und durch
- die Eigenrotation (*Elektronen-Spin*) ein *magnetisches Spinmoment* $\boldsymbol{m}_{\text{Spin}}$.

Das von der Kernbewegung herrührende Kernspinmoment kann wegen der geringen Magnetwirkung vernachlässigt werden. Abbildung 4.108 zeigt die Arten des Stoffmagnetismus, die jeweiligen Ursachen und Wirkungen, die Temperaturabhängigkeit des Kehrwertes der Suszeptibilität sowie typische magnetische Werkstoffe. Der Ferromagnetismus ist wegen seiner großen technischen Bedeutung ausführlich beschrieben.

Diamagnetismus

Der Diamagnetismus ist eine Eigenschaft aller Körper; er kann aber durch andere magnetische Erscheinungen überdeckt werden. In *reiner Form* tritt er auf, wenn sich die *magnetischen Spinmomente* aller Atomelektronen *aufheben*. Dies ist bei Elementen mit abgeschlossenen Elektronenschalen der Fall (Pauli-Prinzip, Abschn. 8.4). Wird ein diamagnetischer Stoff in ein äußeres Magnetfeld gebracht, erzeugt die Wechselwirkung des magnetischen Elektronen-Bahnmomentes $\boldsymbol{m}_{\text{Bahn}}$ mit diesem äußeren Magnetfeld eine *Präzession* der Elektronenbahn. Durch diese Kopplung der Elektronenbewegung entstehen inneratomare Ringströme, deren Magnetfeld dem äußeren Magnetfeld entgegengesetzt gerichtet ist (*Lenz'sche Regel*, Abschn. 4.5). Das gesamte Magnetfeld wird dadurch schwächer. Aus diesem Grund ist die Permeabilitätszahl $\mu_r < 1$ bzw. die magnetische Suszeptibilität $\chi_m < 0$. Der Diamagnetismus verschwindet wieder, wenn das äußere Feld abgeschaltet wird. Eine Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität ist nicht festzustellen. Typische Stoffe mit diamagnetischem Verhalten sind Ag, Au, Cu, Bi oder H_2.

Paramagnetismus

Unaufgefüllte Elektronenschalen (bzw. eine ungerade Anzahl von Elektronen) führen zu nicht vollständig kompensierten magnetischen Spinmomenten. Diese magnetischen Spinmomente sind regellos verteilt. Das äußere Magnetfeld richtet die Elementarmagnete durch seine Wechselwirkung mit dem magnetischen Spinmoment aus; dieser vollständigen Ausrichtung steht jedoch die Wärmebewegung der Atome entgegen. Die thermische Bewegung der Atome nimmt mit steigender Temperatur zu, dementsprechend der Grad der Ausrichtung der magnetischen Spinmomente und damit die magnetische Suszeptibilität ab. Es gilt hierbei das *Curie'sche Gesetz* (P. Curie, 1859 bis 1906):

$$\chi_m = \frac{C}{T} \,. \tag{4.226}$$

Der Faktor C ist eine stoffabhängige Größe.

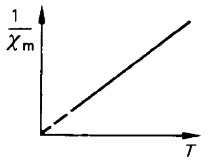
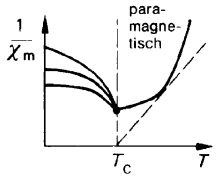
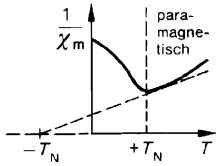
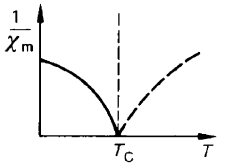
Stoffmagnetismus	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus	Antiferromagnetismus	Ferrimagnetismus
Ursachen	abgeschlossene Elektronenschalen	unaufgefüllte Elektronenschalen	unaufgefüllte innere Elektronenschalen	unaufgefüllte innere Elektronenschalen; sehr kleine Atomabstände; Na Cl – Struktur	unaufgefüllte innere Elektronenschalen; Spinellstruktur ($MgO \cdot Al_2O_3$)
Wirkungen (magnetische Momente)	jeder Stoff; Kompensation der Spinmomente; nur bei äußerem Feld vorhanden	regellose Verteilung 	parallele Spinausrichtung in Weiß'schen Bezirken 	zwei ferromagnetische Untergitter gleicher Spinmomente 	zwei ferromagnetische Untergitter mit ungleichen Spinmomenten 
Temperaturabhängigkeit des Kehrwerts der magnetischen Suszeptibilität	keine	 Curie´sches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T}$	 Curie-Weiß´sches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$	 $\chi_m = \frac{C}{T + T_N}$ (richtungsabhängig)	 $\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$ (im Allgemeinen komplizierter Verlauf)
magnetische Suszeptibilität	$-1 < \chi_m < 0$	$10^{-6} < \chi_m < 10^{-3}$	$10^2 < \chi_m < 10^5$	———	———
Werkstoffe	Ag, Au, Bi, Cu, H_2, N_2	Sn, Pt, W, Al, O_2	Co, Fe, Gd, Ni	FeO, NiO, CoO CrF_3, FeF_3, CoF_3	$MeO \cdot Fe_2O_3$ (Me: Fe, Ni, Co) Ferrite

Abb. 4.108 Arten des Stoff-Magnetismus

Ferromagnetismus

Unaufgefüllte innere Elektronenschalen, wie sie vor allem bei den Übergangsmetallen (Fe, Ni, Co, Gd, Er) vorkommen, führen zu gleichgerichteten Spinmomenten. Es existieren ganze *Kristallbereiche gleicher Magnetisierung* in der Größe von etwa 10 µm bis 1 mm. Sie werden *Weiss'sche Bezirke* genannt (P. E. Weiss, 1865 bis 1940). Sie sind im unmagnetisierten Zustand regellos verteilt, sodass der Werkstoff nach außen unmagnetisch ist. Durch Anlegen eines äußeren Feldes werden die Weiss'schen Bezirke zunehmend in Feldrichtung ausgerichtet. Die parallele Ausrichtung der magnetischen Spinmomente wird mit zunehmender Temperatur zerstört, bis sie oberhalb der *ferromagnetischen Curie-Temperatur* T_C völlig aufgehoben ist und die ferromagnetischen Stoffe nur noch ein paramagnetisches Verhalten aufweisen.
Für Temperaturen oberhalb T_C gilt das *Curie-Weiss'sche Gesetz*:

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \,. \qquad (4.227)$$

Die Curie-Temperaturen einiger ferromagnetischer Werkstoffe sind in Tabelle 4.12 zusammengestellt.

Tabelle 4.12 Ferromagnetische Curie-Temperatur einiger Werkstoffe

Werkstoff	ferromagnetische Curie-Temperatur T_C in K
Dy	87
Gd	289
Cu_2MnAl	603
Ni	631
Fe	1 042
Co	1 400

Ferromagnetika weisen ein *nichtlineares Verhalten* der magnetischen Induktion B in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke H auf, d. h., die Permeabilitätszahl μ_r bzw. die magnetische Suszeptibilität χ_m ist nicht konstant, sondern eine komplizierte Funktion von H. Einen typischen Verlauf der Permeabilitätszahl bei zunehmender magnetischer Feldstärke H zeigt schematisch Abb. 4.109. Der spezielle Verlauf von μ_r in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke H ist vom Werkstoff und von der Vorbehandlung des Werkstoffs abhängig.
In Abb. 4.110 ist die Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B von der magnetischen

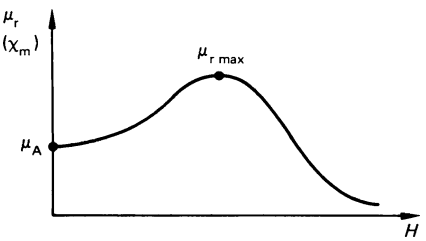


Abb. 4.109 Verlauf der Permeabilitätszahl μ_r in Abhängigkeit von der Feldstärke H für einen Ferromagneten

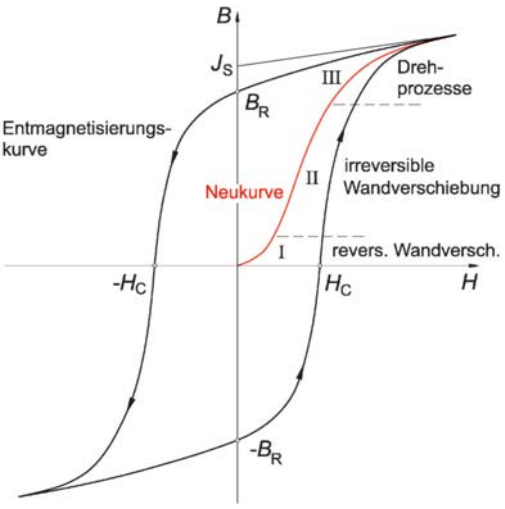


Abb. 4.110 Hysteresekurve

Feldstärke H (Hysteresekurve) dargestellt. Vom unmagnetisierten Zustand $H = B = 0$ ausgehend verändert sich die Flussdichte B bei monoton anwachsender Feldstärke H längs der *Neukurve*. Sie nähert sich asymptotisch der Geraden

$$B = \mu_0 H + J_S = \mu_0 (H + M_S) ,$$

wenn alle Elektronenspins parallel zum äußeren Feld ausgerichtet sind, d. h. wenn die magnetische Polarisation ihren Sättigungswert J_S erreicht hat. Abbildung 4.111 zeigt die Weiss'schen Bezirke eines Nickel-Einkristalls im unmagnetischen Zustand (Abb. 4.111a, entspricht dem Punkt 0 der Neukurve), bei teilweiser Magnetisierung (Abb. 4.111b, entspricht dem Gebiet II der Neukurve) und bei vollständiger Magnetisierung (Abb. 4.111c, entspricht der Sättigungsinduktion B_S). Besonders gut sichtbar ist die einheitliche Magnetisierung der Weiss'schen Bezirke, die durch die *Bloch-Wände* (F. Bloch, 1905 bis 1983) voneinander getrennt sind. Diese Bloch-Wände sind die Übergangszonen, in denen sich die Magnetisierung von einem Weiss'schen Bezirk zum andern ändert.

In der Neukurve laufen drei Elementarprozesse ab: Bei der Erhöhung der äußeren magnetischen Feldstärke H nimmt die magnetische Induktion B aufgrund von *Bloch-Wand-Verschiebungen* schnell zu. Zunächst finden die leichter verschiebbaren *reversiblen Wandverschiebungen* (*Bereich I*) und später die schwerer verschiebbaren *irreversiblen Wandverschiebungen* statt (*Bereich II*). Die Bezirke, die annähernd in Feldrichtung ausgerichtet sind, vergrößern sich in diesen beiden Phasen auf Kosten der anderen. Das Material ist teilweise magnetisiert (Abb. 4.111b). Bei weiter zunehmendem Magnetfeld H nimmt die magnetische Induktion B nur noch geringfügig zu. In diesem Bereich finden *Drehprozesse* statt (*Bereich III*), bei denen sich die magnetischen Momente vollends in die vorgegebene Feldrichtung drehen. Das Material ist dann bis zur *Sättigungspolarisation* J_S magnetisiert (Abb. 4.111c). Von diesem Punkt an nimmt B nur noch geringfügig zu.

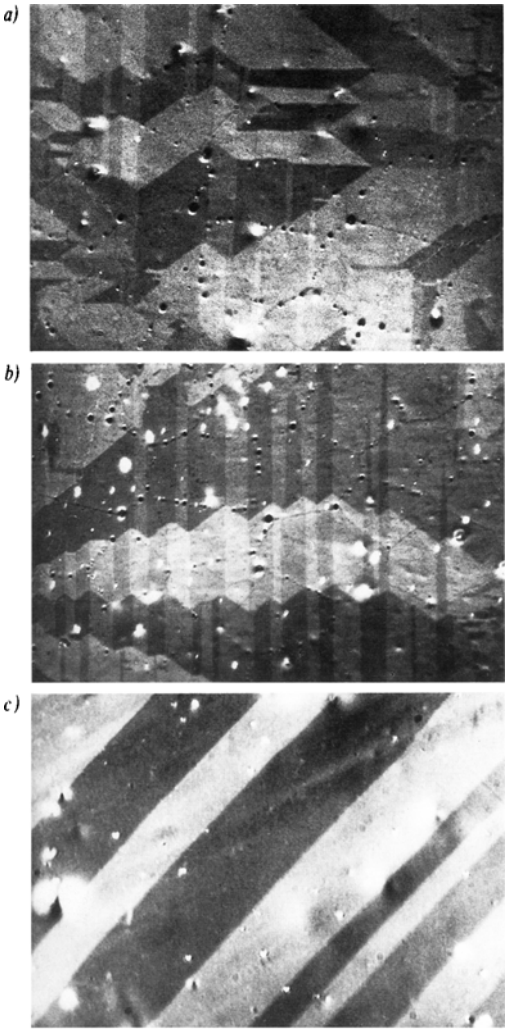


Abb. 4.111 Veränderung der Weiss'schen Bezirke eines Nickel-Einkristalls bei Zunahme des Magnetfeldes

Wird das magnetische Feld ausgeschaltet ($H = 0$), dann bleibt eine Restinduktion übrig, die man *Remanenzflussdichte* (*Remanenz*) B_R nennt. Um wieder einen unmagnetischen Materialzustand zu erreichen ($B = 0$), muss eine

Gegenfeldstärke eingestellt werden. Sie wird *Koerzitivfeldstärke* H_C genannt. Bei weiter zunehmendem Gegenfeld wird das Material bis zur Sättigung in Gegenrichtung ($-J_S$) aufmagnetisiert. Beim Ausschalten des Magnetfeldes ($H = 0$) fällt die magnetische Induktion wieder bis zur Remanenzflussdichte ($-B_R$) und erst ein positives Magnetfeld (H_C) erzeugt wieder ein unmagnetisches Material. Bei erneuter Erhöhung des magnetischen Feldes wird wieder die Sättigungsinduktion J_S erreicht. Die durchlaufene Kurve nennt man *Hystereseschleife*.

Wird anstelle der Induktion B die Polarisation J über der magnetischen Feldstärke H aufgetragen, dann hat die Koerzitivfeldstärke H_C, bei der die Polarisation null wird einen anderen Wert als im $B(H)$-Diagramm. Aus diesem Grund gibt es zweierlei Koerzitivfeldstärken: H_{CJ} im $J(H)$-Diagramm und H_{CB} im $B(H)$-Diagramm. Der numerische Unterschied ist allerdings nicht erheblich.

Scherung

Wird mit einem stabförmigen Magnetwerkstoff eine Magnetisierungskurve aufgenommen, so kann diese je nach Geometrie des Stabes unter Umständen erheblich von der Magnetisierungskurve abweichen, die man mit einem geschlossenen Ring desselben Materials misst.

Der Grund liegt in der entmagnetisierenden Wirkung der Magnetpole an den Stabenden. Diese erzeugen ein entmagnetisierendes Feld H'', das dem von außen angelegten Feld H' (beispielsweise durch eine Spule erzeugt, mit $H' = N\,I/l$) entgegengesetzt gerichtet ist und dieses schwächt. Im Innern der Probe ist deshalb die Feldstärke H kleiner als die Feldstärke des äußeren Feldes: $H = H' - H''$. Das entmagnetisierende Feld ist umso größer, je größer die Polarisation in der Probe ist: $H'' = N\,M = N\frac{J}{\mu_0}$. N wird als *Entmagnetisierungsfaktor* bezeichnet. Er hängt nur von der Probengeometrie ab (Tabelle 4.13).

Für die wahre Feldstärke im Innern der Probe gilt damit

$$H = H' - N\frac{J}{\mu_0}\ , \text{ oder mit (4.234)}$$

$$H = \frac{H' - N\dfrac{B}{\mu_0}}{N-1}\ . \qquad (4.228)$$

Abbildung 4.112 zeigt den ersten und zweiten Quadranten einer gemessenen (gescher-

Tabelle 4.13 Entmagnetisierungsfaktor für ausgewählte Geometrien

Geometrie	Magnetisierung	Entmagnetisierungsfaktor N
dünne Platte	in Plattenebene	0
	senkrecht zur Plattenebene	1
sehr langer Stab	in Längsrichtung	0
	in Querrichtung	1/2
Kugel		1/3

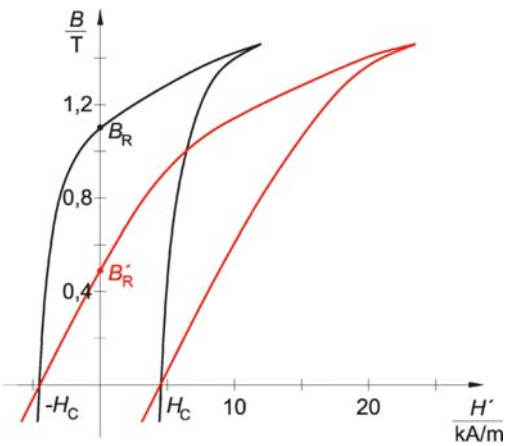


Abb. 4.112 Scherung der Hystereseschleife für den Entmagnetisierungsfaktor $N = 0{,}01$. B'_R ist die scheinbare, B_R die wahre Remanenzdichte des Werkstoffs

ten) Hystereseschleife $B(H')$ und die mit Hilfe von (4.229) *zurückgescherte* Hysteresekurve $B(H)$. Offensichtlich ist die Remanenz B'_R = 0,5 T im Stab wesentlich niedriger als die Remanenz B_R = 1,1 T in einem ringförmigen geschlossenen Magneten.

Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Unaufgefüllte innere Elektronenschalen führen zu parallelen magnetischen Spinmomenten. Bei *Antiferromagnetika* liegen *zwei gleich große ferromagnetische Untergitter* vor, die sich *antiparallel* einstellen. Deshalb ist die Suszeptibilität auch nur schwach positiv. Die Suszeptibilität entspricht oberhalb der *Néel-Temperatur* T_N (L. Néel, 1904 bis 2000) dem abgewandelten Curie-Gesetz:

$$\chi_m = \frac{C}{T + T_N} \,. \qquad (4.229)$$

Unterhalb dieser Temperatur verläuft die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität χ_m meist sehr unterschiedlich. Sie ist zudem stark von der Kristallrichtung abhängig. Typische antiferromagnetische Substanzen sind MnO, NiO, CoO, CrF_3, FeF_3, CoF_3 (Abb. 4.108).

Sind die magnetischen Momente der antiparallel eingestellten Untergitter *nicht* gleich groß, dann ist ein resultierendes magnetisches Moment vorhanden. Dies wird *Ferrimagnetismus* genannt. Er hat teils antiferromagnetische und teils ferromagnetische Eigenschaften (z. B. Hysterese). Die Werkstoffe heißen *Ferrite*. Typische Kristallstrukturen sind Spinelle der Form $MeOFe_2O_3$ – für Me kann z. B. Fe, Ni, Co stehen – aber auch hexagonale Ferrite der Form $MeO \cdot 6Fe_2O_3$ (Me: Ba, Sr, Pb) oder Granate der Form $3\,Me_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$ (Me: dreiwertiges Selten-Erdmetall, z. B. Ce^{3+}, Sm^{3+}).

Die Ferrite haben große technische Bedeutung sowohl als weichmagnetische als auch als dauermagnetische Werkstoffe. Sie sind keine Metalle, sondern Ionenkristalle. Deshalb weisen sie einen hohen spezifischen Widerstand auf ($1 < \varrho < 10^3\,\Omega\,m$) im Vergleich zu den Metallen ($\varrho \approx 10^{-7}\,\Omega\,m$). Aus diesem Grund treten kaum messbare Wirbelströme (Abschn. 4.5.1.2) auf, sodass Ferrite vor allem für magnetische Anwendungen bei hohen Frequenzen (z. B. Spulenkerne bei Frequenzen bis 5 MHz) eingesetzt werden.

Der Temperaturverlauf der Suszeptibilität ist im Allgemeinen sehr kompliziert, oberhalb der ferromagnetischen Curie-Temperatur T_C zeigt sie einen paramagnetischen Verlauf.

Magnetostriktion

Durch Blochwandverschiebungen aufgrund eines äußeren Magnetfeldes kann eine Längenänderung eintreten. Diese elastische Formänderung bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes heißt *Magnetostriktion*. Abbildung 4.113 zeigt schematisch die positive Magnetostriktion (gestrichelt) bei Eisen (Längenvergrößerung bei kleinerer Breite) und die negative Magnetostriktion bei Nickel (Längenverkürzung bei zunehmender Breite). Die Längenänderungen $\Delta l/l$ liegen im Allgemeinen zwischen $-3 \cdot 10^{-5}$ und $+5 \cdot 10^{-5}$.

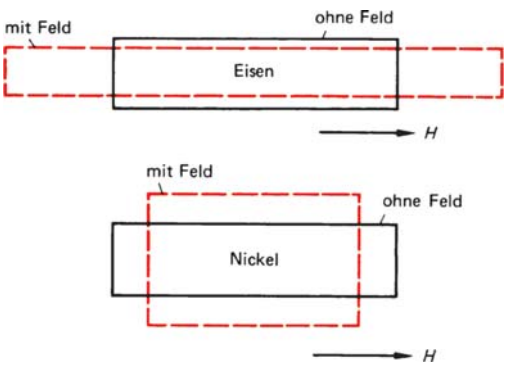


Abb. 4.113 Magnetostriktion bei Eisen und Nickel

Magnetostriktive Materialien dienen der Erzeugung von Ultraschall mit einer Frequenz bis 60 kHz und einer Schallintensität bis 10^5 W/m^2.

4.4.4.3 Magnetische Werkstoffe

Abbildung 4.114 zeigt eine Einteilung der magnetischen Werkstoffe nach IEC 404-1. Je nach Koerzitivfeldstärke H_C können sie in drei Hauptgruppen eingeteilt werden, nämlich in

- *weichmagnetische Werkstoffe* entsprechend $0{,}1 < H_C < 10^3$ A/m,
- *magnetisch halbharte Werkstoffe* entsprechend $10^3 < H_C < 4{,}5 \cdot 10^4$ A/m und in
- *magnetisch harte Werkstoffe* entsprechend $H_C > 4{,}5 \cdot 10^4$ A/m.

Die niedrigsten Koerzitivfeldstärken ($H_C \approx 1$ A/m) weisen hochnickelhaltige Legierungen (75% NiFe, Permalloy und amorphe Werkstoffe auf Co-Basis) auf, gefolgt von Legierungen mit mittlerem Nickelgehalt (50% NiFe; $H_C \approx 10$ A/m) und amorphen Werkstoffen auf Fe-Basis, Eisen (Silicium) ($H_C \approx 100$ A/m) und Kobalt-Eisen ($H_C \approx 300$ A/m). Magnetwerkstoffe mit Koerzitivfeldstärken größer als $4{,}5 \cdot 10^4$ A/m sind die hartmagnetischen Werkstoffe. Hierzu zählen die Legierungen aus AlNiCo, FeTi, PtCo, FeCoV und CuNiFe sowie die Selten-Erd-Kobaltverbindungen (SECo, z. B. $SmCo_5$) und die NdFeB-Magnete. Im weichmagnetischen wie im hartmagnetischen Bereich werden auch Ferrite eingesetzt (s. Ferrimagnetismus).

Die *Fläche der Hysteresekurve* ist ein Maß für die *Energie*, die zur Ummagnetisierung notwendig ist. Für weichmagnetische Materialien muss sie möglichst gering gehalten werden. Die Verluste liegen für Bleche mit der Dicke 0,2 mm bis 0,5 mm bei $B = 1$ T und $f = 50$ Hz zwischen 0,06 W/kg (65% NiFe) und 10 W/kg (Eisen).

Amorphe Weichmagnete bilden die neueste weichmagnetische Werkstoffgruppe. Sie zeichnen sich durch besonders hohe Permeabilitätswerte (μ_r bis zu 200 000) bei kleinen Koerzitivfeldstärken (H_C von 0,3 A/m bis 2 A/m) aus.

In Tabelle 4.14 sind die wichtigsten dauermagnetischen Werkstoffgruppen, ihre

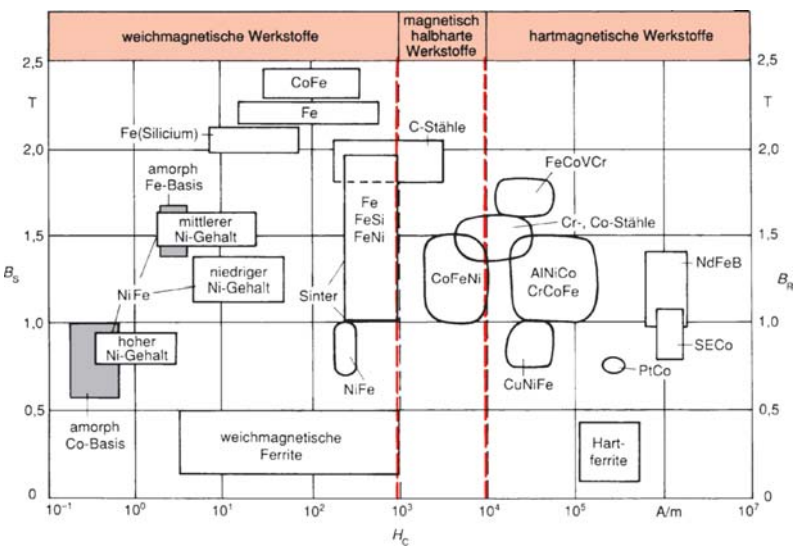


Abb. 4.114 Übersicht über die magnetischen Werkstoffe

Tabelle 4.14 Dauermagnetwerkstoffe

	abschreckungsgehärteter Stahl	ausscheidungsgehärtete Legierungen	kaltbearbeitete Legierungen	Pulvermagnete	Legierungen mit Ordnungsstruktur	Seltene Erden (SE)
Werkstoffe	36% Co 64% Fe	AlNiCo (9Al15Ni 23Co4Cu) CuNiCo (35Cu24Ni 41Co) CoFe (52Co38Fe 10V) FeMo (68Fe20Mo 12Co)	CuNiFe (60 Cu 20Ni20Fe) CoV (53Co14V 33Fe)	Ba-Ferrit Sr-Ferrit	CoPt FePt	$SECo_5$ (SE: Sm, Ce); NdFeB
B_R in T	0,9	1,3	1	0,38	0,6	0,9; 1,2
$-H_C$ in $\frac{kA}{m}$	20	56	42	132	360	700; 800
BH_{max} in $\frac{kJ}{m^3}$	8	56	28	25	64	160; 280
Bemerkungen	gute Formbarkeit; teuer; kleines $(BH)_{max}$	gute magnetische Stabilität	Anwendung: Drähte zur Tonaufzeichnung	beliebig formbar; sehr hart	teuer; Spezialmagnete	teuer; Spezialmagnete

Zusammensetzung, die Kennzahlen Remanenzinduktion B_R, Koerzitivfeldstärke H_C und das maximale Energieprodukt $(BH)_{max}$ (Abschn. 4.5.1.4, (4.264)) sowie typische Eigenschaften aufgeführt. Zu den ältesten und bewährtesten Dauermagnetwerkstoffen gehören die AlNiCo-Legierungen. Sie haben zwar eine hohe Remanenzinduktion, jedoch eine sehr kleine Koerzitivfeldstärke. Die Strontium- bzw. Bariumhexaferrite ($SrO(Fe_2O_3)_6$) sind Sinterkörper, die in beliebige Formen gepresst und in jede gewünschte Magnetisierungsrichtung gebracht werden können. Sie haben keine so große Remanenzinduktion, aber eine lineare Entmagnetisierungskurve. Höhere Koerzitivfeldstärken ($H_C \approx -360\,kA/m$) weisen PtCo-Dauermagnete auf. Die höchste magnetische Energiedichte ($(BH)_{max} \approx 160\,kJ/m^3$) haben die Selten-Erd-Kobalt-Magneten (z. B. $SmCo_5$) und Magnete aus NdFeB.

Zu den großtechnisch im Versuch befindlichen magnetischen Fördersystemen gehört die magnetische Schwebebahn *Transrapid*. Abbildung 4.115 zeigt die Schnellbahn und Abb. 4.116 schematisch die Funktionsweise.

Berechnung von Dauermagnetsystemen

Ein Dauermagnetsystem, etwa gemäß Abb. 4.117, besteht aus einem Dauermagneten und zwei weichmagnetischen Polschuhen, die den magnetischen Fluss verlustarm zum Luftspalt leiten, in dem die magnetische Energie genutzt wird. Grundlage zur Berechnung



Abb. 4.115 Magnetschwebebahn Transrapid auf der Versuchsstrecke. Foto: Thyssen Henschel

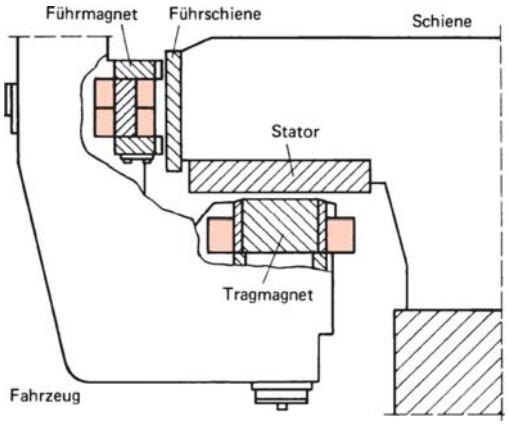


Abb. 4.116 Funktionsweise der Magnetschwebebahn

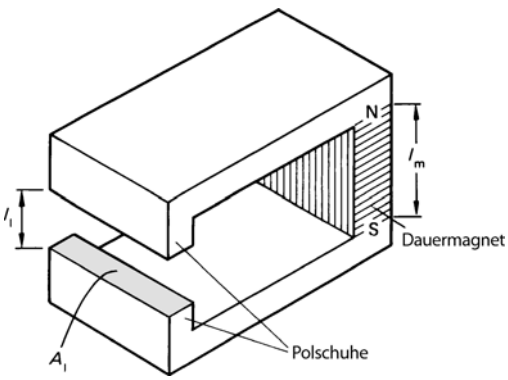


Abb. 4.117 Dauermagnetsystem

der Scherungsgeraden und der maximalen Energie je Volumen, $(BH)_{max}$-Wert, sind

- das Durchflutungsgesetz für $\Theta = 0$

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \quad (4.172)$$ und

- das Gesetz der Erhaltung des magnetischen Flusses (Flussgleichung)

$$\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \text{ konstant} \quad (4.190)\,.$$

Für ein Magnetsystem gilt das Durchflutungsgesetz

$$H_m\, l_m = -\gamma\, H_l\, l_l \qquad (4.230)$$

mit H_m bzw. H_l als der magnetischen Feldstärke im Magneten bzw. im Luftspalt und l_m bzw. l_l als der Länge des Magneten bzw. des Luftspaltes.
Der *Spannungsfaktor* γ ($\gamma > 1$) berücksichtigt die zusätzlich zum Luftspalt vorhandenen unmagnetischen Bereiche im Verlauf der magnetischen Spannung, z. B. die Weicheisenanteile und die unmagnetischen Zwischenräume von Klebeschichten. In der Praxis weist er Werte zwischen 1 und 1,3 auf. Aus dem Durchflutungsgesetz für den Dauermagnetkreis (4.230) ist ersichtlich, dass Dauermagnete mit einer hohen Koerzitivfeldstärke eine geringe Länge aufweisen können und umgekehrt.
Das Gesetz zur Erhaltung des magnetischen Flusses in einem magnetischen Kreis lautet

$$B_m\, A_m = \sigma\, B_l\, A_l \qquad (4.231)$$

mit B_m bzw. B_l als der magnetischen Flussdichte im Magneten bzw. im Luftspalt und A_m bzw. A_l als Querschnittsfläche des Magneten bzw. des Luftspaltes.
Der *Streufaktor* $\sigma(\sigma > 1)$ berücksichtigt die Streuung, d. h. die magnetischen Feldlinien, die nicht den Luftspalt durchsetzen. Er variiert in der Praxis zwischen 1 und 10. (Für

$\sigma = 10$ bedeutet dies, dass lediglich 10% des Dauermagnetflusses als Nutzfluss im Arbeitsluftspalt genutzt werden können.)
Abbildung 4.118 zeigt den Verlauf der *Entmagnetisierungskurve*. Aufgrund der Geometrie wird ein *Arbeitspunkt A* eingestellt, der die Koordinaten $(-H_m/B_m)$ hat. Die Gleichung der Geraden durch den Arbeitspunkt A und den Nullpunkt 0 wird *Scherungsgerade* genannt.
Aus dem Durchflutungsgesetz (4.230) und der Gleichung der Flusserhaltung (4.231) folgt mithilfe von $B_l = \mu_0 H_l$ die Gleichung der Scherungsgeraden

$$B_m = -\mu_0 \frac{\sigma}{\gamma} \frac{A_l}{A_m} \frac{l_m}{l_l} H_m \,. \tag{4.232}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Scherungsgerade vom Werkstoff unabhängig ist und nur von der Geometrie des Magneten abhängt.
Der Arbeitspunkt A ergibt sich als Schnittpunkt der Scherungsgerade mit der Entmagnetisierungskurve (Abb. 4.118). Es ist erwähnenswert, dass die sich einstellende Flussdichte B_m deutlich geringer ist, als die Remanenzflussdichte B_R. Hierbei gilt: Je größer der Luftspalt, um so geringer ist die Flussdichte.
Da das Produkt BH die *magnetische Energie je Volumen* darstellt, ergibt sich die im Luftspalt gespeicherte magnetische Energie durch Multiplikation der Flußgleichung (4.231) mit dem Durchflutungsgesetz (4.230):

$$(B_m H_m) V_m = B_l H_l V_l \gamma \sigma = \gamma \sigma \frac{B_l^2}{\mu_0} V_l \,. \tag{4.233}$$

Löst man nach B_l auf, so ergibt sich als nutzbare magnetische Flussdichte im Luftspalt

$$B_l = \sqrt{\frac{\mu_0 V_m}{\gamma \sigma V_l} (BH)_m} \,. \tag{4.234}$$

Die im Luftspalt zur Verfügung stehende magnetische Flussdichte B_l ist proportional zum Magnetvolumen und zum $(BH)_m$-Wert. Dies bedeutet, dass bei hohem $(BH)_m$-Wert das Magnetvolumen klein gewählt werden kann. Der optimale Arbeitspunkt wird dort liegen, wo BH maximal ist, d. h. wo sich der $(BH)_{max}$-Wert und die Scherungsgerade schneiden. Dann kann die höchste Luftspaltinduktion bei kleinstem Magnetvolumen erreicht werden.

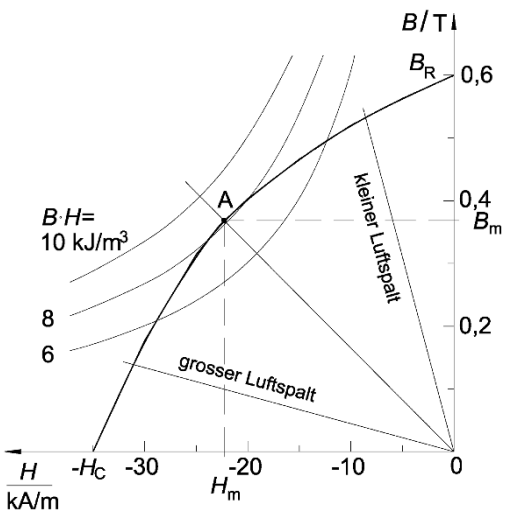


Abb. 4.118 Optimaler Arbeitspunkt A eines Permanentmagneten

Beispiel

4.4-7 Ein Magnetsystem soll aus einem AlNiCo Werkstoff entworfen werden. Der Arbeitspunkt liegt bei $H_A = -40$ kA/m und $B_A = 800$ mT ($\sigma = 3$, $\gamma = 1$). Aus konstruktiven Gründen muss ein Luftspalt des Querschnitts $A_1 = 2{,}4\,\text{cm}^2$ und der Länge $l_l = 3{,}6$ cm sowie eine Länge des dauermagnetischen Werkstoffs von $l_m = 6{,}4$ cm vorgesehen werden.

a) Wie groß muss die magnetische Fläche A_m bzw. das Magnetvolumen V_m gewählt werden, um diese Anforderungen zu erfüllen?
b) Wie groß ist die im Luftspalt nutzbare magnetische Flussdichte?
c) Der $(BH)_{max}$-Wert der AlNiCo-Legierung liegt bei 42 kJ/m³. Wie lautet der optimale Arbeitspunkt $A(-H_A/B_A)$?

d) Um wie viel Prozent kann das Magnetvolumen verringert werden, wenn der Dauermagnetwerkstoff $SmCo_5$ mit $(BH)_{max} = 144\,kJ/m^3$ eingesetzt wird?

Lösung

a) Die Gleichung der Scherungsgeraden (4.232) wird nach A_m aufgelöst:

$$A_m = \frac{\mu_0\,\sigma\,A_l\,l_m}{\gamma\,l_l\,B_m} H_m = 0{,}805\,cm^2\,.$$

Das Magnetvolumen ist $V_m = A_m\,l_m = 5{,}15\,cm^3$.

b) Die im Luftspalt nutzbare magnetische Flussdichte ist gemäß (4.234)

$$B_l = \frac{B_m A_m}{\sigma\,A_l} = 89{,}4\,mT\,.$$

c) Es gelten folgende Gleichungen:

$$(B_A H_A) = 42 \cdot 10^3\,J/m^3\,,$$

$$B_A = \mu_0 \frac{\sigma}{\gamma} \frac{A_l\,l_m}{A_m\,l_l} H_A = 2 \cdot 10^{-5} H_A\,.$$

Daraus errechnet sich $H_A = -45{,}8\,kA/m$ und $B_A = 917\,mT$.

d) Es gilt (4.234) für die magnetische Induktion im Luftspalt

$$B_l = \sqrt{\frac{\mu_0 V_m}{\gamma\,\sigma\,V_l}(BH)_m} = 0{,}28\,T\,.$$

Da $V_m(BH)_m$ konstant bleiben muss und $(BH)_{max}$ von $SmCo_5$ im Verhältnis zu AlNiCo 144/42 = 3,43 fach so hoch ist, kann das Volumen um den Faktor 3,43 abnehmen. Dies bedeutet, dass lediglich 29% des ursprünglichen Magnetvolumens erforderlich wären, um dieselbe Luftspaltinduktion zu erzeugen.

Berechnung von Elektromagneten

Ein Elektromagnet besteht aus einem Weicheisenkern (z. B. Dynamoblech) mit einem Luftspalt (Abb. 4.119). Das Magnetfeld wird durch eine Spule mit N Windungen erzeugt, die vom Strom I durchflossen wird.

Das Durchflutungsgesetz (4.171) angewandt auf eine geschlossene Schleife liefert

$$\Theta = N\,I = H_{Fe}\,l_{Fe} + H_L\,l_L\,.$$

Mithilfe von $B_L = \mu_0\,H_L$ wird daraus

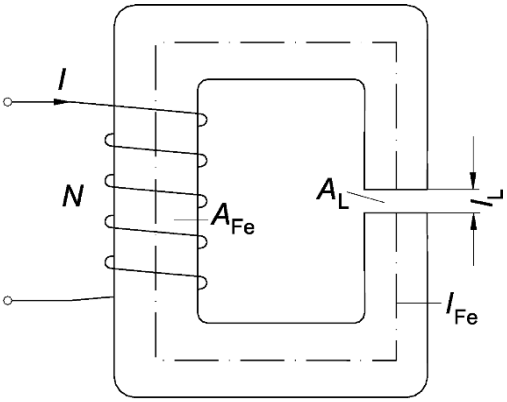


Abb. 4.119 Elektromagnet

$$\Theta = H_{Fe}\,l_{Fe} + B_L \frac{l_L}{\mu_0}\,.$$

Nun gilt wegen der Konstanz des Flusses (4.231)

$B_{Fe}\,A_{Fe} = \sigma\,B_L\,A_L$ und damit

$$\Theta = H_{Fe}\,l_{Fe} + B_{Fe} \frac{l_L\,A_{Fe}}{\mu_0\,A_L\,\sigma} \text{ oder}$$

$$H_{Fe} \frac{l_{Fe}}{\Theta} + B_{Fe} \frac{l_L\,A_{Fe}}{\mu_0\,\Theta\,A_L\,\sigma}\,. \qquad (4.235)$$

Um die Flussdichte bei gegebener Durchflutung Θ zu bestimmen, wird diese lineare Beziehung zwischen B_{Fe} und H_{Fe} als *Scherungsgerade* in das Diagramm $B(H)$ eingetragen (Abb. 4.120). Der Schnittpunkt der Scherungsgerade mit der Magnetisierungskurve (bei Weicheisen ist die Hystereseschleife so schmal, dass sie durch eine mittlere Kurve ersetzt werden kann) ist der Arbeitspunkt A des Elektromagneten.

Analogie elektrischer Stromkreis und magnetischer Kreis

Das Durchflutungsgesetz $\Theta = H_{Fe}\,l_{Fe} + H_L\,l_L$ kann mit der Gleichung der Flusserhaltung

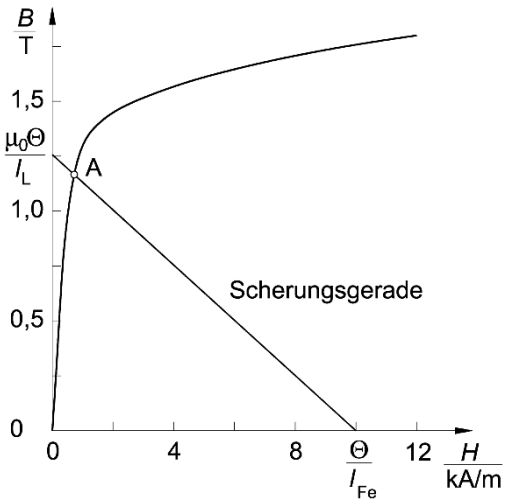


Abb. 4.120 Arbeitspunkt A eines Elektromagneten mit $\Theta = 2\,000$ A, $l_L = 2$ mm, $l_{Fe} = 200$ mm, $A_{Fe} = A_L$, $\sigma = 1$

$\Phi = B_{Fe} A_{Fe} = B_L A_L$ ($\sigma = 1$) umgeformt werden zu

$$\Theta = \Phi \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_L} \right) = V_m \,. \tag{4.236}$$

Gleichung (4.236) hat formale Ähnlichkeit mit dem Ohm'schen Gesetz $U = I R$, wobei die *magnetische Spannung* V_m die Rolle der elektrischen Spannung U spielt, der Fluss Φ den Strom I ersetzt und der Klammerausdruck

$$\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_{Fe}} \right)$$

schließlich den gesamten *magnetischen Widerstand* des Kreises darstellt. Der Gesamtwi-

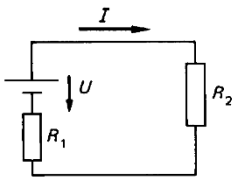
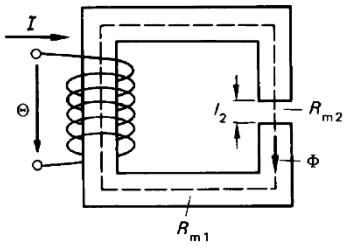
	elektrischer Stromkreis	magnetischer Stromkreis
Skizze		
Ursache	elektrische Spannung U in V	magnetische Spannung $\Theta = \oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{s} = NI$ in A
Wirkung	elektrische Stromstärke I in A $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_{ges}}$	magnetischer Fluss ϕ in Wb $\phi = \frac{NI}{R_{m1} + R_{m2}} = \frac{\Theta}{R_{mges}}$ (4.238)
Ohm´sches Gesetz	$R = \frac{U}{I}$	$R_m = \frac{\Theta}{\phi}$ (4.239)
Widerstand	$R = \frac{l}{\varkappa A}$ in Ω	$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$ in $\frac{A}{Wb}$ (4.240)
Leitfähigkeit	$\varkappa$ in $\frac{A}{Vm}$	$\mu_0 \mu_r$ in $\frac{Wb}{Am}$

Abb. 4.121 Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Kreis

derstand ist in diesem Fall die Summe der magnetischen Widerstände des Eisens und des Luftspaltes. Die Analogien zwischen den Beziehungen im elektrischen und magnetischen Kreis sind in Abb. 4.121 zusammengestellt.
Der magnetische Widerstand einer Substanz in einem magnetischen Kreis ist

$$R_\mathrm{m} = \frac{l}{\mu_\mathrm{r}\,\mu_0\,A}\,. \qquad (4.237)$$

Im Vergleich zum elektrischen Widerstand $R = (1/\varkappa)(l/A)$ kann $\mu_0\,\mu_\mathrm{r}$ als *magnetische Leitfähigkeit* gedeutet werden. Tatsächlich ist die relative Permeabilität μ_r ein Maß für die Fähigkeit, magnetische Feldlinien zu leiten. Es muss an dieser Stelle betont werden, dass diese Analogie keinen tieferen physikalischen Hintergrund aufweist, sondern lediglich den Umgang mit magnetischen Größen erleichtert, weil letztere analog zum elektrischen Stromkreis verwendet werden können.

Beispiel

4.4-8 Ein Ringkern entsprechend Abb. 4.122 hat die Abmessungen $d_1 = 16\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 12{,}5\,\mathrm{mm}$ und $h = 6\,\mathrm{mm}$. Der Luftspalt beträgt 1 mm. Wie groß ist der magnetische Widerstand a) im Ringkern und b) im Luftspalt? c) Welcher Strom muss durch die Spule mit $N = 1\,200$ Windungen fließen, wenn eine Luftspaltinduktion von $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$ gefordert wird? Die Magnetisierungskurve des Eisenkerns ist in Abb. 4.120 gegeben.

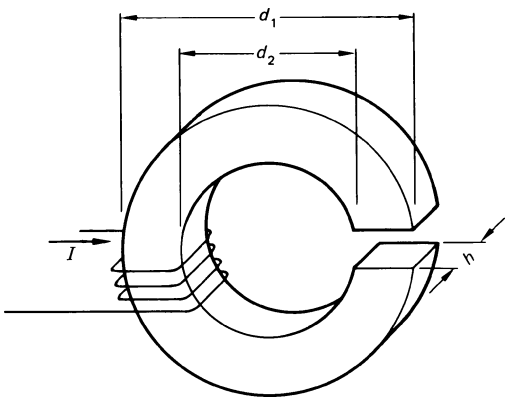


Abb. 4.122 Abmessungen des Ringkerns im Beispiel 4.4-8

Lösung

a) Aus Abb. 4.120 kann abgelesen werden, dass der Fluss $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$ eine magnetische Erregung von $H = 2{,}72\,\mathrm{kA/m}$ erfordert. Die Permeabilität beträgt damit

$$\mu_\mathrm{Fe} = \frac{B}{H} = 5{,}51 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}\,.$$

Die relative Permeabilität ist $\mu_\mathrm{r} = \mu_\mathrm{Fe}/\mu_0 = 439$. Mit

$$A = \frac{d_1 - d_2}{2}\,h = 10{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2}\ \text{und}$$

$$l_1 = \pi\frac{d_1 + d_2}{2} - l_2 = 43{,}8\,\mathrm{mm}$$

beträgt der magnetische Widerstand im Eisenkern nach (4.237)

$$R_\mathrm{m1} = \frac{l_1}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}\,A} = 7{,}56 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}\,.$$

b) Der magnetische Widerstand im Luftspalt ist $R_\mathrm{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 A} = 75{,}8 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}$. Somit ist der gesamte magnetische Widerstand des Kreises $R_\mathrm{m\,ges} = R_\mathrm{m1} + R_\mathrm{m2} = 83{,}4 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}$.

c) Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt (4.254)

$$R_\mathrm{m\,ges} = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{N\,I}{B_\mathrm{L}\,A}\,.$$

Daraus folgt $I = \dfrac{R_\mathrm{m\,ges}\,B_\mathrm{L}\,A}{N} = 1{,}09\,\mathrm{A}$.

Zur Übung

Ü4.4-1 In einem waagrechten homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 2{,}5\,\mathrm{T}$ bewegt sich senkrecht ein Proton mit der Energie $E_\mathrm{p} = 3\,\mathrm{MeV}$. Wie groß ist die Kraft, die auf das Proton wirkt?

Ü4.4-2 Nachzuweisen ist, dass das Verhältnis der Hall-Feldstärke E_H zur elektrischen Feldstärke E der Beziehung $E_\mathrm{H}/E = B/(ne\varrho)$ entspricht. ϱ ist die Resistivität des Werkstoffs.

Ü 4.4-3 Ein Holzzylinder mit der Masse $m = 100\,\mathrm{g}$, dem Radius r und der Länge $l = 20\,\mathrm{cm}$ hat $N = 20$

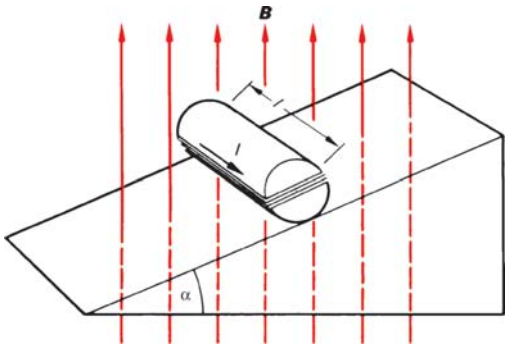


Abb. 4.123 Zu Ü 4.4-3

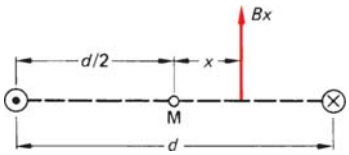


Abb. 4.124 Zu Ü 4.4-4

Drahtwicklungen. Wie groß ist die Stromstärke I durch die Wicklungen, die den Zylinder am Abrollen auf der schiefen Ebene mit dem Winkel α hindert? Abbildung 4.123 verdeutlicht die Anordnung. Die magnetische Flussdichte beträgt $B = 0{,}85$ T.

Ü 4.4-4 Zwei parallele Leiter sind gemäß Abb. 4.124 im Abstand d voneinander entfernt und werden vom gleichen Strom I in unterschiedlichen Richtungen durchflossen. Wie groß ist die magnetische Flussdichte B im Abstand x vom Mittelpunkt?

Ü 4.4-5 Der Einfluss des Luftspalts auf die Flussdichte eines Elektromagneten soll untersucht werden. Bestimmen Sie dazu für das Material von Abb. 4.120 für die Breiten $l_L = 1$ mm, 2 mm und 3 mm die Flussdichte bei sonst unveränderten Daten: $\Theta = 2\,000$ A, $l_{Fe} = 200$ mm, $A_{Fe} = A_L$ und $\sigma = 1$.

4.5 Instationäre Felder

In diesem Abschnitt sind die Eigenschaften zeitlich sich ändernder elektrischer und magnetischer Größen beschrieben. Zur Unterscheidung von den zeitlich konstant bleibenden Größen sind sie mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

4.5.1 Elektromagnetische Induktion

4.5.1.1 Induktionsgesetz

Aus Abschn. 4.4.3.1 geht hervor, dass der Spannungsstoß $\int U\,\mathrm{d}t$ gleich der Änderung des magnetischen Flusses $\Delta\Phi$ ist, der die Fläche eines Leiters senkrecht durchdringt ((4.188) und Abb. 4.97)). M. Faraday (1791 bis 1867) erkannte 1831:

> Jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ induziert eine elektrische Spannung u_{ind}:
>
> $$u_{ind} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (4.241)$$

Die induzierte Spannung ist proportional zur Windungszahl N und zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. In einem geschlossenen Stromkreis fließt dann ein Induktionsstrom. Er ist nach H. F. E. Lenz (1804 bis 1865) der Ursache er Induktion entgegengesetzt gerichtet (bewegungshemmende Wirkung). Dies wird durch das Minuszeichen zum Ausdruck gebracht. Es ist demnach unmöglich, ein perpetuum mobile so zu entwerfen, dass durch die induzierte Spannung ein Strom fließt, der das Magnetfeld verstärken könnte, um wieder weitere Spannung zu induzieren.
Der magnetische Fluss ist definiert als $\Phi = \int_A \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ oder $\Phi = BA\cos\varphi = BA_n$. Hierbei ist φ der Winkel zwischen der Flächennormalen von $\boldsymbol{A}$, durch die der magnetische Fluss tritt, und der Richtung der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ (Abschn. 4.4.3.1, Abb. 4.98). A_n ist der Flächenanteil senkrecht zu den Feldlinien. Wird der Term für den magnetischen Fluss in (4.241) eingesetzt, so ergibt sich

$$u_{ind} = -N\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}A_n + \frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}t}B\right)\,. \qquad (4.242)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass es gleichgültig ist, ob sich

- das Magnetfeld ($\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$) bei gleich bleibender Fläche A_n (*Transformatorprinzip*) oder
- die senkrecht zum Magnetfeld stehende Fläche ($\mathrm{d}A_\mathrm{n}/\mathrm{d}t$) bei gleich bleibender Induktion B (*Generatorprinzip*) ändert.

Das Induktionsgesetz zeigt den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld (zweite Maxwell'sche Gleichung, Abschn. 4.5.5) und hat eine überragende Bedeutung in den elektrotechnischen Anwendungen.

4.5.1.2 Induktionsvorgänge

Die verschiedenen Möglichkeiten, Spannungen zu induzieren, sind in Abb. 4.125 zusammengestellt. Zunächst ist zu unterscheiden, ob die Änderung des magnetischen Flusses durch die Änderung des Magnetfeldes oder durch die Flächenänderung geschieht. Diese unterschiedlichen Fälle sind in einer Skizze veranschaulicht, die sich ändernde Größe ist beschrieben und das Induktionsgesetz formuliert. Zum Schluss ist auf mögliche Anwendungen hingewiesen.

Zur Erklärung von Induktionsvorgängen bei Spulen ist es wichtig, *Feldspule* und *Induktionsspule* zu unterscheiden. Die Feldspule erzeugt wegen des Stromflusses durch einen wendelförmig gewickelten Draht ein magnetisches Feld (Abschn. 4.4.2, Abb. 4.91). In der Induktionsspule wird aufgrund der Änderung des magnetischen Flusses eine Spannung induziert.

Relativbewegung eines Magneten und einer Induktionsspule (Fall a)

In diesem Fall ist es gleichgültig, ob

- das Magnetfeld von einem Dauermagneten oder einem Elektromagneten herrührt und
- der Magnet sich gegen eine Spule oder die Spule sich gegen einen Magneten bewegt.

Beispiel

4.5-1 Ein ballistisches Galvanometer kann zur Messung der magnetischen Flussdichte B benutzt werden. Dazu zeigt die Skala die Ladungsmenge an. Die Galvanometerspule hat 50 Windungen und einen Windungsquerschnitt von 4 cm^2. (Der Vektor der magnetischen Flussdichte B ist parallel zur Flächennormalen A_n.) Wie groß ist die magnetische Flussdichte B, wenn beim schnellen Entfernen der Spule aus dem Magnetfeld die Skala eine Ladungsmenge von $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ C anzeigt (innerer Widerstand des Galvanometers $R_\mathrm{i} = 40\ \Omega$, Messspulenwiderstand $R_\mathrm{S} = 18\ \Omega$)?

Lösung

Nach dem Induktionsgesetz (4.241) folgt $u_\mathrm{ind} = -N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Daraus wird $u_\mathrm{ind}\,\mathrm{d}t = N\,\mathrm{d}\Phi$ und $\int u_\mathrm{ind}\,\mathrm{d}t = N\Phi = N\,B\,A$.

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist $U = I\,(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{S})$. Dann ist

$$(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{S}) \int \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = N\,B\,A\ ,$$

und da $\int \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = Q$ ist, gilt

$$(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{S})\,Q = N\,B\,A\ .$$

Daraus folgt

$$B = \frac{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{S})\,Q}{N\,A} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}\ .$$

Änderung des Erregerstroms in einer Feldspule (Fall b)

Das Magnetfeld wird in diesem Fall durch Änderung des Erregerstroms $\mathrm{d}I_\mathrm{err}/\mathrm{d}t$ geändert (4.245). Beim Induktionsgesetz muss beachtet werden, welches die Windungszahl der Feldspule n_Feld und welches die Windungszahl der Induktionsspule N_ind ist (4.246).

Bewegter Leiter im Magnetfeld (Fall c)

Wird ein Leiter der Länge l senkrecht zur magnetischen Induktion mit einer Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ bewegt, so ändert sich die Fläche um $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = l\,v$ (4.247). Somit wird die

Induktionsgesetz

$$u_{ind} = -N\left(\frac{dB}{dt}A_n + \frac{dA_n}{dt}B\right)$$

Magnetfeldänderung $\frac{dB}{dt}$ | Flächenänderung $\frac{dA}{dt}$

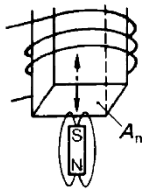
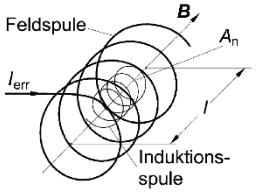
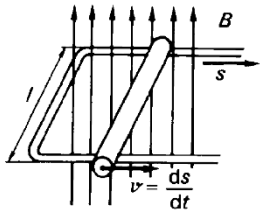
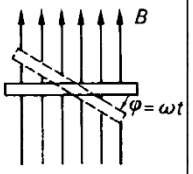
Fall	a) Relativbewegung Magnet-Induktionsspule	b) Erregerstromänderung in der Feldspule	c) bewegter Leiter im Magnetfeld	d) Flächenrotation mit konstanter Drehzahl
Skizze				
Änderung	$\frac{dB}{dt} = \mu_0 \frac{dH}{dt}$ (4.243)	$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu_0 H)$ $\frac{dB}{dt} = \frac{\mu_0 \cdot n_{Feld}}{l}\frac{dI_{err}}{dt}$ (4.245)	$\frac{dA}{dt} = l\frac{ds}{dt} = lv$ (4.247)	$\frac{dA_n}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega t))$ $\frac{dA_n}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)$ (4.249)
Gleichung des Induktions-gesetzes	$u_{ind} = -NA_n\mu_0\frac{dH}{dt}$ (4.244)	$u_{ind} = -N_{ind}A_n\frac{\mu_0 n_{Feld}}{l}\frac{dI_{err}}{dt}$ (4.246)	$u_{ind} = -NBlv$ (4.248)	$u_{ind} = NBA\omega\sin(\omega t)$ $\hat{u} = NBA\omega$ (4.250)
Anwendungen (Versuche)	———	Transformator	Wirbelstrom	Wechselstrom-generator

Abb. 4.125 Induktionsvorgänge

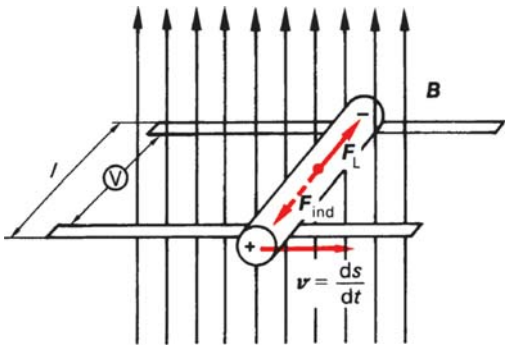


Abb. 4.126 Induktionsgesetz für einen bewegten Leiter im Magnetfeld

Spannung $u_{ind} = -N\,B\,l\,v$ (4.248) induziert. Das Auftreten der Induktionsspannung u_{ind} im bewegten Leiter lässt sich auch mit der Wirkung der *Lorentz-Kraft* auf bewegte Ladungsträger erklären (Abschn. 4.4.3.2). Die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}_L = -e\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ (4.203) greift an jedem Elektron an und führt zur Ladungstrennung. Dadurch tritt ein Gegenfeld $\boldsymbol{E}_{ind}$ auf, in dem die Gegenkraft $\boldsymbol{F}_{ind} = -e\,\boldsymbol{E}_{ind}$ wirksam ist. Abbildung 4.126 verdeutlicht den Zusammenhang. Die Ladungen können so lange verschoben werden, bis ein Gleichgewicht zwischen der Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}_L$ und der Feldkraft $\boldsymbol{F}_{ind}$ existiert.
Für die Beträge gilt:

$$|\boldsymbol{F}_L| = |\boldsymbol{F}_{ind}|\,,$$
$$e\,v\,B = e\,E_{ind}\,,$$
$$v\,B = E_{ind}\,.$$

Wegen $E_{ind} = u_{ind}/l$ gilt für die Windung

$$u_{ind} = B\,l\,v\,. \qquad (4.251)$$

Wirbelströme

Werden ausgedehnte leitende Körper in einem Magnetfeld bewegt oder sind sie ruhend wechselnden Magnetfeldern ausgesetzt, so werden in dem Leiter durch die induzierte Spannung Ströme induziert. Man nennt diese Wirbelströme, weil die Induktionsstromlinien wie Wirbel in sich geschlossen sind. Die Wirbelströme hemmen nach der Lenz'schen Regel durch ihr magnetisches Gegenfeld die Bewegung und wirken wegen der Proportionalität zu v (4.251) wie die Reibung fester Körper in Flüssigkeiten (Abschn. 2.3.4, Newton'sches Reibungsgesetz).
Technische Anwendungen sind *Wirbelstrom-Drehzahlmesser* zur Direktanzeige unmittelbar an der Messstelle, ferner *Elektro-Leistungsmesser* (von 0,03 kW bis 2 250 kW) z. B. für Kraftmaschinenprüfstände oder *Wirbelstromdämpfungen* in Messgeräten. Die Wirbelströme zwischen Aluminiumscheibe und den Polen eines Dauermagneten sorgen bei einem Wechselstromzähler für eine gleichförmige Rotation der *Zählscheibe*. Sind dagegen Wirbelströme unerwünscht (z. B. bei Transformatorenblechen), dann muss der spezifische Widerstand des Leiters entsprechend vergrößert werden, um den Stromfluss zu unterbinden.
Dies wird z. B. bei Transformatorenblechen dadurch erreicht, dass die Blechpakete aus vielen dünnen, gegeneinander isolierten Blechlamellen bestehen. Die *Wirbelstromverluste* in weichmagnetischen Werkstoffen sind eine wichtige elektrische Kennziffer (Abschn. 4.4.4.2).
Auch in einem von Wechselstrom durchflossenen geraden Leiter treten Wirbelströme in der Weise auf, dass diese im Innern entgegen dem Wechselstrom und an der Oberfläche mit dem Wechselstrom fließen. Der Effekt wird mit zunehmender Wechselstromfrequenz größer, sodass bei hohen Frequenzen ($f > 10^7$ Hz) nur noch die Außenhaut des Leiters Strom führt (*Skin- oder Hauteffekt*). In der Hochfrequenztechnik werden deshalb entweder Kabel aus vielen dünnen Ein-

zeldrähten zu einer Litze verdrillt, damit die Stromführung abwechselnd innen und außen verläuft, oder es werden Hohlleiter verwendet.
Mit dem *Wirbelstrom-Messverfahren* können zerstörungsfrei Werkstoffe auf Fehler untersucht werden. Dazu wird im Prüfling ein elektrischer Wechselstrom geeigneter Amplitude, Frequenz und Richtung erzeugt. Die auftretenden Unregelmäßigkeiten dieses Stroms werden elektronisch ausgewertet. Diese Prüfmethode ist besonders schnell und findet u. a. Einsatz bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung im Triebwerksbau.

Flächenrotation mit konstanter Drehzahl (Fall d)

Wird in einem Magnetfeld eine Fläche mit einer konstanten Drehzahl n (oder Winkelgeschwindigkeit ω) gedreht, so ist die induzierte Spannung abhängig von der das Feld senkrecht durchsetzenden Fläche $A_\mathrm{n} = A\cos(\omega t)$. Daraus errechnet sich eine Flächenänderung von $\mathrm{d}A_\mathrm{n}/\mathrm{d}t = -A\omega\sin(\omega t)$. Eingesetzt in das Induktionsgesetz ergibt sich ein sinusförmiger Verlauf einer Wechselspannung:

$$u_\mathrm{ind} = N\,B\,A\,\omega\sin(\omega\,t)\;. \tag{4.250}$$

Die Amplitude beträgt $\hat{u} = NBA\,\omega$.
Ein Wechselstrom kann dann fließen, wenn die Enden der rotierenden Flächen über einen äußeren Widerstand zu einem Stromkreis geschlossen werden. Die wichtigste Anwendung ist der *Wechselstromgenerator*, der zur Erzeugung von Wechselspannungen bzw. -strömen dient. Er besteht aus einem ruhenden Teil (*Stator*), der z. B. das Magnetfeld erzeugt, und einem rotierenden Teil (*Rotor* oder *Läufer*), der z. B. von einer Spule gebildet wird. An Schleifringen wird in diesem Fall die erzeugte Spannung abgenommen (Abschn. 4.5.2.8).

4.5.1.3 Selbstinduktion

Nach dem Induktionsgesetz (4.241) tritt an den Enden einer Leiterschleife oder Spule immer dann eine Induktionsspannung auf, wenn der Fluss durch die Schleife sich ändert. Dabei ist es unerheblich, wodurch die Flussänderung zustande kommt. So tritt auch eine Induktionsspannung auf, wenn der Strom durch eine Spule und damit der Fluss durch die Spule sich ändert. Da dieser Induktionsvorgang vom Magnetfeld verursacht wird, das die Spule selbst erzeugt, spricht man von *Selbstinduktion* im Gegensatz zur *Fremdinduktion*, die dann vorliegt, wenn die Flussänderung in einer Spule durch äußere Maßnahmen erzeugt wird.
Sind in der Umgebung des Leiters ausschließlich unmagnetische Stoffe vorhanden, dann ist der Gesamtfluss, der den Leiter durchsetzt, proportional zum Augenblickswert i des Stromes:

$$\Phi_\mathrm{ges} = N\,\Phi = L\,i\;. \tag{4.252}$$

L ist die von der Geometrie abhängige *Induktivität* des Stromkreises.
Bei Stromänderung entsteht im Stromkreis eine induzierte Spannung

$$u_\mathrm{ind} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\;. \tag{4.253}$$

Diese Spannung ist nach der Lenz'schen Regel so gerichtet, dass der Stromänderung entgegengewirkt wird. Die Spule wehrt sich also sozusagen gegen Änderungen des Stromes. Sie hat gewisse Trägheitseigenschaften wie die träge Masse in der Mechanik. Wird wie bei einem Ohm'schen Verbraucher eine Span-

nung u_L eingeführt, deren Zählrichtung mit der Stromrichtung übereinstimmt, dann gilt

$$u_L = L\frac{di}{dt} . \qquad (4.254)$$

Die Maßeinheit der Induktivität ist das *Henry* (J. Henry, 1797 bis 1878):

$$[L] = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{Vs/A} = 1\ \Omega\text{s} = 1\ \text{H} .$$

Die Induktivität beträgt 1 Henry, wenn bei der Änderung der Stromstärke um 1 A innerhalb von 1 s eine Spannung von 1 V induziert wird.

Für die Induktivität einer langen Zylinderspule mit N Windungen, Fläche A und Länge l gilt mit (4.174) und (4.252)

$$L = \frac{N^2\,\mu_r\,\mu_o\,A}{l} . \qquad (4.255)$$

Bei kurzen Spulen gilt allgemein

$$L = f\frac{N^2\,\mu_r\,\mu_o\,A}{l} , \qquad (4.256)$$

dabei beschreibt der *Formfaktor* f die geometrischen Streufeldverluste kurzer Spulen ($0 < f < 1$).

Für Spulen mit Eisenkern ist die Induktivität nicht konstant sondern vom Strom abhängig. Anhand der Magnetisierungskurve lässt sich bei gegebenem Strom die Flussdichte und damit die Permeabilität μ und die Induktivität bestimmen.

Die Selbstinduktivität spielt in Wechselstromkreisen eine große Rolle (Abschn. 4.5.2). Sie ist für beliebige Leiteranordnungen und -geometrien schwierig zu berechnen, lässt sich im Wechselstromkreis aber gut durch Messen bestimmen. Die Selbstinduktivität L einer geraden Einfach- oder Doppelleitung gemäß Abb. 4.127 beträgt

Einfachleitung

$$L = \frac{\mu_0\,\mu_r\,l}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - \frac{3}{4}\right) , \qquad (4.257)$$

Doppelleitung

$$L = \frac{\mu_0\,\mu_r\,l}{\pi}\left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{4}\right) , \qquad (4.258)$$

Soll eine mit Draht gewickelte Spule eine nur vernachlässigbar kleine Induktivität haben, beispielsweise für Messwiderstände, dann wird diese aus entgegengesetzt gleichen (bifilaren) Wicklungen hergestellt. Dann heben sich die Magnetfelder annähernd auf, sodass keine Selbstinduktion stattfinden kann. – Die Selbstinduktivitäten verhalten sich bei einer Schaltung wie Ohm'sche Widerstände, sodass gilt:

Bei der Reihenschaltung ist die gesamte Selbstinduktivität L_{ges} gleich der Summe der einzelnen Selbstinduktivitäten.

$$L_{R,\,ges} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i . \qquad (4.259)$$

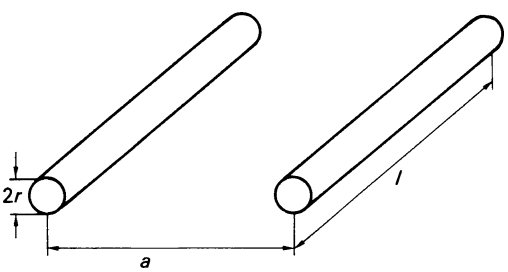


Abb. 4.127 Selbstinduktivität einer Doppelleitung

Bei der Parallelschaltung ist der Kehrwert der gesamten Selbstinduktivität $1/L_{\text{ges}}$ gleich der Summe der Kehrwerte der einzelnen Selbstinduktivitäten.

$$\frac{1}{L_{\text{P, ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \quad \text{oder} \tag{4.260}$$

$$L_{\text{P, ges}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \right)^{-1} . \tag{4.261}$$

Wie bei den Ohm'schen Widerständen ist bei einer Parallelschaltung die gesamte Selbstinduktivität $L_{\text{P, ges}}$ kleiner als die kleinste einzelne Selbstinduktivität.

Beispiel

4.5-2 Der Radius eines Leiters beträgt $r = 0{,}25$ mm und der Abstand der beiden Leiter einer Doppelleitung $a = 10$ cm. Wie groß muss die Länge l der Leiter sein, wenn das Verhältnis der Selbstinduktivitäten von Einfachleitung und Doppelleitung $L_1/L_2 = 0{,}5$ beträgt?

Lösung

Für L_1 gilt (4.257) und für L_2 (4.258), sodass man schreiben kann

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_\text{r} l}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right) \right)}{\frac{\mu_0 \mu_\text{r} l}{\pi} \left(\ln\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{4} \right) \right)} = 0{,}5 ,$$

Aus dieser Gleichung folgt für die Länge $l = 0{,}136$ m.

4.5.1.4 Energie des magnetischen Feldes

Die Energie des magnetischen Feldes kann aus der elektrischen Energie des induzierten Feldes hergeleitet werden:

$$W = \int_0^t u_\text{L}\, i \,\text{d}t \quad \text{mit} \quad u_\text{L} = L \frac{\text{d}i}{\text{d}t} ,$$

$$W = \int_0^t L \frac{\text{d}i}{\text{d}t}\, i \,\text{d}t , \quad W = \int_0^I L i \,\text{d}i ,$$

$$W_\text{magn} = \frac{1}{2} L I^2 . \tag{4.262}$$

Diese Formel ist allgemein für jedes magnetische Feld gültig. Für die magnetische Energie in einer langen Zylinderspule ergibt sich mit $L = \mu_0 \mu_\text{r} A N^2/l$ und $H = I N/l$ oder $I = H l/N$

$$W_\text{magn} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_\text{r} H^2 A l \tag{4.263}$$

und mit $\mu_0 \mu_\text{r} H = B$ sowie $Al = V$

$$W_\text{magn} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \boldsymbol{H} V . \tag{4.264}$$

Für die Energiedichte in einem homogenen Feld gilt

$$w_\text{magn} = \frac{W_\text{magn}}{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \boldsymbol{H} . \tag{4.265}$$

Diese Formel zeigt Ähnlichkeit mit der Energiedichte im elektrischen Feld $w_\text{el} = \frac{1}{2} \boldsymbol{D} \boldsymbol{E}$ (4.167). Sie ist allgemein gültig, da sich die Magnetfelder aus kleinen homogenen Bereichen aufbauen lassen. Für die magnetische Energie eines inhomogenen Magnetfeldes gilt deshalb

$$W_\text{magn} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{B} \boldsymbol{H} \,\text{d}V . \tag{4.266}$$

Daraus ergibt sich, dass der Flächeninhalt der Hysteresekurve ein Maß für die Energiedichte darstellt (Abschn. 4.4.4.2). Eine

andere Möglichkeit, die magnetische Feldenergie zu bestimmen, besteht über den magnetischen Fluss Φ (oder die Magnetisierungskurve). Für die elektrische Arbeit gilt allgemein $\mathrm{d}W = U\,I\,\mathrm{d}t$. Mit dem Induktionsgesetz $u_{\mathrm{ind}} = N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ wird $\mathrm{d}W = I\,N\,\mathrm{d}\Phi$ oder

$$W_{\mathrm{magn}} = \int_0^{\Phi} I\,N\,\mathrm{d}\Phi\,. \qquad (4.267)$$

Abbildung 4.128 zeigt die Magnetisierungskurve (Abschn. 4.4.4.2) für μ_{r} = konstant (Fall a) und für ein ferromagnetisches, nicht lineares μ_{r}. Die hervorgehobene Fläche stellt die magnetische Energie dar. Für den Fall eines linearen Magnetisierungsverlaufes ist der Flächeninhalt

$$W_{\mathrm{magn}} = \frac{1}{2} I\,N\,\Phi\,. \qquad (4.268)$$

Wegen $N\,\Phi = L\,I$ folgt wieder (4.262).
Im allgemeinen Fall muss die Fläche berechnet oder numerisch ermittelt werden.
Aus der Energie des Magnetfeldes lässt sich die Tragkraft eines Magneten berechnen. Die mechanische Arbeit $W_{\mathrm{mech}} = F\,l$ wird dabei mit der magnetischen Arbeit W_{magn} gleichgesetzt. Es ergibt sich

$$F\,l = \frac{\mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}\,H^2}{2} A\,l\,.$$

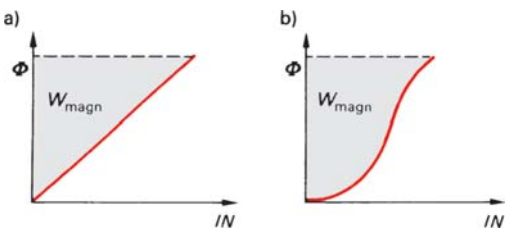


Abb. 4.128 Magnetische Energie

Es kürzt sich der Weg l heraus, sodass übrig bleibt

$$F = \frac{1}{2}\mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}\,H^2 A \quad \text{oder} \qquad (4.269)$$

$$F = \frac{B\,H\,A}{2} = \frac{B^2 A}{2\mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}}\,. \qquad (4.270)$$

Beispiel

4.5-3 Bei der Abschaltung von Spulen können Funken entstehen. Sie werden vermieden, wenn ein Löschkondensator parallel zum Schalter geschaltet wird. Die Induktivität einer Schaltspule beträgt $L = 4$ H, der Spulenstrom $I = 5$ A, und der Löschkondensator wurde bei einer Prüfspannung von 10 kV getestet. Wie groß ist die Kapazität C des Löschkondensators zu wählen?

Lösung

Die Energie des elektrischen Feldes eines Kondensators E_{el} muss gleich der Energie des magnetischen Feldes einer Spule E_{magn} sein. Es gilt $E_{\mathrm{el}} = E_{\mathrm{magn}}$. Aus (4.164) für E_{el} und (4.262) für E_{magn} gilt

$$\frac{1}{2} C\,U^2 = \frac{1}{2} L\,I^2\,.$$

Daraus errechnet sich die Kapazität zu

$$C = \frac{L\,I^2}{U^2} = \frac{4\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} \cdot 25\ \mathrm{A}^2}{10^8\ \mathrm{V}^2} = 1\ \mu\mathrm{F}\,.$$

4.5.2 Periodische Felder (Wechselstromkreis)

Dieser Abschnitt beschreibt elektrische Wechselfelder, die durch harmonische Funktionen (z. B. sin oder cos) beschrieben werden können. Zur ausführlichen Erläuterung der Definitionen und Begriffe aus der Schwingungslehre wird auf Abschn. 5.1 verwiesen.

4.5.2.1 Grundlagen des Wechselstromkreises

Im vorhergehenden Abschnitt wurde anhand des Induktionsgesetzes gezeigt, dass beim Drehen einer Leiterschleife mit konstanter Drehzahl n (bzw. konstanter Winkelgeschwin-

digkeit ω) in einem homogenen Magnetfeld eine periodische Spannung induziert wird (Abb. 4.125, Fall d). Diese periodische Spannung kann entsprechend Abb. 4.129 beschrieben werden als

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)\,. \qquad (4.271)$$

Dabei ist $\hat{u}$ die maximale Spannung oder die *Amplitude der Spannung*, ω die *Winkelgeschwindigkeit* ($\omega = 2\pi n$ mit n als der Drehzahl) und φ_u der *Nullphasenwinkel* der Wechselspannung.
Die Frequenz der technischen Wechselspannung bzw. des -stroms ist $f = 50\,\text{Hz}$, was einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 100\,\pi\,\text{s}^{-1}$ entspricht. In einem geschlossenen Wechselstromkreis fließt durch die Bauelemente ein Wechselstrom derselben Frequenz. Er lautet allgemein (Abb. 4.129)

$$i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t + \varphi_i)\,. \qquad (4.272)$$

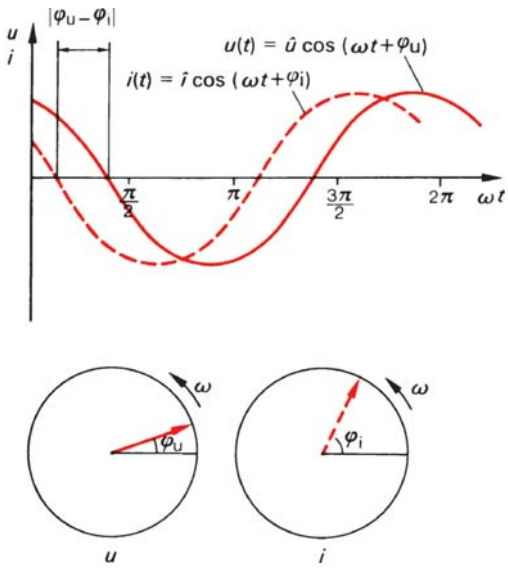


Abb. 4.129 Wechselstrom und Wechselspannung

Hierbei ist $\hat{\imath}$ die Amplitude und φ_i der Nullphasenwinkel des Wechselstroms.
In einem Wechselstromkreis sind φ_u und φ_i oft nicht gleich, sodass gilt

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i\,. \qquad (4.273)$$

Die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom hängt im Wechselstromkreis von der Selbstinduktivität L und der Kapazität C ab (Abschn. 4.5.2.2). Ist $\varphi > 0$, so eilt die Spannung dem Strom voraus, ist $\varphi < 0$, so eilt die Spannung dem Strom nach, wie Abb. 4.129 zeigt.
Geräte zur Messung von Wechselstromgrößen zeigen den sogenannten *Effektivwert* an. Er ist ein *zeitlicher quadratischer Mittelwert* der entsprechenden elektrischen Größe. (Zwei Gründe sind für die Bestimmung des Quadrates ausschlaggebend: Zum einen werden Abweichungen positiver und negativer Art durch Quadrieren immer positiv und zum anderen würde ein über die Zeitdauer T integrierter arithmetischer Mittelwert genau null ergeben, da sich im Integrationsintervall gleich viele positive wie negative Flächenanteile befinden.) Der Effektivwert des Wechselstroms i_{eff} errechnet sich dann zu

$$i_{\text{eff}} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}\,, \qquad (4.274)$$

$$i_{\text{eff}} = \hat{\imath}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_i)\,\mathrm{d}t} = \hat{\imath}\sqrt{\frac{T}{2T}}\,,$$

$$i_{\text{eff}} = I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,\hat{\imath}\,. \qquad (4.275)$$

Entsprechend gilt für den Effektivwert der Spannung

$$u_{\text{eff}} = U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,\hat{u}\,. \qquad (4.276)$$

In der Wechselstromtechnik werden bei eindeutiger Zuordnung die Effektivwerte durch $U = u_{\text{eff}}$ und $I = i_{\text{eff}}$ bezeichnet.
Zur Darstellung, zur Berechnung und zum besseren Verständnis des Wechselstromkreises werden Wechselspannung, Wechselstrom und Widerstand als komplexe Größen in Form von *Zeigern* in der *Gauß'schen Zahlenebene* dargestellt. Dies ist deshalb vorteilhaft, weil sich nach der *Euler'schen Formel* der komplexe Exponent einer Exponentialfunktion durch die harmonischen trigonometrischen Funktionen ausdrücken lässt als

$$\underline{Z} = |Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |Z|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = \underbrace{|Z|\cos\varphi}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\mathrm{j}|Z|\sin\varphi}_{\text{Imaginärteil}}\,. \qquad (4.277)$$

Dies bedeutet, dass die komplexe Zahl $\underline{Z}$ = Realteil + j · Imaginärteil ($\mathrm{j} = \sqrt{-1}$) in der Gauß'schen Zahlenebene liegt und einen Realteil von $|Z|\cos\varphi$ und einen Imaginärteil von $|Z|\sin\varphi$ hat (Abb. 4.130). Der Betrag $|Z|$ und der Winkel φ zwischen reeller Achse und dem Zeiger errechnet sich nach

$$|Z| = \sqrt{(\text{Realteil})^2 + (\text{Imaginärteil})^2}\,, \qquad (4.278)$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}\,. \qquad (4.279)$$

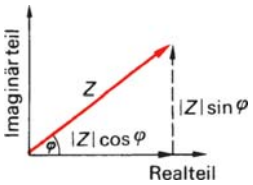


Abb. 4.130 Darstellung komplexer Größen im Zeigerdiagramm

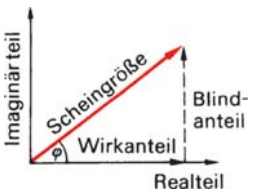


Abb. 4.131 Bezeichnung elektrischer Wechselstromgrößen im Zeigerdiagramm

Da nur der Realteil eines Zeigers physikalische Wirkungen zeigt, werden die elektrischen Wechselstromgrößen (Spannung, Strom, Widerstand und Leistung) auch gemäß Abb. 4.131 bezeichnet: Der *Realteil* ist der *Wirkanteil*, der *Imaginärteil* der *Blindanteil* einer Wechselstromgröße; beide zusammen ergeben als *komplexen Zeiger* die *Scheingröße*.

4.5.2.2 Bauelemente im Wechselstromkreis

Abbildung 4.132 zeigt das Verhalten der drei Bauelemente Widerstand (R), Spule (L) und Kondensator (C) im Wechselstromkreis. Die erste Zeile dieser Übersicht bezeichnet das grafische Symbol und zeigt, dass jedes Bauelement von dem gleichen Wechselstrom $i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t)$ durchflossen wird und in ihm ein Spannungsabfall $u(t)$ stattfindet. Den Zusammenhang zwischen Stromstärke i und Spannung u liefert ein für jedes Bauelement spezifisches Gesetz (Zeile 2), z. B. das Ohm'sche Gesetz für den Widerstand, das Induktionsgesetz für die Spule und den Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung für den Kondensator. Die nächste Zeile zeigt den zeitlichen

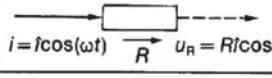
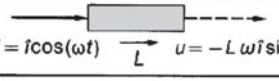
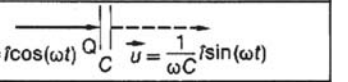
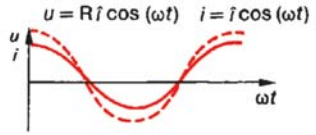
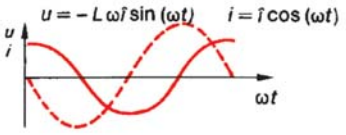
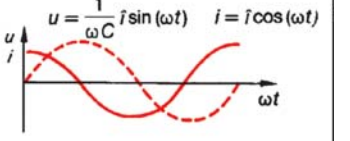
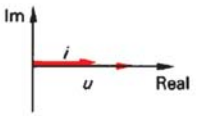
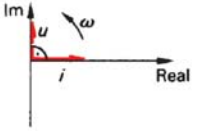
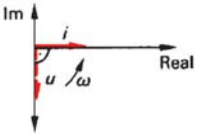
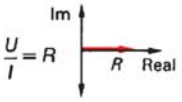
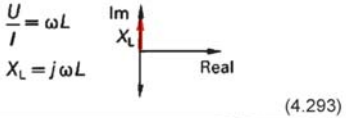
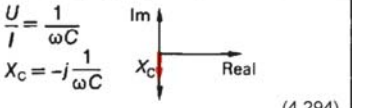
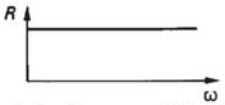
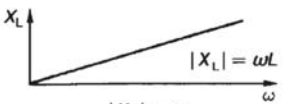
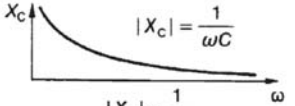
	Ohm´scher Widerstand (Wirkwiderstand)	Spule (induktiver Blindwiderstand)	Kondensator (kapazitiver Blindwiderstand)
Symbol			
Gesetz	Ohm´sches Gesetz: $u(t) = Ri(t)$ $u(t) = R\hat{i}\cos(\omega t)$ (4.289)	Induktionsgesetz: $u(t) = L\frac{di}{dt}$ $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t)$ $\frac{di}{dt} = -\omega\hat{i}\sin(\omega t)$ $u(t) = -L\omega\hat{i}\sin(\omega t)$ (4.290)	$Q = Cu$ $\int i\,dt = Cu$ $u(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$ $\int i\,dt = \int \hat{i}\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\hat{i}\sin(\omega t)$ $u(t) = \frac{1}{\omega C}\hat{i}\sin(\omega t)$ (4.291)
Momentanwerte	 nicht phasenverschoben: $\varphi(u,i) = 0$	 phasenverschoben um $\varphi(u,i) = \pi/2$; u eilt i um $\pi/2$ voraus	 phasenverschoben um $\varphi(u,i) = -\pi/2$; u eilt i um $\pi/2$ nach
Zeigerdiagramm			
Widerstand	 (4.292)	 (4.293)	 (4.294)
Frequenz-abhängigkeit	 keine Frequenzabhängigkeit		

Abb. 4.132 Bauelemente im Wechselstromkreis

Verlauf von Strom und Spannung (Momentanwerte). So ist daraus ersichtlich, dass

- beim Widerstand Strom und Spannung nicht phasenverschoben sind,
- bei der Spule die Spannung dem Strom um $\pi/2$ vorauseilt und
- beim Kondensator die Spannung dem Strom um $\pi/2$ nacheilt.

Diese Ergebnisse lassen sich auch in einem Zeigerdiagramm (Zeile 4) anschaulich darstellen. In ihm rotieren die eventuell phasenverschobenen Strom- und Spannungszeiger mit der Winkelgeschwindigkeit ω und erzeugen so die Momentanwerte. Die Widerstände sind entweder reell (beim Ohm'schen Widerstand R) oder imaginär (bei der Spule $X_L = j\,\omega\,L$ und beim Kondensator $X_C = -j(\omega\,C)^{-1}$). Die reellen Widerstände (Wirkwiderstände) werden prinzipiell mit dem Buchstaben R und die imaginären Widerstände (Blindwiderstände) mit X bezeichnet. Die Formeln für die Widerstände der Bauelemente besagen etwas über die Frequenzabhängigkeit der Widerstände:

- der *Ohm'sche Widerstand* ist *frequenzunabhängig*,
- der *induktive Widerstand* X_L nimmt mit steigender Frequenz *zu* und
- der *kapazitive Widerstand* X_C nimmt mit steigender Frequenz *ab*.

4.5.2.3 Reihenschaltung von Bauelementen im Wechselstromkreis

Abbildung 4.133 zeigt die Verhältnisse bei der Reihenschaltung von Widerstand R und Spule L (RL-Glied), Widerstand R und Kondensator C (RC-Glied) sowie von Widerstand R, Spule L und Kondensator C (RLC-Glied). Da bei einer Reihenschaltung die Ströme konstant bleiben, addieren sich die jeweiligen Spannungszeiger der Bauelemente (Zeigerdiagramm in Zeile 1 und Spannung in Zeile 2). Nach dem Ohm'schen Gesetz für den Wechselstromkreis gilt für die Effektivwerte U und I

$$U = I\,Z\,. \tag{4.286}$$

Daraus ergeben sich die schaltungstypischen komplexen Wechselstromwiderstände Z sowie die Phasenverschiebungswinkel $\tan\varphi$.
Bei der Reihenschaltung aller drei Bauelemente R, L und C besteht die Möglichkeit, die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung aufzuheben. Dies ist der Fall, wenn $U_L = U_C$ ist. Dann gilt die *Thomson-Gleichung* (W. Thomson, 1824 bis 1907, später *Lord Kelvin*) für Reihenresonanz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{4.293}$$

(s. Differentialgleichung eines elektrischen Schwingkreises in Abschn. 5.1). Bei der *Reihenresonanz* bleibt die Spannung mit der Resonanzfrequenz bevorzugt erhalten, alle Spannungen mit anderen Frequenzen werden unterdrückt (z. B. Reihenschaltung eines speziellen *RLC-Gliedes* als *Siebelement*). Gleichzeitig fließt bei der Resonanzfrequenz wegen der fehlenden induktiven und kapazitiven Widerstandsanteile eine maximale Stromstärke. Zu beachten ist aber, dass sich die Blindspannungen an Spule und Kondensator zwar aufheben, beim einzelnen Bauelement aber beträchtlich hoch sein können und in der Lage sind, die Bauelemente zu zerstören.

4.5.2.4 Parallelschaltung von Bauelementen im Wechselstromkreis

Abbildung 4.134 zeigt die Verhältnisse bei der Parallelschaltung der Bauelemente Widerstand (R), Spule (L) und Kondensator (C). Wie im Fall der Reihenschaltung (Abschn. 4.5.2.3)

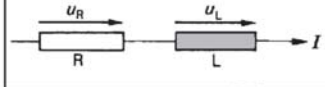
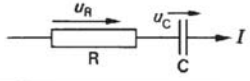
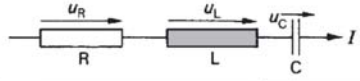
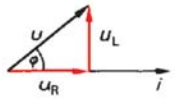
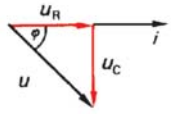
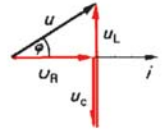
Schaltung			
Zeiger-diagramm	 $u_R = Ri$ $u_L = j\omega Li$	 $u_R = Ri$ $u_C = \frac{-j}{\omega C} i$	 $u_R = Ri$ $u_L = j\omega Li$ $u_C = \frac{-j}{\omega C} i$
Spannung	$u = \sqrt{u_R^2 + u_L^2}$ $u = i\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ $u = iZ$	$u = \sqrt{u_R^2 + (-u_C)^2}$ $u = i\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $u = iZ$	$u = \sqrt{u_R^2 + (u_L + u_C)^2}$ $u = i\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $u = iZ$
komplexer Widerstand	$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ (4.287)	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (4.288)	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (4.289)
Phasen-verschiebungs-winkel	$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$ (4.290)	$\tan\varphi = -\frac{1}{R\omega C}$ (4.291)	$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ (4.292)
Resonanz	—	—	Reihenresonanz: maximale Stromstärke $u_L = u_C$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (4.293)

Abb. 4.133 Reihenschaltung der Bauelemente im Wechselstromkreis

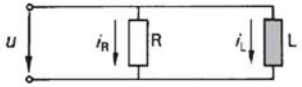
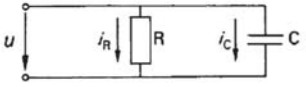
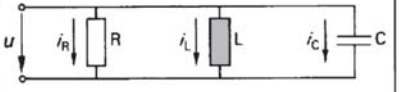
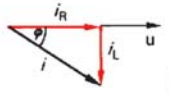
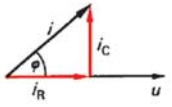
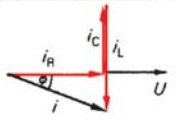
Schaltung			
Zeiger-diagramm	 $i_R = \frac{u}{R}$ $i_L = \frac{u}{j\omega L} = -j\frac{u}{\omega L}$	 $i_R = \frac{u}{R}$ $i_C = uj\omega C$	 $i_R = \frac{u}{R}$ $i_L = -j\frac{u}{\omega L}$ $i_C = uj\omega C$
Stromstärke	$i = \sqrt{i_R^2 + (-i_L)^2}$ $i = u\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ $i = u/Z = uY$	$i = \sqrt{i_R^2 + i_C^2}$ $i = u\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$ $i = u/Z = uY$	$i = \sqrt{i_R^2 + (i_C + i_L)^2}$ $i = u\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ $i = u/Z = uY$
komplexer Leitwert G (Widerstand)	$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ (4.295)	$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$ (4.296)	$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ (4.297)
Phasen-verschiebungs-winkel	$\tan\varphi = \frac{\lvert i_L \rvert}{i_R} = \frac{R}{\omega L}$ (4.298)	$\tan\varphi = -\frac{i_C}{i_R} = -R\omega C$ (4.299)	$\tan\varphi = \frac{\lvert i_C - i_L \rvert}{i_R} = R\left(-\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)$ (4.300)
Resonanz	—	—	Parallelresonanz: maximale Spannung $i_C = -i_L$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (4.293)

Abb. 4.134 Parallelschaltung von Bauelementen im Wechselstromkreis

werden die Fälle RL-, RC- und RLC-Glied betrachtet. Bei der Parallelschaltung bleibt die angelegte Spannung konstant. Deshalb addieren sich in diesem Fall die Teilströme vektoriell zum Gesamtstrom (Zeigerdiagramm in Abb. 4.134). Das Ohm'sche Gesetz für den Strom im Wechselstromkreis lautet dann

$$I = \frac{U}{Z} = U\,Y\,. \tag{4.294}$$

Daraus ergeben sich für die jeweilige Schaltung spezifische komplexe Leitwerte $\underline{Y} = G + \mathrm{j}B$ sowie Phasenverschiebungswinkel. – Bei der Parallelschaltung aller drei Bauelemente R, L und C tritt eine *Stromresonanz* des *Parallelkreises* auf. Die Thomson-Gleichung für die Resonanzfrequenz ist für die Reihenschaltung und für die Parallelschaltung gleich. Die RLC-Resonanzschaltungen eignen sich zum Bau von Siebelementen oder Sperrkreisen, zum Unterdrücken von Störfrequenzen und als Filter zur Frequenzwahl.

4.5.2.5 Leistung im Wechselstromkreis

Der zeitliche Verlauf von Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ eines Wechselstromkreises ist in Abb. 4.135 dargestellt. Die Momentanleistung errechnet sich nach

$$p(t) = u\,(t)\;i\,(t) \tag{4.301}$$

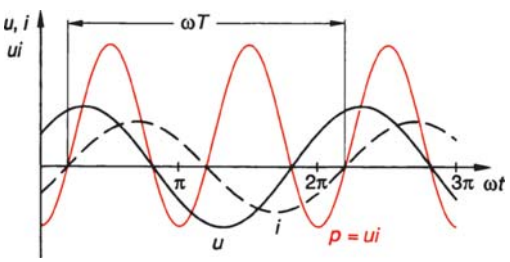


Abb. 4.135 Zeitlicher Verlauf von Strom, Spannung und Leistung im Wechselstromkreis

und zeigt je nach Richtung und Größe der Wechselspannung bzw. des Wechselstroms positive oder negative Energieflüsse. Die *mittlere Leistung* oder *Wirkleistung* ergibt sich aus der Differenz der positiven und negativen Flächen der $u\,i$-Kurve und der Zeitachse in Abb. 4.136 und errechnet sich zu

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.302}$$

Bei harmonischem Spannungs- und Stromverlauf ist die Wirkleistung

$$P = \frac{1}{2}\hat{u}\,\hat{\imath}\cos\varphi = U\,I\cos\varphi\,. \tag{4.303}$$

Hierbei ist der Winkel φ die Phasenverschiebung zwischen Wechselspannung und Wechselstrom (4.273).

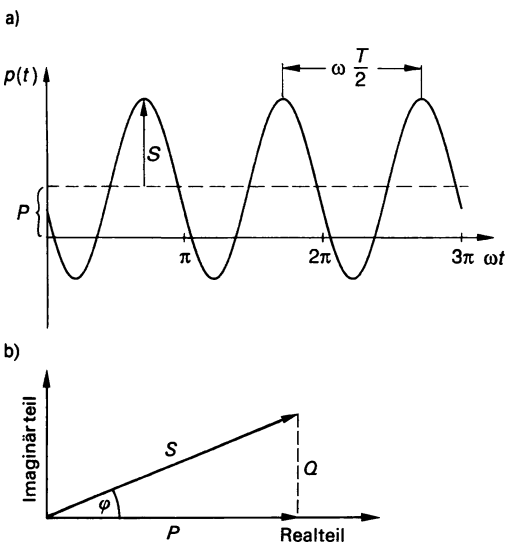


Abb. 4.136 Momentan-, Schein-, Wirk- und Blindleistung im Wechselstromkreis

Für einen harmonischen Spannungs- und Stromverlauf gilt nach (4.271), (4.272) und (4.273)

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)\,, \tag{4.304}$$

$$i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t + \varphi_i) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i)\,. \tag{4.305}$$

Daraus errechnet sich der zeitliche Verlauf der Leistung:

$$p(t) = u(t), i(t) = 2U\,I\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)\,.$$

Durch Anwendung des Additionstheorems $2\cos^2\omega t = \cos(2\omega t) + 1$ ergibt sich

$$p(t) = U\,I\cos\varphi + U\,I\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\,. \tag{4.306}$$

(Der Winkel φ ist in Übereinstimmung mit (4.273) gegeben durch $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.)
Wie Abb. 4.136a zeigt, schwingt die Momentanleistung mit der doppelten Frequenz der Wechselspannung um den Durchschnittswert, der nach (4.303) der *Wirkleistung* P entspricht. Abbildung 4.136b zeigt, wie die *Scheinleistung* S aus Anteilen der Wirkleistung P und der *Blindleistung* Q besteht. Es gilt

$$S = U\,I\,, \tag{4.307}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{4.308}$$

und für den *Phasenverschiebungswinkel*

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P}\,. \tag{4.309}$$

Ferner ist

$$P = U\,I\cos\varphi = S\cos\varphi \tag{4.310}$$

und der *Leistungsfaktor*

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}\,. \tag{4.311}$$

Er gibt an, wie viel der gesamten Leistung S als Wirkleistung zur Verfügung steht. Er sollte möglichst nahe bei 1 liegen. Die *Blindleistung* Q beträgt

$$Q = U\,I\sin\varphi = S\sin\varphi\,. \tag{4.312}$$

Der *Blindfaktor* $\sin\varphi$ errechnet sich dann als

$$\sin\varphi = \frac{Q}{S}\,. \tag{4.313}$$

Die durch elektrische Zuleitungen und durch elektrische Geräte fließende Stromstärke kann tatsächlich größer sein als der Wirkstrom I_{Wirk}, der wirklich nutzbar ist. Es ist deshalb wichtig, den Blindfaktor $\sin\varphi$ möglichst klein oder den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ nahe bei 1 zu halten. Zur Kompensation des Blindstromanteils können *Phasenschieberkondensatoren* (Abschn. 4.3.7, Abb. 4.78) verwendet werden, deren kapazitiver Blindwiderstand so groß wie der induktive Blindwiderstand ist. Für die Blindleistung Q gilt

$$Q = U\,I_{\text{Blind}}$$

mit

$$I_{\text{Blind}} = \frac{U}{X_C} = U\omega\,C\,.$$

Tabelle 4.15 Gleichungen für Wechselstromwiderstände und -leitwerte

	Widerstand		Leitwert	
Wirkanteil	$R = \frac{P}{I^2}$	(4.315)	$G = \frac{P}{U^2}$	(4.316)
	Resistanz		Konduktanz	
Blindanteil	$X = \frac{Q}{I^2}$	(4.317)	$B = -\frac{Q}{U^2}$	(4.318)
	Reaktanz		Suszeptanz	
Scheingröße	$Z = \frac{U}{I}$	(4.319)	$Y = \frac{I}{U}$	(4.320)
	Impedanz		Admittanz	

Damit ergibt sich $Q = U^2\omega C$. Die zur Blindstromkompensation notwendige Kapazität errechnet sich daraus zu

$$C = \frac{Q}{U^2\omega} \,. \tag{4.314}$$

Tabelle 4.15 zeigt die Formelzeichen sowie die Bezeichnungen nach DIN 40 110 für die Wirk-, Blind- und Scheinanteile von Widerstand $\underline{Z} = R + jX$ und Leitwert $\underline{Y} = G + jB$.

Beispiel

4.5-4 Ein Elektromotor hat die Leistung $P = 45\,\text{kW}$ und wird mit einer Klemmenspannung von $U = 400\,\text{V}$ betrieben. Der Leistungsfaktor ist $\cos\varphi = 0{,}85$. Wie groß ist die Schein- und Blindleistung, wie groß ist die Stromstärke I sowie der Wirk- und Blindstrom?

Lösung

Aus (4.311) ergibt sich für die Scheinleistung

$$S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{45\,\text{kW}}{0{,}85} = 52{,}94\,\text{kW} \,.$$

Die Blindleistung beträgt nach (4.312)

$$Q = S\sin\varphi = 52{,}94\,\text{kW} \cdot 0{,}5267 = 27{,}88\,\text{kW} \,.$$

Für die Stromstärke I ergibt sich nach (4.307)

$$I = \frac{S}{U} = \frac{52{,}94 \cdot 10^3\,\text{VA}}{400\,\text{V}} = 132{,}4\,\text{A} \,.$$

Für den Wirkstrom gilt $I_{\text{Wirk}} = I\cos\varphi = 112{,}5\,\text{A}$ und für den Blindstrom $I_{\text{Blind}} = I\sin\varphi = 69{,}7\,\text{A}$.

4.5.2.6 Drehstrom

Im öffentlichen Stromnetz fließt ein sogenannter *Dreiphasenstrom* oder *Drehstrom*. Ursache sind drei Wechselspannungen u_1, u_2 und u_3, die um jeweils $120°(2\pi/3)$ phasenverschoben sind, wie Abb. 4.137 zeigt. Die drei Wechselspannungen werden durch drei voneinander unabhängige Spulenwicklungen im Generator erzeugt (Abschn. 4.5.2.8). Dann ergeben sich sechs Spulenendpunkte. Durch eine geeignete Schaltung als *Dreiecksschaltung* bzw. als *Sternschaltung* gemäß Abb. 4.138 können die notwendigen Anschlussstellen auf drei (R, S, T) bzw. vier (R, S, T, O) verringert werden.

In Tabelle 4.16 sind die Zusammenhänge zwischen dem Leiterstrom und der Leiterspannung für die Dreieck- bzw. Sternschaltung zusammengestellt. Durch die Spule fließende Ströme bzw. an den Spulen abfallende Span-

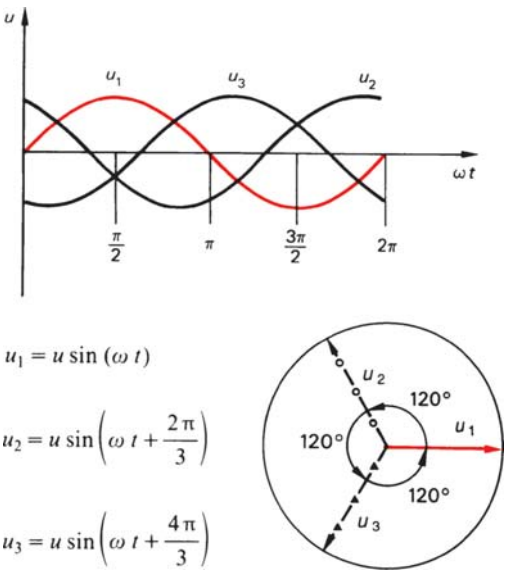


Abb. 4.137 Verlauf der drei Wechselspannungen beim Drehstromnetz

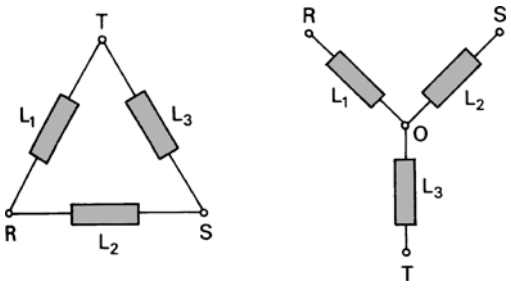


Abb. 4.138 Dreieck-Stern-Schaltung

Tabelle 4.16 Leiterstrom und Leiterspannung in der Dreieck-Stern-Schaltung

	Leiterstrom	Leiterspannung
Dreieck-Schaltung	$I_R = I_S = I_T = \sqrt{3} \cdot$ Strangstrom (4.321)	$U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} =$ Strangspannung (4.322)
Stern-Schaltung	$I_R = I_S = I_T =$ Strangstrom (4.323) (Mittelpunktstrom = null)	$U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \sqrt{3} \cdot$ Strangspannung (4.324) Strangspannung $U_{RO} = U_{SO} = U_{TO}$

nungen werden als *Strangströme* bzw. *Strangspannungen* bezeichnet, zu den Punkten fließende Ströme bzw. zwischen den Punkten auftretende Spannungsabfälle als *Leiterströme* bzw. *Leiterspannungen*.
Im öffentlichen Stromnetz ist die Sternschaltung anzutreffen. Die Leiterspannung beträgt 400 V (früher 380 V) und die Strangspannung $400\ \text{V}/\sqrt{3} \approx 230\ \text{V}$. Gleichung (4-332) gilt nur, wenn alle drei Stränge gleichmäßig belastet sind.

4.5.2.7 Transformation von Wechselströmen

Werden um einen gemeinsamen Eisenkern an zwei gegenüberliegenden Seiten (Primär- bzw. Sekundärseite) Spulenwicklungen angebracht, dann entstehen zwei *induktiv gekoppelte Spulen*. Da mit solchen Bauelementen *Spannungen transformiert* werden können, werden sie *Transformatoren* genannt. Abbildung 4.139 zeigt das Schema eines Transformators (a) und das Symbol (b). Liegt an der Primärseite eine Wechselspannung u_1, so wird nach dem Induktionsgesetz ein magnetischer Fluss verändert:

$$u_1 = -N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} .$$

Wegen der induktiven Kopplung wird die magnetische Flussänderung an die Sekundärseite weitertransportiert, sodass dort die Spannung

$$u_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}$$

induziert wird. Werden beide Gleichungen durcheinander dividiert, so gilt für den idealen, verlustlosen Transformator ($\Phi_1 = \Phi_2$)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} . \qquad (4.325)$$

Dies bedeutet, dass eine Spannungstransformation im Verhältnis der Windungszahlen (*Übersetzungsverhältnis* $\ddot{u}$) stattfindet. – Diese Gleichung gilt nur für den unbelasteten Fall. Meist können die Leistungsverluste beim Transport des magnetischen Flusses Φ von der Primär- und Sekundärseite vernachlässigt werden. Dann gilt $P_1 = P_2$ und mit $P = U\,I \cos\varphi$ ergibt sich $U_1\,I_1 = U_2\,I_2$ oder

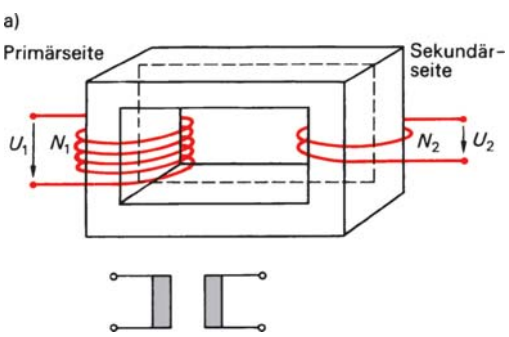


Abb. 4.139 Schema des Transformators

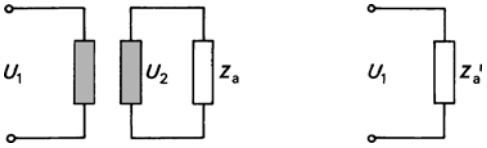


Abb. 4.140 Widerstandstransformation

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}\,. \tag{4.326}$$

Gleichung (4.326) zeigt, dass sich die Stromstärken umgekehrt zu den Windungszahlen bzw. Spannungen verhalten.

Transformatoren spielen bei der Stromversorgung eine wichtige Rolle, da durch die Hochspannungstransformation die Stromstärken für den Transport verringert werden können und somit nach $P = I^2R$ geringere Verlustleistungen auftreten. Zu diesem Zweck werden die von Generatoren erzeugten Spannungen von 10 kV bis 20 kV auf 110 kV bis 380 kV herauftransformiert und für den Verbraucher auf 230 V bzw. 400 V herabgesetzt. Hohe Spannungs- bzw. Stromwerte können über Messwandler gemessen werden, wenn das Übersetzungsverhältnis genau bekannt ist und die Leistungen nicht hoch sind.

Eine weitere Anwendung ist die Widerstandstransformation über einen Transformator, z. B. zur Spannungsversorgung eines niederohmigen Lautsprechers. Abbildung 4.140 zeigt das Prinzip. Für die Impedanzen $Z = U/I$ gilt nach (4.326) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{U_1}{I_1}\frac{I_2}{U_2} = \ddot{u}^2$. Damit wird die Impedanz Z_a transformiert in

$$Z_a' = Z_a \cdot \ddot{u} \tag{4.327}$$

4.5.2.8 Elektrische Maschinen

In den meisten elektrischen Maschinen findet eine Umwandlung von mechanischer und elektrischer Energie statt. Dabei wird zur Erzeugung eines Drehmomentes die Kraftwirkung zwischen einem stromdurchflossenen Leiter und einem Magnetfeld (4.194) ausgenutzt. Je nach Umwandlungsrichtung gibt es zwei Arten von elektrischen Maschinen:

- *Generatoren* (Dynamomaschine)
  Mechanische Energie (kinetische Energie der Rotation) wird in elektrische Energie umgewandelt, indem durch eine Drehbewegung der magnetische Fluss eine Änderung erfährt. Dadurch tritt nach dem Induktionsgesetz (4.241) eine elektrische Spannung auf.
- *Elektromotoren*
  Elektrische Antriebsenergie wird in mechanische Energie (kinetische Energie der Rotation) umgewandelt. Anliegende elektrische Spannungen verursachen Ströme, deren Magnetfelder auf das vorhandene Magnetsystem Kräfte bzw. Drehmomente ausüben, die die mechanische Rotation der Antriebsachse verursachen (Ausnahme: Drehstrom Asynchronmotor, da kein Magnetsystem vorhanden).

Da die elektrischen Maschinen eine große Typenvielfalt aufweisen, können nur wenige wichtige beschrieben werden. Sie sind in Abb. 4.141 zusammengestellt. Generatoren

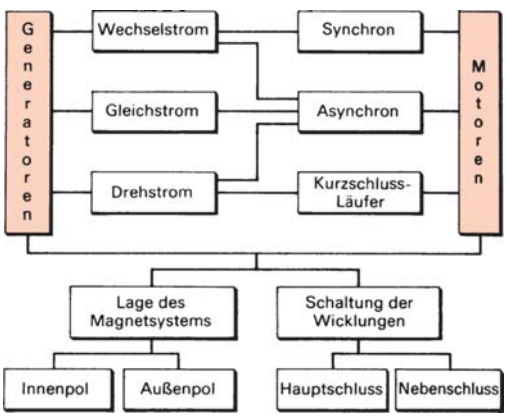


Abb. 4.141 Elektrische Maschinen

und Elektromotoren sind prinzipiell gleich aufgebaut. Sie bestehen aus einem *Magnet-* und einem *Spulensystem* mit (in einigen Fällen) zwei *Schleifkontakten.* Das Magnetsystem besteht entweder aus Elektro- oder aus Dauermagneten. Das Spulensystem, in dem die Spannung induziert wird, wird *Anker* genannt. Ein Teil des Magnet- bzw. Spulensystems ist feststehend (*Stator*), der andere Teil rotierend *(Rotor* oder *Läufer).* Befindet sich das Magnetsystem als Stator außen, so liegt eine *Außenpolmaschine* vor; bewegt es sich dagegen als Rotor im Innern, so handelt es sich um eine Innenpolmaschine. Abbildung 4.142 zeigt den Stator (a) und den Rotor (b) einer Innenpolmaschine. Diese Bauart wird häufig bei Generatoren hoher Drehzahl vorgefunden, weil die Schleifringe entfallen. Bei den meisten elektrischen Maschinen dient die im Spulensystem induzierte Spannung zur Erregung des magnetischen Feldes (*Siemens'sches Dynamoprinzip*).

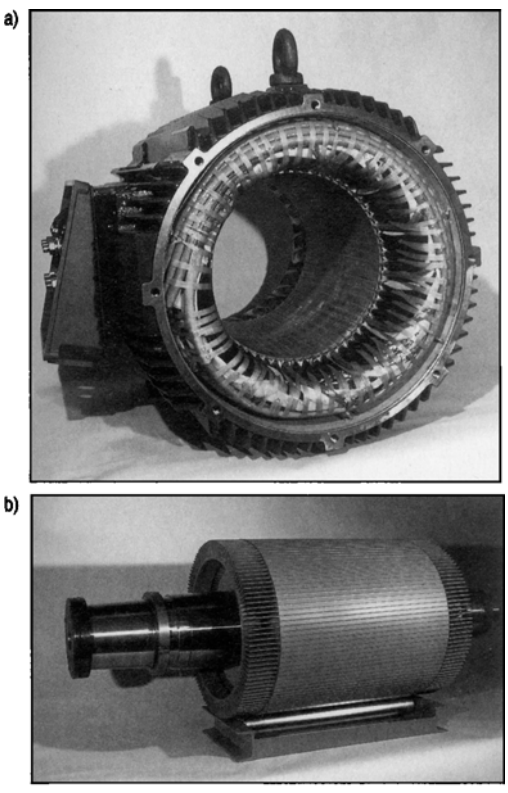


Abb. 4.142 Stator und Rotor einer Innenpolmaschine. Werkfotos: Emod

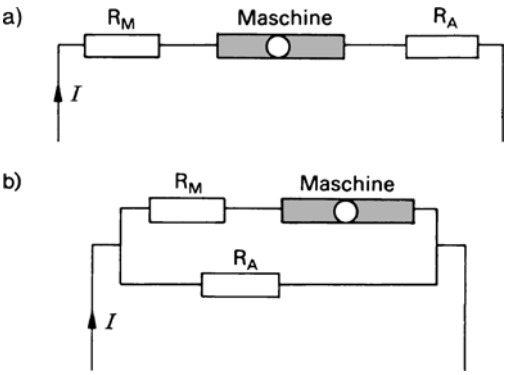


Abb. 4.143 Haupt- und Nebenschlussmaschine

Bei den elektrischen Maschinen unterscheidet man zwischen einer Haupt- und einer Nebenschlussmaschine, wie Abb. 4.143 zeigt. Bei einer Hauptschlussmaschine fließt der gesamte Strom durch den Elektromagneten (Widerstände des Magnetfeldes M und Ankerwicklung A sind in Reihe geschaltet, Abb. 4.143a), während bei einer Nebenschlussmaschine nur ein Teil des Stroms durch den Magneten fließt (Widerstände des Magnetfelds und der Ankerwicklung sind parallel geschaltet, Abb. 4.143b). In diesem Fall wirkt in der Anlaufphase nur der remanente Magnetismus.

Generatoren

Wie Abb. 4.141 zeigt, gibt es Generatoren zur Erzeugung von Gleich-, Wechsel- und Drehstrom. Der einfachste Wechselstromgenerator besteht aus einer drehbaren Spule im Magnetfeld (Abb. 4.125, Fall d). Wird die Anordnung umgekehrt, sodass die Magnetpole innen liegen und die Induktionsspule außen ist, so liegt ein Innenpolgenerator vor. Bei diesem kann der erzeugte Wechselstrom ohne Schleifringe

direkt von den Spulenwicklungen abgegriffen werden. Dies ist bei hoher Drehzahl besonders günstig. Beim Drehstromgenerator als Innenpolmaschine besitzt der Anker drei voneinander unabhängige, um 120° verschobene Spulensysteme, die als Dreieck oder als Stern geschaltet werden können und Drehstrom erzeugen. Außenpolgeneratoren werden wegen der zusätzlich benötigten Schleifringe heute praktisch kaum noch gebaut.
Gleichstrom wird dadurch erzeugt, dass die untere Halbwelle des Wechselstroms durch einen *Polwender* oder *Kommutator* nach oben geklappt wird. Diese pulsierende Gleichspannung kann geglättet werden, wenn viele Spulen und entsprechend viele Polwender eingebaut werden. Dieses Polwendersystem wird dann Kollektor genannt, weil es alle Spannungen zur Gleichspannung aufsammelt.

Elektromotoren

Entsprechend Abb. 4.141 ist die Umkehrung eines (Einphasen-)Wechselstromgenerators (der praktisch ohne Bedeutung ist), ein (Einphasen-)Wechselstrommotor; die Umkehrung eines Gleichstromgenerators ist der Gleichstrommotor; die Umkehrung des Drehstromgenerators ist der Drehstrommotor.

Ein Wechselstrommotor kann sowohl als Synchronmotor als auch als Asynchronmotor Anwendung finden. Als *Synchronmotor* ist er deshalb die Umkehrung des Wechselstromgenerators, weil die Frequenz der Wechselspannung proportional zur Drehzahl des Läufers ist (Abb. 4.125, Fall d). Die *Synchronmaschine* läuft gleichsam synchron mit dem durch die Wechselspannung erzeugten Magnetfeld. Allerdings müssen diese Motoren durch einen Gleichstrom in eine Anfangsdrehung kommen, ehe sie durch entsprechende An- und Abstoßung der Magnetfelder in Drehung versetzt werden können. Die Synchronmotoren finden vor allem Anwendung bei gleich bleibenden Drehzahlen. Die Leistungen ausgeführter Maschinen reichen in den Megawattbereich.
Der *Asynchronmotor* wird mit Wechselstrom betrieben. Deshalb muss die Stromänderung im Drehfeld und im Anker gleichzeitig erfolgen. Dann ist die Drehzahl auch frequenzunabhängig und der Motor läuft asynchron zur Frequenz der Wechselspannung. Der Asynchronmotor ist der am häufigsten eingesetzte Elektromotor. Er findet vielseitige Anwendung in der Technik, so z. B.

- für Rührgeräte und Pumpen in der chemischen Industrie,
- für Datendrucker und Antriebe für Diskettenlaufwerke,
- in Bohr-, Schleif- und Kunststoffspritzmaschinen,
- in Inkubatoren oder Pumpen von EKG-Apparaten in der Medizin,
- als Spiegelantriebe für elektrooptische Geräte und
- in Musikautomaten, Plattenspielern und Tonband- sowie Kassettengeräten.

Drehstrommotoren sind meist so aufgebaut wie ein Drehstromgenerator als Innenpolmaschine. Durch die zeitlich gegeneinander verschobenen Spannungen des Drehstromnetzes entsteht ein Drehfeld. Der Läufer benötigt keine Wicklung. Er ist ein *Kurzschlussläufer*, der als *Käfiganker* gebaut wird. Abbildung 4.144 zeigt einen universell einsetzbaren *Schneckengetriebe-Motor* (a) und dessen Drehzahl-Momenten-Kennlinie (b) für einen Käfigläufer-Motor der Nennleistung 75 kW (Linie I), für einen Käfigläufer-Motor der Nennleistung 0,37 kW (II) sowie für einen Schlupfläufer-Motor (III). Das Diagramm zeigt, dass die Drehzahl eines Asynchronmotors mit zunehmender Belastung abnimmt. Die Drehzahl des Läufers n_L ist stets kleiner

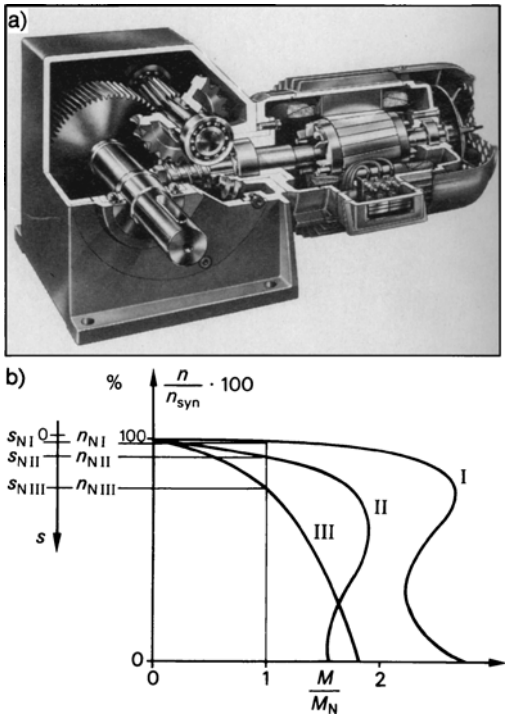


Abb. 4.144 Schneckengetriebemotor mit Drehzahl-Momenten-Kennlinien. Werkfoto: Bauer

als die Drehzahl des Feldes n_F. Dieser *Schlupf* s wird definiert als

$$s = \frac{n_F - n_L}{n_L} \cdot 100\% \,. \tag{4.328}$$

Der Schlupf von Drehstromasynchronmotoren beträgt für kleine Motoren (ca. 0,11 kW) etwa 12% und für große Motoren (ca. 75 kW) etwa 2%. Alle Gleichstrommotoren können – wie die Generatoren – als Haupt- oder Nebenschlussmaschinen betrieben werden. Für Gleichstrommotoren als Hauptschlussmotor liegen Feldmagnet und Anker in Reihe (Abb. 4.143). Dies bedeutet, dass bei starkem Stromfluss das Magnetfeld groß ist, sodass ein starkes Anzugsmoment spürbar wird. Die Drehzahl dieses Motors ist belastungsabhängig und findet wegen seines starken Anzugsmomentes vor allem Einsatz bei elektrischen Antrieben (z. B. Fahrzeugantriebe). Beim Nebenschlussmotor dagegen liegen Feldmagnet und Anker parallel. Die Drehzahl dieses Motors ist nahezu belastungsunabhängig. Ein solcher Antrieb ist beispielsweise für Werkzeugmaschinen erforderlich. Weil die gesamte Spannung am Anker liegt, muss der Motor mit einem Anlasser gestartet werden.

4.5.3 Ein- und Ausschaltvorgänge in Stromkreisen

Dieser Abschnitt beschreibt den Strom- bzw. Spannungsverlauf beim Ein- und Ausschalten von Stromkreisen, in denen sich ein Kondensator oder eine Spule befindet.

4.5.3.1 Ein- und Ausschalten mit einem Kondensator

In Abb. 4.145 sind die Schaltung, die entsprechende Differentialgleichung mit ihren Lösungen für den zeitlichen Verlauf der Ladung q, der Spannung u und der Stromstärke i sowie die Grafik des zeitlichen Verlaufes von Spannung und Strom dargestellt.

Beim Schließen des Stromkreises gilt nach der *Maschenregel* (Abschn. 4.1.6, (4.25)), dass die Summe aller Spannungen null ist:

$$U_0 - Ri - \frac{q}{C} = 0 \,. \tag{4.329}$$

Mit $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ gilt

$$U_0 - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 \,.$$

Nach Division durch R und einer Umstellung erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q - \frac{U_0}{R} = 0 \,. \tag{4.330}$$

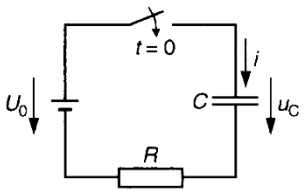
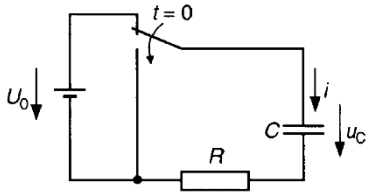
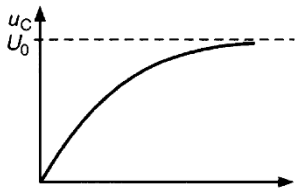
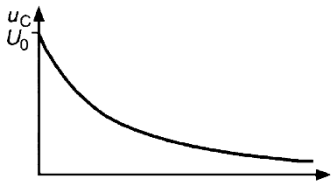
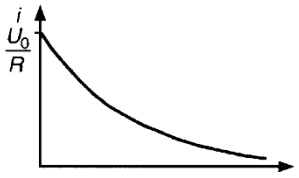
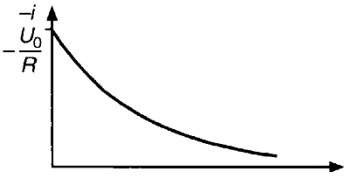
	Einschaltvorgang	Ausschaltvorgang
Schaltung		
Differential-gleichung	$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q - \frac{U_0}{R} = 0$ (4.330)	$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$ (4.334)
Lösungen	$q_C = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ (4.331) $u_C = U_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ (4.332) $i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ (4.333)	$q_C = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ (4.335) $u_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ (4.336) $i = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ (4.337)
Verlauf der Spannung		
Verlauf der Stromstärke		

Abb. 4.145 Ein- und Ausschaltvorgänge im Stromkreis mit einem Kondensator

Die zugehörige Lösung lautet

$$q_C = CU_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) . \qquad (4.331)$$

Wegen $u = q/C$ wird der zeitliche Verlauf der Spannung am Kondensator beschrieben gemäß

$$u_C = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) . \qquad (4.332)$$

Da $dq/dt = i$ ist, folgt aus (4.331) nach Differentiation nach der Zeit

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} . \qquad (4.333)$$

Der Faktor RC hat die Dimension Zeit: $\Omega As/V = VAs/(AV) = s$. Er wird *kapazitive Zeitkonstante* τ genannt, weil er angibt, wie schnell sich die Spannung u_C dem Endwert U_0 nähert. Bei Stromkreisen mit hoher Kapazität ist die Zeitkonstante groß, da es lange dauert, bis der Kondensator aufgeladen ist.
Beim Ausschalten der Spannungsquelle U_0 entlädt sich der Kondensator über den Widerstand R. Es wird in der Differentialgleichung (4.330) $U_0 = 0$. Damit gilt

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 . \qquad (4.334)$$

Diese Form der Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen direkt integrieren:

$$q_C = Q_0\, e^{-\frac{1}{RC}t} . \qquad (4.335)$$

Nach entsprechender Umformung ergibt sich

$$u_C = U_0\, e^{-\frac{1}{RC}t} . \qquad (4.336)$$

und wegen $i = dq/dt$

$$i = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} . \qquad (4.337)$$

4.5.3.2 Ein- und Ausschalten mit einer Induktivität

Wird in einem Stromkreis mit einem Widerstand R und einer Spule der Induktivität L eine Spannung U ein- bzw. ausgeschaltet, so ergeben sich verzögerte Anpassungen der Stromstärke an diese Situationen. Abbildung 4.146 zeigt die zugehörige Schaltung, die entsprechende Differentialgleichung mit ihrer Lösung sowie die Strom-Zeit-Diagramme. Die Differentialgleichungen sind analog zum Stromkreis mit einer Kapazität. Während in einem RC-Kreis die Differentialgleichungen für die Ladungen gelten, sind sie in diesem Fall für die Ströme gültig. Wird der RL-Stromkreis geschlossen, so gilt nach der Maschenregel (Abschn. 4.1.6, (4.25)), dass die Summe aller Spannungen null sein muss:

$$U_0 - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 . \qquad (4.338)$$

Die Spannung U_0 fällt an zwei Bauteilen ab:

- erstens am Widerstand R; dies entspricht einer konstanten Stromstärke $I = U_0/R$ (gestrichelte Linie in Abb. 4.146);
- zweitens wird in der Spule ein Magnetfeld aufgebaut, das zur stetigen Zunahme des Stroms entsprechend $i = (U_0/L)t$ führt (punktierte Linie).

Das Zusammenwirken dieser beiden Teile erzeugt zunächst eine linear zunehmende Stromstärke, die in den konstanten Endwert $I_0 = U_0/R$ einbiegt. Dieser Kurvenverlauf lässt sich analytisch aus der Lösung der Differentialgleichung (4.338) herleiten. Nach Division

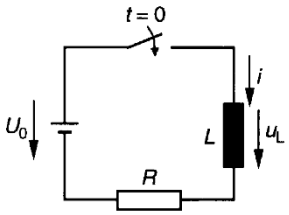
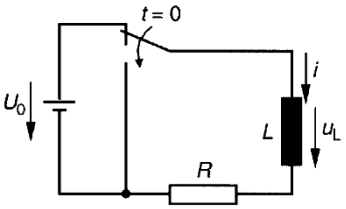
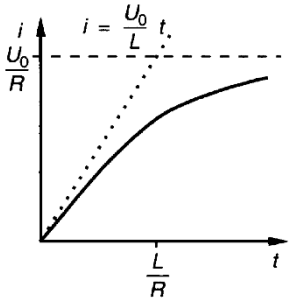
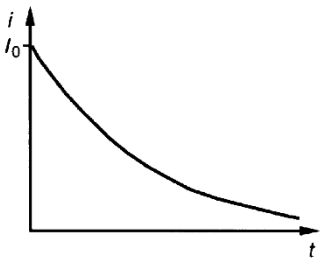
	Einschaltvorgang	Ausschaltvorgang
Schaltung		
Differential-gleichung	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i - \frac{U_0}{L} = 0$ (4.339)	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$ (4.342)
Lösung	$i = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ (4.340)	$i = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}$ (4.343)
Verlauf der Stromstärke		

Abb. 4.146 Ein- und Ausschaltvorgänge im Stromkreis mit einer Induktivität

durch L ergibt sich die Differentialgleichung für die Stromstärke:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i - \frac{U_0}{L} = 0 \,. \qquad (4.339)$$

Die zugehörige Lösung lautet

$$i = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \,. \qquad (4.340)$$

Der Faktor L/R hat die Dimension Zeit: H/Ω = VsA/(AV) = s. Er wird *induktive Zeitkonstante* τ genannt, weil er angibt, wie schnell sich die Stromstärke i dem Endwert $I_0 = U_0/R$ nähert. Bei Stromkreisen mit hoher Induktivität ist die Zeitkonstante groß, sodass der Endwert sehr spät erreicht wird. Die Zeitkonstante τ kann grafisch ermittelt werden als Schnittpunkt der beiden Kurven $i = (U_0/L)t$ (punktierte Linie in Abb. 4.146) und $I_0 = U_0/R$ (gestrichelte Linie). Dann gilt

$$\frac{U_0}{L}\tau = \frac{U_0}{R} \quad \text{oder}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \,. \qquad (4.341)$$

Beim Ausschalten wird die Spannung $U_0 = 0$, sodass sich die Differentialgleichung vereinfacht:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i = 0 \,. \tag{4.342}$$

Diese Gleichung lässt sich analog zur Differentialgleichung (4-335) durch Trennung der Variablen direkt lösen. Es gilt

$$i = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \,. \tag{4.343}$$

Beim Ausschalten ist eine Parallelschaltung von Widerstand und Spule empfehlenswerter als die Reihenschaltung (Abb. 4.146), weil dann sofort ein Teil des Stroms über den Widerstand abfließen kann. Für den Fall einer Reihenschaltung würde besonders für hohe Induktivitäten die gesamte Induktionsspannung $-L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ lange Zeit zwischen den Schaltkontakten liegen. Dadurch könnten die Schaltkontakte oder die Bauelemente zerstört werden.

Abbildung 4.147a zeigt das Ein- und Ausschaltverhalten (Spannungs-Zeit-Verlauf nach (4.332) und (4.336)) für eine Batteriespannung von $U_0 = 24$ V und Kapazitäten von $C = 50$ nF, 100 nF und 150 nF. Mit größeren Werten der Kapazität C vergrößern sich also die Ein- und Ausschaltzeiten. Abbildung 4.147b zeigt das Ein- und Ausschaltverhalten nach ((4.340) und (4.343)) für eine Batteriespannung von $U_0 = 24$ V, einen Widerstand von $R = 2\,\Omega$ und Induktivitäten von $L = 100$ mH, 300 mH und 500 mH. Auch hier erkennt man, dass sich die Ein- und Ausschaltzeiten für höhere Werte für L vergrößern.

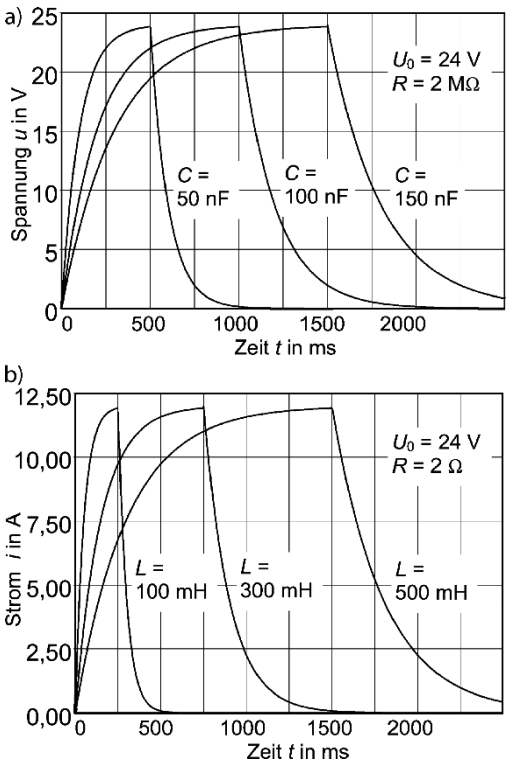


Abb. 4.147 Ein- und Ausschaltverhalten von **a** Kapazitäten; **b** Induktivitäten

4.5.4 Messgeräte

Elektrische Messgeräte dominieren in der physikalischen Messtechnik; für die meisten physikalischen Größen, wie z. B. Temperatur oder Kraft, gibt es elektrische Messwertaufnehmer, sodass die Messwerte als elektrische Signale zur Verfügung stehen. Diese elektrischen Signale können als Daten sofort weiterverarbeitet oder als Steuer- bzw. Regelgrößen verwendet werden. Üblicherweise unterscheidet man zwischen analogen und digitalen Messgeräten, ferner zwischen solchen, die nur gemittelte Werte (z. B. Effektivwerte) messen und solchen, die es gestatten, den zeitlichen Verlauf der Messgrößen darzustellen.

In Abb. 4.148 sind die Messgeräte, ihre Symbole nach VDE 0410 sowie ihre Hauptanwendungsgebiete beschrieben.

Drehspulmesswerk

Ein Drehspulmesswerk besteht aus einem drehbaren zylindrischen Spulenkörper, der

Messgerät	Symbol	Anwendungsfelder
Drehspulmesswerk		Gleichstrom, -spannung, Wechselstromfrequenz, -leistung, cos φ, Temperaturmessung, Vielfachinstrument
Drehspulmesswerk mit eingebautem Gleichrichter		Wechselstrom, -spannung, Effektivwerte bei sinusf. Wechselstrom, Zeigerfrequenzmesser (1,1 kHz; 15 kHz)
Drehspulmesswerk mit eingebautem Thermoumformer		Wechselstrom, -spannung (unabhängig von der Kurvenform)
Drehspulquotienten-messwerk		Widerstandsmessung, Temperaturmessung
Drehmagnetmesswerk		Gleichstrom (leicht und erschütterungsfest)
Dreheisenmesswerk		Effektivwert unabhängig von der Kurvenform (robuste Geräte, keine hohen Frequenzen, hoher Leistungsbedarf)
elektrodynamisches Messwerk, eisenlos		Leistungsmesser bis zu hohen Frequenzen (kHz-Bereich; fremdfeldempfindlich)
elektrodynamisches Messwerk, eisengeschlossen		Leistungsmesser, niedriger Frequenzbereich (50 Hz; nicht fremdfeldempfindlich)
elektrodynamisches Quotienten-messwerk, eisenlos		Leistungsfaktor cos φ
elektrodynamisches Quotienten-messwerk, eisengeschlossen		Leistungsfaktor cos φ
Hitzdrahtmesswerk		Widerstand, Temperatur bei höchsten Frequenzen, Effektivwerte von Strom und Spannung
Bimetallmesswerk		Höchstwertmesser für Wechselstrom, Überwachung der thermischen Belastung von Kabeln und Transformatoren
elektrostatisches Messwerk		Gleich- und Wechselspannungen, HF-Spannungen (Effektivwerte), elektrische Felder
Induktionsmesswerk		Energiemesser (kWh-Zähler)
Vibrationsmesswerk		Frequenzmessung (ca. 50 Hz), Zungenfrequenzmesser
digitales Messgerät		Momentan- und Effektivwerte aller Gleich- und Wechselströme (leistungsschwach)
Elektronenstrahl-Oszilloskop		zeitlicher Verlauf von elektrischen Größen

Abb. 4.148 Einteilung der Messgeräte

sich in einem ringförmigen Spalt eines Dauermagneten bewegen kann. Auf der Achse der Drehspule befinden sich zwei Spiralfedern, die als Stromzuführungen für die Spule dienen, sowie ein Zeiger. Im Luftspalt zwischen dem Dauermagneten und dem Spulenkörper herrscht ein radiales Magnetfeld. Wenn durch den Spulenkörper ein Gleichstrom fließt, dann tritt ein Drehmoment auf, das proportional der Stromstärke ist und von dem Gegendrehmoment der Spiralfeder im Gleichgewicht gehalten wird. Der Ausschlagwinkel des Zeigers ist demnach proportional zur Stromstärke ($\varphi \sim I$).

Kleinere Bauformen werden dadurch erreicht, dass sich der Dauermagnet als feststehender Zylinder im Zentrum des Messwerkes befindet. Die Spule ist drehend um ihn gelagert und der Luftspalt wird durch einen Hohlzylinder aus Weicheisen abgeschlossen (*Drehspul-Kernmagnet-Messwerk*). Drehspulmesswerke werden zur Messung von Gleichströmen und Gleichspannungen verwendet. Sie gehören zu den empfindlichsten elektrischen Messwerken (minimale Stromstärke 10^{-9} A). Wird ein Gleichrichter vorgeschaltet, so können auch Effektivwerte von Wechselströmen- und -spannungen bei sinusförmigem Kurvenverlauf gemessen werden. Ebenso kann man sie als Widerstandsmesser einsetzen, wenn sie als Brücke in Zusammenhang mit einer konstanten Spannungsquelle geschaltet werden (Wheatstone'sche Brücke, Abschn. 4.1.9). Durch Vorschalten eines *Thermoumformers*, bei dem mit Hilfe eines Thermoelements die Temperaturerhöhung an einem kleinen Lastwiderstand gemessen und über einen Kalibrierfaktor auf den anliegenden Wechselstrom zurückgeschlossen wird, lassen sich die Effektivwerte von Wechselströmen und -spannungen beliebiger Welligkeit messen. Die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Drehspulmessgeräten sind der Grund für die kompakte Bauform von *Vielfachmessinstrumenten*.

Ein wichtiger Spezialfall ist das *Drehspulquotientenmesswerk* (oder *Kreuzspulinstrument*). Hierbei bewegen sich zwei um 30° versetzte Spulen im Dauermagnetfeld. Werden die beiden Spulen von unterschiedlichen Stromstärken i_1 und i_2 durchflossen, ist der Zeigerausschlag φ proportional zum Quotienten der beiden Stromstärken i_1/i_2. Eine Spule kann man als Amperemeter und die andere als Voltmeter schalten. Dann misst der Quotient direkt den Widerstand (unabhängig von einer Batteriespannung). Eine Hauptanwendung dieses Messwerkes ist die Temperaturmessung mit Hilfe von Widerstandsthermometern.

Dreheisenmesswerk

Das Dreheisenmesswerk besteht aus einer Spule, die vom Messstrom durchflossen wird. Im Zentrum dieser Spule befinden sich zwei Weicheisenplättchen, von denen eines an der Spule und das andere an der Zeigerachse befestigt ist. Beim Stromfluss durch die Spule werden beide Plättchen gleichnamig magnetisiert. Dadurch stoßen sie sich ab. Der Zeigerausschlag ist proportional zum Effektivwert der Messgröße, und zwar unabhängig von der Kurvenform. Dreheiseninstrumente sind sehr robuste Geräte, haben allerdings einen hohen Leistungsverbrauch und sind wegen der Wirbelstromverluste nicht bei Frequenzen über 1 kHz einsetzbar.

Elektrodynamisches Messwerk

Beim elektrodynamischen Messwerk wird der Permanentmagnet des Drehspulmesswerks durch einen Elektromagneten ersetzt. Wird der Strom durch beide Spulen geleitet, so ist der Ausschlag proportional zum Quadrat der Stromstärke. Aus diesem Grund können sowohl Gleich- als auch Wechselgrößen gemessen werden. Sehr wichtig ist auch die

Möglichkeit, das Produkt UI, d. h. die elektrische Leistung zu messen. Dazu dient eine Spule als Strompfad, die andere mit einem Vorschaltwiderstand als Spannungspfad. Die Phasenverschiebung $\cos\varphi$ ist annähernd null, wenn der Widerstand im Spannungsfeld sehr hoch ist. Die Blindleistung lässt sich dadurch messen dass eine Spule (Phasenverschiebung um 90°) den Widerstand ersetzt.
Ein *eisenloses Messwerk* ist sehr empfindlich für fremde Magnetfelder. Häufig wird deshalb ein *eisengeschlossenes Messwerk* gebaut. Dies hat aber den Nachteil, dass man nur bei geringen Frequenzen (um 50 Hz) richtig messen kann. Mit einem *elektrodynamischen Quotientenmesswerk* kann der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ ermittelt werden.

Hitzdrahtmesswerk

Das klassische Hitzdrahtinstrument, bei dem die Ausdehnung eines Drahtes durch die beim Stromfluss entstehende Wärme zu Messzwecken ausgenutzt wird, ist heute kaum noch im Einsatz. Statt dessen werden wärmeempfindliche Bauelemente (z. B. PTC-Widerstände, Abschn. 4.1.4 und Abb. 4.6) oder Thermoelemente (Abschn. 9.3.2.2) eingebaut. Auf diese Weise ist es möglich, Effektivwerte von Strömen und Spannungen bei höchsten Frequenzen zu messen.

Bimetallmesswerk

Werden Bimetallspiralen von Strom durchflossen, so biegen sie sich aufgrund der Erwärmung auf. Das hierbei auf die Zeigerachse übertragene Moment ist so groß, dass auch ein Schleppzeiger mitgeführt werden kann. Auf diese Weise können Maximalwerte angezeigt werden. Bimetallmesswerke finden vorzugsweise Anwendung bei der Überwachung thermischer Belastungen von Kabeln und Transformatoren.

Elektrostatisches Messwerk

Im elektrostatischen Messwerk dient die Coulomb'sche Kraft (Abschn. 4.3.8, (4.169)) zwischen zwei Platten als Messgröße. Um Durchschläge zu verhindern, wird bei Gleichstrom ein sehr hochohmiger Widerstand ($R > 10^{14}\,\Omega$) und bei Wechselstrom ein Kondensator vorgeschaltet. Wegen der geringen elektrostatischen Kraft können zwei Platten erst ab Spannungen größer als 1 kV zu Messzwecken eingesetzt werden. Ordnet man eine Vielzahl von Metallplatten vertikal stapelartig übereinander, so liegt ein Multizellular-Messwerk vor. Leichte Metallnadeln, die an der vertikal aufgehängten Achse befestigt sind, können sich nach Art des Drehkondensators zwischen den Platten drehen. Durch die Vielfachanordnung erhöht sich die Einstellkraft des Messwerkes, sodass bereits Spannungen ab 100 V gemessen werden können.
Der Einsatz elektrostatischer Messwerke ist auf Spezialanwendungen beschränkt (z. B. Messung von sehr großen Widerständen $R > 10^9\,\Omega$ oder als Röntgendosimeter).

Induktionsmesswerk

In einem Induktionsmesswerk bewegt sich eine nicht ferromagnetische Scheibe (meist aus Aluminium) zwischen zwei um 90° versetzten Elektromagneten. Der Elektromagnet zwischen der drehbaren Scheibe erzeugt beim Stromfluss ein Magnetfeld, das Wirbelströme in der Scheibe induziert. Der in der Ebene der Scheibe befindliche zweite Elektromagnet erzeugt ein Magnetfeld, das auf die Wirbelströme einwirkt und die Scheibe in Drehung versetzt. Wenn in dem zwischen der Scheibe befindlichen Magneten eine Spannung geschaltet wird (Spannungsjoch) und im senkrecht dazu stehenden Magneten ein Strom fließt, dann ist die Drehfrequenz proportional zur Wirkleistung $UI\cos\varphi$. Wird die Anzahl der Umdrehungen gezählt, handelt es

sich um einen Energiezähler (kWh-Zähler). Die Scheibe wird durch einen Permanentmagneten gebremst. Das so beschriebene Induktionsmesswerk ist als elektrische Maschine ein gebremster Asynchronmotor (Abschn. 4.5.2.8).

Vibrationsmesswerk

Ein Vibrationsmesswerk besteht aus einem auf die Schwingungsfrequenz abgestimmten Satz federnder Zungen (13 bis 21 Stück), die bei Resonanz ihre Amplitude vergrößern. Vibrationsmesswerke dienen zur Bestimmung der Wechselstromfrequenz und werden als *Zungenfrequenzmesser* zur Frequenzüberwachung von 50 Hz bzw. 60 Hz eingesetzt.

Digitales elektronisches Messwerk

Durch Analog-Digitalwandler, teilweise mikroprozessorgesteuert, können die meisten analogen Messwerke zu digitalen Messgeräten ausgebaut werden.
Abbildung 4.149 gibt einen schematischen Einblick in den Aufbau digitaler Messwerke. Die digitalen Vielfachinstrumente ersetzen in zunehmendem Maß die analogen Multimeter. Digitale Multimeter messen nicht nur die gewünschten elektrischen Grundgrößen

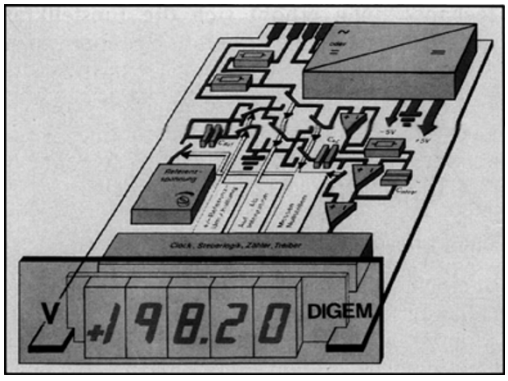


Abb. 4.149 Digitales Messwerk, schematisch. Werkfoto: Gossen

(Spannung, Stromstärke und Widerstand für Gleich- und Wechselstrom), sondern nehmen auch nach eigenen Programmen Messauswertungen vor.

Elektronenstrahl-Oszilloskop

Um den zeitlichen Verlauf von Messgrößen verfolgen zu können, benutzt man Elektronenstrahl-Oszilloskope. Das Messprinzip basiert auf der Ablenkung von Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld in einer Braun'schen Röhre (Abschn. 4.3.5.5).
Die Verwendungsart der beschriebenen Messgeräte sowie die Geräteeigenschaften müssen nach VDE 0410 auf den Geräten angegeben werden. Abbildung 4.150 zeigt eine Zusammenstellung dieser Symbole. So bedeutet z. B.

$$\varnothing \; \Omega - 1 \sim 1{,}5\,\Omega^{1{,}5} \; \sqcap \; \star$$

Drehspulmessgerät für Gleichstrom (Güteklasse 1), für Wechselstrom (Güteklasse 1,5) und Widerstandsmessung (Güteklasse 1,5), in der Gebrauchslage waagrecht mit der Prüfspannung 3 kV.

4.5.5 Zusammenhang elektrischer und magnetischer Größen – Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen wurden von J.C. Maxwell (1831 bis 1879) formuliert. Sie beschreiben die analytische Verknüpfung von elektrischem und magnetischem Feld und umgekehrt. In Abb. 4.151 findet sich eine vergleichende Gegenüberstellung.
Die erste Maxwellsche Gleichung ist die allgemeine Formulierung des Durchflutungsgesetzes (Abschn. 4.4.2, (4.171)). Sie besagt, dass zur Erzeugung eines Magnetfeldes nicht unbedingt ein Stromfluss (d. h. Ladungstransport) notwendig ist. Beispielsweise entsteht zwischen den Platten eines Kondensators während des Ladevorgangs ein magnetisches Wir-

Symbol	Verwendungszweck	Symbol	Verwendungszweck
—	Gleichstrom	V	Hochspannung am Zubehör und/oder Instrument
~	Wechselstrom	⊥	Instrument, das mit senkrechter Skale zu benutzen ist
≂	Gleich- und Wechselstrom	⌐	Instrument, das mit waagrechter Skale zu benutzen ist
≋	Drehstrom (allg. Sinnbild)	1,5	Klassenzeichen (z.B. 1,5), wenn der Bezugswert der Skalenlänge entspricht
≋	Drehstrom mit unsymmetrischer Belastung (allg. Sinnbild)	(1,5)	Klassenzeichen (z.B. 1,5), wenn der Bezugswert dem richtigen Wert entspricht
≋	Drehstrom (3 Leiter), unsymmetrisch belastet, gemessen mit 2 Messwerken	◯	magnetische Schirmung
☆	Prüfspannung 500 V	◌	elektrische Schirmung
☆ 2	Prüfspannung über 500 V (z.B. 2 kV)	a st	astatisches Messwerk
☆ 0	Symbol für ein Instrument, das keiner Spannungsprüfung unterzogen wird	⚠	Achtung! Gebrauchsanweisung beachten!

Abb. 4.150 Geräteeigenschaften nach VDE 0410

belfeld, obwohl an dieser Stelle ganz offensichtlich kein Strom fließt. Schon die Änderung des elektrischen Flusses $\int \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$, ein so genannter Verschiebungsstrom, reicht aus, um ein Magnetfeld zu erzeugen.

> Der Gesamtstrom aus Leitungsstrom und Verschiebestrom durch eine Fläche A erzeugt in der Randkurve C eine magnetische Spannung.

Strom- und Magnetfeldrichtung bilden ein Rechtssystem.

Die zweite Maxwell'sche Gleichung ist eine Verallgemeinerung des Induktionsgesetzes $u_{\mathrm{ind}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ (4.241). Durch Umschreiben der Spannung in ein Linienintegral über die Feldstärke und Formulierung des magnetischen Flusses nach (4.190) liefert

$$\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

> Jede Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche A erzeugt in der Randkurve C eine elektrische Spannung.

Flussänderung und Richtung der elektrischen Feldlinien bilden ein Linkssystem.

Die Quellen des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{D}$ sind Ladungen, an denen die Feldlinien beginnen und enden. Nach dem Gauß'schen Satz, (4.133), ist das Integral des elektrischen Flusses über eine geschlossene Fläche S gleich der Ladung im Innern der Fläche: $\oint \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q$. Da es keine magnetischen Monopole gibt, an denen die B-Feldlinien beginnen und enden könnten, gilt im Magnetfeld $\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$. Das Magnetfeld ist demnach *quellenfrei*, es ist ein *Wirbelfeld*. Das elektrische Feld ist in der Elektrodynamik ebenfalls ein Wirbelfeld mit geschlossenen Feldlinien (Abb. 4.151). Lediglich in der Elektrostatik beginnen und enden die Feldlinien des elektrischen Feldes an Ladungen.

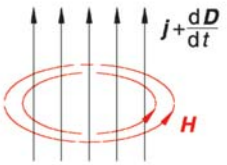
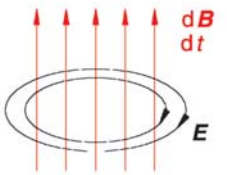
Maxwell'sche Gleichungen in integraler Form	1. Maxwell'sche Gleichung (Durchflutungsgesetz) $\oint_C \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \left(\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ (4.344) Im Vakuum ist $\boldsymbol{j} = 0$ und $\oint_C \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ (4.345)  Jedes zeitlich sich ändernde elektrische Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.	2. Maxwell'sche Gleichung (Induktionsgesetz) $\oint_C \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ (4.346)  Jedes zeitlich sich ändernde magnetische Feld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.
in differentieller Form	$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{D}}$ (4.347)	$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$ (4.348)
Quellen	$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = Q$ (4.133)	$\oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ (4.349)
Materialgleichungen	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ (4.153) $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}\boldsymbol{E}$ (4.156) $\boldsymbol{j} = \kappa\boldsymbol{E}$ (4.207)	$\boldsymbol{B} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$ (4.225) $\boldsymbol{J} = \mu_0\chi_\mathrm{m}\boldsymbol{H}$ (4.221)
Kräfte	$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ (4.216)	

Abb. 4.151 Maxwell'sche Gleichungen für das elektrische und magnetische Feld

Die *Materialgleichungen* beschreiben die Einflüsse des Materials auf die elektrischen und magnetischen Felder. Die elektrische ($\boldsymbol{P}$) und magnetische ($\boldsymbol{J}$) Polarisation ist im einfachsten Fall proportional zur jeweiligen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{H}$. Die Proportionalitätskonstante ist die Suszeptibilität χ. Bei hohen Feldstärken treten nichtlineare Effekte auf wie die nichtlineare Optik bei intensiven Laserfeldern. Die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ ist mit der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ über das Ohm'sche Gesetz $\boldsymbol{j} = \varkappa\boldsymbol{E}$ verknüpft.

Während auf jede Ladung in einem elektrischen Feld eine Kraft ausgeübt wird, tritt die Lorentz-Kraft im Magnetfeld nur bei bewegten Ladungen auf.

Mit den Maxwell'schen Gleichungen ist eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge möglich. Tabelle 4.17 zeigt die vier denkbaren Spezialfälle:

1.) *Elektrostatik und Magnetostatik*

Fließt weder ein Strom ($j = 0$) noch ändert sich das magnetische Feld ($\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t = 0$) sowie die

Tabelle 4.17 Gebiete der Elektrizitätslehre und des Magnetismus

	$j = 0$	$j \neq 0$
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} = 0$	Elektrostatik und	Elektrodynamik stationärer
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} = 0$	Magnetostatik	Ströme
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \neq 0$	elektromagnetische Wellen	Elektrodynamik quasistationärer
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \neq 0$		Ströme $\left(\text{für} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \approx 0\right)$

elektrische Verschiebungsdichte ($\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t = 0$), dann existieren elektrostatische und magnetostatische Felder vollkommen unabhängig voneinander.

2.) *Elektrodynamik stationärer Ströme*

Fließt lediglich ein Strom ($j \neq 0$), ist jedoch keine Änderung des magnetischen Feldes ($\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t = 0$) und der elektrischen Verschiebungsdichte ($\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t = 0$) vorhanden, so ist wegen des Durchflutungsgesetzes (Abb. 4.89, (4.171)) bereits eine magnetische Wirkung spürbar. Ferner gilt das Ohm'sche Gesetz in der Formulierung $\boldsymbol{j} = \varkappa \boldsymbol{E}$ (4.207).

3.) *Elektrodynamik quasistationärer Ströme*

Fließt ein Strom ($j \neq 0$) und ändert sich das Magnetfeld ($\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t \neq 0$), wobei der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann (nahezu stationär: ($\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t \approx 0$), dann gelten das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz (die erste und die zweite Maxwell'sche Gleichung). Sie sind die Grundlagen der in Abschn. 4.5 beschriebenen Phänomene zeitlich sich ändernder elektrischer und magnetischer Felder.

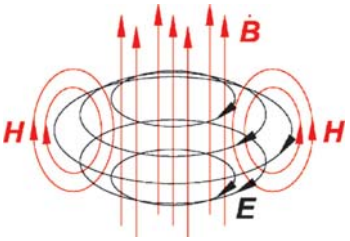


Abb. 4.152 Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle durch wechselseitig induzierte elektrische und magnetische Felder

4.) *Elektromagnetische Wellen*

Die geniale Voraussage von Maxwell bestand darin, dass er seine Gleichungen als *Formulierungen für elektromagnetische Wellen* interpretieren konnte für den Fall, dass kein Stromfluss vorhanden war ($j = 0$).

In Abb. 4.152 ist der Fall dargestellt, dass die zeitliche Änderung $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t$ des primären Magnetfeldes nicht konstant ist. Wenn beispielsweise die Flussdichte harmonisch von der Zeit abhängt, gemäß $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{B}} \sin \omega t$, dann ist $\dot{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{B}}\, \omega \cos \omega t$. In diesem Fall ist das erzeugte elektrische Wirbelfeld ebenfalls zeitlich veränderlich, was seinerseits wieder ein zeitlich veränderliches magnetisches Wirbelfeld bildet usw. Die Verkettung von elektrischen und magnetischen Feldern stellt eine elektromagnetische Welle dar, die sich mit Lichtgeschwindigkeit im Raum ausbreitet. Diese elektromagnetischen Wellen wurden von H. Hertz (1857 bis 1894) experimentell nachgewiesen (Abschn. 5.2.2). Da das Licht als elektromagnetische Welle verstanden werden kann, ist außerdem eine enge Beziehung zwischen Elektrodynamik und Wellenoptik vorhanden (Abschn. 6.1 und 6.4).

Zur Übung

Ü 4.5-1 Eine eisenlose Flachspule hat 200 Windungen und umschließt eine Fläche von 150 cm^2. Sie rotiert mit einer Drehzahl von 800 min^{-1} in einem ho-

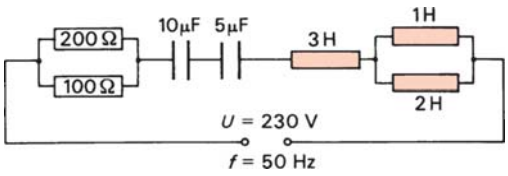


Abb. 4.153 Zu Ü 4.5-2

mogenen Magnetfeld. (Die Feldlinien stehen senkrecht zur Drehachse.) Bei welcher magnetischen Induktion B wird die Scheitelspannung von $\hat{u} = 48$ V induziert?

Ü 4.5-2 Für die Schaltung in Abb. 4.153 sollen die Stromstärke, der Phasenverschiebungswinkel φ und die Wirkleistung im Wechselstromnetz ($U = 230$ V, $f = 50$ Hz) berechnet werden.

Ü 4.5-3 Bei einem Magnetsystem beträgt die Länge des Eisenkerns 75 cm und die Breite des Luftspaltes 1 mm. Die Permeabilitätszahl des Eisens ist $\mu_r = 750$. Um den wievielten Teil nimmt die magnetische Feldstärke im Luftspalt ab, wenn die Breite des Luftspaltes verdoppelt wird?

Ü 4.5-4 Eine Leuchtstoffröhre benötigt $U = 50$ V und eine Stromstärke von $I = 0{,}12$ A. Welche Induktivität L muss eine in Reihe geschaltete Spule haben, damit die Leuchtstoffröhre an die Netzspannung (230 V, 50 Hz) angeschlossen werden kann? (Der Ohm'sche Anteil der Spule sei vernachlässigbar klein.) Wie groß ist der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung? Welche Kapazität benötigt ein zu Spule und Röhre parallel geschalteter Kondensator zur Blindstromkompensation?

Kapitel 5
Schwingungen und Wellen

5

5

5 Schwingungen und Wellen

5.1 Schwingungen 419
5.1.1 Physikalische Grundlagen schwingungsfähiger Systeme 419
5.1.2 Freie Schwingung 423
5.1.3 Erzwungene Schwingung 443
5.1.4 Überlagerung von Schwingungen 450
5.1.5 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden (gekoppeltes Schwingungssystem) . . . 459
5.1.6 Nichtlineare Schwinger 463
5.1.7 Parametrisch erregte Schwingungen 463
5.2 Wellen 464
5.2.1 Physikalische Grundlagen der Wellenausbreitung 464
5.2.2 Harmonische Wellen 468
5.2.3 Doppler-Effekt 474
5.2.4 Interferenz 477

5 Schwingungen und Wellen

Bei Schwingungen und Wellen finden *periodische Zustandsänderungen* statt, die *mechanische* Systeme (im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand) und *elektromagnetische* Systeme erfassen können. Im allgemeinen Fall wird Energie zwischen Energiereservoirs periodisch hin- und herbewegt. Systeme, die zu einem solchen periodischen Energieaustausch fähig sind, werden *Oszillatoren* genannt. Bei mechanischen Schwingungen eines *Feder-Masse-Systems* (*Federpendel* oder *mechanischer Oszillator*) betrifft dies die potentielle Energie der Feder und die kinetische Energie der Masse und beim *elektromagnetischen Schwingkreis* die elektrische Energie des Kondensators und die magnetische Energie der Spule. Die *Periodizität* des Energieaustausches wird beschrieben durch die *Schwingungsdauer* T für einen Energieaustauschzyklus bzw. durch die *Frequenz* f, d. h. die Anzahl der Zyklen je Zeiteinheit. Es gilt der Zusammenhang

$$f = \frac{1}{T} \,. \tag{5.1}$$

Aus Abb. 5.1 geht der Unterschied zwischen Schwingungen und Wellen hervor. Erfassen die periodischen Energieschwankungen nur einzelne schwingungsfähige Elemente, dann sind dies *Schwingungen*; werden dagegen von den Energieschwankungen eine Vielzahl elastisch oder quasielastisch aneinander gekoppelter Elemente erfasst, so treten *Wellen* auf, bei denen sich die Energiezustände periodisch im Raum fortpflanzen.

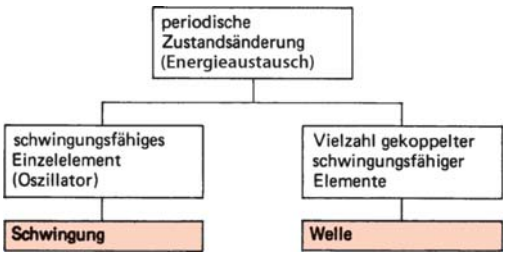


Abb. 5.1 Zusammenhang zwischen Schwingung und Welle

5.1 Schwingungen

In vielen Bereichen des täglichen Lebens, der Physik und der Biologie spielen periodische Vorgänge eine bedeutende Rolle. Erwähnt seien als Beispiele für den Bereich des täglichen Lebens Ebbe und Flut, Tag und Nacht, für die Physik das Uhrenpendel, der Schwingquarz, der elektromagnetische Schwingkreis, die Atom- und Gitterschwingungen und für die Medizin der Pulsschlag.

5.1.1 Physikalische Grundlagen schwingungsfähiger Systeme

Schwingungen werden *in freie* und *erzwungene* sowie in *ungedämpfte* und *gedämpfte*

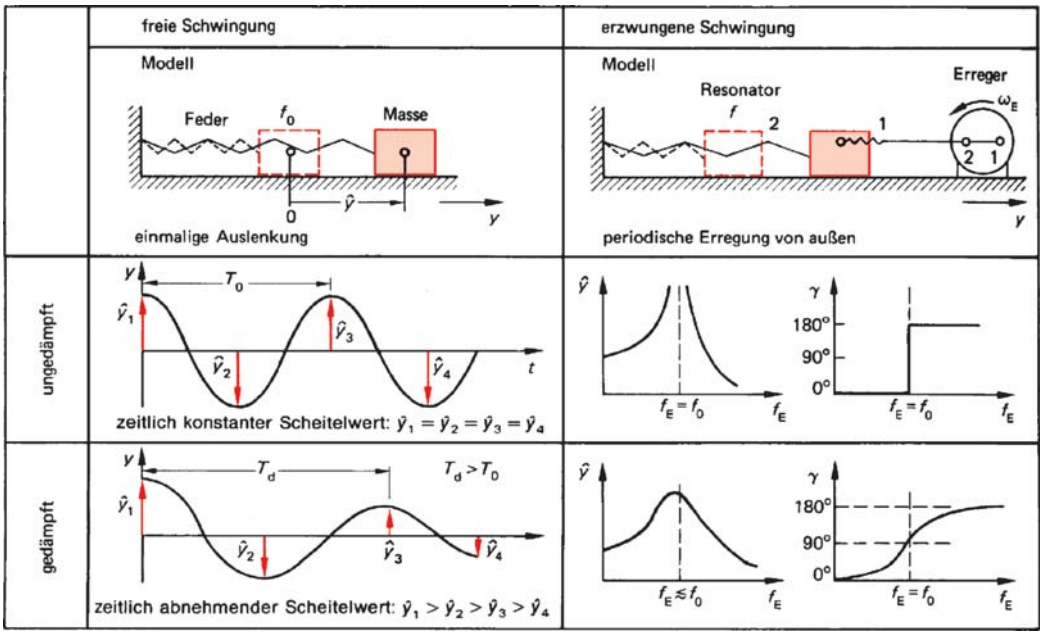


Abb. 5.2 Harmonische Schwingungen

Schwingungen eingeteilt. Abbildung 5.2 zeigt die Zusammenhänge am Beispiel eines Körpers, der mit einer Feder verbunden ist und in horizontaler Richtung schwingen kann.

Bei der *freien Schwingung* wird dem Oszillator *einmalig* zu einem bestimmten Zeitpunkt Energie durch Stoß oder durch die Auslenkung des Oszillators zugeführt. Anschließend wird das System sich selbst überlassen; der Oszillator schwingt dann mit einer *systemtypischen, konstanten Eigenfrequenz* f_0. Wird dem Schwingungssystem im weiteren zeitlichen Verlauf keine Energie zugeführt oder entzogen, so schwankt die Auslenkung des Oszillators periodisch mit der Eigenfrequenz f_0 zwischen zwei konstanten Maximalwerten *(Scheitelwert* oder *Amplitude* $\hat{y}$). Der Scheitelwert der Schwingung, die als *ungedämpfte freie Schwingung* bezeichnet wird, ist konstant und abhängig vom Energiebetrag, mit dem die freie Schwingung erregt wurde. Wirken dagegen äußere Kräfte, z. B. die Reibung oder Energieverluste des Oszillators, so nimmt der Scheitelwert der freien Schwingung im zeitlichen Verlauf ab. Dies kennzeichnet die *gedämpfte freie Schwingung*. Ferner ist die Frequenz f_d der gedämpften freien Schwingung wegen des stattfindenden Energieverlustes kleiner als die Eigenfrequenz f_0 der ungedämpften freien Schwingung.

Ein *Resonator* ist ein Oszillator, dem von außen eine periodische Erregung mit der Erregerfrequenz f_E aufgezwungen werden kann. Unter dem Einfluss des *Erregers* führt der Resonator *erzwungene Schwingungen* mit der Erregerfrequenz f_E aus. Wenn die Erregerfrequenz f_E gleich oder annähernd gleich der Resonanzfrequenz f_R ist, tritt *Resonanz* ein. Bei Resonanz wächst im ungedämpften Fall (ohne Energieverluste) die Amplitude unendlich an (*Resonanzkatastrophe*). Im gedämpften Fall steigt dagegen die Amplitude bei Resonanz lediglich bis auf einen endlichen Maximalwert der Auslenkung an, bei dem der Energieverlust je Schwingungsperiode gerade gleich der zugeführten Erregerenergie ist. Ist die Erregerfre-

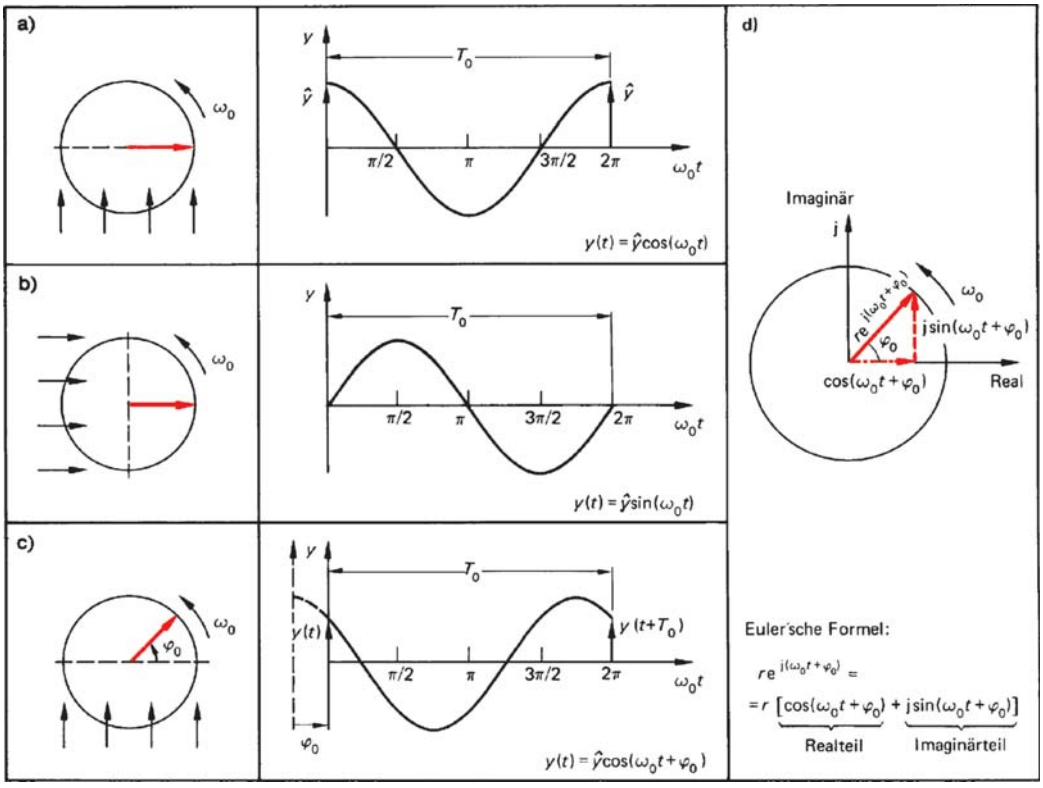


Abb. 5.3 Zusammenhang zwischen der Kreisbewegung und den harmonischen Schwingungen (**a**) bis (**c**) sowie rotierende Zeiger in der komplexen Ebene (**d**)

quenz f_E wesentlich *niedriger* als die Resonanzfrequenz f_R, so schwingen Erreger und Resonator *gleichphasig*; die Phasenverschiebung γ zwischen den beiden Schwingungen ist null. Ist $f_E \gg f_R$, dann schwingen Erreger und Resonator *gegenphasig*; die Phasenverschiebung beträgt in diesem Fall $\gamma = 180°$. Ohne Dämpfung kommt es bei *Resonanz* zu einem *Phasensprung* von $\Delta\gamma = 180°$. Mit Dämpfung verläuft die Phasenverschiebung mit zunehmender Erregerfrequenz stetig.

Die wichtigste Eigenschaft aller schwingungsfähigen Systeme ist die *Periodizität*.

> Bei der Periodizität werden bestimmte Muster in konstanten Zeitintervallen (Periode T) wiederholt.

Wird das periodisch wiederkehrende Muster als Auslenkung y aufgefasst, so kann der periodische Vorgang mathematisch formuliert werden:

$$y(t) = y(t + T)\,. \tag{5.2}$$

Die Auslenkung y zu einer Zeit t ist gleich groß wie die Auslenkung y zur Zeit $t + T$; hierbei ist T die *Schwingungsdauer* (Periode) des Systems. Im Allgemeinen ist die mathematische Beschreibung periodischer Auslenkungen, wie z. B. regelmäßig wiederkehrender Spitzen, sehr schwierig (Abschn. 5.1.4.3, *Fourieranalyse)*. In der Praxis gibt es jedoch viele Schwingungen, deren Auslenkungs-Zeit-Gesetz durch eine mathematische Cosinus- bzw.

Sinus-Funktion beschrieben werden kann. Solche Schwingungen werden *harmonische Schwingungen* genannt.

Die harmonische Schwingung lässt sich durch den Vergleich mit der Parallelprojektion einer gleichförmigen Kreisbewegung anschaulich beschreiben. Abbildung 5.3 zeigt den Zusammenhang zwischen der Kreisbewegung eines Zeigers mit konstanter Umlaufdauer T_0 bzw. Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ (5.1) und der Auslenkung $y(t)$. (Der Index null bedeutet, dass es sich um Größen der ungedämpften Schwingung handelt.)

Startet der Zeiger seine Bewegung im Nullpunkt und wird die Auslenkung $y(t)$ als *Projektion des Zeigers auf die Waagrechte* verstanden (Abb. 5.3a), so ergibt sich eine *Cosinusfunktion*:

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t)\ . \qquad (5.3)$$

Wird dagegen die Auslenkung als *Projektion des Zeigers auf die Senkrechte* verstanden (Abb. 5.3b), so ergibt sich eine *Sinusfunktion*:

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega_0 t)\ . \qquad (5.4)$$

Tabelle 5.1 Charakteristische Größen ungedämpfter harmonischer Schwingungen

Kenngröße	Bedeutung
	Periodizität
Schwingungsdauer T (Periode)	kleinste Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden, gleichen Schwingungszuständen (z. B. zeitlicher Abstand zwischen zwei Maxima oder Minima)
Frequenz f	Anzahl der Schwingungen je Zeit $f = \frac{1}{T} = N/t_N$ in Hz (N: Anzahl der Schwingungen; t_N: Zeit für N Schwingungen)
Kreisfrequenz ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ in s^{-1}
	Auslenkungen bzw. Momentanwerte
Momentanwert $y(t)$	momentane Auslenkung zur Zeit t (errechenbar aus (5.3) bis (5.5))
Scheitelwert $\hat{y}$ (Amplitude)	maximaler Wert der Auslenkung (für $\sin(\omega t + \varphi_0)$ oder $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$)
	Phasenwinkel
Nullphasenwinkel φ_0 (Anfangsphase)	Anfangslage des schwingenden Systems zur Zeit $t = 0$. Es folgt aus (5.5) $\varphi_0 = \arccos\frac{y(0)}{\hat{y}}$ (5.6) $\varphi_0 > 0$: voreilend $\varphi_0 < 0$: nacheilend
allgemeiner Phasenwinkel (Momentanphase) φ	$\varphi = \omega t + \varphi_0$ Summe der Phasenlage eines Punktes zur Zeit t (ωt) und des Nullphasenwinkels φ_0
	Phase
Phase	augenblicklicher Zustand einer Schwingung (bestimmt durch zwei Schwingungsgrößen, z. B. Weg und Zeit)

Ist der Zeiger um einen Winkel φ_0 vom Nullpunkt verschoben *(Nullphasenwinkel)* und wird er auf die *Waagrechte projiziert*, dann ergibt sich eine *phasenverschobene Cosinusfunktion*:

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (5.5)$$

Gleichungen (5.3) bis (5.5) beschreiben das Weg-Zeit-Gesetz der harmonischen Schwingung. Sie zeigen, dass harmonische Schwingungen beschrieben werden durch

- eine für das schwingungsfähige System typische Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ und durch
- die zwei Konstanten $\hat{y}$ und φ_0, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

Abbildung 5.3d zeigt die Analogie zwischen einer Kreisbewegung von Zeigern und der Darstellung komplexer Zahlen nach der *Euler'schen Formel*. Werden in der waagrechten Achse (x-Achse) die Realteile und in der senkrechten Achse (y-Achse) die Imaginärteile (j) aufgezeichnet, dann kann ein komplexer Zeiger $r\,e^{j(\omega t+\varphi_0)}$ in seinen Realteil $r\cos(\omega t + \varphi_0)$ und seinen Imaginärteil $r\sin(\omega t + \varphi_0)$ zerlegt werden. Wegen dieses Zusammenhangs zwischen den trigonometrischen Funktionen im Bereich der komplexen Zahlen mit der Exponentialfunktion wird das Verhalten von Schwingungen häufig mit komplexen Zahlen in der komplexen Ebene beschrieben.
Die wichtigsten Kenngrößen harmonischer Schwingungen sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt und in Abb. 5.4 veranschaulicht. Die genormten Definitionen sind in DIN 1311 zu finden.

Beispiel

5.1-1 Eine harmonische Schwingung hat die Frequenz $f_0 = 0{,}2$ Hz, die Amplitude $\hat{y} = 2$ cm und die Anfangsauslenkung $y(0) = 1$ cm. Das Maximum der Schwingung kommt später. Es sind T_0, ω_0, φ_0 und $y(t)$ zur Zeit $t = 11$ s zu berechnen.

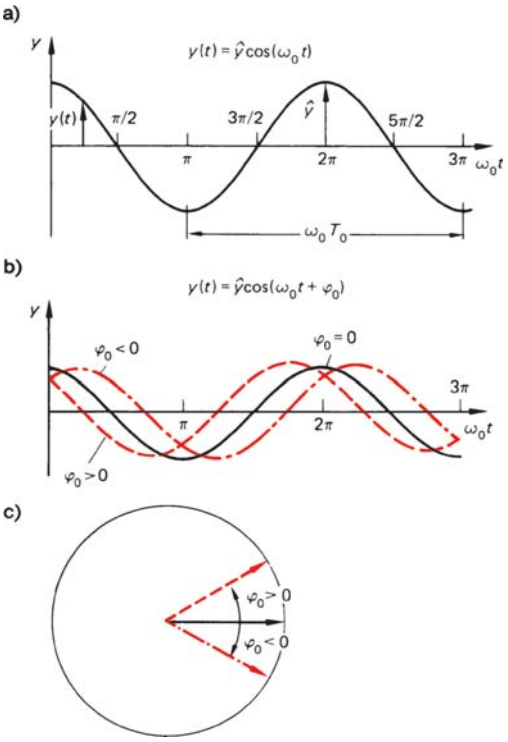


Abb. 5.4 Charakteristische Kenngrößen harmonischer Schwingungen

Lösung

$T_0 = 1/f_0 = 5$ s; $\omega_0 = 2\pi f_0 = 0{,}4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Für den Nullphasenwinkel φ_0 gilt nach (5.6) in Tabelle 5.1 $\cos\varphi_0 = y(0)/\hat{y}$; $\varphi_0 = -60°$ (da Maximum später); $\varphi_0 = -1{,}05$.

$$y(t) = 2\text{ cm}\cos(0{,}4\pi\ t/\text{s} - 1{,}05)\ ,$$

$$y(11\text{ s}) = 2\text{ cm}\cos(0{,}4\pi\ 11 - 1{,}05) = 1{,}96\text{ cm}\ .$$

5.1.2 Freie Schwingung

5.1.2.1 Differentialgleichung des ungedämpften Feder-Masse-Systems

Für das eindimensionale Feder-Masse-System in Abb. 5.5 gilt die *Newton'sche Bewegungsgleichung*

$$F_a = ma$$

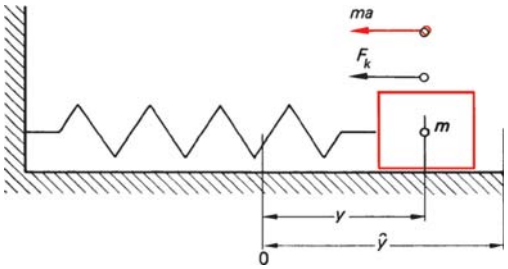


Abb. 5.5 Eindimensionales Feder-Masse-System

mit der von außen wirksamen Kraft F_a gleich der Federkraft F_k, die nach dem *Hooke'schen Gesetz* (Abschn. 2.3.4) als rücktreibende Kraft proportional und entgegengesetzt zur Auslenkung y ist ($F_k \sim -y$). Es gilt

$$F_a = F_k = -ky \,. \tag{5.7}$$

Die Proportionalitätskonstante k wird *Federkonstante* genannt. Damit ist aus dem Newton'schen Gesetz abzuleiten

$$-ky = ma \,.$$

Für die Beschleunigung in Auslenkungsrichtung y gilt $a = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$, somit ist

$$-ky = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{oder}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y = 0 \,. \tag{5.8}$$

Diese Gleichung ist die *Differentialgleichung* (DGL) des *linearen Feder-Masse-Systems* mit folgenden Eigenschaften: Sie ist

- *linear*, d. h., die Variable oder ihre Ableitungen treten nicht als Produkte oder Potenzen auf;
- *eine Gleichung zweiter Ordnung*, d. h., die höchste Ableitung ist die zweite Ableitung;
- *homogen*, d. h., die Differentialgleichung wird null, wenn die Werte der Variablen und deren Ableitungen null werden, und sie hat
- *konstante Koeffizienten*, d. h., die Faktoren vor den Variablen und deren Ableitungen sind konstant.

Die Lösung der Differentialgleichung (5.8) entsprechend (5.5) wird durch folgenden Ansatz erreicht:

Weg-Zeit-Gleichung:

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \,, \tag{5.5}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(t) = -\hat{y}\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \,, \tag{5.9}$$

Beschleunigung-Zeit-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = a(t) = -\hat{y}\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \,. \tag{5.10}$$

Werden die Weg-Zeit-Gleichung (5.5) und die Beschleunigung-Zeit-Gleichung (5.10) in die Differentialgleichung (5.8) eingesetzt, so ergibt sich

$$-\hat{y}\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{m}\hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0 \,.$$

Der Term $\hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ kürzt sich heraus, sodass gilt

$$-\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0 \,,$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \,. \tag{5.11}$$

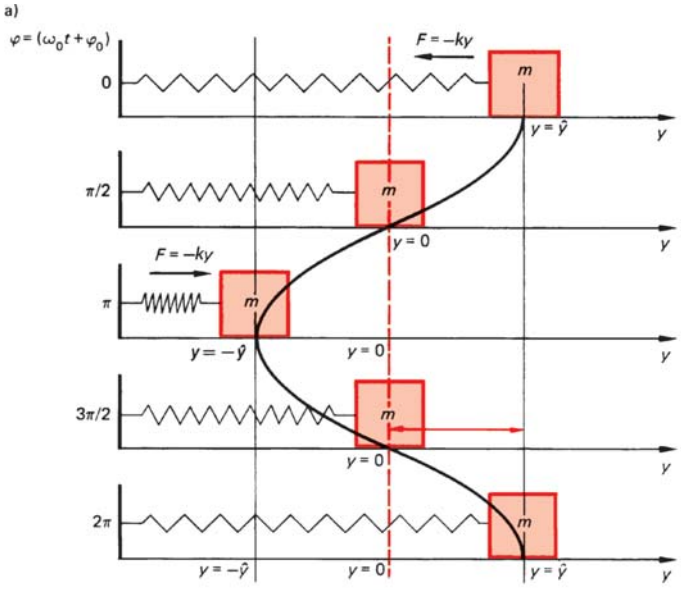
Das Quadrat der Kreisfrequenz ω_0 hängt somit nur ab von den charakteristischen Konstanten Masse und Federkonstante (*Federstei-*

figkeit) des Feder-Masse-Systems. Aus (5.11) errechnet sich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\,, \tag{5.12}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{5.13}$$

Abbildung 5.6a zeigt den Weg-Zeit-Verlauf des Feder-Masse-Systems. Bei der Momentanphase $\varphi = 0$ ist der Körper bis zur Amplitude $\hat{y}$ ausgelenkt. Er läuft bei $\varphi = \pi/2$ durch den Nullpunkt, drückt bei $\varphi = \pi$ die Feder um die negative Amplitude zusammen, schwingt bei $\varphi = 3\pi/2$ wieder durch den Nullpunkt und ist bei $\varphi = 2\pi$ wieder maximal ausgelenkt. In



Größe \ Winkel	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π		
$y(t)$	$\hat{y}$	0	$-\hat{y}$	0	$\hat{y}$	$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t)$	$y_{max} = \hat{y}$
$v(t)$	0	$-v_{max}$	0	v_{max}	0	$v(t) = -\hat{y}\omega_0 \sin(\omega_0 t)$	$v_{max} = \hat{y}\,\omega_0$
$a(t)$	$-a_{max}$	0	a_{max}	0	$-a_{max}$	$a(t) = -\hat{y}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$	$a_{max} = \hat{y}\omega_0^2$

Abb. 5.6 Bewegungsverhalten des Feder-Masse-Systems

Abb. 5.6b sind die periodischen Abläufe der drei Bewegungsgleichungen dargestellt:

- das Weg-Zeit-Gesetz $y(t)$ (5.5) mit durchgezogener Linie,
- das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v(t)$ (5.9), gestrichelt, und
- das Beschleunigung-Zeit-Gesetz $a(t)$ (5.10), strichpunktiert.

Für die Maximalwerte von Weg y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a gilt

$$y_{\max} = \hat{y} \,, \tag{5.14}$$

$$v_{\max} = \hat{y}\omega_0 \,, \tag{5.15}$$

$$a_{\max} = \hat{y}\omega_0^2 \,. \tag{5.16}$$

Die Bewegungsabläufe zeigen, dass in der Ausgangslage $\varphi = 0$ die Auslenkung maximal, die Geschwindigkeit des Körpers gleich null und die Beschleunigung in negativer Richtung maximal ist. Dies bedeutet, die gesamte Energie des Systems ist in der potentiellen Energie der Feder gespeichert. Beim Winkel $\varphi = \pi/2$ schwingt der Körper durch den Nullpunkt. In diesem Fall ist die Auslenkung gleich null (und damit die Beschleunigung) und die Geschwindigkeit des Körpers maximal. Es ist die gesamte potentielle Energie der Feder in kinetische Energie des Körpers verwandelt worden, die sich nach $\varphi = \pi$ wieder in potentielle Energie der Feder, nach $\varphi = 3\pi/2$ wieder beim Nulldurchgang in kinetische Energie des Körpers und nach $\varphi = 2\pi$ wieder in potentielle Energie der Feder verwandelt. Am Beispiel des Feder-Masse-Systems wird deutlich, dass bei Schwingungen Energie zwischen Energiezuständen periodisch hin- und hergeschoben wird.

5.1.2.2 Allgemeine Differentialgleichung der freien, ungedämpften harmonischen Schwingung

Die Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems (5.8) kann so verallgemeinert werden, dass sie für alle freien, ungedämpften harmonischen Schwingungen gültig ist. In dieser allgemeinen Form lautet sie

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\text{Variable}) + \text{Konstante} \cdot (\text{Variable}) = 0 \,. \tag{5.17}$$

Sie hat die Lösung

$$\text{Variable} = \text{Variable}_{\max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{mit } \omega_0^2 = \text{Konstante} \,. \tag{5.18), (5.19}$$

Daraus errechnet sich

$$\omega_0 = \sqrt{\text{Konstante}} \,, \tag{5.20}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{Konstante}}} \,. \tag{5.21}$$

Abbildung 5.7 zeigt, wie die allgemeine Struktur der Differentialgleichung nach (5.17) hergeleitet werden kann. Um die hier auftretenden Drehwinkel vom Phasenwinkel φ unterscheiden zu können, sind sie mit β bezeichnet.
Als Voraussetzung zur Gültigkeit der Differentialgleichung muss sichergestellt sein, dass die Bewegungsursache proportional und entgegengesetzt zur Variablen ist. Da die Bewegungsursache für die Translation Kräfte und für die Rotation Drehmomente sind, müssen Kräfte und Drehmoment diesen Forderungen genügen. Als allgemeine Proportionalitätskonstanten werden für die Translation konst_T und für die Rotation konst_R gesetzt. Aus dem Newton'schen Gesetz für die Bewegung $F = ma$ bzw. $M = J\alpha$ ergibt sich durch Umstellen und Ordnen der Glieder nach fallenden Ableitungen die entsprechende Differential-

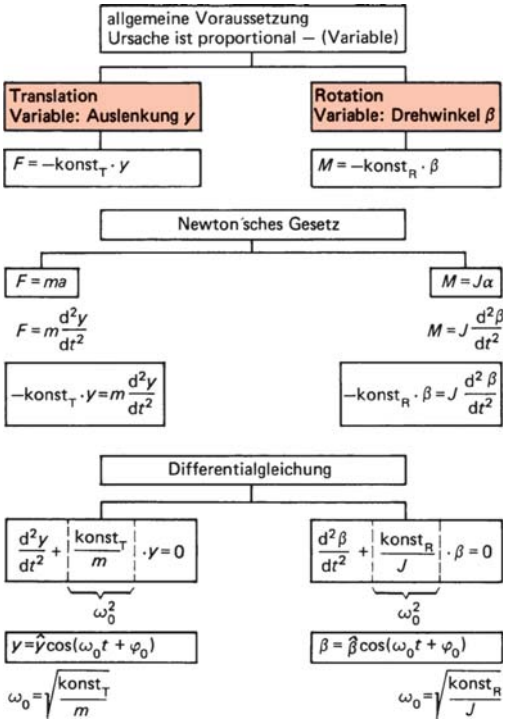


Abb. 5.7 Struktur der Differentialgleichung einer freien, ungedämpften harmonischen Schwingung

gleichung für die Translation bzw. für die Rotation mit ihren Lösungen für y bzw. β und ω_0.

Die Differentialgleichung (5.17) kann auch aus dem Energieerhaltungssatz hergeleitet werden. (Ein Punkt bzw. zwei Punkte über y bedeuten die erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeit.) Es gilt

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}}(\dot{y}) + E_{\text{pot}}(y) = \text{konstant}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{ges}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{\text{kin}}}{\mathrm{d}\dot{y}}\ddot{y} + \frac{\mathrm{d}E_{\text{pot}}}{\mathrm{d}y}\dot{y} = 0 \qquad (5.22)$$

(s. auch Herleitung der Differentialgleichung eines mathematischen Pendels).

5.1.2.3 Differentialgleichungen und Lösungen spezieller mechanischer Schwingungssysteme

Zur Aufstellung der Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems und ihrer Lösung sei auf Abschn. 5.1.2.1 verwiesen. Im Folgenden werden die sonstigen mechanischen Pendel beschrieben.

Mathematisches Pendel

Das mathematische Pendel (Abb. 5.8) besteht aus einer punktförmigen Masse, die an einem unelastischen Faden mit der Länge l aufgehängt ist. (Die Masse des Fadens ist gegenüber der punktförmigen Masse vernachlässigbar klein.) Wird das mathematische Pendel um den Drehwinkel β bis zum Punkt B ausgelenkt, so gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$E^{\text{A}}_{\text{kin}}(\dot{\beta}) = E^{\text{B}}_{\text{pot}}(\beta)\ .$$

Die kinetische Energie im Punkt A beträgt

$$E^{\text{A}}_{\text{kin}}(\dot{\beta}) = \frac{1}{2}m(l\,\dot{\beta})^2$$

und die potentielle Energie am Punkt B

$$E^{\text{B}}_{\text{pot}}(\beta) = mgl(1 - \cos\beta)\ .$$

Da nach (5.22) die Energieänderung gleich null sein muss, gilt

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{ges}}}{\mathrm{d}t} = ml^2\dot{\beta}\ddot{\beta} + mgl\sin\beta\,\dot{\beta} = 0$$

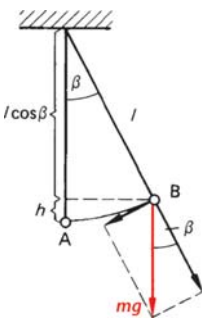


Abb. 5.8 Mathematisches Pendel

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \sin\beta = 0 \,. \tag{5.23}$$

Diese beschreibt keine harmonische Schwingung. Die nach (5.17) geforderte Differentialgleichung entsteht dadurch, dass $\sin\beta \approx \beta$ gesetzt wird (Abbruch der Reihenentwicklung $\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + - \cdots$ nach dem ersten Glied). Damit ergibt sich

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0 \,. \tag{5.24}$$

Die Lösung lautet

$$\beta(t) = \hat{\beta} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{5.25}$$

$$\text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5.26}$$

$$\text{und} \quad T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \,. \tag{5.27}$$

Die exakte Lösung der Schwingungsdauer T_0 nach der Differentialgleichung (5.23) lässt sich als Reihenentwicklung darstellen:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 a^6 + \cdots\right) \tag{5.28}$$

mit $a = \sin(\hat{\beta}/2)$ im großen Klammer-Ausdruck, der als Korrekturfaktor anzusehen ist. Tabelle 5.2 enthält Korrekturfaktoren für zunehmende Winkelausschläge β. So beträgt die Abweichung für $\hat{\beta} = 10°$ beispielsweise 1,9%. Dies bedeutet, dass für kleine Ausschläge $\hat{\beta}$ die Schwingungsdauer recht genau mit (5.27) berechnet werden kann.

Tabelle 5.2 Korrekturfaktor für größere Auslenkungswinkel

Winkel	Korrekturfaktor
1°	1,00002
5°	1,00048
10°	1,00191
30°	1,01741
45°	1,03997

Wie (5.27) zeigt, hängt die Schwingungsdauer T_0 nicht von der Masse des angehängten Körpers ab. Mit diesem Pendel gelang es L. Foucault (1819 bis 1868), die Erdbeschleunigung experimentell sehr genau zu bestimmen.

Torsionsschwinger

Wird ein Körper an einem Torsionsfaden gemäß Abb. 5.9 aufgehängt und vollführt er um die Aufhängungsachse AA Drehschwingungen, so handelt es sich um einen Torsionsschwinger. Es gilt dabei das Newton'sche Gesetz der Rotation: $M_a = J\alpha$.

Das äußere Moment M_a ist ein Rückstellmoment, das proportional und entgegengesetzt zum Drehwinkel β wirkt: $M_a = -k_t\,\beta$.

Die Proportionalitätskonstante k_t wird als *Drehfedersteifigkeit* bezeichnet. Das Massenträgheitsmoment J ist längs der Achse AA wirksam (J_A). Mit $\alpha = \mathrm{d}^2\beta/\mathrm{d}t^2 = \ddot{\beta}$ ergibt sich

$$-k_t\,\beta = J_A\,\ddot{\beta} \,.$$

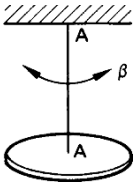


Abb. 5.9 Torsionsschwinger

Umgeformt ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{\beta} + \frac{k_t}{J_A}\beta = 0 \tag{5.29}$$

mit der Lösung

$$\beta(t) = \hat{\beta}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{5.30}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J_A}}\,, \tag{5.31}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{k_t}}\,. \tag{5.32}$$

Der Torsionsschwinger erlaubt, *Massenträgheitsmomente* aus der Messung der Schwingungsdauer *experimentell* zu ermitteln. Es gilt

$$J_A = \frac{T_0^2}{4\,\pi^2}k_t\,. \tag{5.33}$$

Falls die Aufhängeachse nicht durch den Schwerpunkt geht, muss der Steiner'sche Satz (Abschn. 2.9.5) berücksichtigt werden, wie in Abb. 5.10 verdeutlicht.

Beispiel

5.1-2 Zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes werden geometrisch unregelmäßig geformte Körper als Torsionsschwinger aufgehängt. Die Kalibrierung der Aufhängung geschieht mit einem Körper, dessen Trägheitsmoment bekannt ist. Es ist ein Stahlzylinder mit dem Durchmesser $d = 80$ mm und der Länge $l = 150$ mm, der für 10 Schwingungen eine Zeit von 67,8 s braucht. Der zu messende Körper benötigt für 10 Schwingungen 107,5 s. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment dieses Körpers? (Aufhängung immer in der Schwereachse.)

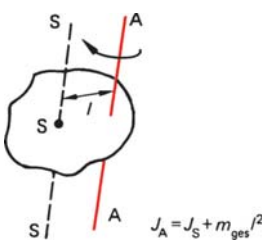


Abb. 5.10 Steiner'scher Satz zur Berechnung von Trägheitsmomenten

Lösung

Für den Eichkörper gilt nach (5.32)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{k_t}}, \quad k_t = \frac{4\pi^2 J_0}{T_0^2}\,;$$

für den Messkörper gilt analog

$$k_t = \frac{4\pi^2 J'}{T_0'^2}\,.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich für das Massenträgheitsmoment des Messkörpers

$$J' = \frac{T_0'^2}{T_0^2}J_0\,. \tag{5.34}$$

Das Massenträgheitsmoment des Eichkörpers ist

$$J_0 = \frac{m}{2}r^2 = 4{,}74 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Damit ergibt sich gemäß (5.34) mit den gemessenen Schwingungsdauern $T_0 = 6{,}78$ s und $T_0' = 10{,}75$ s

$$J' = 11{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Physisches Pendel

Ein physisches Pendel ist ein *starrer Körper*, der entsprechend Abb. 5.11 um den Aufhängepunkt A schwingen kann. Es gilt das Newton'sche Bewegungsgesetz für die Rotation: $M_a = J_A\alpha = J_A\ddot{\beta}$; hierbei ist das äußere Drehmoment M_a das rücktreibende Moment aufgrund der Gewichtskraft F_G. Somit gilt $M_a = -F_G d$ und da der Hebelarm $d = r\sin\beta$ ist, lässt sich schreiben

$$-F_G\, r\ \sin\beta = J_A\,\ddot{\beta}\,.$$

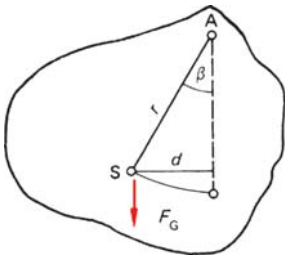


Abb. 5.11 Physisches Pendel

Um zur allgemeinen Struktur der Differentialgleichung (5.17) zu gelangen, muss $\sin\beta$ durch den Winkel β ersetzt werden (siehe Näherungsformel für mathematisches Pendel). Dann gilt

$$-F_G\, r\, \beta = J_A\, \ddot{\beta} \qquad \text{oder}$$

$$\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0\,. \tag{5.35}$$

Die Lösung lautet

$$\beta(t) = \hat{\beta}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{5.36}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,r}{J_A}}\,, \tag{5.37}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{m\,g\,r}}\,. \tag{5.38}$$

Mit Hilfe eines physischen Pendels können – wie mit einem Torsionspendel – Massenträgheitsmomente gemessen werden. Auch hierbei muss zur Berechnung von J_S der Steiner'sche Satz (Abb. 5.10) berücksichtigt werden. Es gilt nach (5.38)

$$J_A = \frac{T_0^2}{4\pi^2} m\,g\,r\,. \tag{5.39}$$

Häufig wird in der Technik die Schwingungsdauer eines physischen Pendels auf die entsprechende Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer zurückgeführt. Diese Pendellänge wird *reduzierte Pendellänge* l_{red} genannt und ist für spezielle Körper in Handbüchern der Technik tabelliert. Da die Schwingungsdauer beider Pendel gleich groß sein soll, gilt

$$T_0^{phys} = T_0^{math}\,,$$

$$2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{red}}{g}}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$l_{red} = \frac{J_A}{mr}\,. \tag{5.40}$$

Beispiel

5.1-3 Ein Rad gemäß Abb. 5.12 mit der Masse $m = 1$ kg und den Abmessungen $d_i = 96$ mm und $d_a = 125$ mm pendelt an einer Schneide A. Die Periodendauer beträgt $T_0 = 0{,}65$ s. Ermittelt werden sollen das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt und die reduzierte Pendellänge.

Lösung

Nach dem Steiner'schen Satz ist $J_S = J_A - m\,r_i^2$; hierbei errechnet sich J_A aus (5.39) mit $r = r_i$. Somit ist

$$J_S = m r_i\left(\frac{T_0^2}{4\pi^2}g - r_i\right) = 2{,}74\cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^2\,.$$

Für die reduzierte Pendellänge gilt nach (5.40) und (5.39)

$$l_{red} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}g = 0{,}105\ \text{m}\,.$$

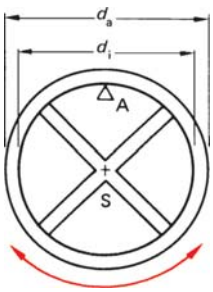


Abb. 5.12 Zu Beispiel 5.1-3

Flüssigkeitspendel im U-Rohr

Wird in ein U-Rohr mit konstantem Querschnitt A eine Flüssigkeit der Dichte ϱ eingefüllt, so stellt sich im Gleichgewicht eine U-förmige Flüssigkeitssäule der Länge l ein. Wird der Gleichgewichtshorizont – die gestrichelte Linie in Abb. 5.13 – um y verschoben, dann ist eine Differenz der Flüssigkeitsniveaus von $2y$ vorhanden. Das Gewicht der überstehenden Flüssigkeitsmasse m_{Fl} (gekennzeichneter Bereich) bewirkt eine rücktreibende Kraft. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt

$$F_{\mathrm{a}} = ma\,,$$
$$-m_{\mathrm{Fl}}g = m_{\mathrm{ges}}\ddot{y}\,.$$

Die Masse der überstehenden Flüssigkeitsmenge kann errechnet werden aus

$$m_{\mathrm{Fl}} = V_{\mathrm{Fl}}\varrho = A2y\varrho\,.$$

Daraus ergibt sich

$$-2A\varrho g y = m_{\mathrm{ges}}\ddot{y}$$

Die Differentialgleichung des Flüssigkeitspendels lautet dann

$$\ddot{y} + \frac{2A\varrho g}{m_{\mathrm{ges}}}y = 0\,. \tag{5.41}$$

Allgemein gilt

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{5.42}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2A\varrho g}{m_{\mathrm{ges}}}}\,, \tag{5.43}$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{ges}}}{2A\varrho g}}\,. \tag{5.44}$$

Für die gesamte Masse gilt $m_{\mathrm{ges}} = Al\varrho$, sodass sich die Differentialgleichung (5.41) zu

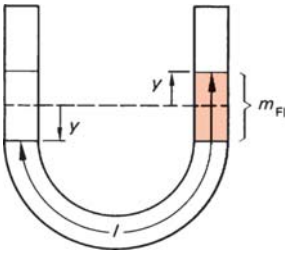


Abb. 5.13 Flüssigkeitspendel im U-Rohr

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l}y = 0 \tag{5.45}$$

vereinfacht. Die Lösung ist

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{5-42}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,, \tag{5.46}$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\,. \tag{5.47}$$

Aus (5.47) geht hervor, dass die Schwingungsdauer des Flüssigkeitspendels nicht von der Dichte ϱ der Flüssigkeit oder dem Querschnitt des U-Rohrs abhängt. Ferner entspricht die Schwingungsdauer des Flüssigkeitspendels der des mathematischen Pendels mit der halben Länge der Flüssigkeitssäule.
In Abb. 5.14 sind die Differentialgleichungen und deren Lösungen für die hier beschriebenen mechanischen Pendel zusammengestellt.

Beispiel

5.1-4 In einem U-Rohr mit einem lichten Durchmesser von $d_{\mathrm{i}} = 1$ cm schwingt eine Quecksilbersäule nach einer einmaligen Auslenkung um 3 cm. Die Masse des Quecksilbers beträgt 0,5 kg. Berechnet werden sollen T_0, ω_0 und f_0. Wie ändern sich diese Größen, wenn das U-Rohr, wie in Abb. 5.15 dargestellt, um 50° zur Waagrechten geneigt ist?

Lösung

Nach (5.44) ist $T_0 = 0{,}974\,\mathrm{s}$, $f_0 = 1/T_0 = 1{,}027\,\mathrm{Hz}$ $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6{,}45\,\mathrm{s}^{-1}$.

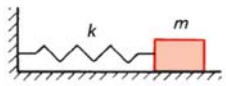
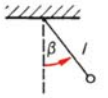
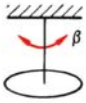
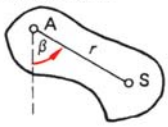
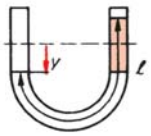
Schwingungssystem	Kraftansatz Differential-gleichung	ω_0
Feder-Masse-System 	$F = ma$ $-ky = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$
mathematisches Pendel 	$F = ma$ $-mg\beta = ml\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Torsionsschwinger 	$M = J_A\alpha$ $-k_t\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{k_t}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{k_t}{J_A}}$
physikalisches Pendel 	$M = J_A\alpha$ $-mgr\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
Flüssigkeitspendel 	$F = ma$ $-2A\rho g y = m_{ges}\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A\rho g}{m_{ges}} y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$	$\sqrt{\frac{2A\rho g}{m_{ges}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

Abb. 5.14 Mechanische Schwingungssysteme mit ihren Differentialgleichungen und Eigenkreisfrequenzen ω_0

Bei einer Schenkelneigung von $\gamma = 50°$ wirkt die rücktreibende Kraft $F_{\text{rück}} = -m_{\text{Fl}} g \sin\gamma = -2\,A\rho g \sin\gamma\, y$. Diese Kraft beschleunigt die Gesamtmasse $m_{\text{ges}} = A\rho\, l$. Die Differentialgleichung $\ddot{y} + \dfrac{2\,g\sin\gamma}{l} y = 0$ führt zu $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2\,g\sin\gamma}{l}} = 5{,}65\ \text{s}^{-1}, f_0 = 0{,}90\ \text{Hz}, T_0 = 1{,}11\ \text{s}$.

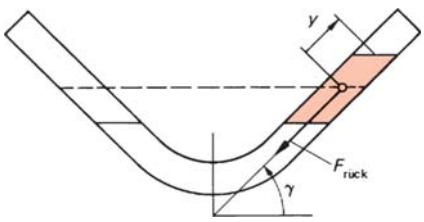


Abb. 5.15 Zu Beispiel 5.1-4

5.1.2.4 Gesamtenergie der freien, ungedämpften Schwingung

Für das Feder-Masse-System soll die Gesamtenergie berechnet werden. Es gilt

$$E_{\text{ges}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t)\,. \tag{5.48}$$

Die potentielle Energie errechnet sich gemäß

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k y(t)^2$$

mit

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,,$$

dann ist

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{5.49}$$

Für die kinetische Energie gilt

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2$$

mit

$$v(t) = -\hat{y}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,,$$

dann ist

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \hat{y}^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{5.50}$$

Nach (5.11) ist $m\omega_0^2 = k$, sodass für die kinetische Energie auch geschrieben werden kann

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{5.51}$$

Werden (5.49) und (5.50) in die Gleichung für den Energieerhaltungssatz (5.48) eingesetzt, dann ergibt sich

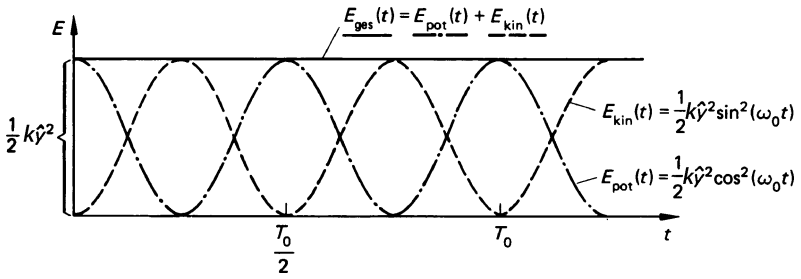


Abb. 5.16 Energieerhaltung bei Schwingungsvorgängen

$$E_{ges}(t) = \frac{1}{2}k\hat{y}^2\,[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)]\,. \qquad (5.52)$$

Mit $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1, \hat{v} = \omega_0 \hat{y}$ und $k = m\,\omega_0^2$ gelten die Beziehungen

$$E_{ges}(t) = \frac{1}{2}k\hat{y}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{y}^2 = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 = \text{konstant}\,. \qquad (5.53)$$

Somit ist bestätigt, dass die gesamte Schwingungsenergie der freien, ungedämpften Schwingung zu jeder Zeit konstant ist. Die Gesamtenergie ist proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude $\hat{y}^2$ bzw. der Maximalgeschwindigkeit $\hat{v}^2$.
In Abb. 5.16 ist der zeitliche Verlauf der potentiellen Energie $E_{pot}(t)$, der kinetischen Energie $E_{kin}(t)$ und der Gesamtenergie $E_{ges}(t)$ eingezeichnet. Es wird deutlich, dass die Summe von potentieller und kinetischer Energie zu jedem Zeitpunkt t gleich dem Wert der gesamten Energie $E_{ges}(t)$ ist. Außerdem erkennt man, dass sich die potentielle und kinetische Energie mit der doppelten Systemfrequenz periodisch hin- und herbewegen. Dieser periodische Energieaustausch ist – wie bereits in der Einführung zu diesem Hauptabschnitt erwähnt – die Grundeigenschaft von Schwingungen.

5.1.2.5 Elektromagnetische Schwingung

Ein elektromagnetischer Schwingkreis besteht aus einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L gemäß Abb. 5.17 (s. a. Abschn. 5.1.2.5). Für den Stromkreis gilt, dass die Summe aller Spannungen gleich null ist:

$$u_L + u_C = 0\,. \qquad (5.54)$$

Abbildung 5.18 zeigt die Differentialgleichungen und deren Lösungen für die Schwingung der Ladung q, der Stromstärke i und der Spannung am Kondensator u_C. Alle Schwingungen haben dieselbe Kreisfrequenz ω_0 bzw. Periodendauer T_0:

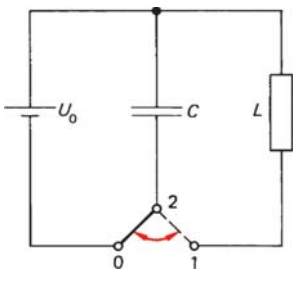


Abb. 5.17 Ungedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis

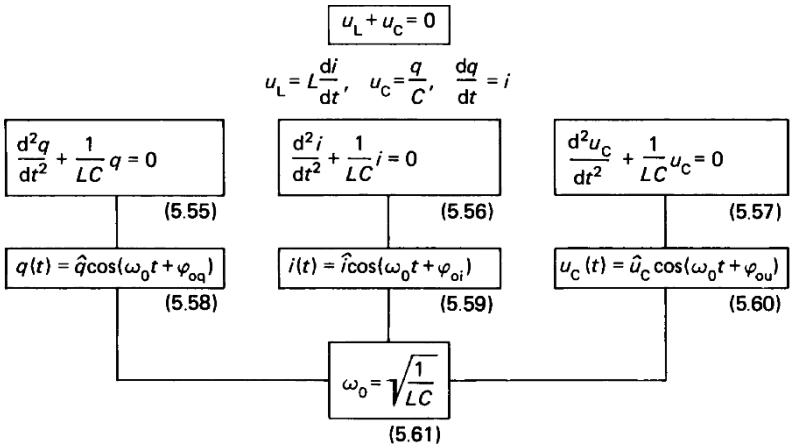


Abb. 5.18 Differentialgleichungen und ihre Lösungen im ungedämpften elektromagnetischen Schwingkreis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \tag{5.61}$$

$$T_0 = 2\,\pi\sqrt{LC}\,. \tag{5.62}$$

(s. Thomson-Gl. (4.293)).

Beispiel

5.1-5 Die Kapazität des Schwingkreises (Abb. 5.17) wird in Schalterstellung 0-2 durch eine angelegte Gleichspannung U_0 aufgeladen und durch Umschalten auf Stellung 1-2 wird die Schwingung erregt. Es ist $U_0 = 2\,\text{V}$, $L = 10\,\text{mH}$ und $C = 1\,\mu\text{F}$. Zu berechnen sind

a) Amplitude $\hat{q}$ und Nullphasenwinkel φ_{0q} der Ladung,
b) Amplitude $\hat{i}$ und Nullphasenwinkel φ_{0i} der Stromstärke sowie
c) die Eigenfrequenz f_0.

Lösung

a) Es gilt $\hat{q} = C\hat{u}_C$ mit $\hat{u}_C = U_0$. Also ist $\hat{q} = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$; für den Nullphasenwinkel gilt $\varphi_{0q} = \varphi_{0u} = 0$.

b) Es ist

$$i = \frac{dq}{dt} = -\hat{q}\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$
$$= \hat{q}\omega_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right);$$

die Amplitude beträgt

$$\hat{i} = \hat{q}\omega_0 = \hat{q}\frac{1}{\sqrt{LC}} = 20\,\text{mA}\,;$$

der Phasenwinkel ist $\varphi_{0i} = -\frac{\pi}{2}$.

c) Für die Frequenz gilt

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{,}59 \cdot 10^3\,\text{s}^{-1}\,.$$

Abbildung 5.19 zeigt die Analogie mechanischer (am Beispiel des Feder-Masse-Systems) und elektromagnetischer Schwingungen (am Beispiel des Schwingkreises Kondensator–Spule). Während beim mechanischen System die Auslenkung periodisch schwingt und ein periodischer Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie stattfindet, schwingt im elektromagnetischen System die Ladung zwischen Kapazität und Spule hin und her und es findet ein periodischer Austausch zwischen elektrischer und magnetischer Energie statt. Der *Masse* im mechanischen System entspricht die *Spule* im elektromagnetischen Schwingkreis, die sich als *träges Element* der Stromänderung widersetzt. Die rücktreibende Kraft ist im mechanischen System proportional zur Federkonstanten k und im elektromagnetischen Schwingkreis umso größer, je kleiner die Kapazität ist.

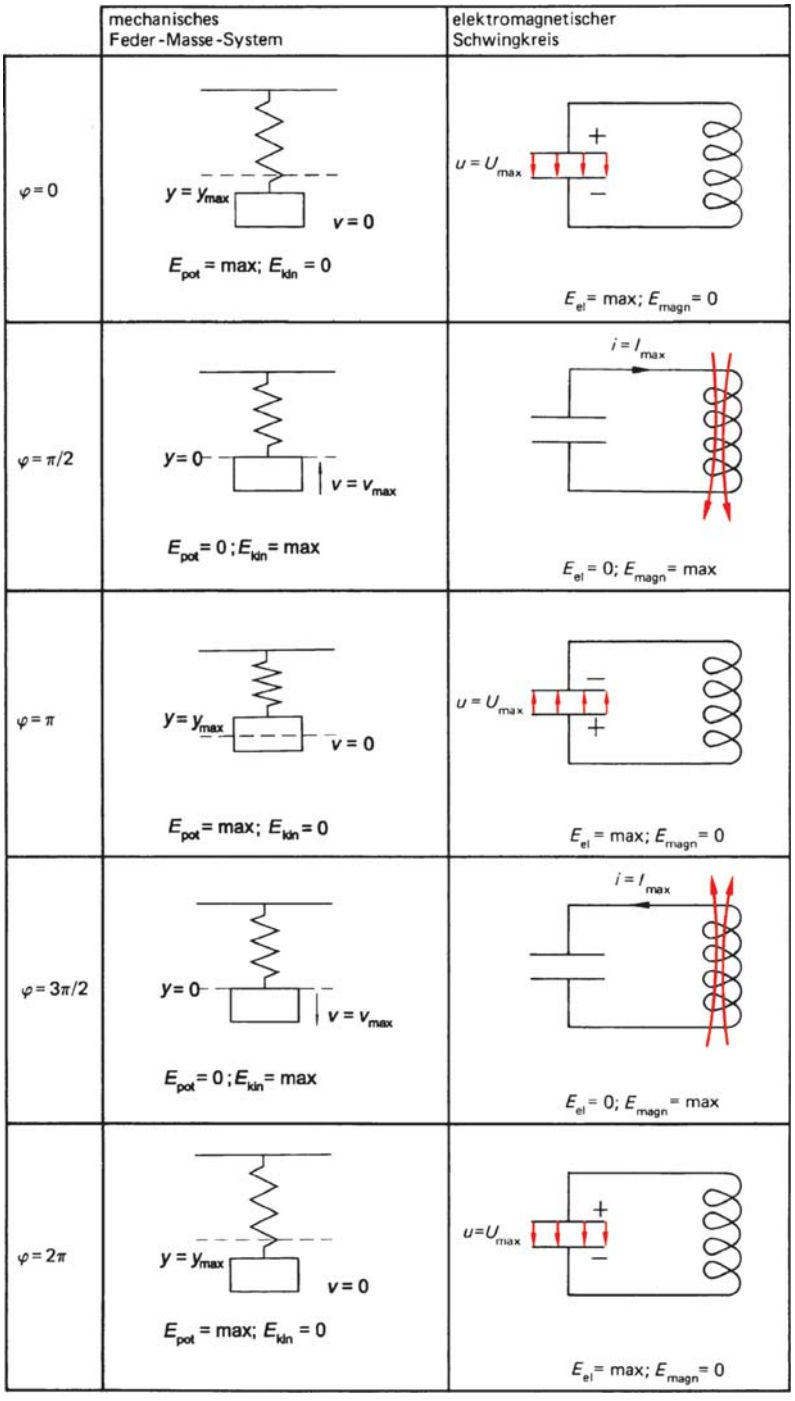


Abb. 5.19 Analogie mechanischer und elektromagnetischer Schwingungen

Im Ausgangszustand (Abb. 5.19, $\varphi = 0$) ist im mechanischen System die Auslenkung maximal und deshalb die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie null. Im elektromagnetischen Schwingkreis ist die Kondensatorspannung und somit die elektrische Energie maximal; dagegen fließt kein Strom durch die Spule, sodass die magnetische Energie null ist. Nach einem Winkel von $\pi/2$ durchläuft die Masse mit maximaler Geschwindigkeit die Nulllage. Die potentielle Energie ist null und die kinetische Energie maximal. Entsprechend ist im elektromagnetischen Schwingkreis die Spannung am Kondensator und damit die elektrische Energie gleich null, während der Spulenstrom und die magnetische Energie maximal sind. Im mechanischen bzw. elektromagnetischen Schwingungssystem wiederholen sich diese Zustände periodisch.

5.1.2.6 Freie gedämpfte Schwingung

Wird eine freie Schwingung durch Wirken von Reibungskräften gedämpft, so kommt die Schwingung im Laufe der Zeit zur Ruhe. Energetisch betrachtet wird ein Teil der Schwingungsenergie in thermische Energie verwandelt, und zwar so lange, bis keine Schwingungsenergie mehr vorhanden ist. Tabelle 5.3 zeigt übersichtlich drei unterschiedliche Reibungskräfte bei freien, gedämpften Schwingungen:

- die *geschwindigkeitsunabhängige Gleit-* oder *Rollreibungskraft*

$$F_R = \mu F_N \,, \tag{5.63}$$

- die *geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft*, die *proportional zur Geschwindigkeit* ist (Newton'sches Reibungsgesetz der viskosen Reibung),

$$F_R = -dv \,, \tag{5.64}$$

- die *geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft*, die *proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit* ist (z. B. Luftreibung),

$$F_R = bv^2 \,. \tag{5.65}$$

Tabelle 5.3 Unterschiedliche Reibungskräfte und die entsprechenden Differentialgleichungen bei gedämpften Schwingungen

Reibungskraft	geschwindigkeitsunabhängige Reibungskraft $F_R = \mu F_N$	geschwindigkeitsabhängige viskose Reibungskraft $F_R = -dv$	geschwindigkeitsabhängige Luftreibungskraft $F_R = bv^2$
Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems	$m\ddot{y} \pm \mu F_N + ky = 0$ Substitution: $y_0 = \frac{\mu F_N}{k}$ $s = y \pm y_0$ $\ddot{s} = \ddot{y}$ $\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0}$	$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = 0$ $\boxed{\ddot{y} + \frac{d}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0}$	$m\ddot{y} \pm b\dot{y}^2 + ky = 0$ $\boxed{\ddot{y} \pm \frac{b}{m}\dot{y}^2 + \frac{k}{m}y = 0}$

Auch die Differentialgleichungen des Feder-Masse-Systems sind für diese drei Fälle in Tabelle 5.3 zusammengestellt. Die Lösungen werden (bis auf die vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängige Reibungskraft) im Folgenden näher erläutert.

Geschwindigkeitsunabhängige Reibungskraft

Je nachdem, ob sich der Körper nach oben (v in Richtung y) oder nach unten (v in Richtung-y) bewegt, wirkt die Reibungskraft in negativer oder positiver y-Richtung. Deshalb müssen diese Bewegungsabläufe getrennt betrachtet werden. Abbildung 5.20 zeigt eine Übersicht.

Für die Aufwärtsbewegung gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y} + \mu F_N + ky = 0\,. \tag{5.66}$$

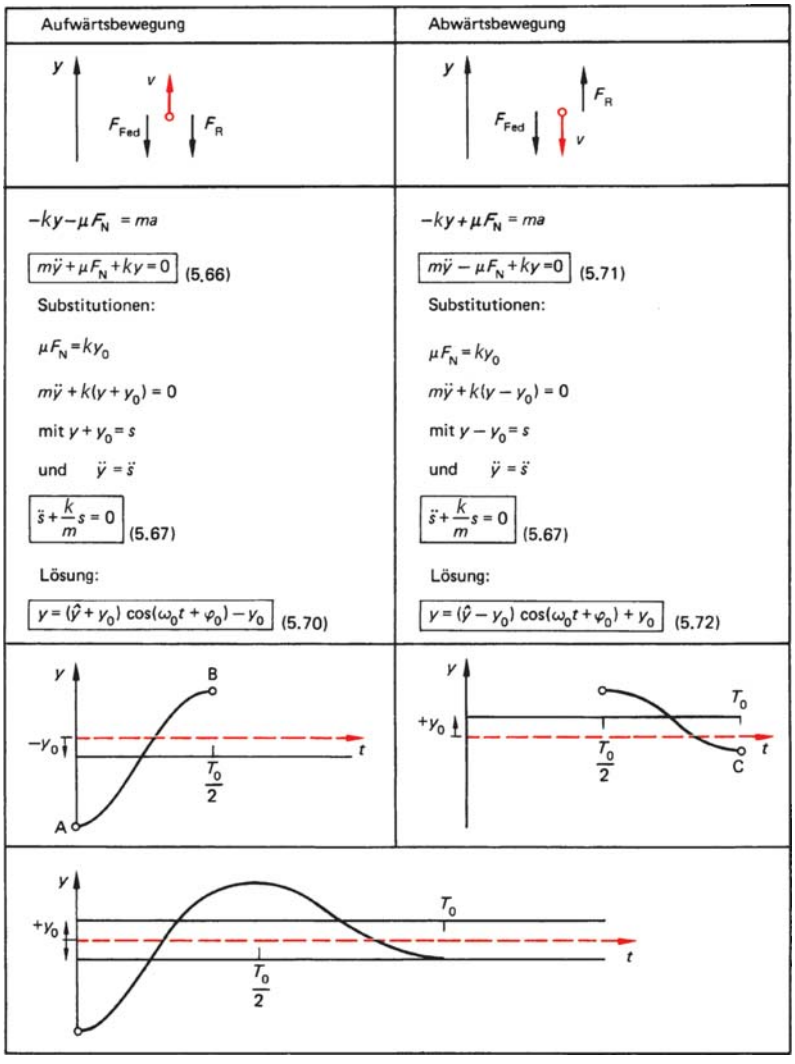


Abb. 5.20 Bewegungsabläufe beim Wirken einer geschwindigkeitsunabhängigen Reibungskraft

Die Konstante μF_N kann gleich $k\,y_0$ gesetzt und als konstante Vorspannung aufgefasst werden. Wird weiter $y + y_0 = s$ gesetzt, dann ergibt sich für s die Differentialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung (Abschn. 5.1.2.2, (5.17))

$$\ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0 \tag{5.67}$$

mit der Lösung

$$s = \hat{s}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \tag{5.68}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{5.69}$$

Durch Ersetzen von s durch $y + y_0$ gilt für den zeitlichen Verlauf der Auslenkung y

$$y = (\hat{y} + y_0)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - y_0\,. \tag{5.70}$$

Beginnt die Bewegung beim negativen Maximalwert A ($\varphi_0 = 0$ am Punkt A) nach oben, so findet eine *völlig ungedämpfte Cosinus-Schwingung* statt, allerdings um die um $-y_0$ *verschobene t-Achse*. Nach der halben Periodendauer $T_0/2$ ist die Schwingung am höchsten Punkt B angelangt. Dort beginnt die Abwärtsbewegung, bei der die Reibungskraft das Vorzeichen umkehrt (Abb. 5.20), sodass eine *ungedämpfte Schwingung* um die um $+y_0$ *verschobene t-Achse* stattfindet. Da die Kurve stetig verlaufen muss (unteres Teilbild in Abb. 5.20), ist nach jeder halben Periodendauer die Amplitude um $2\,y_0$ kleiner, d. h. nach einer ganzen Periodendauer T um $4y_0 = \dfrac{4\mu\,F_N}{k}$.
Die *Amplituden* werden aus diesem Grund immer um denselben Betrag kleiner, sodass ihre Zahlenwerte einer *arithmetischen Reihe* entsprechen. Dieser Reibungsvorgang hat zur Folge, dass das System nicht genau bei $y = 0$ zur Ruhe kommt, sondern außerhalb (in diesem Fall bei $-y_0$). Dies kann bei Messsystemen zu Nullpunktsabweichungen führen, die bei der Auswertung von Messdaten berücksichtigt werden müssen.

Geschwindigkeitsproportionale (viskose) Reibung

Die Reibungskraft ist in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit (Newton'sches Reibungsgesetz):

$$F_R = -dv\,. \tag{5-64}$$

Die Proportionalitätskonstante d heißt *Dämpfungskoeffizient*. Die zugehörige Differentialgleichung (Tabelle 5.3) lautet

$$\ddot{y} + \frac{d}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0\,. \tag{5.73}$$

Der Faktor $\sqrt{k/m}$ ist die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{5-11}$$

Der Faktor $d/(2m)$ wird als *Abklingkoeffizient* δ (in s^{-1}) definiert:

$$\delta = \frac{d}{2\,m}\,. \tag{5.74}$$

Wie (5.79) verdeutlicht, beschreibt er die exponentielle Amplitudenabnahme der freien, gedämpften harmonischen Schwingung nach (5.73).

Das Verhältnis von Abklingkoeffizient δ und Kreisfrequenz ω_0 ergibt den dimensionslosen *Dämpfungsgrad* ϑ der gedämpften Schwingung:

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \,. \tag{5.75}$$

Der doppelte Wert wird *Verlustfaktor* d^* genannt. Sein Kehrwert ist die *Güte* Q:

$$d^* = 2\vartheta = \frac{d}{m\omega_0} = \frac{d}{\sqrt{mk}} \,, \tag{5.76}$$

$$Q = \frac{1}{2\vartheta} = \frac{m\,\omega_0}{d} = \frac{\sqrt{mk}}{d} \,. \tag{5.77}$$

Mit dem charakteristischen Parameter ϑ lautet die Differentialgleichung eines freien, gedämpften Systems

$$\ddot{y} + 2\vartheta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \,. \tag{5.78}$$

Abbildung 5.21 zeigt die drei möglichen Lösungsfälle dieser Differentialgleichung.
a) *Schwingfall* für $\omega_0 > \delta$ ($\vartheta < 1$)
Die Lösung lautet

$$y(t) = \hat{y}_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega_\mathrm{d} t + \varphi_0) \,. \tag{5.79}$$

Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d beträgt

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$
$$= \omega_0\sqrt{1-\vartheta^2} \,. \qquad (5.80) \text{ bis } (5.82)$$

Dies bedeutet, dass die Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers ω_d kleiner als die Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers ω_0 ist. (Entsprechend größer ist die Periodendauer der gedämpften Schwingung T_d im Vergleich zur ungedämpften Schwingung T_0.)

Wie aus (5.79) weiter hervorgeht, nehmen die Amplituden entsprechend der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{-\delta t}$ ab. Dies heißt, dass aufeinander folgende Amplitudenverhältnisse konstant sind. Für den zeitlichen Verlauf der mittleren Schwingungsenergie E_Sch gilt deshalb

$$E_\mathrm{Sch}(t) = E_\mathrm{Sch}(0)\mathrm{e}^{-2\delta t} \,. \tag{5.83}$$

Der Abklingkoeffizient δ kann sowohl analytisch als auch grafisch ermittelt werden. Nach (5.79) gilt für die Amplituden zweier aufeinander folgender Schwingungen

$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i \mathrm{e}^{-\delta T_\mathrm{d}}$ oder

$$\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = \mathrm{e}^{\delta T_\mathrm{d}} = c \,, \tag{5.84}$$

d. h., das Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Schwingungen ist konstant. Es wird *Dämpfungsverhältnis* c genannt. Für die n-te Amplitude gilt entsprechend

$$\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+n}} = c^n \,. \tag{5.85}$$

Zur Bestimmung des Abklingkoeffizienten δ wird (5.84) logarithmiert. Der Logarithmus zweier aufeinander folgenden Amplituden wird *logarithmisches Dekrement* Λ genannt:

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}}\right) = \ln(c) = \delta T_\mathrm{d} \,. \tag{5.86}$$

Daraus errechnet sich der Abklingkoeffizient

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}}\right)}{T_\mathrm{d}} = \frac{\Lambda}{T_\mathrm{d}} \,. \tag{5.87}$$

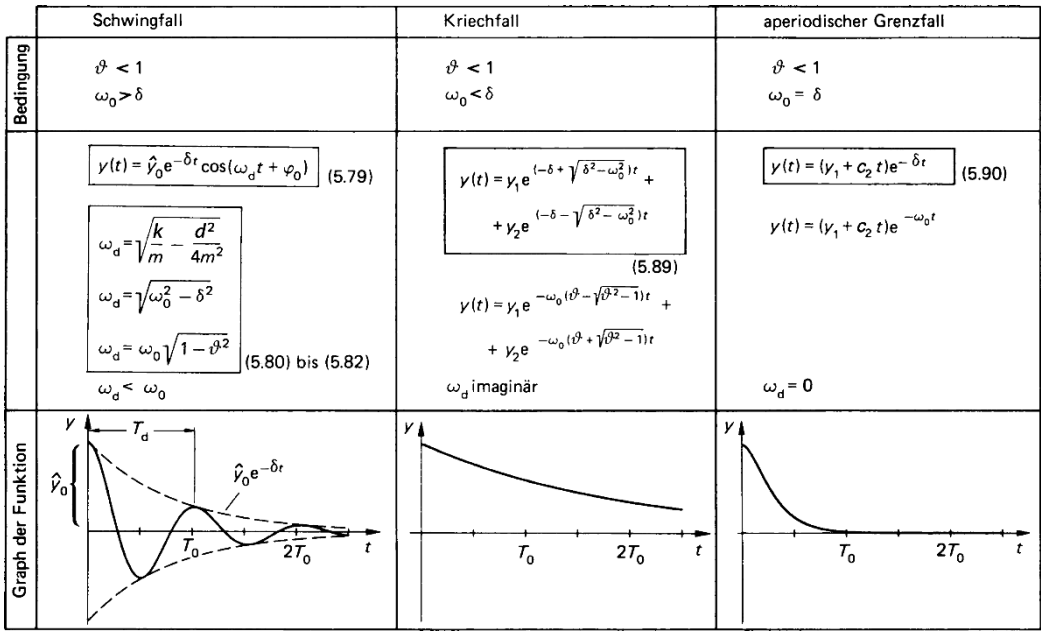


Abb. 5.21 Lösungen der drei Fälle bei gedämpften Systemen

Bei der grafischen Bestimmung von δ geht man ebenfalls von (5.79) aus:

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} .$$

Diese Gleichung wird durch Logarithmieren auf eine Geradengleichung zurückgeführt:

$$\ln(\hat{y}(t)/\hat{y}_0) = -\delta t ,$$
$$y = mx + b . \qquad (5.88)$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Abklingkoeffizient δ der Steigung m der Geraden entspricht. In einer Graphik wird zweckmäßigerweise auf halblogarithmischem Papier der Logarithmus der Amplituden $\hat{y}_i$ aufeinander folgender Schwingungen als Funktion der Zeit aufgetragen und aus der Steigung der Abklingkoeffizient δ bestimmt.

Beispiel

5.1-6 Die Amplitude eines gedämpften Feder-Masse-Systems beträgt zu Beginn der Schwingung $\hat{y}_0 = 10$ cm. Sie ist nach 20 Schwingungen noch halb so groß. Wie groß ist bei einer Schwingungsdauer $T_d = 2$ s das Dämpfungsverhältnis k, das logarithmische Dekrement Λ, der Abklingkoeffizient δ und die Frequenz des ungedämpften Systems? Wie lautet die Bewegungsgleichung $y(t)$ des gedämpften Systems?

Lösung

Nach (5.85) gilt $2 = c^{20}$ oder $c = \sqrt[20]{2} = 1{,}0353$. Das heißt, jede nachfolgende Amplitude ist um 3,4% kleiner als die vorausgegangene. Für das logarithmische Dekrement gilt nach (5.86)

$$\Lambda = \ln(c) = 0{,}03466 .$$

Nach (5.87) errechnet sich der Abklingkoeffizient δ zu

$$\delta = \frac{\Lambda}{T} = 1{,}733 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1} .$$

Nach (5.81) (Abb. 5.21) errechnet sich ω_0 zu

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = 3{,}14160\ \mathrm{s}^{-1} .$$

Die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 ist im Vergleich zur Kreisfrequenz des gedämpften Systems ω_d nur geringfügig größer (1/10 Promille). Dies ist in der Praxis häufig der Fall.

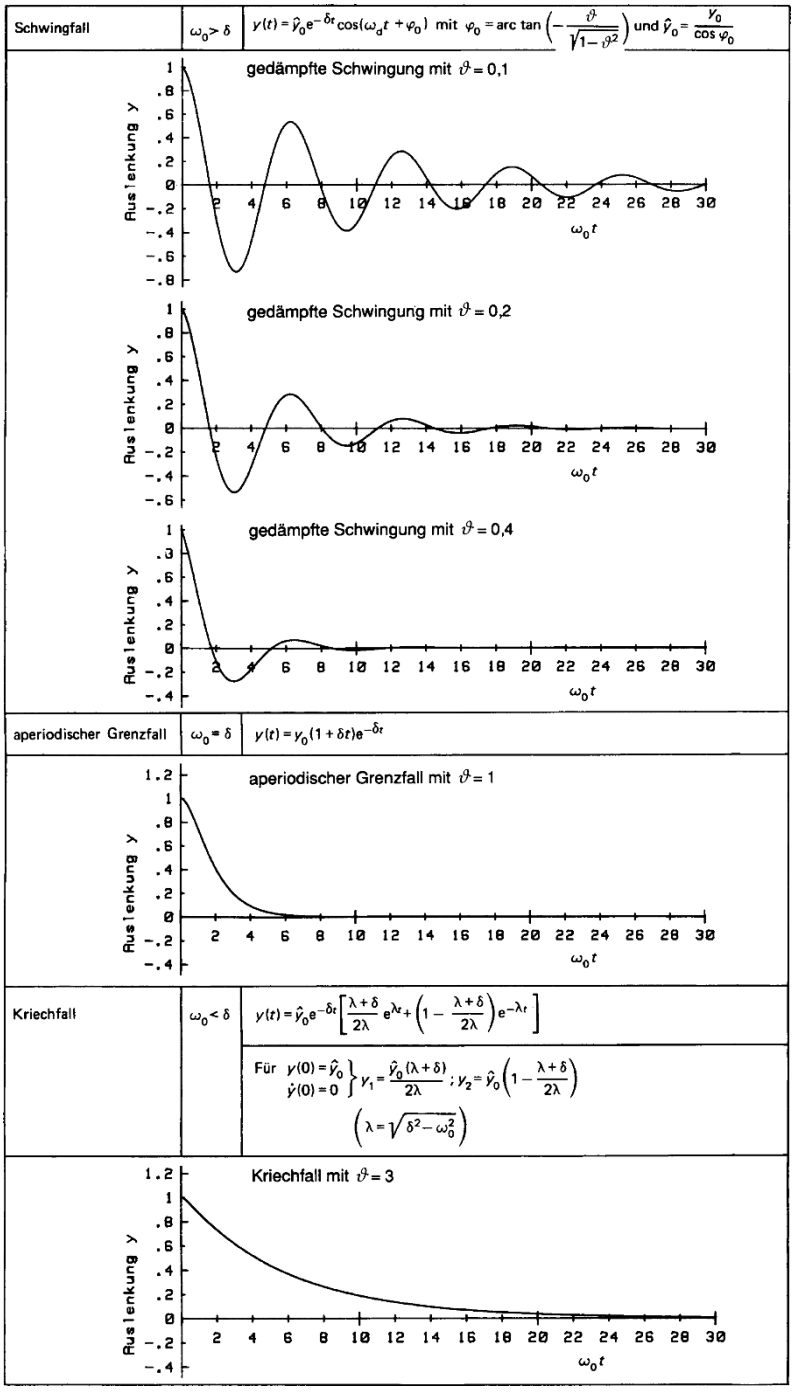


Abb. 5.22 Schwingfall, aperiodischer Grenzfall und Kriechfall eines gedämpften Systems mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$

Da $y(0) = \hat{y}_0$ ist, ist der Nullphasenwinkel $\varphi_0 \approx 0$. Aus den zuvor errechneten Werten ergibt sich gemäß (5.79) folgende Bewegungsgleichung:

$$y(t) = 10\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}73 \cdot 10^{-2}\,\text{s}^{-1}\,t} \cos(\pi \text{s}^{-1} t) \,.$$

b) *Kriechfall* für $\omega_0 < \delta$ ($\vartheta > 1$)
Die Lösung ist in Abb. 5.21 durch (5.89) angegeben. In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf; die Amplitude nimmt ganz langsam ab. Durch die Angabe der Anfangsbedingungen $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ werden die beiden Integrationskonstanten y_1 und y_2 bestimmt.

c) *Aperiodischer Grenzfall* für $\omega_0 = \delta$ ($\vartheta = 1$)
Die Lösung lautet für diesen Fall

$$y(t) = (y_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t} \,. \qquad (5.90)$$

Die beiden Integrationskonstanten y_1 und c_2 werden wieder durch die Anfangsbedingungen ermittelt. Beim aperiodischen Grenzfall tritt gerade eben keine Schwingung mehr auf. Er spielt für viele Messgeräte eine wichtige Rolle, wenn Schwingungen vermieden und trotzdem die Messwerte möglichst schnell eingestellt werden müssen.
Abbildung 5.22 zeigt den Einfluss des Dämpfungsgrades ϑ auf den Schwingungsverlauf.

5.1.2.7 Gedämpfte elektromagnetische Schwingung

Ein gedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis besteht entsprechend Abb. 5.23 aus einer Spule L, einem Kondensator C und einem Ohm'schen Widerstand R (s. auch Abschn. 4.5.2.2).
Aus der Forderung, dass die Summe aller Spannungen in einer Masche eines Stromkreises gleich null sein muss ($u_L + u_C + u_R = 0$), kann die Differentialgleichung für den gedämpften elektromagnetischen Schwingkreis hergeleitet werden. Im Folgenden wird die Differentialgleichung aber über den Energiesatz aufgestellt.

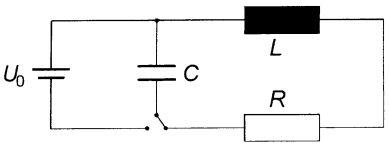


Abb. 5.23 Gedämpfter elektromagnetischer Schwingkreis

Da bei einer freien, gedämpften harmonischen Schwingung die Energieverlustrate pro Zeiteinheit konstant ist, gilt

$$-\frac{\mathrm{d}E_{\text{ges}}}{\mathrm{d}t} = i^2 R \,. \qquad (5.91)$$

Die Verlustleistung i^2R kann auch noch Verluste, wie z. B. Wirbelstromverluste oder Ummagnetisierungsverluste, enthalten. Mit dem Energieinhalt für Spule und Kapzaität entsteht aus (5.91)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = i^2 R \,,$$

$$-L\,i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C}i = i^2 R \,\Big|\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{und: } i \,,$$

$$-L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{i}{C} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}R \,.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0 \,. \qquad (5.92)$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Struktur wie die eines freien, gedämpften mechanischen Systems (5.73). In Tabelle 5.4 sind die mechanischen und elektrischen Größen von gedämpften schwingungsfähigen Systemen sowie die Gleichungen für die Kreisfrequenz ω_0, den Abklingkoeffizienten δ, den

Tabelle 5.4 Charakteristische Kenngrößen mechanischer und elektromagnetischer Schwingkreise mit Dämpfung

mechanisch	elektromagnetisch
Masse m	Induktivität der Spule L
Dämpfungskonstante d	Widerstand R
Federkonstante k	Kehrwert der Kapazität $\frac{1}{C}$
Kreisfrequenz ω_0	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Abklingkoeffizient δ	
$\delta = \frac{d}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$ (5.93)
Dämpfungsgrad ϑ	
$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}$	$\vartheta = \frac{\delta}{\omega} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ (5.94)
Güte Q	
$Q = \frac{1}{2\vartheta} = \frac{\sqrt{mk}}{d}$	$Q = \frac{1}{2\vartheta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ (5.95)

Dämpfungsgrad ϑ und die Güte Q gegenübergestellt.

Zur Übung

Ü 5.1-1 Ein Körper führt eine ungedämpfte, harmonische Schwingung mit folgender Weg-Zeit-Gleichung aus: $y(t) = 0{,}25\,\text{m} \cdot \cos(4\pi\,\text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{5})$.
Berechnet werden sollen

a) die Eigenkreisfrequenz ω_0, die Schwingungsdauer T_0, der Nullphasenwinkel φ_0 und die Amplitude $\hat{y}$,
b) die momentane Auslenkung $y(t)$, die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ und die momentane Beschleunigung $a(t)$ für die Zeit $t = 1{,}2$ s,
c) die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und die maximale Beschleunigung $a_{\max}$ sowie
d) die potentielle und die kinetische Energie eines schwingenden Körpers der Masse $m = 0{,}1$ kg bei der Auslenkung $y(t) = 0{,}10$ m.

Ü 5.1-2 Ein Reagenzglas mit dem Durchmesser $d = 1{,}2$ cm, in dem sich Blei befindet, schwimmt aufrecht im Wasser. Die Gesamtmasse (Reagenzglas + Blei) beträgt $m = 30$ g. Wird das Glas kurzzeitig ins Wasser gedrückt, dann führt es Schwingungen aus.

a) Es soll nachgewiesen werden, dass bei Vernachlässigung der Flüssigkeitsreibung eine harmonische Schwingung in vertikaler Richtung vorliegt;

ferner sollen berechnet werden

b) die „Federkonstante" k, die Schwingungsdauer T_0 und die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems,
c) die Abhängigkeit der Eigenkreisfrequenz ω_0 vom Durchmesser d des Reagenzglases sowie
d) die potentielle und kinetische Energie zur Zeit $t = 1{,}2$ s bei einer Amplitude von $\hat{y} = 1$ cm und Nullphasen-Winkel $\varphi_0 = 0$.

Ü 5.1-3 Ein Schwingkreis mit einer Spule ($L = 10$ mH) hat einen Drehkondensator mit veränderlicher Kapazität C. Bei einer Änderung des Drehwinkels um $\gamma = 180°$ wird ein Frequenzbereich von 1 kHz bis 3 kHz überstrichen. Berechnet werden soll die Abhängigkeit der Eigenkreisfrequenz ω_0 von dem Drehwinkel γ des Drehkondensators bei linearer Abhängigkeit der Kapazität C vom Drehwinkel γ.

Ü 5.1-4 Bei einer gedämpften Schwingung beträgt die Amplitude der ersten Schwingung 20 cm. Nach 15 Schwingungen nimmt sie um die Hälfte ab. Berechnet werden sollen

a) das Dämpfungsverhältnis c bzw. das logarithmische Dekrement Λ,
b) der Abklingkoeffizient δ bzw. die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d bei einer Schwingungsdauer von $T_d = 3{,}5$ s sowie
c) die Schwingungsgleichung $y(t)$ des gedämpften Systems (Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 0$).

5.1.3 Erzwungene Schwingung

5.1.3.1 Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

Wird einem mechanischen (oder elektrischen) schwingungsfähigen System (*Resonator*) von einem äußeren *Erreger* eine periodische Kraft (oder Spannung) aufgezwungen, dann ergibt

sich eine *erzwungene Schwingung*. Nach einer ausreichend langen Zeit (*Einschwingdauer*) wird das schwingungsfähige System mit der vom Erreger erzwungenen Kreisfrequenz Ω schwingen.
Für die folgenden Überlegungen wird das in Abb. 5.24 dargestellte mechanische System betrachtet. Hierbei gilt das Newton'sche Bewegungsgesetz:

$$F_{\mathrm{Fed}} + F_{\mathrm{R}} + F_{\mathrm{E}} = ma \,. \tag{5.96}$$

Für die periodisch erregende Kraft F_{E} gelte

$$F_{\mathrm{E}} = \hat{F}_{\mathrm{E}} \cos(\Omega t) \,. \tag{5.97}$$

Hierbei ist $\hat{F}_{\mathrm{E}}$ der Maximalwert der erregenden Kraft. Mit $F_{\mathrm{Fed}} = -ky$ und $F_{\mathrm{R}} = -d\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ gilt

$$-ky - d\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \hat{F}_{\mathrm{E}} \cos(\Omega t) = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \,.$$

Durch geeignete Umstellung und unter Berücksichtigung des Dämpfungsgrades ϑ ergibt sich die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\vartheta\,\omega_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = \frac{\hat{F}_{\mathrm{E}}}{m} \cos(\Omega t) \,. \tag{5.98}$$

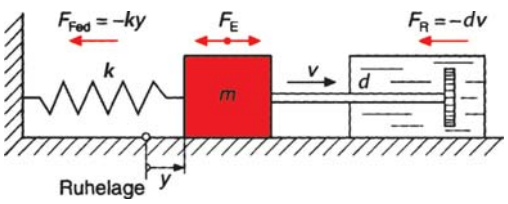


Abb. 5.24 Erzwungene Schwingung des Feder-Masse-Systems

5.1.3.2 Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen gedämpften Schwingung

Die *Differentialgleichung* der erzwungenen Schwingung (5.98) ist im Gegensatz zu der Differentialgleichung für die freie Schwingung *inhomogen*. Die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung ist

$$y_{\mathrm{inh}} = y_{\mathrm{hom}} + y_{\mathrm{part}} \,, \tag{5.99}$$

d. h. die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung y_{hom} und irgend einer, die inhomogene Differentialgleichung befriedigenden *partikulären Lösung* y_{part}, wie aus Abb. 5.25 hervorgeht. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist bereits bestimmt: Es ist die Bewegungsgleichung des Schwingfalles (5.79) der freien, gedämpften Schwingung (oberer Kurvenverlauf in Abb. 5.25). Infolge der Dämpfung nimmt der Beitrag der homogenen Lösung mit der Zeit ab. Für Zeiten $t \gg 1/\delta$ bestimmt allein der Beitrag der partikulären Lösung (in diesem Fall die Schwingung mit der erregenden Kreisfrequenz Ω) das Schwingungsverhalten. Da das System nach einer *Einschwingzeit* der Erregerschwingung (5.97) folgt, ist als Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{part}}(t) = \hat{y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega t - \gamma)} \tag{5.100}$$

zu wählen. Der Winkel γ beschreibt die *Phasenverschiebung* zwischen der *Erreger-* und der *Resonatorschwingung*. Abbildung 5.26 zeigt diesen Zusammenhang in der komplexen Ebene. Hierbei ist die erregende Kraft F_{E} ein komplexer Zeiger $\hat{F}_{\mathrm{E}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$, der mit der erregenden Kreisfrequenz Ω rotiert. Die Auslenkung des Schwingers $\hat{y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega t - \gamma)}$ rotiert als Zeiger mit derselben Frequenz, jedoch um die

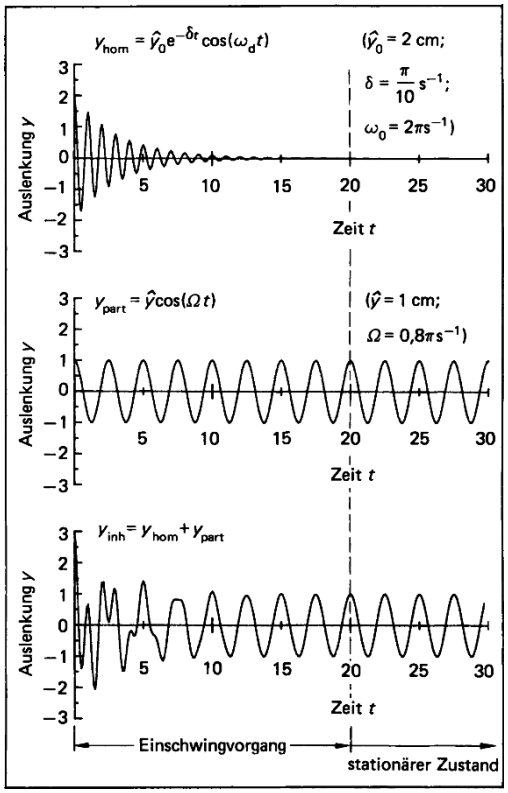


Abb. 5.25 Einschwingvorgang und stationärer Zustand bei einer erzwungenen Schwingung

Phasenverschiebung γ verzögert. Wie groß diese Phasenverschiebung ist, hängt von der Erregerfrequenz Ω, der Eigenfrequenz ω_0 und der Dämpfung ab.
Als Ableitungen von (5.100) errechnen sich

$$\frac{dy}{dt} = j\hat{y}\Omega e^{j(\Omega t-\gamma)}\ , \tag{5.101}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\hat{y}\Omega^2 e^{j(\Omega t-\gamma)}\ . \tag{5.102}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (5.98) ergibt mit $F_E = \hat{F}_E e^{j\Omega t}$

$$-\hat{y}\,\Omega^2 e^{j(\Omega t-\gamma)} + 2\vartheta\omega_0 j\hat{y}\Omega\, e^{j(\Omega t-\gamma)} + \omega_0^2 \hat{y}\, e^{j(\Omega t-\gamma)} = \frac{\hat{F}_E}{m} e^{j\Omega t}\ .$$

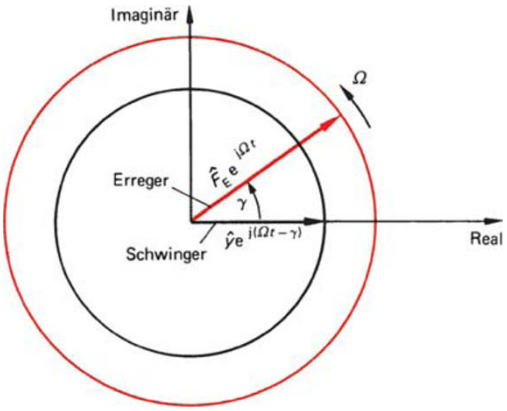


Abb. 5.26 Erreger- und Resonatorschwingung in der komplexen Ebene

Durch Division mit $e^{j(\Omega t-\gamma)}$ resultiert

$$-\hat{y}\,\Omega^2 + j2\vartheta\omega_0\hat{y}\Omega + \omega_0^2\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m} e^{j\gamma}\ .$$

Der komplexe Ausdruck auf der linken Gleichungsseite wird nach Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\underbrace{\hat{y}\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}_{\text{Realteil}} + j\underbrace{2\vartheta\omega_0\Omega\,\hat{y}}_{\text{Imaginärteil}} = \frac{\hat{F}_E}{m} e^{j\gamma}\ . \tag{5.103}$$

Nach der Euler'schen Formel für den rechten Teil der Gleichung gilt

$$\frac{\hat{F}_E}{m} e^{j\gamma} = \frac{\hat{F}_E}{m}(\cos\gamma + j\ \sin\gamma)\ . \tag{5.104}$$

Somit kann der komplexe Zeiger $\hat{F}_E/m$ in Abb. 5.27 in seinen Realteil

$$\frac{\hat{F}_E}{m}\ (\text{Real}) = \hat{y}\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) \tag{5.105}$$

und in seinen Imaginärteil

$$\frac{\hat{F}_E}{m}\,(\text{Imaginär}) = 2\,\vartheta\,\omega_0\Omega\hat{y} \qquad (5.106)$$

zerlegt werden. Der Winkel zwischen dem komplexen Zeiger $\hat{F}_E/m$ und der Realteilachse ist die Phasenverschiebung γ.

Aus der Lage des komplexen Zeigers lässt sich der Amplitudenverlauf in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz Ω *(Amplitudenresonanzfunktion)* und der Verlauf der Phasenverschiebung γ zwischen Resonator und Erreger ebenfalls als Funktion der Erregerfrequenz *(Phasenresonanzfunktion)* bestimmen.

Die Amplituden- und die Phasenresonanzfunktion sind in Abhängigkeit des Kreisfrequenzverhältnisses $\eta = \Omega/\omega_0$ in Abb. 5.28 bzw. 5.30 dargestellt. Es sind drei wichtige Fälle in den Frequenzverhältnissen zu unterscheiden:

- *die quasistatische Anregung* $\eta \ll 1$,
- *die Resonanz* $\eta \approx 1$ und
- *die hochfrequente Anregung* $\eta \gg 1$.

Für jeden dieser Fälle kann es je nach Dämpfungsgrad ϑ (keine Dämpfung, geringe oder überkritische Dämpfung) Unterschiede im Amplituden- und Phasenverhalten geben. Sie werden im Folgenden ausführlicher erläutert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst.

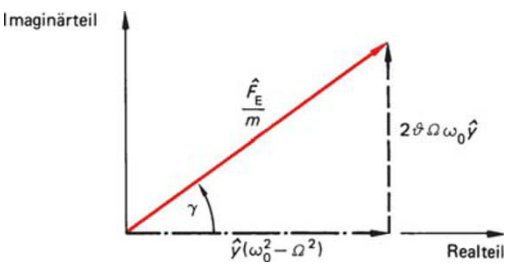


Abb. 5.27 Real- und Imaginärteil des komplexen Zeigers einer erzwungenen Schwingung

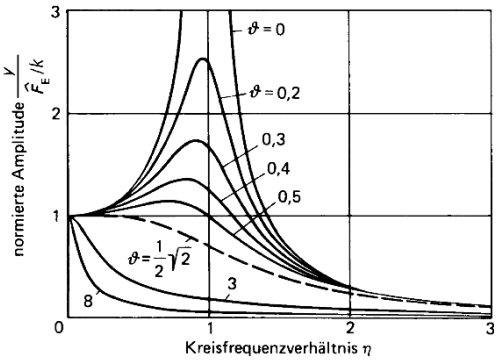


Abb. 5.28 Amplitudenresonanzfunktion

5.1.3.3 Amplitudenresonanzfunktion

Für den Betrag des Zeigers in Abb. 5.27 gilt nach *Pythagoras*

$$\left(\frac{\hat{F}_E}{m}\right)^2 = \hat{y}^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(2\,\vartheta\,\omega_0\Omega\hat{y}\right)^2 .$$

Daraus ergibt sich für den Amplitudenverlauf

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\vartheta\omega_0\Omega)^2}} . \qquad (5.107)$$

Zweckmäßigerweise wird das Verhältnis der Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingung Ω und der ungedämpften freien Schwingung ω_0 eingeführt:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} . \qquad (5.108)$$

Ohne Dämpfung gilt: Wenn $\Omega = \omega_0$ ist, wird $\eta = 1$ und es tritt der für die erzwungene Schwingung charakteristische *Resonanzfall* ein. Für $\eta < 1$ ist der Resonanzfall noch nicht erreicht ($\Omega < \omega_0$) und für $\eta > 1$ ist der Resonanzfall bereits überschritten ($\Omega > \omega_0$).

Tabelle 5.5 Amplituden- und Phasenverlauf einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungsgrade und unterschiedliche Kreisfrequenzverhältnisse

	Dämpfungsgrad ϑ		
Kreisfrequenzverhältnis η	ohne Dämpfung $\vartheta = 0$	geringe Dämpfung $\vartheta \leqq 0{,}1$	überkritische Dämpfung $\vartheta \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$
quasistatische Anregung $\eta \ll 1$ ($\Omega \ll \omega_0$)	Amplitude $\hat{y} = \dfrac{\hat{F}_E}{k}$		
	bis $\eta \approx 1$ zunehmend		mit $\eta > 0$ abnehmend
	Phasenverschiebung $\gamma = 0$		
Resonanz $\eta \approx 1$ ($\Omega \approx \omega_0$)	Amplitude	Amplitude	Amplitude
	$\hat{y} \to \infty$	$\hat{y} \to$ Maximum	$\hat{y} < \dfrac{\hat{F}_E}{k}$
	Phasenverschiebung $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$		
hochfrequente Anregung $\eta \gg 1$ ($\Omega \gg \omega_0$)	Amplitude $\hat{y} \to 0$		
	Phasenverschiebung $\gamma = \pi$	Phasenverschiebung $\gamma \to \pi$ (abhängig von ϑ)	

Unter Berücksichtigung des Parameters η und $m = k/\omega_0^2$ gilt für die Amplitudenresonanzfunktion allgemein

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}} \,. \qquad (5.109)$$

Abbildung 5.28 zeigt den Verlauf der Amplitudenresonanzfunktion in Abhängigkeit von η für einige Dämpfungsgrade ϑ. In der Amplitudenresonanzfunktion treten folgende Spezialfälle auf (Tabelle 5.5).

1. Sehr langsame, *quasistatische Auslenkung* ($\eta \ll 1$)
Es wird

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{k} = y\,(\text{stat}) \,.$$

Dies ist die statische Auslenkung aufgrund der Federkraft.

2. *Resonanzfall* ($\eta = 1$) *ohne Dämpfung* ($\vartheta = 0$)
In diesem Fall wird der Nenner null, d. h. die *Amplitude wird unendlich groß* (Abb. 5.28): $\hat{y}$ (Res) $\to \infty$. Der Erreger pumpt bei jeder Schwingung phasengerecht Energie in den Resonator, sodass dessen Amplitude ständig zunimmt. Es kommt zur *Resonanzkatastrophe*. Sie kann durch bestimmte Maßnahmen verhindert werden:

- Vermeidung periodischer Kraftwirkungen,
- Einbau von Dämpfungsgliedern oder
- große Differenzen zwischen der Eigenkreisfrequenz ω_0 und der erregenden Kreisfrequenz $\Omega(\eta \gg 1)$.

3. *Resonanzfall* ($\eta \approx 1$) *mit Dämpfung* ϑ
Ist eine Dämpfung vorhanden, so wird der Nenner in der Formel für die Amplitudenresonanzfunktion (5.109) nicht mehr null. Es kann das Kreisfrequenzverhältnis η_{Res} bzw. die Re-

sonanzfrequenz ω_{Res} ermittelt werden, für die die Amplitude maximal wird. Dies ist der Fall, wenn der Radiand R der Wurzel im Nenner von (5.109) ein Minimum wird:

$$R = (1 - \eta^2)^2 + (2\,\vartheta\,\eta)^2 \rightarrow \text{Minimum}.$$

Wird die erste Ableitung nach η gleich null gesetzt, so ergibt sich

$$\eta_{\mathrm{Res}} = \sqrt{1 - 2\,\vartheta^2} \tag{5.110}$$

oder die Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{Res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\,\vartheta^2}\,. \tag{5.111}$$

Dies bedeutet, dass bei einer Dämpfung das Maximum der Amplitudenresonanzfunktion bei einer Resonanzfrequenz liegt, die stets kleiner als die Eigenkreisfrequenz ω_0 (bzw. ω_{d}) ist.
Werden die Beziehungen für η_{Res} (5.110) bzw. ω_{Res} (5.111) in die Amplitudenresonanzfunktion (5.109) eingesetzt, so ergibt sich für die Größe der Amplitude im Resonanzfall

$$\hat{y}\,(\mathrm{Res}) = \frac{\hat{F}_{\mathrm{E}}}{k\,2\,\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}}\,. \tag{5.112}$$

Aus den Gleichungen für die Resonanzfrequenz (5.110) bzw. (5.111) und der Resonanzamplitude (5.112) geht hervor, dass mit steigendem Dämpfungsgrad ϑ die Resonanzfrequenzen immer kleiner werden und die Amplituden ebenfalls abnehmen (Abb. 5.28).
Die Amplitudenüberhöhung findet nur bis zu einer *Grenzdämpfung* ϑ_{Gr} statt, für die die Wurzel in (5.110) noch reell ist. Diese Grenze liegt bei

$$\vartheta_{\mathrm{Gr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,. \tag{5.113}$$

Bei Überschreiten dieses Grenzdämpfungsgrades ϑ_{Gr} fallen die Amplituden mit zunehmenden Kreisfrequenzverhältnissen η ständig ab *(überkritische Dämpfung)*.
Das Verhältnis von Resonanzamplitude $\hat{y}\,(\mathrm{Res})$ und der statischen Auslenkung $\hat{y}\,(\mathrm{stat})$ wird *Resonanzüberhöhung* genannt:

$$\frac{\hat{y}\,(\mathrm{Res})}{\hat{y}\,(\mathrm{stat})} = \frac{1}{2\,\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}}\,. \tag{5.114}$$

Für einen geringen Dämpfungsgrad ϑ gilt $\dfrac{\hat{y}\,(\mathrm{Res})}{\hat{y}\,(\mathrm{stat})} \approx \dfrac{1}{2\,\vartheta}$. Dies beschreibt nach (5.77) die *Güte eines Schwingkreises*, sodass näherungsweise gilt

$$\frac{\hat{y}\,(\mathrm{Res})}{\hat{y}\,(\mathrm{stat})} \approx \frac{1}{2\vartheta} = Q\,. \tag{5.115}$$

Die Güte eines Schwingkreises nimmt also mit steigender Resonanzüberhöhung zu.
Die *Halbwertsbreite* der Resonanzkurve bei schwacher Dämpfung ist die Breite $\Delta\eta$ an der Stelle $\dfrac{\hat{y}\,(\mathrm{Res})}{\hat{y}\,(\mathrm{stat}) \cdot \sqrt{2}}$, verdeutlicht in Abb. 5.29. Sie beträgt

$$\Delta\eta \approx \frac{1}{Q}\,. \tag{5.116}$$

Wird (5.115) mit (5.116) multipliziert, so ist das Ergebnis 1. Dies bedeutet, dass für geringe Dämpfungsgrade ($\vartheta \leqq 0{,}1$) gilt

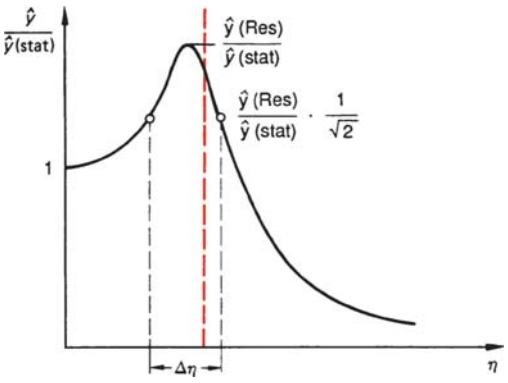


Abb. 5.29 Resonanzüberhöhung und Güte eines Schwingkreises

$$\text{Höhe } \frac{\hat{y}(\text{Res})}{\hat{y}(\text{stat})} \cdot \text{Breite } \Delta\eta = 1\,. \qquad (5.117)$$

Ein wichtiges Anwendungsgebiet sind die *mechanischen Frequenzfilter* in der Nachrichtentechnik. Hat ein solches Filter bei einer Resonanzfrequenz von $f_{\text{Res}} = 50$ kHz eine Güte von $Q = 15\,000$, so beträgt die Bandbreite

$$\Delta f = \frac{f_{\text{Res}}}{Q} = \frac{50\,000}{15\,000\ \text{Hz}} = 3\frac{1}{3}\ \text{Hz}\,.$$

4. *Hochfrequente Anregung* ($\eta \gg 1$)
Für hohe Erregerfrequenzen geht unabhängig vom Dämpfungsgrad ϑ die Amplitude der erzwungenen Schwingung gegen null. In der Praxis wird dieser Grenzfall verwendet, um die Übertragung von Eigenschwingungen zu vermeiden, so z. B. in der Akustik die Schalldämmung zu erhöhen; die Eigenkreisfrequenz ω_0 des erregten Bauteils muss durch eine entsprechende Wahl des Verhältnisses Federkonstante zu Masse weit unterhalb der Erregerkreisfrequenz Ω liegen.

5.1.3.4 Phasenresonanzfunktion

Für den Winkel des Zeigers in Abb. 5.27 gilt

$$\tan\gamma = \frac{2\vartheta\Omega\omega_0}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)} \qquad (5.118)$$

$$= \frac{2\vartheta\eta}{(1-\eta^2)}\,. \qquad (5.119)$$

Abb. 5.30 zeigt die Phasenresonanzfunktion als Funktion von η für einige Dämpfungsgrade ϑ. Auch hierbei unterscheidet man Spezialfälle:

1. *Quasistatische Anregung* ($\eta \ll 1$)
Die erregende Kraft ändert sich so langsam, dass der Schwinger folgen kann. Deshalb gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator.
2. *Resonanzfall* ($\eta = 1$) *ohne Dämpfung* ($\vartheta = 0$)
Für diesen Fall ergibt (5.119) einen unbestimmten Ausdruck. Wie Abb. 5.30 zeigt, ist im Resonanzfall ein Sprung im Phasenwinkel von 0 auf π vorhanden.
3. *Resonanzfall* ($\eta \approx 1$) *mit Dämpfung* ϑ
Es ist $\tan\gamma = \infty$, d. h. $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Für jeden Dämpfungsgrad ist im Resonanzfall die Phasenverschiebung $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Deshalb wird auch für $\vartheta = 0$ der Schwingung dieser Phasenwinkel zugeordnet.
4. *Hochfrequente Anregung* ($\eta \gg 1$)
Der Erreger und der Resonator schwingen annähernd gegenphasig (für $\eta \to \infty$ ist $\gamma = \pi$),

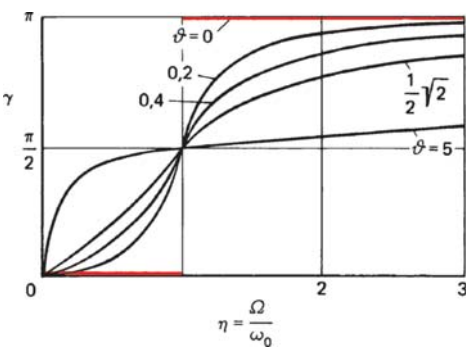


Abb. 5.30 Phasenresonanzfunktion

und zwar umso genauer, je geringer die Dämpfung ϑ ist (Abb. 5.30).

Zur Übung

Ü 5.1-5 Eine Maschine der Masse $m = 1{,}5\,\mathrm{t}$ steht auf sechs gleichen Federn der Federkonstante $k = 3 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$. Dämpfungselemente bewirken eine Dämpfung mit dem Dämpfungsgrad $\vartheta = 0{,}15$. Wenn die Maschine mit der Drehzahl $n_1 = 500\,\mathrm{min}^{-1}$ läuft, treten infolge einer Erregerkraft Schwingungen mit der Amplitude $\hat{y}_1 = 1\,\mathrm{mm}$ auf. Wie groß muss die Drehzahl n_2 gewählt werden, damit die Amplitude auf $\hat{y}_2 = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ abnimmt?

Ü 5.1-6 In einen elektrischen Schwingkreis mit der Induktivität $L = 20\,\mathrm{mH}$ und der Kapazität $C = 2\,\mu\mathrm{F}$ wird ein Widerstand R eingebaut. Berechnet werden sollen

a) die Eigenfrequenz f_0 bzw. die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems,
b) der Wert des Widerstandes R, wenn sich die Eigenfrequenz um 3% ändern soll,
c) die Resonanzüberhöhung und die Breite der Resonanzkurve des Schwingkreises.

5.1.4 Überlagerung von Schwingungen

Solange die Auslenkungen den elastischen Bereich nicht übersteigen, können für die Überlagerung von Schwingungen die unterschiedlichen momentanen Auslenkungen der Einzelschwingungen zeitpunktgerecht zur momentanen Gesamtauslenkung addiert werden (*Superpositionsprinzip*). Hierbei gelten die Additionstheoreme der Trigonometrie.

Bei der *Überlagerung* von Schwingungen kommt es darauf an, ob die *Schwingungsrichtungen parallel* sind oder *senkrecht* aufeinanderstehen. Jede Schwingung kann sich von der zu überlagernden in ihrer Phase, Amplitude oder Frequenz unterscheiden. Tabelle 5.6 zeigt die wichtigsten Phänomene, die sich ergeben, wenn Bewegungsrichtungen und Frequenzen gleich bleiben oder sich ändern.

Tabelle 5.6 Resultierende Schwingung bei Schwingungsüberlagerung

Frequenzart	Bewegungsrichtungen parallel	Bewegungsrichtungen senkrecht
gleiche Frequenzen	Schwingung gleicher Frequenz, verschiedener Amplitude und/oder Phase	verschiedene Ellipsen je nach Amplitude und Phasenlage
unterschiedliche Frequenzen	Schwebungen Fourier-Synthese	ganzzahlige Frequenzverhältnisse Lissajous-Figuren

5.1.4.1 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Raumrichtung und gleicher Frequenz

Folgende zwei harmonische Schwingungen sollen sich überlagern:

$$y_1(t) = \hat{y}_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})\,, \tag{5.120}$$

$$y_2(t) = \hat{y}_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})\,. \tag{5.121}$$

Sie ergeben die neue harmonische Schwingung

$$y_{\mathrm{neu}}(t) = \hat{y}_{\mathrm{neu}} \cos(\omega t + \varphi_{0\,\mathrm{neu}})\,. \tag{5.122}$$

Abbildung 5.31 zeigt die *Amplituden als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene*. Die Amplituden $\hat{y}_1$ bzw. $\hat{y}_2$ sind um die Nullphasenwinkel φ_{01} bzw. φ_{02} verschoben und rotieren mit der gleich bleibenden Kreisfrequenz ω. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Zeigern beträgt

$$\Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02}\,. \tag{5.123}$$

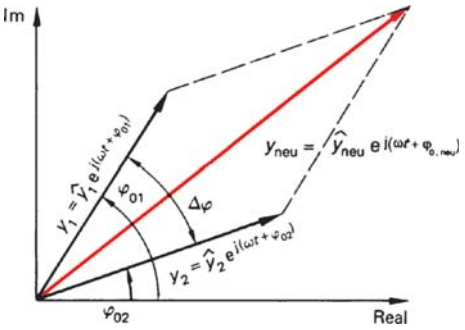


Abb. 5.31 Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung

In einem solchen Zeigerdiagramm kann man die neue Schwingung y_{neu} durch Vektoraddition der Zeiger y_1 und y_2 grafisch ermitteln. Bei der Rechnung müssen Additionstheoreme berücksichtigt werden, die zu folgenden Ergebnissen für die neue Amplitude $\hat{y}_{neu}$ und den neuen Nullphasenwinkel $\varphi_{0\,neu}$ führen:

$$\hat{y}_{neu} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2\cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \hat{y}_2^2}\,, \tag{5.124}$$

$$\tan\varphi_{0\,neu} = \frac{\hat{y}_1\sin\varphi_{01} + \hat{y}_2\sin\varphi_{02}}{\hat{y}_1\cos\varphi_{01} + \hat{y}_2\cos\varphi_{02}}\,. \tag{5.125}$$

Abbildung 5.32 zeigt Spezialfälle:

Maximale Verstärkung ($\Delta\varphi = 0$ bzw. $\Delta\varphi = n2\pi$; $n = 1,2,3,\ldots$)

Wenn keine Phasenverschiebung zwischen den sich überlagernden Schwingungen vorhanden ist, wird $\hat{y}_{neu}$ maximal (Abb. 5.32a):

$$\hat{y}_{neu} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{y}_2^2} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2\,. \tag{5.126}$$

Sind die beiden Amplituden gleich groß ($\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$), dann ist die resultierende Amplitude doppelt so groß:

$$\hat{y}_{neu} = 2\hat{y}\,. \tag{5.127}$$

Auslöschung ($\hat{y}_1 = \hat{y}_2$; $\Delta\varphi = (2n-1)\pi$)

Sind beide Amplituden gleich groß und die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi$ oder ein ungeradzahliges Vielfaches davon, dann wird die Schwingung ausgelöscht (Abb. 5.32b):

$$\hat{y}_{neu} = 0\,. \tag{5.128}$$

Haben die sich überlagernden Schwingungen beliebige Amplituden und Phasenverschiebungen, dann ergibt sich eine neue

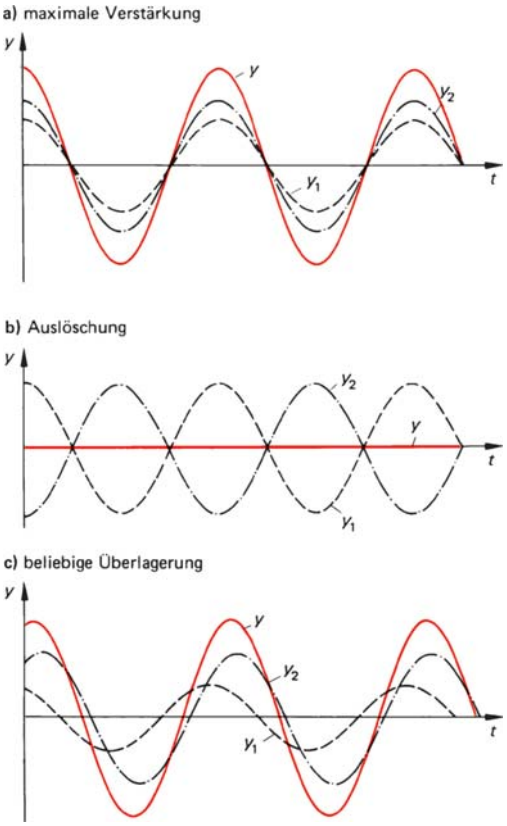


Abb. 5.32 Verstärkung und Auslöschung bei der Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen gleicher Raumrichtung

harmonische Schwingung mit derselben Kreisfrequenz ω (bzw. Periodendauer T). Die neue Amplitude und die neue Phase müssen in diesem Fall nach (5.124) und (5.125) berechnet werden (Abb 5.32c).

5.1.4.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Raumrichtung mit geringen Frequenzunterschieden (Schwebung)

Unterscheiden sich die Frequenzen von zwei zu überlagernden Schwingungen nur geringfügig, dann treten *Schwebungen* auf: Die Amplituden der resultierenden Schwingung schwellen langsam an und wieder ab.

Als Voraussetzung für eine *reine Schwebung* müssen die beiden Schwingungen dieselbe Amplitude haben. Bei gleicher Phase $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ gilt

$$y_1(t) = \hat{y}\,\cos(\omega_1 t)\,, \tag{5.129}$$

$$y_2(t) = \hat{y}\,\cos(\omega_2 t)\,. \tag{5.130}$$

Unter Anwendung des Additionstheorems $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ entsteht bei der Addition von (5.129) und (5.130)

$$\begin{aligned} y_{\text{neu}}(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= 2\hat{y}\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right) \\ &\quad\cdot\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right)\,. \end{aligned} \tag{5.131}$$

Bei geringen Frequenzunterschieden gilt näherungsweise $\omega_1 \approx \omega_2$. Man erhält

$$\omega_{\text{neu}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2\,. \tag{5.132}$$

Die resultierende Schwingung nach (5.131) ist harmonisch mit der neuen Kreisfrequenz ω_{neu} und einer sich ändernden Amplitude mit der Schwebungsfrequenz f_S. Es resultiert

$$y_{\text{neu}}(t) = 2\hat{y}\cos(\pi f_S\, t)\cos(\omega_{\text{neu}} t)\,. \tag{5.133}$$

Es gilt für die Schwebungsfrequenz f_S

$$f_S = f_2 - f_1 \tag{5.134}$$

und für die Periodendauer der Schwebung T_S

$$T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}\,. \tag{5.135}$$

Für die Frequenz der neuen Schwingung gilt nach (5.131) unter Berücksichtigung von (5.132)

$$f_{\text{neu}} = \frac{f_1+f_2}{2}\,. \tag{5.136}$$

Für die Schwingungsdauer errechnet sich

$$T_{\text{neu}} = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}\,. \tag{5.137}$$

Die Amplitude der neuen Schwingung ist doppelt so groß wie die der Ausgangsschwingungen:

$$\hat{y}_{\text{neu}} = 2\,\hat{y}\,. \tag{5.138}$$

Sind die Amplituden der sich überlagernden Schwingungen nicht gleich groß, dann tritt eine *unreine Schwebung* auf. Hierbei wird die

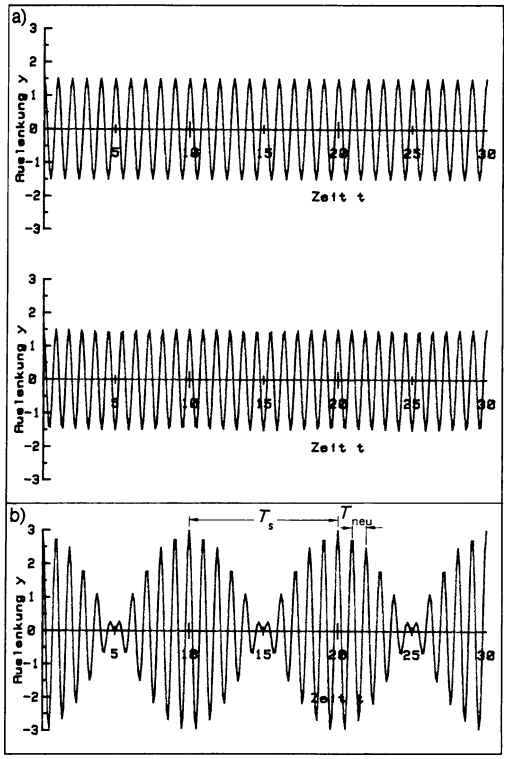


Abb. 5.33 Schwebungen

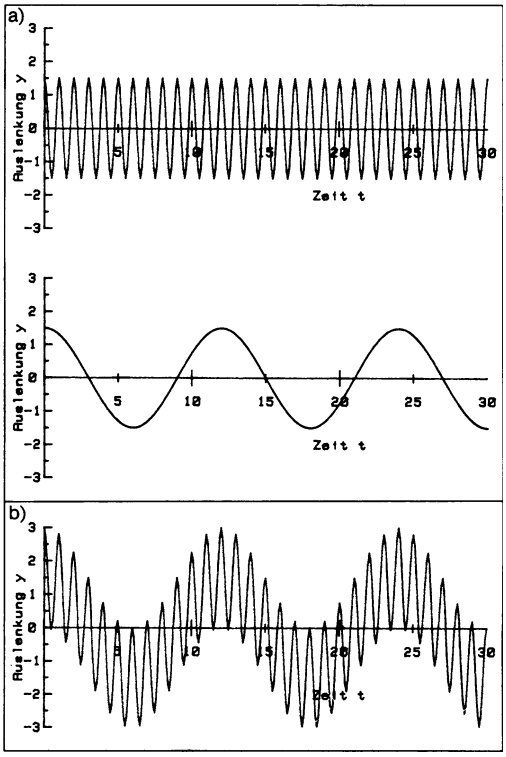


Abb. 5.34 Schwingungsüberlagerung bei großen Frequenzunterschieden

Amplitude nie null, sondern lediglich periodisch minimal.

Da Schwebungserscheinungen sehr genaue Frequenzvergleiche ermöglichen, dienen sie u. a. in der Akustik zum „sauberen“ (nämlich schwebungsfreien) Abgleich von Tonfrequenzen. In der Musik wird dies zum Stimmen von Instrumenten verwendet.

Beispiel

5.1-7 Es soll ein Programm zur Überlagerung zweier Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen entwickelt werden, das die Ausgangsschwingungen und die resultierende Schwingung zeichnet. Im ersten Fall sollen die Frequenzen nahe beieinander liegen (Schwebungsfall) und im zweiten Fall einen großen Unterschied aufweisen.

Lösung

1. Fall: nahe beieinander liegende Frequenzen (Schwebungsfall)

Abbildung 5.33a zeigt die beiden Ausgangsschwingungen, Abb. 5.33b die resultierende Schwebung. Die beiden Ausgangsamplituden betragen $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = 1{,}5$ cm, die Periodendauer der ersten Schwingung $T_1 = 1$ s und die der zweiten Schwingung $T_2 = 0{,}90$ s. Die zweite Periodendauer ist also um 10% kleiner als die erste. Das Verhältnis der Periodendauer beträgt $T_2/T_1 = 9/10$. Wie Abb. 5.33b verdeutlicht, hat die Amplitude der Schwebung den doppelten Wert der Ausgangsschwingung ($2\hat{y} = 3$ cm) und die Schwebungsdauer T_S (von Maximum zu Maximum) beträgt 9 s (auch nach (5.135)). Die Schwingungsdauer der Schwebung T_{neu} ist nach (5.137) $T_{neu} = 0{,}947$ s und wird in Abb. 5.33b bestätigt.

2. Fall: große Unterschiede der Frequenzen

Die Ausgangsamplituden betragen wieder $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = 1{,}5$ cm. Die Periodendauer der ersten Schwingung beträgt $T_1 = 1$ s und die der zweiten $T_2 = 12$ s. Das Verhältnis der Periodendauer beträgt $T_2/T_1 = 12/1$ oder das Frequenzverhältnis $f_1 : f_2 = 1 : 12$. Abbil-

dung 5.34a zeigt die Ausgangsschwingungen und Abb. 5.34b die resultierende Schwingung. Die neue Amplitude ist ebenfalls doppelt so groß wie die Ausgangsamplitude. Wie Abb. 5.34b zeigt, tritt keine Schwebung und keine harmonische Schwingung mehr auf. Die schnellere Schwingung (kleinere Periodendauer, d. h. größere Frequenz; hier die erste Schwingung mit $T_1 = 1$ s schwingt um die periodische Achse, die durch die langsamere Schwingung gegeben ist (größere Periodendauer, d. h. kleinere Frequenz; hier die zweite Schwingung mit $T_2 = 12$ s).

5.1.4.3 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Raumrichtung mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen (Fourier-Analyse)

Besteht zwischen den sich überlagernden Schwingungen ein großer Frequenzunterschied und stehen die Schwingungsfrequenzen im Verhältnis ganzer Zahlen, so entstehen wieder periodisch schwingende Muster. Abbildung 5.35 zeigt die Überlagerung zweier Schwingungen (Amplitude $\hat{y} = 1$ cm) mit einfacher und dreifacher Frequenz. Die Periodendauer der ersten Schwingung beträgt

$$T_1 = 7{,}5\ \text{s}\left(f_1 = \frac{4}{30}\ \text{Hz}\right)$$

und die der zweiten Schwingung

$$T_2 = 2{,}5\ \text{s}\,(f_2 = 0{,}4\ \text{Hz})$$

gemäß Abb. 5.35a. Abbildung 5.35b zeigt die resultierende Schwingungsdauer T_R (im vorliegenden Fall ist $T_\text{R} = T_1$) und die resultierende Amplitude $\hat{y}_\text{R} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 2$ cm.
Werden in einem Diagramm die Amplituden gegen die Kreisfrequenzen aufgetragen, so ergibt sich eine *spektrale Darstellung* der Amplituden *(Amplitudenspektrum)*. Dieses Spektrum zeigt, welche Frequenzen mit welchen Amplituden am Zustandekommen der resultierenden Schwingung beteiligt sind (Abb. 5.35c), enthält aber keine Information über die Phasenlage der Ausgangsschwingungen.

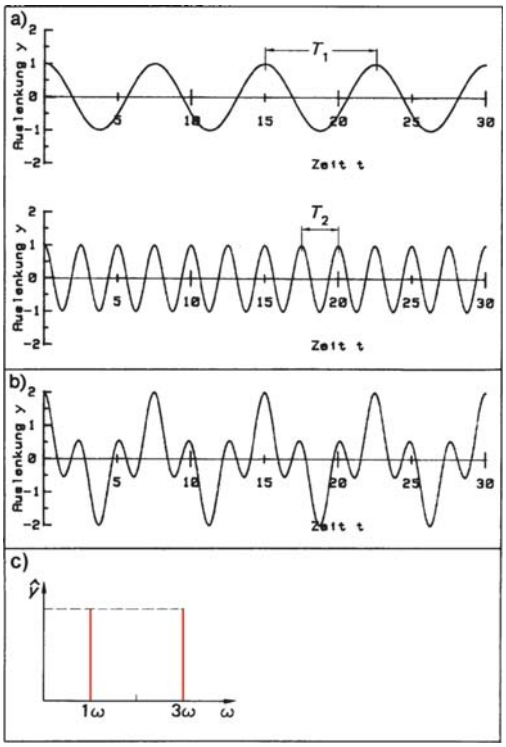


Abb. 5.35 Überlagerung harmonischer Schwingungen mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen und Amplitudenspektrum nach der Fourier-Analyse

Abbildung 5.36 zeigt die Überlagerung von drei Schwingungen ($\omega = \frac{\pi}{15}\ \text{s}^{-1}; \hat{y} = 2{,}2$ cm) der Form $y_i(t) = \hat{y}_i \sin(\omega_i t)$.

$$y_1(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \sin(\omega t)\,,$$

$$\hat{y}_2(t) = \frac{4\hat{y}}{3\pi} \sin(3\omega t)\,,$$

$$\hat{y}_3(t) = \frac{4\hat{y}}{5\pi} \sin(5\omega t) \qquad \text{(Abb. 5.36a)}$$

Abbildung 5.36b zeigt die resultierende Schwingung $y_\text{R}(t)$:

$$y_\text{R}(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t)\right]. \qquad (5.139)$$

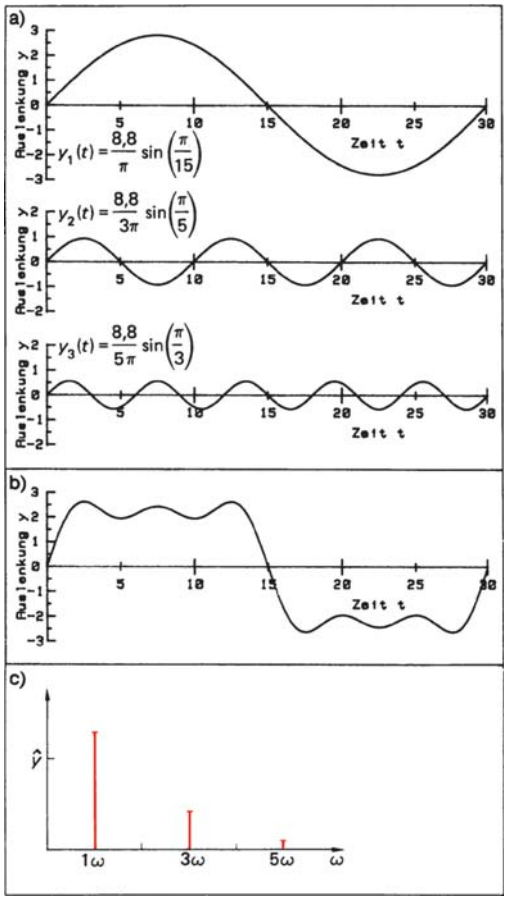


Abb. 5.36 Überlagerung dreier Schwingungen und Amplitudenspektrum nach der Fourier-Analyse

Sie zeigt in erster Näherung eine Rechteckschwingung. In Abb. 5.36c ist das Amplitudenspektrum dargestellt.

Durch Überlagern von Schwingungen mit geeignet gewählten Amplituden und Frequenzen kann praktisch jede gewünschte periodische Funktion generiert werden *(Fourier-Synthese)*. Der umgekehrte Vorgang, die Zerlegung eines periodischen Musters in seine Elementarschwingungen, wird *Fourier-Analyse* (J. B. J. Fourier, 1768 bis 1830) genannt. Fourier zeigte, dass sich jedes periodische Muster eindeutig in eine Reihe von elementaren Cosinus- und Sinusschwingungen

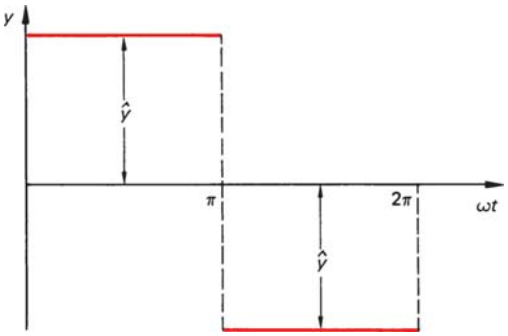


Abb. 5.37 Rechteckfunktion

zerlegen lässt. Die auftretenden Kreisfrequenzen sind dabei ganzzahlige Vielfache der das periodische Muster beschreibenden Grundkreisfrequenz. Somit gilt nach Fourier

$$y_R(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \,. \qquad (5.140)$$

k ist eine ganze Zahl, die folgende Bedeutung hat:

$k = 1$: Grundschwingung (erste Harmonische),
$k = 2$: erste Oberschwingung (zweite Harmonische),
$k = 3$: zweite Oberschwingung (dritte Harmonische),
$\vdots \quad \vdots$
$k = n$: $(n-1)$-te Oberschwingung (n-te Harmonische).

Die *Fourier-Koeffizienten* a_k und b_k geben an, wie stark die einzelnen Anteile vertreten sind. Sie berechnen sich aus

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y_R(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad (5.141)$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$$

und

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y_R(t) \sin(k\omega t)\, dt. \qquad (5.142)$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3 \ldots) \,.$$

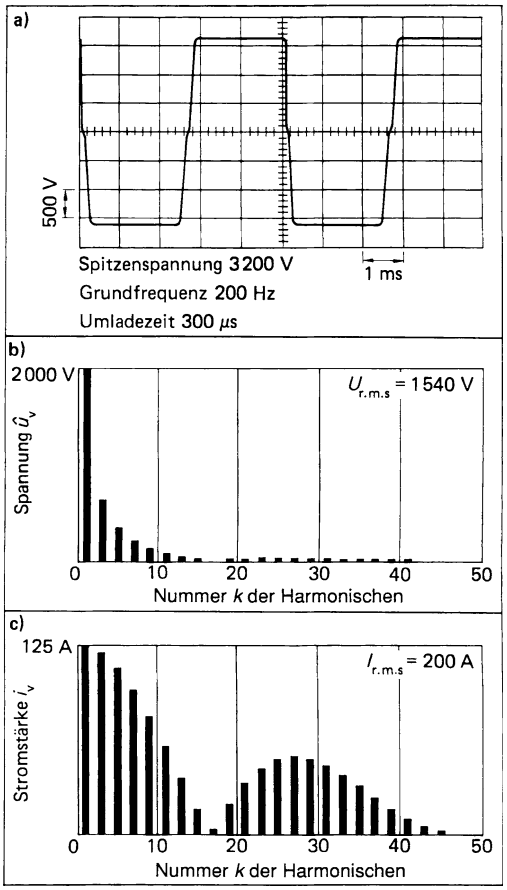


Abb. 5.38 Fourier-Analyse des Spannungsverlaufs bei einem Kommutierungskondensator

Beispielsweise lautet die *Fourier-Reihe* einer Rechteckkurve gemäß Abb. 5.37 mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$

$$y_R(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right). \qquad (5.143)$$

Die Summe der ersten drei Glieder des Klammerausdrucks zeigt Abb. 5.36b (s. auch (5.139)).

Abbildung 5.38 zeigt ein Beispiel für eine Fourier-Analyse in der Elektrotechnik. In Abb. 5.38a ist das Oszillogramm der Spannung eines *Kommutierungskondensators* dargestellt. Diese Kondensatoren dienen zur Löschung des leitenden Zustandes eines Halbleiterbauelementes und werden dazu periodisch stoßartig umgeladen. (In diesem Fall beträgt die Umladezeit 300 µs und bei der Grundfrequenz 200 Hz die Teilspannung 3 200 V.) Aus Abb. 5.38b und 5.38c geht das Amplitudenspektrum der Spannung bzw. der Stromstärke hervor. Aufgrund der starken Abweichung des trapezförmigen Spannungsimpulses von der reinen Sinusform wirken auch noch höherfrequente Anteile von Spannungen und Stromstärken auf den Kondensator. Beispielsweise zeigt das Amplitudenspektrum der Stromstärke, dass trotz niedriger Grundfrequenz von 200 Hz (Stromamplitude $\hat{i} = 125$ A) auch noch die 15. Oberschwingung ($15 \cdot 200$ Hz $= 3\,000$ Hz) mit einer Stromamplitude von $\hat{i}_{27} = 50$ A auf den Kondensator einwirkt. Die Fourier-Analyse lässt erkennen, in welchen Frequenzen und bei welchen Strom- und Spannungsamplituden diese Kondensatoren einwandfrei arbeiten müssen.

Fourier zeigte ferner, dass auch jede nichtperiodische Funktion (stückweise stetig) eindeutig als Integral über harmonische Anteile darstellbar ist (*Fourier-Integral*).

Beispiel

5.1-8 Der Verlauf der tangentialen Komponente der Pleuelkraft eines Kolbens wird über zwei Motorumdrehungen aufgezeichnet (Kurbelwinkel KW von 720°). Abbildung 5.39 zeigt den Verlauf der Tangentialkraft (dicke Linie) und eine Fourier-Analyse bis zu 15 Harmonischen sowie die Koeffizienten a und b. Es sind die ersten fünf harmonischen Schwingungen eingezeichnet (dünne Linien). Die Summenkurve über alle 15 Harmonischen liegt knapp unter dem ersten Maximum und schmiegt sich verhältnismäßig gut der Originalkurve an.

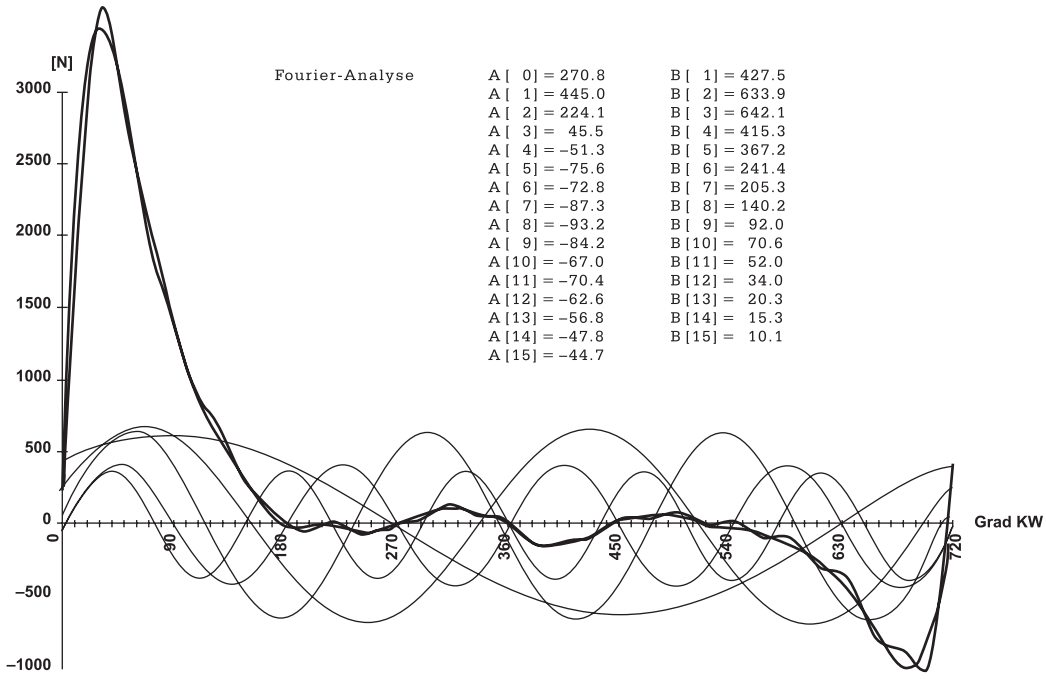


Abb. 5.39 Fourier-Analyse der tangentialen Komponente der Pleuelkraft eines Kolbens nach Beispiel 5.1-8

5.1.4.4 Überlagerung harmonischer Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis, die senkrecht zueinander schwingen (Lissajous-Figuren)

Bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander verlaufender Schwingungen mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen ergeben sich *Lissajous-Figuren* (J. Lissajous, 1822 bis 1880).

Zunächst werden zwei senkrecht verlaufende Schwingungen gleicher Kreisfrequenz (mit einer Phasenverschiebung) betrachtet. Es gilt

$$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t) \tag{5.144}$$

und

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{5.145}$$

Nach dem Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ergibt (5.145)

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t)\cos\varphi + \hat{y}\cos(\omega t)\sin\varphi\,. \tag{5.146}$$

Aus (5.144) folgt

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{\hat{x}} \text{ und } \cos(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^2}\,.$$

Damit wird aus (5.146)

$$y(t) = \hat{y}\frac{x}{\hat{x}}\cos\varphi + \hat{y}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^2}\sin\varphi$$

oder

$$\frac{y}{\hat{y}} - \frac{x}{\hat{x}}\cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^2}\sin\varphi\,.$$

Quadriert ergibt sich die allgemeine Gleichung der *Ellipse:*

$$\frac{y^2}{\hat{y}^2} + \frac{x^2}{\hat{x}^2} - \frac{2yx}{\hat{y}\hat{x}} \cos\varphi = \sin^2\varphi \,. \qquad (5.147)$$

Bei *gleichen Schwingungsfrequenzen* ergibt sich im Allgemeinen eine Ellipse nach Abb. 5.40a, aus deren Achslage sich die Phasenverschiebung bestimmen lässt:

$$\sin\varphi = \frac{y(0)}{\hat{y}} = \frac{x(0)}{\hat{x}} \,. \qquad (5.148)$$

Dabei ist $y(0)$ die Auslenkung für $x = 0$ und $x(0)$ die Auslenkung für $y = 0$.
Für die Phasenverschiebungen $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pi$ treten folgende Spezialfälle auf ((5.147), Abb. 5.40b bis 5.40e):

- *Gerade mit positiver Steigung* ($\varphi = 0$)
  Es wird

  $$\frac{y^2}{\hat{y}^2} + \frac{x^2}{\hat{x}^2} - \frac{2yx}{\hat{y}\hat{x}} = 0$$

  oder

  $$\left(\frac{y}{\hat{y}} - \frac{x}{\hat{x}}\right)^2 = 0 \,;$$

  daraus ergibt sich (Abb. 5.40b)

  $$y = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} x \,. \qquad (5.149)$$

- *Ellipse mit der Hauptachse parallel zur y-Achse* ($\varphi = \frac{\pi}{2}$; Abb. 5.40c):

  $$\frac{y^2}{\hat{y}^2} + \frac{x^2}{\hat{x}^2} = 1 \,. \qquad (5.150)$$

- *Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung* ($\varphi = \frac{\pi}{2}; \hat{y} = \hat{x}$; Abb. 5.40d)

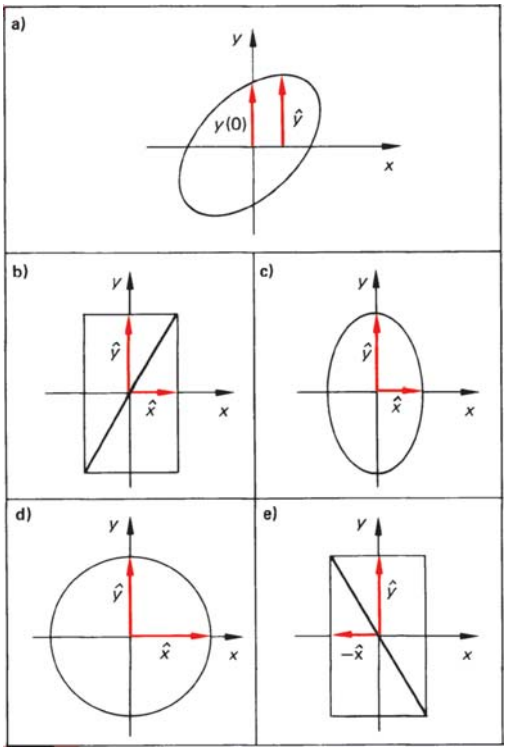


Abb. 5.40 Senkrechte Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (Lissajous-Figuren)

  Bei gleichen Amplituden $\hat{y} = \hat{x}$ wird aus der Ellipse ein Kreis:

  $$y^2 + x^2 = \hat{y}^2 = \text{konst} \,. \qquad (5.151)$$

- *Gerade mit negativer Steigung* ($\varphi = \pi$; Abb. 5.40e):

  $$y = -\frac{\hat{y}}{\hat{x}} x \,. \qquad (5.152)$$

Werden für den allgemeinen Fall ungleicher ganzzahliger Frequenzen die resultierenden Auslenkungen ermittelt, so entstehen komplizierte Bahnkurven. Aus der Anzahl der Maxima auf der waagrechten oder senkrechten Achse können die Frequenzverhältnisse abgelesen werden. Es gilt

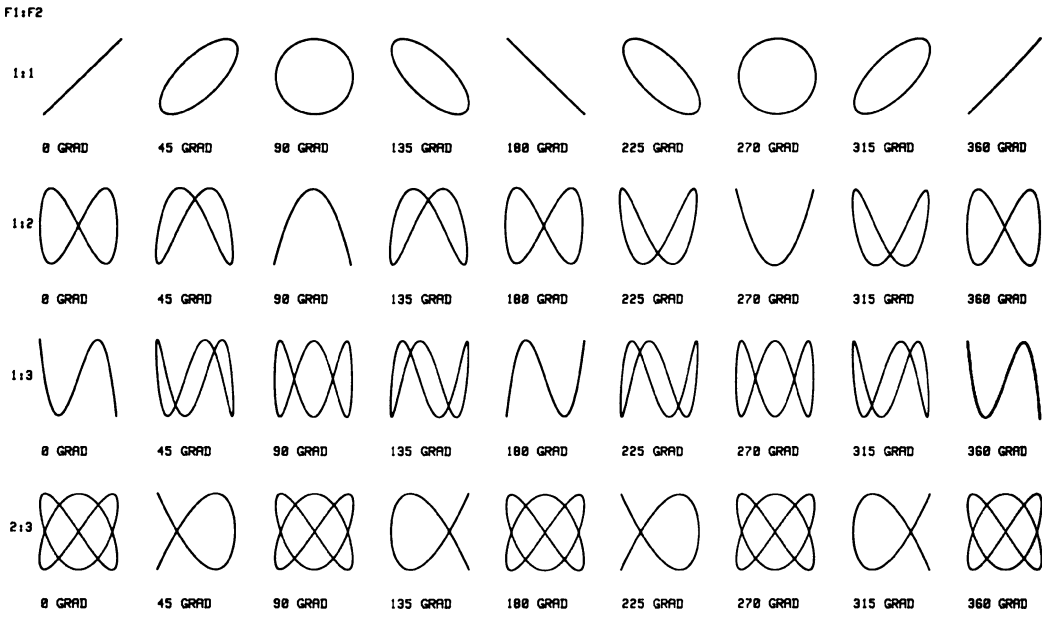


Abb. 5.41 Lissajous-Figuren unterschiedlicher Phasenlage für die Frequenzverhältnisse 1:1, 1:2, 1:3 und 2:3

$$\omega_x : \omega_y = f_x : f_y = k : l \,. \qquad (5.153)$$

Hierbei sind ω_x und ω_y bzw. f_x und f_y die Frequenzen der x- und y-Schwingung, k die Anzahl der senkrechten und l die Anzahl der waagrechten Maxima.

Beispiel

5.1-9 Nach Eingabe der beiden Frequenzverhältnisse sollen mittels eines Rechner-Programms die Lissajous-Figuren für unterschiedliche Phasenlagen gezeichnet werden.

Lösung

Abbildung 5.41 zeigt das Ergebnis jeweils für ein Frequenzverhältnis von 1:1, 1:2, 1:3 und 2:3. Der Phasenwinkel beträgt in allen Fällen $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 360°$.

5.1.5 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden (gekoppeltes Schwingungssystem)

Die hierfür wichtigen Begriffe sind in DIN 1311, Blatt 3, definiert. Unter *Freiheitsgrad* wird analog zur Mechanik (Abschn. 2.9.1) die *Mindestanzahl der Koordinaten* verstanden, die zur Beschreibung des Systems notwendig sind.

Zum besseren Verständnis gekoppelter Vorgänge seien zwei gleiche Feder-Masse-Pendel betrachtet, die durch eine Kopplungsfeder verbunden sind, wie es Abb. 5.42 zeigt. Das gekoppelte Schwingungssystem hat zwei Freiheits-

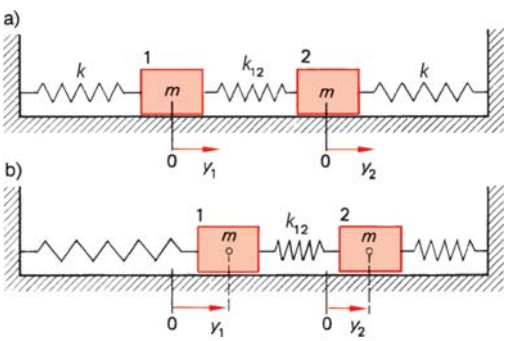


Abb. 5.42 Elastisch gekoppelte Feder-Masse-Schwinger

grade der Auslenkung y_1 und y_2, zwei gleiche Massen m, gleiche Federkonstanten k sowie eine Kopplungsfeder mit der Federkonstanten k_{12}. Es besteht also aus zwei gleich großen Energiespeichern, zwischen denen durch die Kopplungsfeder ein periodischer Energieaustausch stattfinden kann. Wird z. B. der erste Körper in Abb. 5.42a ausgelenkt, dann gibt das erste Pendel seine Energie allmählich an das zweite Pendel ab, bis dieses die gesamte Energie besitzt und der Vorgang wieder in die andere Richtung abläuft. Es gibt lediglich zwei Schwingungszustände, bei denen keine Energieübertragung stattfindet. Sie werden *Fundamentalschwingungen* genannt.

– *Gleichphasige Schwingung*
  Das Kopplungsglied ist in diesem Fall nicht wirksam, weil die Kopplungsfeder immer entspannt bleibt. Deshalb schwingen die Massen mit der Frequenz der ungedämpften harmonischen Schwingung:

$$f_1 = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \,. \tag{5.12}$$

– *Gegenphasige Schwingung*
  In diesem Fall bleibt aus Symmetriegründen die Mitte der Kopplungsfeder in Ruhe. Jedem Körper (System) kann somit die Federkonstante der eigenen Feder k und die Federkonstante der halben Kopplungsfeder $2\,k_{12}$ zugerechnet werden. Daraus ergibt sich die Frequenz der zweiten Fundamentalschwingung:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k + 2\,k_{12}}{m}} \,. \tag{5.154}$$

In allen anderen Fällen findet eine Überlagerung der Fundamentalschwingungen so statt, dass eine Schwebung entsteht mit der Schwebungsfrequenz

$$f_S = f_2 - f_1 \tag{5.155}$$

(Abschn. 5.1.4.2). Um die Vorgänge genauer zu analysieren, werden im Folgenden die Differentialgleichungen für die beiden Schwinger aufgestellt (Abb. 5.42b). Beim ersten Schwinger ist die Kopplungsfeder um $y_1 - y_2$ zusammengedrückt, sodass das Newton'sche Gesetz der Bewegung lautet

$$-k\,y_1 - k_{12}(y_1 - y_2) = m\,a_1 \,.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung für den ersten Schwinger:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y_1 + \frac{k_{12}}{m}(y_1 - y_2) = 0 \,. \tag{5.156}$$

Beim zweiten Schwinger ist die Kopplungsfeder um $y_1 - y_2$ zusammengedrückt, sodass das Newton'sche Gesetz heißt

$$-k\,y_2 - k_{12}(y_2 - y_1) = m\,a_2 \,.$$

Daraus bildet man die Differentialgleichung für den zweiten Schwinger:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y_2 + \frac{k_{12}}{m}(y_2 - y_1) = 0 \,. \tag{5.157}$$

Werden beide Differentialgleichungen addiert, so ergibt sich folgende gekoppelte Differentialgleichung für $y_1 + y_2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y_1 + y_2) + \frac{k}{m}(y_1 + y_2) = 0 \,. \tag{5.158}$$

Werden beide Differentialgleichungen subtrahiert, dann entsteht eine andere Differentialgleichung für $y_1 - y_2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y_1 - y_2) + \frac{k + 2\,k_{12}}{m}(y_1 - y_2) = 0\,. \tag{5.159}$$

Gleichungen (5.158) und (5.159) beschreiben ungedämpfte harmonische Schwingungen. Die Lösungen sind die Frequenzen bzw. die Schwingungsdauern der bereits oben genannten Fundamentalschwingungen. Aus (5.158) folgt

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{5.11}$$

$$f_1 = f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{5.12}$$

$$T_1 = T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{5.13}$$

Aus (5.159) folgt

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2\,k_{12}}{m}}\,, \tag{5.160}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k + 2\,k_{12}}{m}}\,, \tag{5.154}$$

$$T_2 = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k + 2\,k_{12}}}\,. \tag{5.161}$$

Für eine gleichphasige Schwingung ($y_1 = y_2$) verschwindet die Differentialgleichung (5.159) und es bleibt für (5.158) stehen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y_1 = 0\,. \tag{5.162}$$

Es findet eine Schwingung mit der ersten Fundamentalfrequenz $f_1 = f_0$ (5.11) statt.
Bei einer gegenphasigen Schwingung ($y_1 = -y_2$) verschwindet die Differentialgleichung (5.158) und es bleibt für (5.159) stehen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k + 2\,k_{12}}{m}y_1 = 0\,. \tag{5.163}$$

Diese Schwingung hat die zweite Fundamentalfrequenz f_2 (5.154).
Für den allgemeinen Fall wird folgende Anfangsbedingung erfüllt: Bei Beginn der Schwingung ($t = 0$) ist der erste Schwinger maximal ausgelenkt ($y_1(0) = \hat{y}$) und der zweite Schwinger in Ruhe ($y_2(0) = 0$). Damit wird $y_1 + y_2 = \hat{y}$.
Die beiden Fundamentalschwingungen gehorchen folgenden Ansätzen:

$$y_1 + y_2 = \hat{y}\cos(\omega_1 t)\,, \tag{5.164}$$

$$y_1 - y_2 = \hat{y}\cos(\omega_2 t)\,. \tag{5.165}$$

Durch Addition von (5.164) und (5.165) ergibt sich

$$y_1 = \frac{\hat{y}}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))\,.$$

Wird das Additionstheorem

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

angewendet, dann gilt

$$y_1 = \hat{y}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right). \tag{5.166}$$

Wird (5.165) von (5.164) subtrahiert, dann ergibt sich

$$y_2 = \frac{\hat{y}}{2}(\cos(\omega_1\, t) - \cos\,(\omega_2\, t))\,.$$

Wird das Additionstheorem

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

angewendet, dann gilt

$$y_2 = \hat{y}\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\,. \tag{5.167}$$

Gleichungen (5.166) und (5.167) beschreiben nach Abschn. 5.1.4.2 Schwebungen. Dies bedeutet, dass der erste und der zweite Schwinger Schwebungen ausführen, die gemäß Abb. 5.43 um $\frac{\pi}{2}$ verschoben sind.

Als *Kopplungsgrad* k^* der beiden Schwinger gilt für gleiche Massen und gleiche Amplituden

$$k^* = \frac{k_{12}}{k+k_{12}} \qquad \text{oder} \tag{5.168}$$

$$k^* = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 + f_1^2}\,. \tag{5.169}$$

mit $0 < k^* < 1$. Bei *loser* Kopplung ist $k^* \ll 1$ und $f_1 \neq f_2$. Bei *fester* Kopplung ist $k^* \approx 1$ und $f_1 \approx f_2$.

Mit zunehmender Kopplung werden die beiden Fundamentalfrequenzen f_1 und f_2 deutlich verschieden.

Im allgemeinen Fall sind n *Schwinger* miteinander gekoppelt. Dieses System besitzt dann n *Fundamentalschwingungen* (*Eigenschwingungen*). Solche Systeme sind in der Molekül- und Festkörperphysik von Bedeutung (Abschn. 8.6.2, 9.2.1).

Abbildung 5.44 zeigt die *induktive Kopplung elektromagnetischer Schwingkreise*. Das Schema des Messaufbaus verdeutlicht Abb. 5.44a, und Abb. 5.44b zeigt die prinzipielle

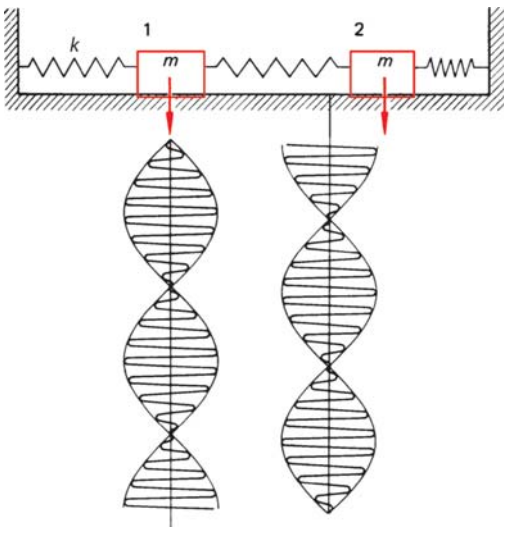


Abb. 5.43 Schwebungen zweier gekoppelter Feder-Masse-Schwinger

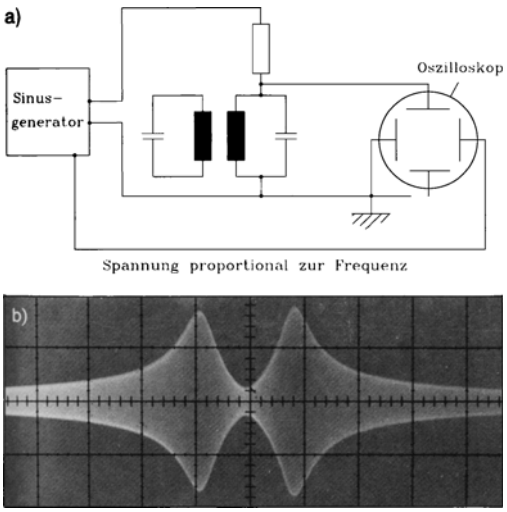


Abb. 5.44 Induktive Kopplung elektromagnetischer Schwingkreise: **a**) Messanordnung, **b**) Resonanzkurve zweier Schwingkreise

Resonanzkurve (Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz).

5.1.6 Nichtlineare Schwinger

In den vorhergehenden Abschnitten sind harmonische Schwingungen beschrieben, denen ein lineares Kraftgesetz (z. B. das Hooke'sche Gesetz für die Federkraft) zugrunde lag (Abschn. 5.1.2.2, Abb. 5.7). Bereits beim mathematischen und physischen Pendel (Abschn. 5.1.2.3) war eine Näherung für kleine Winkel notwendig, um diese Linearität zu erzeugen. Die Kräfte im elektrischen und magnetischen Feld (Abschn. 4.1.1 und 4.4.3.2) sind beispielsweise nicht linear, sondern proportional zu $1/r^2$ ((*Coulomb'sches Gesetz*), (4.2)). Dies hat zur Folge, dass der Schwingungszustand durch eine *nichtlineare Differentialgleichung* beschrieben werden muss, deren Lösungen keine harmonischen Funktionen (Sinus- bzw. Cosinusfunktion) mehr sind. Diese Schwingungssysteme werden daher als *nichtlinear* bezeichnet. Ebenfalls nichtlineare Differentialgleichungen treten auf, wenn die Koeffizienten vor den Variablen oder deren Ableitungen nicht konstant, sondern von den Variablen selbst bzw. deren Ableitungen abhängig sind.

Aus diesen Gründen ist eine Vielzahl nichtlinearer Schwinger denkbar, deren zeitliche Zustandsänderungen komplizierte Verläufe zeigen. Auf eine ausführliche Darstellung kann aus gutem Grund deshalb verzichtet werden, weil nach FOURIER jede beliebige Schwingungsform in harmonische Anteile zerlegt werden kann (Abschn. 5.1.4.3).

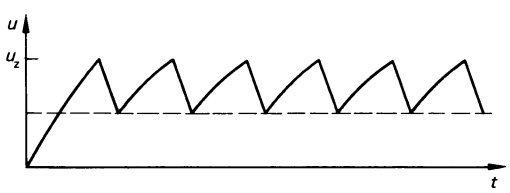


Abb. 5.45 Sägezahnspannung

Besondere Bedeutung haben die *Kippschwingungen*. Bei ihnen wird einer der Energiespeicher des Schwingungssystems kontinuierlich gefüllt. Dieser entleert sich schlagartig nach bestimmten Zeiten, wenn ein charakteristischer Schwellenwert überschritten wird.

Auf diese Weise entsteht eine *Sägezahnspannung*, etwa entsprechend Abb. 5.45. Elektrische Kippschwingungen werden beispielsweise in Fernsehbildröhren eingesetzt, um den Elektronenstrahl über die Zeile zu leiten und am Zeilenende schlagartig zurückzusetzen. Meist werden hierzu Kondensatoren aufgeladen, die nach Erreichen der Zündspannung u_Z über eine Glimmlampe entladen werden.

5.1.7 Parametrisch erregte Schwingungen

Im Gegensatz zu den nichtlinearen Schwingungen, bei denen die Schwingungsparameter von der momentanen Auslenkung abhängig sind, hängen bei den *parametrischen Schwingungen* die Systemparameter von der Zeit ab (z. B. eine periodische Längenänderung des Fadens beim mathematischen Pendel oder eine periodische Kapazitätsänderung beim elektrischen Schwingkreis). Um die Unterscheidung zwischen nichtlinearen oder parametrischen Schwingern besser trefen zu können, wird nach DIN 1311, Blatt 2, vorgeschlagen, die *parametrischen Schwingungen* durch die Vorsilbe *rheo* zu kennzeichnen. Tabelle 5.7 zeigt die Bezeichnungen der orts- und zeitabhängigen Schwingungen.

Mit Hilfe parametrisch angeregter Schwingungen kann dem Schwingungssystem *zusätzlich Energie* zugeführt werden. Dazu muss das Schwingungssystem bereits schwingen und die parametrische Erregung (Pumpfrequenz) die doppelte Eigenfrequenz haben.

Tabelle 5.7 Orts- und zeitabhängige Schwingungen

ortsabhängig	zeitabhängig sklero- (nicht parametrisch)	rheo- (parametrisch)
linear	$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2(t) y = 0$
nichtlinear	$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2(y) y = 0$	$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2(y,t) y = 0$

In der Mechanik sind parametrische Schwingungen bei Pendeln mit periodisch bewegten Aufhängepunkten oder Pendellängen zu beobachten (z. B. periodische Änderung der Pendellänge durch die Kniebewegungen in einer Schiffschaukel). Parametrische Verstärker dienen in der Elektrotechnik zur rauscharmen Verstärkung kleinster elektrischer Signale (z. B. aus dem Weltraum).

Zur Übung

Ü 5.1-7 Es überlagern sich die folgenden parallelen, ungedämpften Schwingungen:

$$y_1(t) = 0{,}05\ \text{m} \cos\left(4\pi\ \text{s}^{-1} t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{und}$$
$$y_2(t) = 0{,}08\ \text{m} \cos\left(4\pi\ \text{s}^{-1} t + \frac{\pi}{5}\right).$$

Bestimmt werden sollen die Amplitude $\hat{y}$ und der Nullphasenwinkel φ_0 der resultierenden Schwingung $y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Ü 5.1-8 Zwei gleiche Feder-Masse-Systeme schwingen in x- bzw. y-Richtung. Das Maximum in x-Richtung und das Minimum in y-Richtung werden gleichzeitig erreicht. Die Amplitude der x-Schwingung ist dreimal so groß im Vergleich zur y-Schwingung.

a) Wie groß ist der Phasenunterschied φ der beiden Schwingungen?
b) Nun sollen die beiden Schwingungen überlagert werden. Welche Lissajous-Figur entsteht?

Ü 5.1-9 Ein Sägezahngenerator erzeugt einen Spannungsverlauf $u(t)$, der zur Zeit $t = 0$ bei $u(0) = -1$ V beginnt und in der Zeit $T = 1$ ms linear auf $u(T) = +1$ V ansteigt. Wie lauten die Fourier-Koeffizienten des Sägezahns? Welche Form hat das Spektrum?

5.2 Wellen

5.2.1 Physikalische Grundlagen der Wellenausbreitung

Eine *Wellenausbreitung* wird beobachtet, wenn *schwingungsfähige Systeme räumlich* miteinander *gekoppelt* sind. Durch die Kopplung kann sich die Schwingung eines Systems auf die Nachbarn übertragen, was zu einer räumlichen Ausbreitung des Schwingungszustandes führt. Dieser Sachverhalt, der in Abb. 5.1 schematisch dargestellt ist, soll hier noch einmal veranschaulicht werden.
Abbildung 5.46a zeigt eine Reihe von Fadenpendeln, die über Schraubenfedern miteinander verbunden sind. Regt man das erste Pendel zu harmonischen Schwingungen in y-Richtung an, so wird die erste Feder periodisch gedehnt und gestaucht, sodass sie das zweite Pendel ebenfalls zu Schwingungen in y-Richtung anregt. Das zweite Pendel regt nun seinerseits das dritte zu Schwingungen an, dann wird das vierte erregt und so fort, bis die ganze Reihe schwingt. In der zeitlichen Abfolge entsteht jeweils zwischen zwei Pendeln eine Verzögerung im Schwingungszustand, da die Wechselwirkungskraft erst wirksam wird, wenn die Kopplungsfeder gespannt wird. Der

Schwingungszustand breitet sich also nicht sofort über die ganze Reihe aus, vielmehr wird die Schwingung mit einer *charakteristischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit* längs der x-Achse weitergetragen.

Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* des Schwingzustandes und die Entstehung einer Welle überhaupt hängen als ganz wesentlich von der Kopplung der einzelnen Oszillatoren ab. Abbildung 5.46b zeigt in einer Momentaufnahme den „eingefrorenen" Schwingungszustand der ganzen Pendelreihe.

Schwingen die Pendel gemäß Abb. 5.46b *senkrecht* zur Ausbreitungsrichtung, spricht man von einer *Transversal-* oder *Querwelle*. Wenn die einzelnen Schwinger ihre Schwingungsrichtung (hier die y-Richtung) während der Ausbreitung beibehalten, nennt man die Welle *linear polarisiert*. Da die *Polarisation* von Wellen besonders in der Optik eine Rolle spielt, wird in Abschn. 6.4 näher darauf eingegangen.

Eine *Longitudinal-* oder *Längswelle* entsteht, wenn das erste Pendel, wie in Abb. 5.46c angedeutet, in x-Richtung bewegt wird. Auch dieser Schwingungszustand breitet sich mit einer typischen Verzögerung von Pendel zu Pendel aus, sodass man eine laufende Welle erhält, bei der Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung parallel sind. Die *Longitudinalwelle* ist eine *Folge* von *Verdichtungen* und *Verdünnungen*, die sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausbreiten.

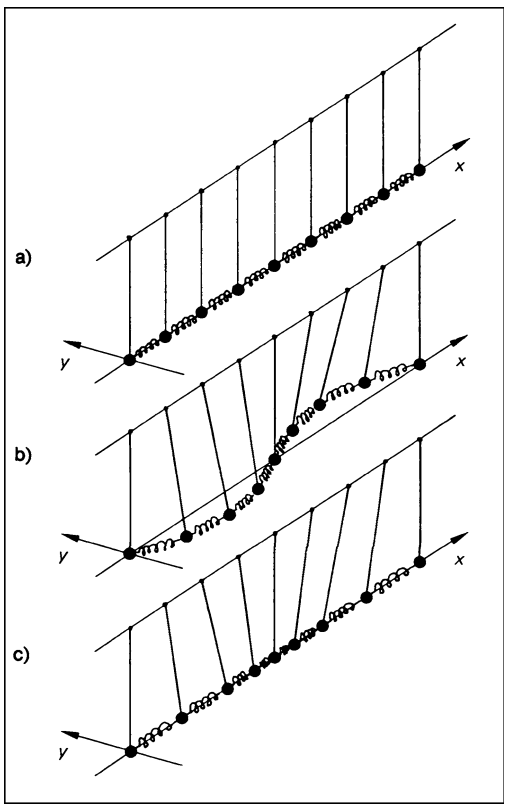


Abb. 5.46 Fortschreitende Welle zwischen gekoppelten Pendeln: **a**) Pendel mit Kopplungsfedern, **b**) Zustand einer Transversalwelle, **c**) Zustand einer Longitudinalwelle

Betrachtet man eine laufende Welle, etwa eine Welle auf einer Wasseroberfläche, so erscheint es, als würde Wasser in Laufrichtung der Welle transportiert. Tatsächlich wird aber lediglich ein Schwingungszustand übertragen, wie man deutlich bei der Betrachtung der schwingenden Pendelreihe erkennt. Die einzelnen Pendel schwingen ortsfest mit einer bestimmten Amplitude und Frequenz, lediglich die Information des Schwingens wird übertragen.

> Bei einer Wellenbewegung wird keine Materie transportiert, dafür aber Energie.

Diese Energieübertragung ist notwendig, um die einzelnen Oszillatoren zu Schwingungen anzuregen.

Die Auslenkungen der einzelnen Oszillatoren hängen sowohl vom Ort als auch von der Zeit ab. Eine Möglichkeit der grafischen Darstellung dieses Zusammenhangs ist in Abb. 5.47 gezeigt. Jedes Teilbild stellt eine Momentaufnahme einer Welle dar; hierbei schreitet die

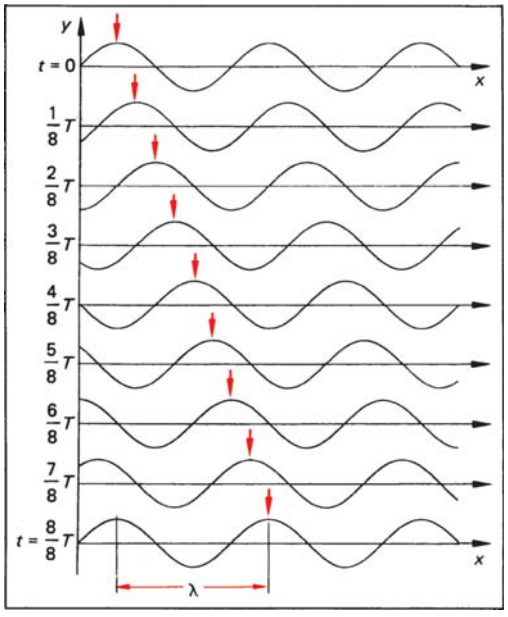


Abb. 5.47 Zustände einer laufenden Transversalwelle

Zeit von oben nach unten in gleichmäßigen Intervallen fort. Die gesamte Zeitspanne zwischen der ersten und der letzten Darstellung ist identisch mit der *Schwingungsdauer* T der beteiligten Oszillatoren. Nach Ablauf der Zeit T hat sich das Wellenbild reproduziert, allerdings ist eine bestimmte Stelle, z. B. der durch einen Pfeil markierte Wellenberg, um die Strecke λ vorgerückt. Dieser Abstand zweier gleichartiger Zustände im Wellenbild wird *Wellenlänge* λ genannt. Da die Welle innerhalb der Periodendauer T gerade den Weg λ zurückgelegt hat, ergibt sich eine einfache Beziehung für die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* c der Welle:

$$c = \frac{\lambda}{T} \,. \tag{5.170}$$

Mit der Frequenz $f = 1/T$ der Oszillatoren erhält man

$$c = \lambda f \,. \tag{5.171}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Welle ist das Produkt aus Wellenlänge λ und Frequenz f.

In Abb. 5.48 ist eine Serie von Momentaufnahmen einer laufenden Longitudinalwelle dargestellt. Die Wellenlänge λ gibt wieder an, um welchen Weg ein bestimmter Zustand, in

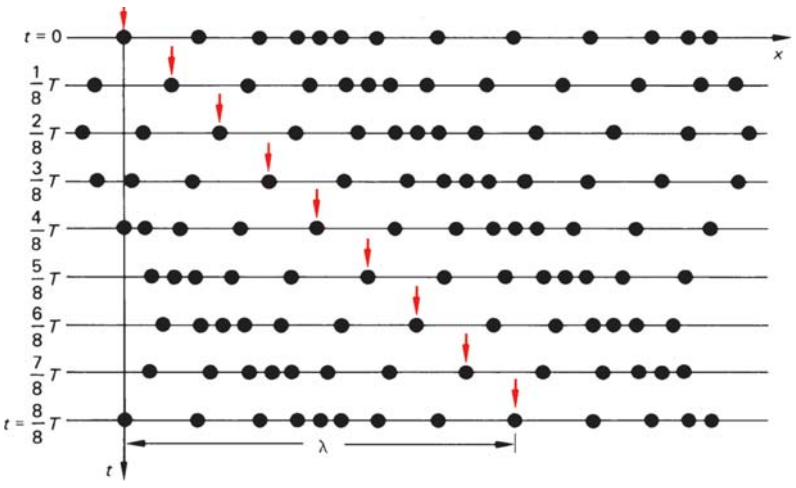


Abb. 5.48 Zustände einer Longitudinalwelle. Der Pfeil markiert jeweils den Ort größter Verdünnung

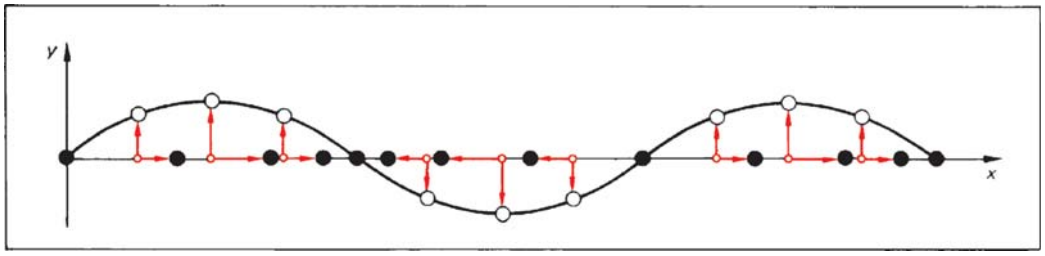


Abb. 5.49 Longitudinalwelle, dargestellt als Transversalwelle

diesem Fall z. B. die durch den Pfeil gekennzeichnete Verdünnung, innerhalb der Periodendauer T fortschreitet. Das Zeichnen einer Longitudinalwelle ist sehr umständlich, weshalb in der Praxis meist auch die Longitudinalwelle wie eine Transversalwelle gezeichnet wird. Die tatsächliche Auslenkung der Teilchen wird dabei um 90° gedreht aufgezeichnet, wie Abb. 5.49 zeigt.

Bisher sind Wellen nur in diskret angeordneten Oszillatoren betrachtet worden. Wellen sind aber auch in den *Kontinua ausbreitungsfähig*. (Im Grunde hat man es immer noch mit einzelnen Oszillatoren zu tun, deren Größe aber auf die Maße von Atomen verringert ist.) In Gasen und Flüssigkeiten ohne innere Reibung sind lediglich Longitudinalwellen ausbreitungsfähig. Andere Wellentypen existieren nicht, weil benachbarte Volumelemente einer seitlichen Verschiebung keinen Widerstand entgegensetzen. (Die Medien haben keinen Schubmodul.) An der Grenzfläche von Flüssigkeiten und Gasen kann es jedoch zu transversalen Oberflächenwellen kommen, wie etwa bei den Wasserwellen. In Festkörpern sind alle Wellentypen ausbreitungsfähig: Außer den Longitudinalwellen gibt es verschiedene Transversalwellen: *Biegewellen* und *Scherungswellen*. Die wichtigste Transversalwelle in Stäben ist die *Torsionswelle*. Es findet auch *Wellenumformung* von einem Typ in einen anderen statt. So löst z. B. eine Longitudinalwelle bei einem Stab mit einem exzentrisch aufgesetzten Körper eine sekundäre Biegewelle aus.

Eine besondere Form der Transversalwellen sind die *elektromagnetischen Wellen*. Bei ihnen schwingt entsprechend Abb. 5.50 ein elektrischer und ein magnetischer Feldstärkevektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die elektromagnetischen Wellen benötigen im Gegensatz zu den oben behandelten elastischen Wellen kein Übertragungsmedium. Sie können sich sowohl im Vakuum als auch (in bestimmten Grenzen) in Materie ausbreiten.

Verbindet man benachbarte Punkte mit gleichartigem Schwingungszustand (z. B. Wellenberge) einer Welle miteinander, so erhält man eine geometrische Fläche, die *Wellenfläche* oder *Wellenfront*. Die Form der Wellenfläche hängt vom erregenden Zentrum sowie von den Eigenschaften des Übertragungsmediums ab. Von besonderer Bedeutung sind die in

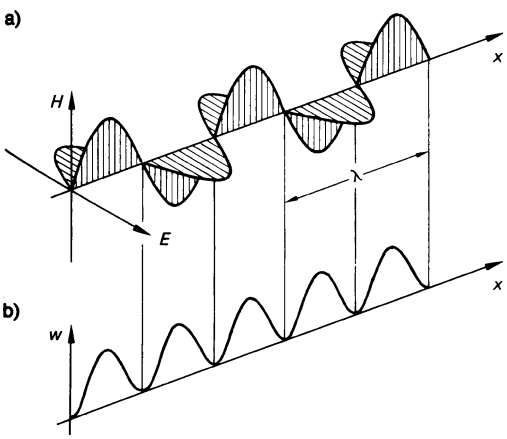


Abb. 5.50 Momentaufnahme einer elektromagnetischen Welle: **a**) Feldverteilung, **b**) Energiedichte

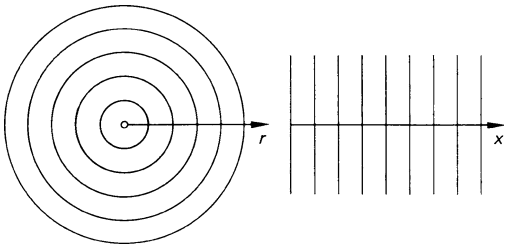


Abb. 5.51 Wellenflächen einer Kugelwelle und einer ebenen Welle

Abb. 5.51 dargestellten *Kugelwellen* und *ebenen Wellen*. Kugelwellen entstehen, wenn ein punktförmiger Erreger Wellen aussendet. Beispielsweise breitet sich nach der Zündung eines kleinen Knallkörpers eine kugelförmige Verdichtungswelle in der Luft aus. Ebene Wellen entstehen, wenn ein ausgedehnter ebener Strahler Wellen aussendet. Ein Lautsprecher mit einer großen Membran gibt näherungsweise ebene Wellen ab. Ein Ausschnitt einer Kugelwelle kann in großem Abstand vom Erregerzentrum als ebene Welle angesehen werden.
Die Begriffsbestimmungen zur Beschreibung schwingender Kontinua und Wellen sind in DIN 1311, Blatt 4, definiert.

5.2.2 Harmonische Wellen

5.2.2.1 Mathematische Beschreibung harmonischer Wellen

Der mathematische Zusammenhang zwischen Auslenkung y, Ort x und Zeit t bei einer Welle hängt von der Art der Anregung ab. Von besonderer Bedeutung ist die *harmonische Anregung*. Wird z. B. in Abb. 5.46 das erste Pendel bei $x = 0$ harmonisch, d. h. gemäß $y = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi_0)$ angeregt, so bildet sich eine harmonische Welle oder Sinuswelle aus. Ein Oszillator an einem beliebigen Ort x wird ebenfalls harmonisch schwingen, allerdings zeitlich verspätet gegenüber dem ersten. Die zeitliche Verschiebung beträgt $\Delta t = x/c$. Damit ist die Auslenkung des Oszillators am Ort x gegeben durch

$$y = \hat{y}\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_0]$$
$$= \hat{y}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_0\right).$$

Unter Berücksichtigung von (5.170) und (5.171) ergibt sich

$$y = \hat{y}\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

oder

$$y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\,. \qquad (5.172)$$

Die Konstante k wird *Wellenzahl* genannt und ist definiert als

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \qquad (5.173)$$

Gleichung (5.172) beschreibt eine Welle, die nach rechts läuft, d. h. in Richtung zunehmender x-Werte. Entgegengesetzte Laufrichtung erhält man durch Vertauschen eines Vorzeichens in der Klammer:

$$y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega t + kx + \varphi_0)\,. \qquad (5.174)$$

Durch (5.172) und (5.174) wird auch mathematisch noch einmal zum Ausdruck gebracht, dass die Auslenkungen bei einer Welle vom *Ort und von der Zeit* abhängen. Ist wie in diesem Fall die Ortsabhängigkeit nur die Funktion *einer* Ortskoordinate, dann nennt man die Welle *einfach*. Im Rahmen dieses Buches werden nur einfache Wellen betrachtet.
Hält man die Raumkoordinate x fest, so wird aus (5.172) $y(t) = \hat{y}\cos(\omega t - \varphi_1)$, also eine harmonische Schwingung. Dieser Fall tritt beispielsweise auf, wenn eine Schallwelle an das Ohr gelangt und dort am festen Ort x das

Trommelfell zu erzwungenen Schwingungen mit der Frequenz f erregt. Zu einer bestimmten Zeit t wird aus (5.172) $y(x) = \hat{y}\cos(kx + \varphi_2)$, also das Momentbild einer harmonischen Welle, wie es z. B. in Abb. 5.47 gezeigt ist.

5.2.2.2 Energietransport

In Abschn. 5.2.1 ist bereits darauf hingewiesen worden, dass eine *laufende Welle Energie* von einem Ort zum andern *transportiert*. Solange die Wellenbewegung anhält, enthält jedes Volumenelement des Übertragungsmediums einen bestimmten Energiebetrag. Die Energie je Volumeinheit nennt man *Energiedichte*.

Bei mechanischen Wellen hat ein Volumenelement $\mathrm{d}V$ mit der Masse $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ nach (5.53) die Schwingungsenergie (kinetische plus potentielle Energie)

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\varrho\,\mathrm{d}V\hat{v}^2 = \frac{1}{2}\varrho\,\mathrm{d}V\,\hat{y}^2\omega^2 .$$

Die Energiedichte w mechanischer Wellen ist proportional dem Quadrat der Amplitude $\hat{y}$ und dem Quadrat der Kreisfrequenz ω:

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\varrho\,\hat{y}^2\omega^2 . \qquad (5.175)$$

Die Energie, die je Zeiteinheit eine Fläche $\mathrm{d}A$ senkrecht durchsetzt, also der Quotient aus Leistung und Fläche, nennt man *Intensität* oder *Energiestromdichte*. Die Intensität I lässt sich wie jede Stromdichte als Produkt von Dichte (hier: Energiedichte) und Strömungsgeschwindigkeit (hier: Ausbreitungsgeschwindigkeit) schreiben:

$$I = w\,c . \qquad (5.176)$$

Mit der Energiedichte nach (5.175) ergibt sich für die Intensität mechanischer Wellen

$$I = \frac{1}{2}c\varrho\hat{y}^2\omega^2 . \qquad (5.177)$$

Wie in Abschn. 7.2.1 gezeigt wird, lässt sich die Intensität einer Schallwelle nach (7.22) auch schreiben als

$$I = \frac{1}{2}\hat{v}\hat{p} = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{Z} = \frac{1}{2}\hat{v}^2 Z .$$

Dabei ist $\hat{v}$ die maximale Geschwindigkeit der Teilchen, die so genannte *Schnellenamplitude* und $\hat{p}$ die Amplitude des Schallwechseldrucks. Z ist die *Feldwellenimpedanz* oder kurz der *Wellenwiderstand*. Bei Schallwellen ist nach (7.15)

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \varrho c ,$$

das Produkt aus Dichte und Phasengeschwindigkeit, also eine spezifische Größe des Mediums, in dem die Welle läuft.

Allgemein wird der Quotient aus einer dynamischen Feldgröße (hier: $\hat{p}$) und einer kinematischen Feldgröße (hier: $\hat{v}$) als Wellenwiderstand oder Impedanz bezeichnet.

Die Energiedichte elektromagnetischer Wellen setzt sich aus elektrischer und magnetischer Energiedichte (Abschn. 4.5.5) zusammen:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 E^2 + \mu_\mathrm{r}\mu_0 H^2\right) . \end{aligned}$$

Die elektrische und magnetische Energiedichte sind gleich, sodass auch gilt

$$w = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 E^2 = \mu_\mathrm{r}\mu_0 H^2 . \qquad (5.178)$$

Die *Energiedichte* elektromagnetischer Wellen ist proportional zum Quadrat des elektrischen bzw. magnetischen Feldstärkevektors.

Die Energiedichte variiert längs der Ausbreitungsrichtung, wie es in Abb. 5.50 dargestellt ist. Die einzelnen Maxima verschieben sich mit Lichtgeschwindigkeit auf der x-Achse. Am festen Ort x schwankt die Energiedichte gemäß

$$w = \varepsilon_r \varepsilon_0 \hat{E}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \, .$$

Die *Energiestromdichte* S einer elektromagnetischen Welle ist nach (5.176)

$$S = \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 c = \mu_r \mu_0 H^2 c \, . \qquad (5.179)$$

Sie schwankt wie die Energiedichte räumlich und zeitlich. Der Mittelwert der Energiestromdichte, die Intensität I, ist gegeben durch

$$\overline{S} = I = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \hat{E}^2 c = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \hat{H}^2 c$$

oder, mit $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}$ (Abschn. 5.2.2.3)

$$\overline{S} = I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \hat{H}^2 \, . \qquad (5.180)$$

Ein Detektor, der die Energiestromdichte des Lichts misst, wird infolge der hohen Frequenz des Lichtes immer nur den Mittelwert $\overline{S}$ anzeigen.

Die Energiestromdichte lässt sich auch sehr einfach als Vektorprodukt der elektrischen und magnetischen Feldstärke darstellen:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \, . \qquad (5.181)$$

Der Vektor $\boldsymbol{S}$ weist in Ausbreitungsrichtung der Welle und wird *Poynting'scher Vektor* (J. H. Poynting, 1852 bis 1914) der Energiestromdichte genannt.

Auch bei elektromagnetischen Wellen sind die charakteristischen Feldgrößen E und H bzw. Spannung U und Strom I auf Leitungen durch einen Wellenwiderstand in Analogie zum Ohm'schen Gesetz miteinander verknüpft.

Tabelle 5.8 gibt einen Überblick über die Abhängigkeiten. Dabei sind die gestrichenen Größen die so genannten *Leitungsbeläge*, d. h. der längenbezogene Widerstand R' des Leiters, der längenbezogene Querleitwert G' des Isolators sowie die längenbezogene Kapazität C' und Induktivität L' der Leitung. Für eine einfache Doppelleitung mit Drahtradius r und Drahtabstand a (Abb. 4.74 und (4.127)) gilt

$$C' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi}{\ln(a/r)} \text{ und } L' = \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \, .$$

Für eine Koaxialleitung mit dem Innenleiterdurchmesser d und dem Außenleiterdurchmesser D (Abb.4.74) gilt

$$C' = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi}{\ln(D/d)} \text{ und } L' = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \, .$$

Bei der verlustlosen Freiraumübertragung im Vakuum beträgt der Wellenwiderstand

$$Z_{F,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7\ \Omega \, .$$

Dieser Wert wird als *Wellenwiderstand des Vakuums* bezeichnet.

Fällt eine Welle auf eine Grenzfläche, die zwei Medien mit unterschiedlichen Wellenwiderständen Z_1 und Z_2 voneinander trennt, so wird ein Teil der Welle an der Grenzfläche reflektiert, der andere Teil tritt durch, er wird transmittiert (Abb.7.5). Wie in Abschn. 7.2.3 hergeleitet wird, ist der *Reflexionsgrad* ϱ, der die reflektierte Intensität I_r mit der einfallenden I_e verknüpft, bei senkrechtem Einfall

$$\varrho = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \, . \qquad (5.188)$$

Tabelle 5.8 Wellenwiderstand Z bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im freien Raum auf Leitungen in komplexer Notation. $\varkappa$: elektrische Leitfähigkeit, ω: Kreisfrequenz der Welle

Wellen auf Leitungen		Wellen im freien Raum	
Definition des Wellenwiderstandes			
$\underline{Z}_\mathrm{L} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	(5.182)	$\underline{Z}_\mathrm{F} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}$	(5.183)
verlustbehaftes Übertragungsmedium			
$\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}}$	(5.184)	$\underline{Z}_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}\mu_0}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 - \mathrm{j}\varkappa/\omega}}$	(5.185)
verlustloses Übertragungsmedium			
$\underline{Z}_{\mathrm{L},0} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$	(5.186)	$\underline{Z}_{\mathrm{F},0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$	(5.187)

Die transmittierte Intensität ergibt sich aus dem *Transmissionsgrad* τ

$$\tau = \frac{I_\mathrm{t}}{I_\mathrm{e}} = 1 - \varrho = \frac{4Z_1Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2} \,. \qquad (5.189)$$

Offensichtlich kommt es zu keiner Reflexion, wenn die Wellenwiderstände beider Medien gleich sind: $Z_1 = Z_2$. Insbesondere wird eine elektromagnetische Welle auf einer Leitung nicht reflektiert, wenn die Leitung mit einem Ohm'schen *Abschlusswiderstand* $R = Z_\mathrm{L}$ abgeschlossen wird. Das ist u. a. wichtig bei Antennenleitungen. Ist das Leitungsende offen, wird die Welle am Ende reflektiert und bildet in der Überlagerung mit einer einlaufenden Welle eine stehende Welle (Absch. 5.2.4.2).

Bei den *ebenen Wellen* ist die *Energiedichte* und somit auch die Amplitude längs der Ausbreitungsrichtung *konstant*, da sich die Wellenflächen, durch die die Energie hindurchtritt, nicht ändern (Abb. 5.51 rechts). Dies bedeutet, dass (5.172) und (5.174) für ebene Wellen gelten. Bei Kugelwellen hingegen muss mit zunehmendem Abstand von der Quelle der Energieinhalt auf immer größer werdende Flächen verteilt werden. Weil die Kugelflächen mit dem Radius r quadratisch zunehmen, muss die Energiedichte mit $1/r^2$ abnehmen. Die Gleichung für eine Kugelwelle (Abb. 5.51 links) lautet also für $r > 0$:

$$y(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \,. \qquad (5.190)$$

Bei *Zylinderwellen*, bei denen die Wellenflächen die Form langer Zylinder haben, verteilt sich die von der Quelle abgestrahlte Leistung auf immer größere Zylinderoberflächen, die proportional zum Abstand r wachsen. Dadurch nimmt die Intensität mit $1/r$ ab. Die Gleichung einer Zylinderwelle lautet demnach

$$y(r,t) = \frac{B}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr + \varphi_0) \,. \qquad (5.191)$$

5.2.2.3 Phasengeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit einer Welle in einem bestimmten Medium wird bestimmt mit Hilfe der *Wellengleichung*, die zuerst von *Euler* (L. Euler, 1707 bis 1783) angegeben

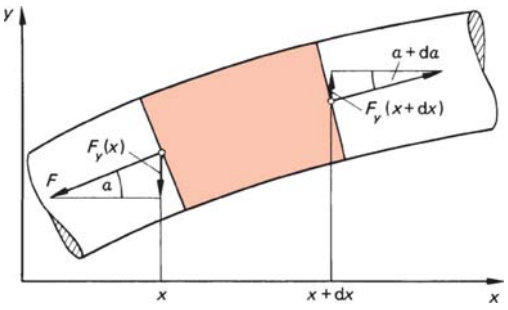


Abb. 5.52 Teilstück einer gespannten Saite

wurde. Das Aufstellen und die Lösung dieser Differentialgleichung seien am Beispiel der Wellenausbreitung auf einer gespannten Saite demonstriert.

Abbildung 5.52 zeigt einen Ausschnitt aus einer gespannten Saite, die mit der Kraft F gespannt ist. (Die Einspannstellen liegen außerhalb des Diagramms.) Die Kraft F, die beidseitig des gekennzeichneten Volumelements angreift, wird in ihre x- und y-Komponente zerlegt. Die rücktreibende Kraft, die das Volumelement in die Ruhelage $y = 0$ zurücktreibt, ist

$$\begin{aligned} F_{\text{rück}} &= -(F_y(x) - F_y(x + \mathrm{d}x)) \\ &= F\sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - F\sin\alpha \,. \end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen gilt

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$ [1)]

und

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \,.$$

Damit beträgt die Rückstellkraft

$$\begin{aligned} F_{\text{rück}} &= F\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\right) - F\frac{\partial y}{\partial x} \\ &= F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

Die Rückstellkraft beschleunigt das Massenelement der Masse $\mathrm{d}m$ nach dem Newton'schen Grundgesetz:

$$F_{\text{rück}} = \mathrm{d}m\,a = \mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

oder

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \,.$$

Mit der Querschnittsfläche A der Saite gilt für die Masse $\mathrm{d}m = \varrho A\,\mathrm{d}x$. Damit erhält man die Differentialgleichung

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \varrho A\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{A\varrho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \,. \tag{5.192}$$

Die allgemeine Lösung dieser *Wellendifferentialgleichung* ist nach *d'Alembert* eine Funktion vom Typ $y(x,t) = f(x \pm ct)$. Insbesondere ist die harmonische Welle nach (5.172) und (5.174) eine Lösung.

Zur Kontrolle bildet man die zweiten Ableitungen der Funktion $y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\hat{y}\omega^2\cos(\omega t - kx + \varphi) \,,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\hat{y}k^2\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

und setzt sie in die Wellengleichung (5.192) ein:

$$\begin{aligned} &-\hat{y}\,\omega^2\cos(\omega t - kx + \varphi) \\ &\quad = -\frac{F}{A\varrho}\hat{y}k^2\cos(\omega t - kx + \varphi) \,. \end{aligned}$$

[1)] Bei der partiellen Differentiation $\partial y/\partial x$ wird $y(x,t)$ nur nach x differenziert; die Variable t wird konstant gehalten. Der Differentialquotient $\partial y/\partial t$ wird durch Differenzieren nach t gebildet; hierbei bleibt x konstant.

Daraus ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{(2\pi f)^2}{(2\pi/\lambda)^2} = c^2 = \frac{F}{A\varrho} .$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle auf einer Saite beträgt demnach

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} . \tag{5.193}$$

Beim Vergleich mit der Wellengleichung (5.192) stellt man fest, dass der erste Faktor auf der rechten Seite von (5.192) mit dem Quadrat der Wellengeschwindigkeit identisch ist. Die *Wellengleichung* lautet deshalb allgemein

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \tag{5.194}$$

Die Wellengleichung heißt *gewöhnliche Wellengleichung*, wenn sie – wie in diesem Fall – hinsichtlich des Ortes nur die zweite Ableitung enthält.

Nach dieser Methode kann man in allen Systemen, in denen eine Wellenausbreitung möglich ist, die Wellengleichung aufstellen und somit einen Ausdruck für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle erhalten. Ohne Herleitung sind in Tabelle 5.9 Gleichungen zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit in verschiedenen Systemen angegeben.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle wird im engeren Sinne als *Phasengeschwindigkeit c* bezeichnet, die streng zu unterscheiden ist von der später noch zu definierenden *Gruppengeschwindigkeit* c_{gr} (Abschn. 5.2.4.4):

Tabelle 5.9 Phasengeschwindigkeit diverser Wellen in verschiedenen Medien

Wellentyp	Phasengeschwindigkeit
Longitudinalwellen in Gasen	$c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}} = \sqrt{\varkappa R_i T}$ (5.195)
Longitudinalwellen in Flüssigkeiten	$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}$ (5.196)
Longitudinalwellen in dünnen Stäben	$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ (5.197)
Torsionswellen in dünnen Rundstäben	$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$ (5.198)
Biegewellen in dünnen Stäben	$c = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{EI}{\varrho A}} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI}{\varrho A}}$ (5.199)
Seilwellen	$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} = \sqrt{\frac{F}{m'}}$ (5.200)
Elektromagnetische Wellen im Vakuum	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (5.201)
Elektromagnetische Wellen in Materie	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}$ (5.202)
Elektromagnetische Wellen auf Leitungen	$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ (5.203)

A Fläche
C' Kapazitätsbelag
E Elastizitätsmodul
G Schubmodul
I Flächenträgheitsmoment
K Kompressionsmodul
L' Induktivitätsbelag
m' Massenbelag
p Druck
R_i individuelle Gaskonstante
T thermodynamische Temperatur
ε_0 elektrische Feldkonstante
ε_r relative Permittivitätszahl
$\varkappa$ Isentropenexponent
λ Wellenlänge
μ_0 magnetische Feldkonstante
μ_r relative Permeabilität
ϱ Dichte
σ Zugspannung
ω Kreisfrequenz

Ein Stab gilt als dünn, wenn die Querdimensionen klein gegen die Wellenlänge sind

Die Phasengeschwindigkeit gibt an, wie schnell sich ein Schwingungszustand konstanter Phase (z. B. Wellenberg, Wellental, Nulldurchgang), also eine Wellenfläche, fortbewegt.

In der Gleichung einer ebenen Welle $y = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ wird ein Zustand konstanter Phase festgelegt durch $\omega t - kx + \varphi_0 = \text{konst.}$ Orte konstanter Phase sind $x = \frac{\omega t + \varphi_0 - \text{konst}}{k}$. Die Phasengeschwindigkeit, definiert als $c = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, beträgt dann

$$c = \frac{\omega}{k} \,. \tag{5.204}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der in (5.171) definierten Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \lambda f$.

Zur Übung

Ü 5.2-1 Schallwellen, die vom menschlichen Ohr wahrgenommen werden, haben Frequenzen im Bereich $16\,\text{Hz} \leqq f \leqq 20\,\text{kHz}$. Welche Wellenlängen haben diese Schallwellen, wenn die Schallgeschwindigkeit in Luft $c = 340\,\text{m/s}$ beträgt?

Ü 5.2-2 Eine ebene Schallwelle wird durch die Gleichung $y = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m} \cdot \sin(1\,980\,\text{s}^{-1} \cdot \text{t} - 6\,\text{m}^{-1} \cdot x)$ beschrieben.
Berechnen Sie a) die Frequenz f, b) die Wellenlänge λ, c) die Phasengeschwindigkeit c und d) die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ eines Teilchens.

Ü 5.2-3 Auf einem langen Seil wird eine Transversalwelle erzeugt, indem ein Seilende sinusförmig mit der Frequenz $f = 5\,\text{Hz}$ und derAmplitude $\hat{y} = 20\,\text{cm}$ hin- und herbewegt wird. Die Spannkraft des Seils beträgt $F = 100\,\text{N}$, der Seildurchmesser ist $d = 10\,\text{mm}$, die Dichte beträgt $\varrho = 1{,}5\,\text{kg/dm}^3$.

a) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit c der Welle?
b) Welche Wellenlänge λ tritt auf?
c) Wie lautet die Gleichung der Welle, wenn zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ die Auslenkung $y = 0$ und die Geschwindigkeit $v < 0$ ist?

Ü 5.2-4 Das menschliche Ohr kann Schallintensitäten ab etwa $I = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$ wahrnehmen. Berechnen Sie für die Frequenz $f = 1\,000\,\text{Hz}$ und die Schallgeschwindigkeit $c = 340\,\text{m/s}$ die Schwingungsamplitude $\hat{y}$ der schwingenden Partikeln. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Molekülgröße der Partikel.

Ü 5.2-5 Berechnen Sie die Amplitude der elektrischen und magnetischen Feldstärke der Lichtwelle eines Lasers, der im Pulsbetrieb die Leistung $P = 1\,\text{GW}$ an die Fläche $A = 0{,}01\,\text{mm}^2$ abgibt.

Ü 5.2-6 Ein Radiosender mit der Leistung $P = 100\,\text{kW}$ strahle Kugelwellen in den isotropen Raum. Welche Intensität hat die elektromagnetische Welle im Abstand 100 km vom Sender? (Verluste seien vernachlässigt.)

5.2.3 Doppler-Effekt

Bewegen sich eine Quelle, die eine Welle aussendet, und ein Beobachter relativ zueinander, so registriert der Beobachter die Frequenz f_B, die verschieden ist von der Frequenz f_Q, mit der die Quelle schwingt. Diese *Frequenzverschiebung* kann häufig im Straßenverkehr beobachtet werden: Bei einem hupenden Auto, das am Beobachter vorüberfährt, erniedrigt sich während des Vorbeifahrens die Tonhöhe (Frequenz) des Signaltons. Bei Schallwellen wurde dieser Effekt erstmals von Christian Doppler (1803 bis 1853) im Jahr 1842 beschrieben. Für die Berechnung der Frequenzverschiebung sind folgende Fälle zu unterscheiden: Bewegung des Beobachters, Bewegung der Quelle und beiderseitige Bewegung. „Bewegung" bedeutet in diesem Fall, dass sich die Quelle bzw. der Beobachter relativ zum Übertragungsmedium (Luft), in dem sich die Welle ausbreitet, bewegt.

a) Beobachter bewegt sich, Quelle ruht

Die Schwingungen einer Schallquelle breiten sich in Form von Kugelwellen in der Luft aus, wie Abb. 5.53a zeigt. Bewegt sich ein Beobachter mit der Geschwindigkeit v_B auf die Quelle zu, so kommen die Verdichtungen und Ver-

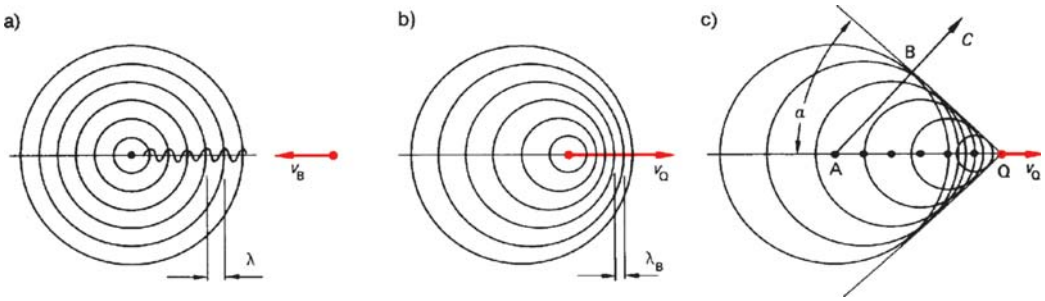


Abb. 5.53 Wellenfelder zum Doppler-Effekt: **a**) ruhende Quelle, bewegter Beobachter, **b**) bewegte Quelle, ruhender Beobachter und **c**) Mach'scher Kegel beim Überschallflug

dünnungen der Luft in rascherer Folge an sein Ohr als beim Stillstand. Der zeitliche Abstand, in dem zwei aufeinander folgende Verdichtungen beim Beobachter ankommen, beträgt $T_B = \frac{\lambda}{c+v_B}$. Damit ist die Frequenz, die der Beobachter wahrnimmt, $f_B = \frac{c+v_B}{\lambda}$. Mit der Beziehung $c = \lambda f_Q$ ergibt sich

$$f_B = f_Q\left(1 + \frac{v_B}{c}\right) . \qquad (5.205)$$

Entfernt sich der Beobachter von der Quelle, so gilt

$$f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_B}{c}\right) . \qquad (5.206)$$

Die beiden Endformeln gelten nur für den Fall, dass sich der Beobachter radial auf die Quelle zu bzw. von ihr weg bewegt. Erfolgt die Bewegung auf einem um die Quelle konzentrischen Kreis, so beobachtet man keine Doppler-Verschiebung. Für beliebige Bewegungen muss man in (5.205) und (5.206) die Radialkomponente der Beobachtergeschwindigkeit einsetzen, um die richtige Frequenz zu erhalten.

b) Beobachter ruht, Quelle bewegt sich

Abbildung 5.53b zeigt das Wellenfeld einer nach rechts laufenden Schallquelle. Da die Quelle ihren eigenen Wellenzügen nacheilt, ist der Abstand zwischen den Wellenflächen auf der Vorderseite gestaucht, auf der Rückseite gedehnt. Für einen Beobachter, auf den die Welle zuläuft, ist die wirksame Wellenlänge $\lambda_B = \lambda - v_Q T_Q$ verkürzt und die Frequenz $f_B = \frac{c}{\lambda_B}$ erhöht. Mit $c = \lambda f_Q = \frac{\lambda}{T_Q}$ ergibt sich

$$f_B = \frac{f_Q}{1 - v_Q/c} . \qquad (5.207)$$

Entfernt sich die Quelle vom Beobachter, so gilt

$$f_B = \frac{f_Q}{1 + v_Q/c} . \qquad (5.208)$$

Gleichungen (5.207) und (5.208) unterscheiden sich von (5.205) und (5.206). Bei kleinen Geschwindigkeiten gehen die entsprechenden Ausdrücke ineinander über. Bei großen Geschwindigkeiten, besonders nahe der Schallgeschwindigkeit c, ergeben sich erhebliche Abweichungen.

c) Beobachter und Quelle bewegen sich

Falls sich sowohl der Beobachter als auch die Quelle relativ zur Luft bewegen, gibt es je nach Bewegungsrichtung mehrere Möglichkeiten der Frequenzverschiebung. In Tabelle 5.10 sind alle Fälle schematisch dargestellt.

Tabelle 5.10 Doppler-Effekt: Die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten von Quelle und Beobachter sind durch Pfeile angedeutet. Die Geschwindigkeiten v_B, v_Q und c sind betragsmäßig in die Gleichungen einzusetzen

Quelle	Beobachter	beobachtete Frequenz	
•	← •	$f_B = f_Q\left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$	(5.205)
•	• →	$f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$	(5.206)
• →	•	$f_B = \frac{f_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}}$	(5.207)
← •	•	$f_B = \frac{f_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$	(5.208)
• →	← •	$f_B = f_Q\frac{c + v_B}{c - v_Q}$	(5.209)
← •	• →	$f_B = f_Q\frac{c - v_B}{c + v_Q}$	(5.210)
← •	← •	$f_B = f_Q\frac{c + v_B}{c - v_Q}$	(5.211)
• →	• →	$f_B = f_Q\frac{c - v_B}{c - v_Q}$	(5.212)

Beispiel

5.2-1 Zwei Züge fahren auf parallelen Gleisen mit der gleichen Geschwindigkeit v einander entgegen. Ein Zug gibt ein Pfeifsignal ab, das ein Reisender im anderen Zug hört. Der Reisende ist musikalisch und behauptet, beim Vorbeifahren eine Tonhöhenänderung von einer Quinte (Frequenzverhältnis 3:2) gehört zu haben. Wie schnell fahren die Züge? Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c = 340$ m/s.

Lösung

Nach (5.209) und (5.210) in Tabelle 5.9 ist die Frequenz, die der Beobachter bei Annäherung hört, $f_{B1} = f_Q\frac{c+v}{c-v}$, bei Entfernung $f_{B2} = f_Q\frac{c-v}{c+v}$. Das Frequenzenverhältnis beträgt

$$\frac{f_{B1}}{f_{B2}} = \frac{3}{2} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^2 .$$

Daraus folgt

$$v = c\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1} = 34{,}35 \text{ m/s} = 123{,}6 \text{ km/h} .$$

Die bisher angegebenen Formeln sind nicht anwendbar beim Doppler-Effekt des Lichts. Wie *Michelson* und *Morley* 1887 zeigten, bedarf es keines Übertragungsmediums (Äther) für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Für die Doppler-Verschiebung ist nicht die Geschwindigkeit relativ zu einem ruhenden Koordinatensystem, sondern nur die Relativgeschwindigkeit v von Quelle und Beobachter zueinander maßgebend. Es ergibt sich bei Annäherung (Abschn. 10.5.2)

$$f_B = f_Q\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} . \qquad (5.213)$$

Entfernen sich Quelle und Beobachter voneinander, werden bei dem Bruch in (5.213) Zähler und Nenner vertauscht.

d) Quelle bewegt sich mit Überschallgeschwindigkeit

Abbildung 5.53b zeigt das Wellenfeld, das um eine bewegte Quelle entsteht. Mit zunehmender Geschwindigkeit der Quelle nähern sich die Wellenflächen auf der Vorderseite immer mehr, bis sie schließlich für $v_Q = c$ alle durch einen Punkt gehen und die Einhüllende wie eine ebene Wand aussieht. Durchstößt die Quelle diese „Schallmauer" und fliegt mit *Überschallgeschwindigkeit*, dann stellt sich ein Wellenfeld gemäß Abb. 5.53c ein. An der Spitze des Kegels befindet sich das auslösende Objekt. Dieses muss von sich aus gar keine Schallwellen aussenden. Bei seiner Bewegung drängt es die Luftmoleküle zur Seite, erzeugt also vor sich eine Druckerhöhung, hinter sich eine Druckerniedrigung. Die Druckwellen breiten sich vom jeweiligen Entstehungspunkt kugelförmig im Raum aus. Im stationären Zustand ergibt die Überlagerung aller Kugelwellen als Einhüllende einen Kegel, den *Mach'schen Kegel* (Ernst Mach, 1838 bis 1916). Die kegelförmige Wellenfront nennt man eine *Kopfwelle*. Weil sich auf dem Kegelmantel die Druckerhöhungen addieren,

hört ein Beobachter, über den diese Stoßfront hinwegrast, einen *explosionsartigen Knall*.
Der Überschallknall tritt auf bei schnellen Geschossen und Überschallflugzeugen.
Der halbe Öffnungswinkel α des Mach'schen Kegels ergibt sich nach Abb 5.53c aus folgender Überlegung: Eine zur Zeit $t = 0$ am Punkt A erzeugte Druckwelle ist in der Zeit t mit der Schallgeschwindigkeit c von A nach B gelaufen, hat also den Weg AB, d. h. ct zurückgelegt. In der gleichen Zeit flog die Quelle von A nach Q, legte also den Weg AQ, d. h. $v_Q\, t$ zurück. Der Sinus des *Mach'schen Winkels* α ist damit

$$\sin\alpha = \frac{c}{v_Q} = \frac{1}{\mathrm{Ma}} \,. \tag{5.214}$$

Ma nennt man die *Mach'sche Zahl* (s. a. (2.269)).

Zur Übung

Ü 5.2-7 Eine Blaskapelle macht Musik im Freien. Wie schnell muss ein Autofahrer auf die Musiker zufahren, damit er das Musikstück einen Halbton (Frequenzverhältnis $\sqrt[12]{2}:1$) höher hört?

Ü 5.2-8 Ein Lokführer, der mit der Geschwindigkeit $v = 90$ km/h auf einen Tunnel zufährt, lässt ein Pfeifsignal der Frequenz $f = 500$ Hz ertönen.

a) Welche Frequenz f_B hört ein ruhender Beobachter, an dem der Zug bereits vorbeigefahren ist?
b) Am Tunneleingang wird das Signal reflektiert. Welche Frequenz f_T hört der Beobachter?
c) Wie groß ist die Frequenz f_L des reflektierten Signals für den Lokführer?

Ü 5.2-9 Beim Verkehrsradar wird ein Radarstrahl an einem entgegenkommenden Kraftfahrzeug reflektiert. Ein Detektor, der neben dem Sender steht, misst die Frequenzverschiebung des reflektierten Strahls gegenüber der Sendefrequenz.

a) Zeigen Sie, dass die relative Frequenzänderung in guter Näherung $\Delta f/f = 2v/c$ beträgt. v ist die Geschwindigkeit des Autos, c die Lichtgeschwindigkeit.
b) Wie groß ist die Frequenzänderung, wenn $v = 60$ km/h und $f = 9$ GHz ist?
c) Mit welcher Genauigkeit muss Δf gemessen werden, wenn die Geschwindigkeit $v = 60$ km/h auf 10% genau sein soll?

Ü 5.2-10 Ein Flugzeug fliegt mit der Machzahl Ma=1,5.

a) Wie groß ist der halbe Öffungswinkel des Mach'schen Kegels?
b) Das Flugzeug befinde sich zur Zeit $t = 0$ genau senkrecht über einem Beobachter in einer Höhe von $h = 5\,000$ m. Nach welcher Zeit hört der Beobachter den Überschallknall?

5.2.4 Interferenz

5.2.4.1 Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz

Laufen mehrere Wellen durch ein gemeinsames Übertragungsmedium, so kann es an bestimmten Stellen des Raumes zu Überlagerungen der einzelnen Wellen kommen. Es zeigt sich, dass im Allgemeinen das Prinzip der *ungestörten Superposition* anwendbar ist. Dabei geht man davon aus, dass sich jede Welle so ausbreitet, als ob die anderen Wellen nicht da wären; man überlagert sie dann additiv. Erscheinungen, die an einer bestimmten Stelle des Raumes durch Überlagerung von Wellen hervorgerufen werden, nennt man *Interferenz*. Zunächst soll untersucht werden, wie sich zwei in derselben Richtung laufende ebene Wellen gleicher Amplitude überlagern. Die erste Welle sei gegeben durch

$$y_1 = \hat{y}\cos(\omega t - kx) \,.$$

Die zweite Welle weise gegenüber der ersten die Phasenverschiebung φ bzw. den *Gangunterschied* $\Delta = \dfrac{\varphi}{2\pi}\lambda$ auf:

$$\begin{aligned} y_2 &= \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi) \\ &= \hat{y}\cos\left(\omega t - kx + 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right) \,. \end{aligned}$$

Die resultierende Welle, die durch Addition der beiden Teilwellen entsteht, ist wieder eine ebene Welle mit der gleichen Frequenz und Wellenlänge, aber anderer Amplitude und Phasenlage:

$$y = 2\,\hat{y}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

oder

$$y = 2\,\hat{y}\cos\left(\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t - kx + \pi\frac{\Delta}{\lambda}\right). \tag{5.215}$$

In Abb. 5.54 sind einige Sonderfälle dargestellt:

a) *Gangunterschied* $\Delta = 0$; *Phasenverschiebung* $\varphi = 0$. Die Amplitude der resultierenden Welle ist doppelt so groß wie die der Ausgangswellen. Die Nulldurchgänge liegen am selben Ort wie bei den Ausgangswellen.
b) *Gangunterschied* $\Delta = \lambda/2$; *Phasenverschiebung* $\varphi = \pi$. Die beiden Ausgangswellen schwingen an jedem Ort gegenphasig und löschen sich überall aus.
c) *Gangunterschied* $\Delta = \lambda/4$; *Phasenverschiebung* $\varphi = \pi/2$. Die Amplitude der resultierenden Welle ist $\sqrt{2}$-mal größer als die der Ausgangswellen. Die Nulldurchgänge liegen zwischen denen der Wellen y_1 und y_2.

Tabelle 5.11 Interferenzbedingungen für konstruktive und destruktive Interferenz, Ordnungszahl $m = 0, 1, 2, 3\ldots$

Bedingung für	konstruktive Interferenz	destruktive Interferenz
Gangunterschied	$\Delta = m\lambda$	$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$
Phasenverschiebung	$\varphi = m\,2\pi$	$\varphi = (2m+1)\pi$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.11 wiedergegeben. *Konstruktive Interferenz*, d. h. Verstärkung der beiden Wellen, ergibt sich, wenn der Gangunterschied ein *ganzzahliges Vielfaches* der Wellenlänge ist. *Destruktive Interferenz* – also Auslöschung – tritt ein, wenn der Gangunterschied der beiden Teilwellen ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt.

Beispiel

5.2-2 Zwei Lautsprecherboxen B_1 und B_2 sind im Abstand $d = 4$ m aufgestellt. Ein Hörer sitzt so, dass er von der Box B_1 die Entfernung $s_1 = 4{,}2$ m, von B_2 den Abstand $s_2 = 3{,}2$ m hat. Für welche Frequenzen können sich die Schallwellen am Ort des Hörers auslöschen? (Reflexionen, z. B. an den Wänden, seien vernachlässigt.)

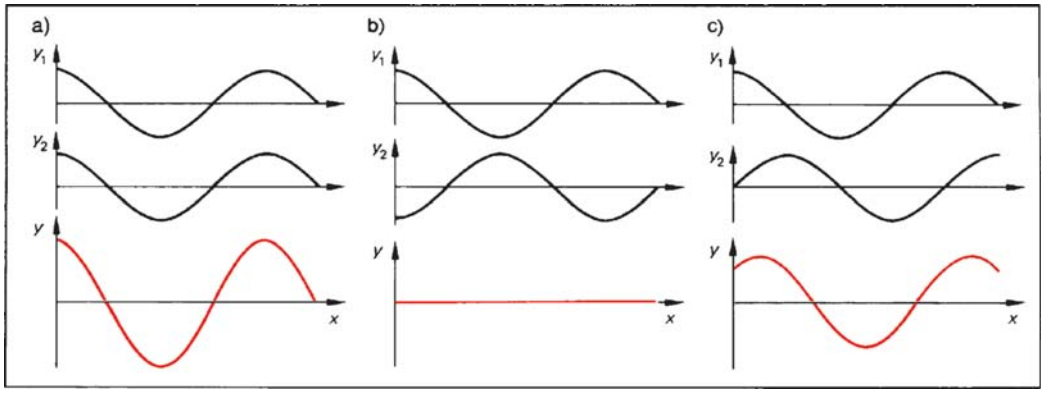


Abb. 5.54 Überlagerung ebener Wellen mit Zuständen für $t = 0$

Lösung

Bedingung für Auslöschung ist nach Tabelle 5.11 der Gangunterschied $\Delta = s_2 - s_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Daraus folgt $\lambda_m = \frac{2(s_2 - s_1)}{2m+1}$. Mit $f_m = \frac{c}{\lambda_m}$ erhält man für die sich weginterferierenden Frequenzen

$$f_m = c\frac{2m+1}{2(s_2 - s_1)} .$$

Mit der Schallgeschwindigkeit $c = 340$ m/s folgt

$$f_m = 170\ \text{Hz} \cdot (2m+1) .$$

Man erhält die Zahlenwerte $f_0 = 170$ Hz, $f_1 = 510$ Hz, $f_2 = 850$ Hz, $f_3 = 1\,190$ Hz und so fort.

Im *Interferometer* nach *Michelson* kann die Überlagerung von zwei ebenen Wellen mit beliebigem Gangunterschied beobachtet werden. Das Prinzip geht aus Abb. 5.55 hervor. Eine ebene Welle (Lichtwelle, elektromagnetische Mikrowelle, Ultraschallwelle), die der Sender S ausstrahlt, wird von der halbdurchlässigen Platte P in zwei Teilwellen zerlegt, die nach der Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 im unteren Arm des Spektrometers überlagert werden. Je nach Weglänge zwischen P und S_1 bzw. S_2 kommt es zur Interferenz mit verschiedenen Gangunterschieden. Sind die Spiegel so justiert, dass der Empfänger E ein maximales Signal registriert, so liegt konstruktive Interferenz vor, d. h., der Gangunterschied der beiden Teilwellen beträgt $\Delta = m\lambda$. Verschiebt man jetzt z. B. den Spiegel S_1 um $\lambda/4$, so verändert sich der Weg im betreffenden Arm des Spektrometers um $\lambda/2$; dies führt zur Auslöschung der interferierenden Wellen.

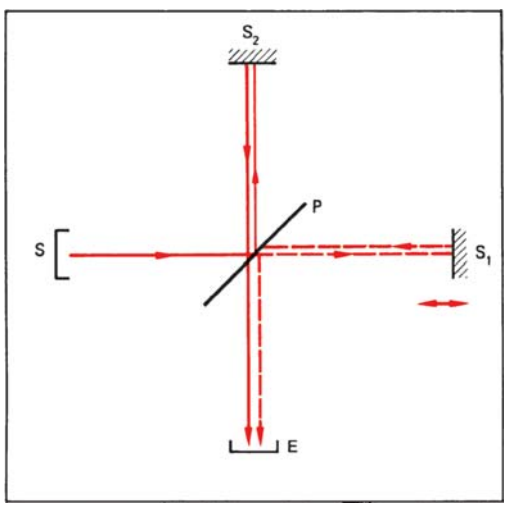


Abb. 5.55 Michelson-Interferometer, schematisch. S, Sender; P, halbdurchlässige Platte; S_1 und S_2, Spiegel; E, Empfänger

Bei kontinuierlicher Verschiebung eines Spiegels variiert daher das Empfängersignal periodisch. Ist x die Verschiebung eines Spiegels zwischen zwei Empfängermaxima, so beträgt die Wellenlänge der ebenen Welle $\lambda = 2x$. Auf diese Weise lässt sich beispielsweise die Wellenlänge der untersuchten Welle bestimmen. Nimmt man als Welle eine Lichtwelle, so kann man wegen der kleinen Wellenlänge von nur einigen hundert Nanometern ungewöhnlich präzise Längenmessungen vornehmen (Abschn. 6.4). Bereits 1889 haben *Michelson* und *Morley* darauf hingewiesen, dass die Längeneinheit „Meter" als Vielfaches einer bestimmten Lichtwellenlänge definiert werden könnte. Diese Definition wurde auch realisiert und war bis 1983 gültig.

Bei Lichtwellen gelingen Interferenzexperimente nur dann, wenn die beiden interferierenden Wellen *kohärent* sind. Einzelheiten hierüber findet man in Abschn. 6.4.

5.2.4.2 Stehende Wellen

Bringt man zwei ebene Wellen gleicher Amplitude und Frequenz, aber entgegengesetzter Laufrichtung zur Interferenz, so entsteht eine *stehende Welle*. Praktisch geschieht dies z. B. bei der Reflexion einer Welle an einer Wand. Mathematisch werden die beiden entgegengesetzt laufenden Wellen beschrieben durch

$$y_1 = \hat{y}\cos(\omega t - kx)$$

und

$$y_2 = \hat{y}\cos(\omega t + kx + \varphi) .$$

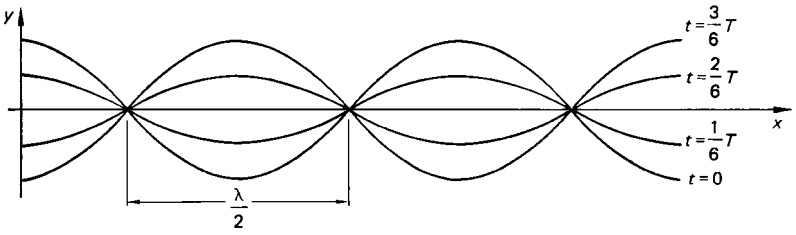


Abb. 5.56 Zustände einer stehenden Welle

Die resultierende Welle ergibt sich durch Addition der beiden Teilwellen:

$$y(x,t) = 2\hat{y}\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{5.216}$$

In Abb. 5.56 sind verschiedene Zustände der durch (5.216) beschriebenen stehenden Welle dargestellt. In regelmäßigen Abständen $\lambda/2$, entstehen *Schwingungsknoten* bzw. *Schwingungsbäuche*. Es ist zu beachten, dass diese Knoten und Bäuche ortsfest sind und sich nicht wie bei der laufenden Welle längs der x-Achse weiterbewegen.

Bei jeder Reflexion einer Welle tritt ein stehendes Wellenfeld auf. Ob sich an der Reflexionsstelle ein Schwingungsknoten oder ein Schwingungsbauch ausbildet, hängt davon ab, ob die Reflexion an einem festen oder losen Ende erfolgt. Hängt man einen mit Sand gefüllten flexiblen Schlauch an der Decke auf und versetzt ihm einen Schlag, so läuft die Ausbuchtung nach oben und nach der Reflexion am fest eingespannten Ende auf der anderen Seite wieder herunter, wie Abb. 5.57a zeigt. Die Welle erfährt also einen *Phasensprung* um $\varphi = \pi$. Ist hingegen das obere Ende des Schlauches an einem dünnen Bindfaden gemäß Abb. 5.57b befestigt, so erfolgt bei der Reflexion am losen Ende kein Phasensprung, d. h., die Auslenkung kommt auf derselben Seite zurück, auf der sie begann. Regt man nun den Schlauch mit geeigneter Frequenz zu Schwingungen an, so bildet sich eine stehende Welle aus, die bei fester Einspannung einen Knoten, bei loser Halterung einen Bauch am Schlauchende hat.

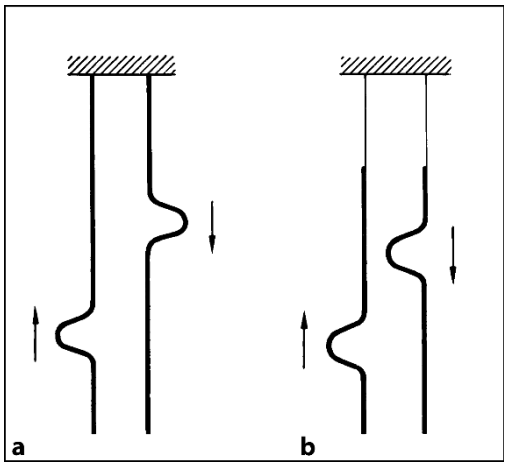


Abb. 5.57 Reflexion einer Transversalwelle am festen (**a**) und losen Ende (**b**)

Stehende Wellen treten in vielen Gebieten der Physik auf. Im Folgenden werden einige Beispiele beschrieben.

Transversalwellen auf Saiten

Spannt man eine Saite an beiden Enden ein, so bildet sich bei geeigneter Anregung eine stehende Welle aus. (In Abb. 5.58 wird eine Einspannstelle zu transversalen Schwingungen mit kleiner Amplitude angeregt.) Je nach Erregerfrequenz bilden sich verschiedene stehende Wellen mit verschiedenen Knoten aus. Da an den Einspannstellen stets ein Knoten

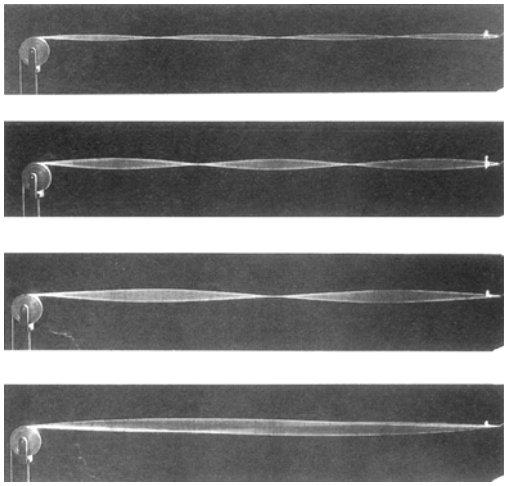


Abb. 5.58 Stehende Wellen auf einer Saite

sein muss, hat die *Grundschwingung* einen Bauch in der Saitenmitte. Die Länge l der Saite muss demnach mit der halben Wellenlänge übereinstimmen: $l = \lambda/2$. Mit $c = \lambda f$ ergibt sich für die Frequenz des Grundtons

$$f_0 = \frac{c}{2\,l}\,. \tag{5.217}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle beträgt dabei

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}}\,. \tag{5.193}$$

Die erste *Oberschwingung* hat in der Saitenmitte einen Knoten, die zweite Oberschwingung hat zwei Knoten und so fort. Die n-te Oberschwingung hat n Knoten und die Frequenz

$$f_n = (n+1)f_0\,. \tag{5.218}$$

Beispiel

5.2-3 Abbildung 5.58 zeigt Fotografien stehender Wellen auf einer Gummischnur. Die Anregung geschieht mit einem Klingeltrafo variabler Frequenz. Die Dichte der Saite beträgt $\varrho = 0{,}95\,\mathrm{kg/dm^3}$, die Spannkraft $F = 1\,\mathrm{N}$, die Saitenlänge $l = 2\,\mathrm{m}$, der Durchmesser der Saite $d = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Mit welcher Frequenz f_0 muss die Saite angeregt werden, damit sich die Grundschwingung einstellt?
b) Wie viel Knoten lassen sich beobachten, wenn die maximal einstellbare Frequenz $f_{max} = 50\,\mathrm{Hz}$ beträgt?

Lösung

a) Nach (5.217) ist die Frequenz des Grundtons

$$f_0 = \frac{c}{2\,l}\,. \quad \text{Mit}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{N}}{7{,}85\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2}\cdot 950\,(\mathrm{kg/m^3})}} = 36{,}6\,\mathrm{m/s}$$

ist die Grundfrequenz $f_0 = 9{,}15\,\mathrm{Hz}$.

b) Eine Schwingung mit n Knoten hat die Frequenz $f_n = (n+1)f_0$. Mit der Bedingung $f_n \leqq f_{\max}$ folgt $n = 4$.

Longitudinalwellen in Gasen

Longitudinale stehende Wellen in einer Luftsäule können im *Kundt'schen Rohr* sichtbar gemacht werden, wie es Abb. 5.59 zeigt. Die Luftsäule im Innern eines Glasrohrs wird z. B. mit Hilfe eines Lautsprechers in Längsschwingungen versetzt. Die Länge der schwingenden Luftsäule lässt sich mit dem verschiebbaren Stempel am linken Ende verändern. Bei passender Länge bildet sich ein stehendes Wellenfeld mit großen Schwingungsamplituden aus.

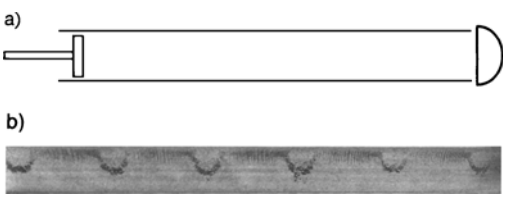


Abb. 5.59 Stehende Schallwellen im Kundt'schen Rohr: **a**) Prinzip der Anregung und **b**) Knoten und Bäuche (Fotografie)

Im Rohrinnern befindet sich Korkmehl, das an den Schwingungsbäuchen aufgewirbelt wird und an den Knoten liegen bleibt. Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt auch in diesem Fall $\lambda/2$.

Stehende Longitudinalwellen spielen auch eine große Rolle bei *Blasinstrumenten*. Als Beispiel seien die Eigenschwingungen der Orgelpfeifen näher untersucht. Bei Orgelpfeifen wird die Luft am vorderen Ende über eine Schneide eingeblasen und durch die entstehenden Wirbel die Luftsäule zu Schwingungen angeregt. Bei *offenen Pfeifen* ist das hintere Ende der Pfeife offen. Dort wird die Schallwelle reflektiert und läuft zurück. Es bildet sich eine stehende Welle aus, die an den Enden des Rohres einen Schwingungsbauch (*Druckknoten*) aufweist (*Reflexion am losen Ende*). Abbildung 5.60 zeigt einige Schwingungsformen einer offenen Pfeife. Die Longitudinalwellen werden als Transversalwellen dargestellt. Die *Grundschwingung* hat in der *Mitte* einen *Knoten*. Die Länge l der Pfeife entspricht also einer halben Wellenlänge der Schallwelle. Mit der Schallgeschwindigkeit c ergibt sich die Frequenz des Grundtons wie bei den Saitenschwingungen zu $f_0 = c/(2l)$ (5.217). Die n-te Oberschwingung hat $n+1$ Knoten und die Frequenz $f_n = (n+1)f_0$ (5.218).

Bei „*gedackten*“ *Pfeifen* ist ein Ende der Pfeife verschlossen. Am geschlossenen Ende entsteht ein Schwingungknoten, am offenen ein Schwingungsbauch. Die verschiedenen Eigenschwingungsformen sind in Abb 5.61 gezeigt. Bei der Grundschwingung ist die Länge l der Pfeife mit $\lambda/4$ identisch. Die Frequenz des Grundtones ist deshalb

$$f_0 = \frac{c}{4\,l}\,. \tag{5.219}$$

Eine gedackte Pfeife klingt also bei *gleicher Länge* um *eine Oktave tiefer* als eine offene Pfeife. Die Frequenz der n-ten Oberschwingung beträgt

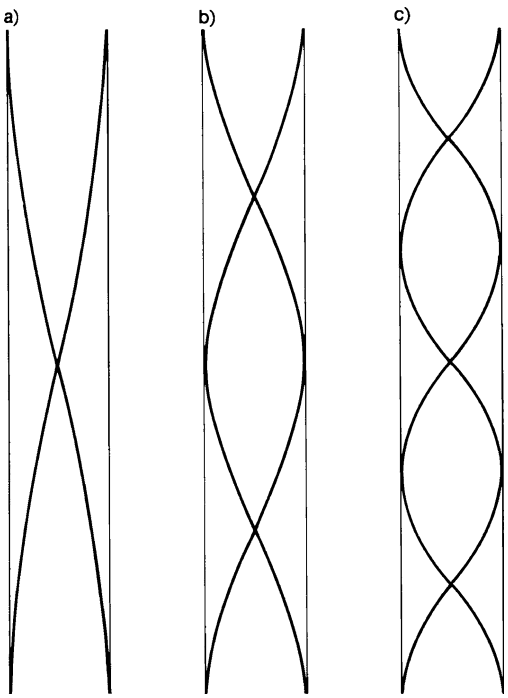


Abb. 5.60 Eigenschwingungen offener Orgelpfeifen (Verlauf der Auslenkung bzw. Geschwindigkeit): **a**) Grundschwingung, **b**) erste Oberschwingung und **c**) zweite Oberschwingung

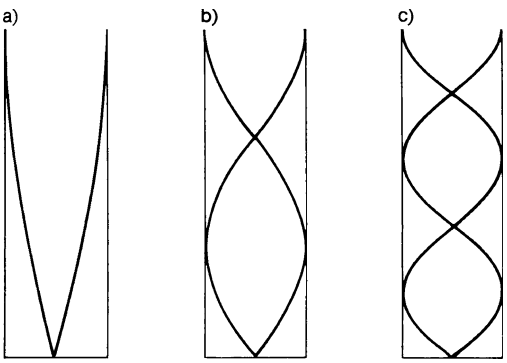


Abb. 5.61 Eigenschwingungen gedackter Orgelpfeifen (Verlauf der Auslenkung bzw. Geschwindigkeit): **a**) Grundschwingung, **b**) erste Oberschwingung und **c**) zweite Oberschwingung

$$f_n = (2n + 1)f_0 \,. \qquad (5.220)$$

Bei der gedackten Pfeife kommen im Obertonspektrum nur ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz vor.
Bei den Musikinstrumenten schwingen außer der Grundschwingung immer mehrere Oberschwingungen mit. Der typische individuelle *Klang* eines Instrumentes wird durch sein *Obertonspektrum* bestimmt (Abschn. 7.2.2, Abb. 7.16).

5.2.4.3 Beugung

Eine Welle, die auf ein Hindernis trifft, wird an dessen Rändern *gebeugt*. Sie erfährt eine Richtungsänderung und pflanzt sich auch in Richtungen fort, die innerhalb der geometrischen Schattengrenzen liegen. Die Richtungsänderung und die Ausbildung der neuen Wellenfront hinter dem Hindernis können nach dem *Prinzip von Huygens* (C. Huygens, 1629 bis 1695) ermittelt werden: Alle Punkte einer Wellenfläche schwingen mit gleicher Phase. Sie haben dieselbe Frequenz wie der Wellenerreger und unterscheiden sich demnach nicht grundsätzlich von diesem. Nach Huygens kann nun jeder Punkt einer Wellenfläche als Ausgangspunkt einer sog. *Elementarwelle* (Kugelwelle)

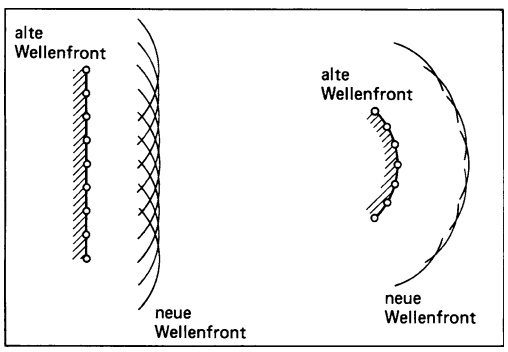


Abb. 5.62 Beispiele zum Huygens'schen Prinzip

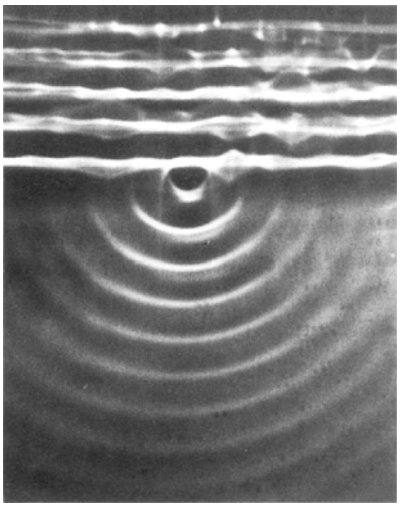


Abb. 5.63 Elementarwelle hinter einer spaltförmigen Öffnung

gedacht werden. Werden zu einem bestimmten Zeitpunkt von allen Punkten einer Wellenfläche Elementarwellen ausgesandt, so ergibt sich die *Wellenfläche* zu einem späteren Zeitpunkt als *Einhüllende* aller Elementarwellen. Abbildung 5.62 zeigt Beispiele für die Anwendung des Huygens'schen Prinzips.
Das Huygens'sche Prinzip der Elementarwellen wurde von A. J. Fresnel (1788 bis 1827) erweitert. Er zeigte, dass die Schwingung eines beliebigen Punktes im Wellenfeld dadurch zustande kommt, dass sämtliche Elementarwellen, die von einer Wellenfläche ausgehen, in dem betreffenden Punkt überlagert werden. Das *Huygens-Fresnel'sche Prinzip* erwies sich als außerordentlich fruchtbar; denn man ist damit in der Lage, alle Beugungserscheinungen zu erklären.
Die Existenz der Elementarwellen kann man durch folgenden Versuch sichtbar machen: Lässt man – wie in Abb. 5.63 gezeigt – ebene Wasserwellen auf eine Wand mit einer kleinen Öffnung zulaufen, so bildet sich hinter der Öffung eine kreisförmige Elementarwelle aus. Hat die Wand zwei oder mehr Öffnungen, so

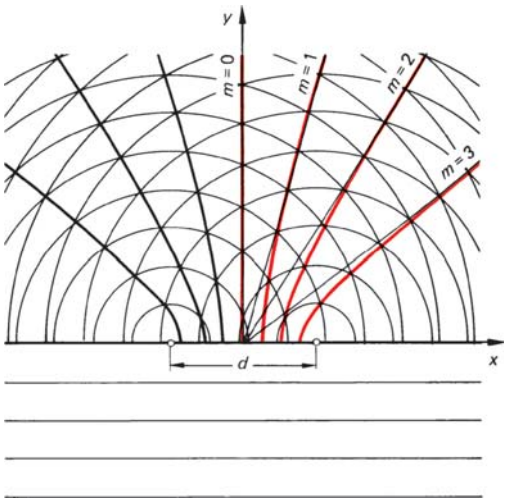


Abb. 5.64 Beugung am Doppelspalt

ergibt sich das Wellenfeld hinter den Hindernissen durch *Interferenz der Elementarwellen*. Die Beugung an einem Doppelspalt soll mit Hilfe von Abb. 5.64 genauer untersucht werden. Von unten her bewege sich eine ebene Welle auf ein Hindernis zu, das im Abstand d zwei spaltförmige Öffnungen hat. Von diesen Öffnungen aus werden Elementarwellen in den Raum hinter dem Hindernis abgestrahlt.

Symbolisieren die *konzentrischen Kreise* die *Wellenberge* der Elementarwellen, so erhält man Verstärkung immer am Schnittpunkt zweier Kreise, weil dort der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Die Verbindungslinien aller dieser Orte mit konstruktiver Interferenz ergeben als Interferenzmuster eine Schar *konfokaler Hyperbeln*, die der Hyperbelgleichung $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ genügen, mit $a = m(\lambda/2)$ und $b^2 = (d/2)^2 - a^2$.

Die *Ordnungszahl* m gibt den Gangunterschied der interferierenden Kugelwellen in Vielfachen der Wellenlänge λ an. Die Intensitätsmaxima nullter Ordnung ($m = 0$) liegen auf der y-Achse. Aus geometrischen Gründen ist die Ordnungszahl beschränkt auf Werte $m \leqq d/\lambda$ (in Abb. 5.64 auf $m = 0$ bis $m = 3$). Rechts sind die Asymptoten eingezeichnet, an die sich die Hyperbeln in großem Abstand von den Spalten (Fernfeld) anschmiegen. Die Winkel der Asymptoten zur y-Achse betragen

$$\sin \alpha_m = m \frac{\lambda}{d} . \qquad (5.221)$$

Bei den bisherigen Betrachtungen war die Spaltöffnung sehr viel kleiner als die Wellenlänge. Der Fall, dass die Wellenlänge kleiner ist als die Öffnung, ist vor allem in der Optik häufig anzutreffen (Abschn. 6.4).

5.2.4.4 Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz

Die ebene Welle $y = \hat{y} \cos(\omega t - kx)$ ist sowohl räumlich als auch zeitlich unendlich ausgedehnt, d. h., sie hat weder Anfang noch Ende. Reale physikalische Wellen sind begrenzt. Beispielsweise laufen bei der digitalen Nachrichtentechnik Wellenzüge endlicher Länge auf elektrischen Leitungen. Ein solches *Wellenpaket* ist schematisch in Abb. 5.65 wiedergegeben. Ein Wellenpaket kann mathematisch nicht durch die genannte Gleichung beschrieben, sondern es muss nach dem Satz von Fourier als Summe bzw. Integral über unendlich viele k-Werte (Wellenzahlen) dargestellt werden. Die wesentlichen Eigenschaften eines Wellenpakets können am Beispiel der *Schwebungsgruppe* diskutiert werden, die entsteht, wenn zwei ebene Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz und Wellenlänge überlagert werden:

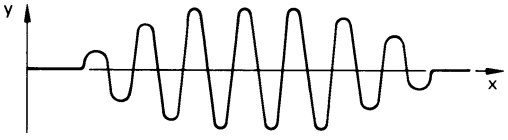


Abb. 5.65 Wellenpaket endlicher Länge

$$y_1 = \hat{y}\cos(\omega_1 t - k_1 x)\,,$$
$$y_2 = \hat{y}\cos(\omega_2 t - k_2 x)\,.$$

Die Addition der beiden Teilwellen ergibt

$$y = 2\hat{y}\cos(\omega\, t - kx)\cos(\Delta\omega\, t - \Delta k\, x) \qquad (5.222)$$

mit

$\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ als der mittleren Kreisfrequenz,

$k = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ als der mittleren Wellenzahl,

$\Delta\omega = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ sowie

$\Delta k = \dfrac{k_1 - k_2}{2}$.

Der *erste Faktor* in (5.222) stellt eine *laufende Welle* dar, deren Frequenz und Wellenzahl praktisch mit den Werten der Ausgangswellen identisch sind. Die Phasengeschwindigkeit dieser Welle beträgt

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Der *zweite Faktor* ist verantwortlich für eine *langwellige Modulation* der Amplitude mit der Ausbildung von *Wellengruppen*. Abbildung 5.66 zeigt zwei Momentbilder der Funktion von (5.222) mit von oben nach unten fortschreitender Zeit. Das Maximum der Wellengruppe, durch einen Pfeil gekennzeichnet, bewegt sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* c_{gr}, die man auf folgende Weise berechnen kann: Die Einhüllende der Gruppe entspricht dem langwelligen Anteil von (5.222):

$$y = 2\hat{y}\cos(\Delta\omega\, t - \Delta k\, x)\,.$$

Ein Zustand konstanter Phase dieser Funktion wird beschrieben durch $\Delta\omega\, t - \Delta k\, x = \text{konst.}$ Orte konstanter Phase sind

$$x = \frac{\Delta\omega\, t - \text{konst.}}{\Delta k}\,.$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit der Gruppe:

$$c_{gr} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}\,.$$

Für beliebige Wellenpakete, die durch *Fourier-Synthese* erzeugt werden, ist die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\,. \qquad (5.223)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Hüllkurve einer Wellengruppe weiterbewegt und somit auch die Geschwindigkeit, mit der die Energie transportiert wird.

Die Gruppengeschwindigkeit ist von großer praktischer Bedeutung. Wie man leicht zeigen kann, hängt die Gruppengeschwindigkeit c_{gr} mit der Phasengeschwindigkeit c über die Beziehung

$$c_{gr} = c - \lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} \qquad (5.224)$$

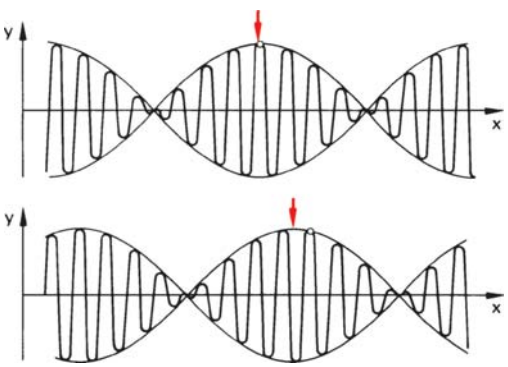


Abb. 5.66 Zustände einer Wellengruppe. Der Pfeil kennzeichnet das Maximum der Gruppe; der kleine Kreis einen Zustand konstanter Phase

zusammen. Aus dieser Gleichung erkennt man, dass Gruppen- und Phasengeschwindigkeit nur dann gleich sind, wenn die Phasengeschwindigkeit c nicht von der Wellenlänge λ abhängt, d. h. wenn $\mathrm{d}c/\mathrm{d}\lambda = 0$ ist. Bei sehr vielen praktischen Anwendungen hängt jedoch die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge ab. Dies nennt man *Dispersion*. Sie bewirkt, dass ein Wellenpaket im Laufe der Zeit seine Form verändert – es *zerläuft*.

Man unterscheidet hierbei drei Fälle:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} > 0,\ c_{\mathrm{gr}} < c, \text{ normale Dispersion;}$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} < 0,\ c_{\mathrm{gr}} > c, \text{ anomale Dispersion;}$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} = 0,\ c_{\mathrm{gr}} = c, \text{ keine Dispersion.}$$

Die in Abb. 5.66 dargestellte Welle zeigt normale Dispersion: Ein Zustand konstanter Phase, durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet, bewegt sich rascher als das Maximum der Wellengruppe.

In der Optik wird die Lichtgeschwindigkeit c in einem Medium über den *Brechungsindex* n ausgedrückt (Abschn. 6.2.3.1):

$$c = \frac{c_0}{n},$$

c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Dieser Brechungsindex zeigt üblicherweise Dispersion, d. h., er hängt von der Lichtwellenlänge ab: $n = n(\lambda)$.

Wird für die Gruppengeschwindigkeit von Lichtwellen ein *Gruppenindex* definiert gemäß

$$n_{\mathrm{gr}} = \frac{c_0}{c_{\mathrm{gr}}},$$

dann besteht für diese beiden Brechungsindizes folgender Zusammenhang

$$n_{\mathrm{gr}} = n - \lambda \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{5.225}$$

In der optischen Nachrichtentechnik laufen modulierte Lichtsignale auf Glasfasern. Die für die Signalübertragung maßgebliche Geschwindigkeit ist die Gruppengeschwindigkeit, die mit Hilfe des Gruppenindex bestimmt wird.

Beispiel

5.2-4 In der Nachrichtentechnik werden elektromagnetische Wellen häufig auf Hohlleitern übertragen. Schwingt nach Abb. 5.67 der elektrische Feldvektor $\boldsymbol{E}$ in z-Richtung und läuft die Welle in y-Richtung, dann gilt folgende *Dispersionsrelation*:

$$\omega(k) = c_0 \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Für Wellen dieser Art ist die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zu bestimmen.

Lösung

Aus der Dispersionsrelation folgt für die Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_0}{2af}\right)^2}} \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\mathrm{gr}}}{f}\right)^2}}.$$

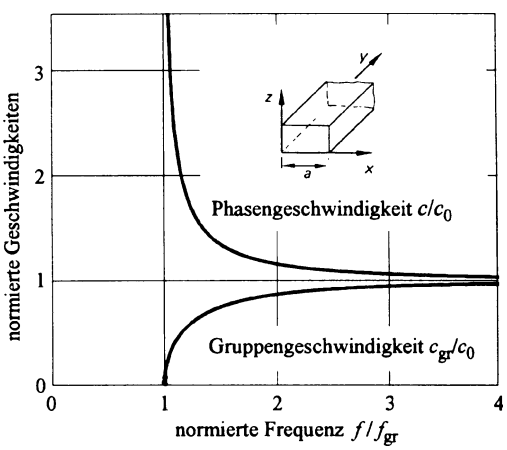


Abb. 5.67 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem Hohlleiter

Eine Wellenausbreitung ist offensichtlich nur möglich, wenn die Frequenz f größer ist als eine *Grenzfrequenz* f_{gr}:

$$f > f_{gr} = \frac{c_0}{2a} .$$

Zudem ist die Phasengeschwindigkeit c stets größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 (Abb. 5.67). Dies ist kein Widerspruch zur Relativitätstheorie, nach der weder materielle Körper schneller sein können als die Vakuumlichtgeschwindigkeit, noch Energie mit einer größeren Geschwindigkeit übertragen werden kann. Tatsächlich werden Signale (Energie) auf dem Hohlleiter mit der Gruppengeschwindigkeit übertragen, die stets kleiner ist als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Aus der Dispersionsrelation folgt für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{gr}}{f}\right)^2} .$$

Für das Produkt der beiden Geschwindigkeiten gilt:

$$c_{gr} \cdot c = c_0^2 .$$

Zur Übung

Ü 5.2-11 Zwei Wellen gleicher Frequenz, Schwingungsrichtung und Laufrichtung überlagern sich. Sie werden beschrieben durch

$$y_1 = 3 \cdot 10^{-4}\,\text{m} \cdot \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{und}$$

$$y_2 = 2 \cdot 10^{-4}\,\text{m} \cdot \cos\left(\omega t - kx + \frac{2\pi}{3}\right) .$$

Ermitteln Sie a) die resultierende Amplitude $\hat{y}$, b) die Phasenverschiebung der resultierenden Welle gegenüber y_1.

Ü 5.2-12 Ein Stahlstab mit der Dichte $\varrho = 7{,}83\ \text{kg/dm}^3$ und der Länge $l = 1$ m ist in der Mitte fest eingespannt. Durch Reiben erzeugt man eine Longitudinalschwingung mit der Grundfrequenz $f_0 = 2\,527$ Hz.

a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit im Stab?
b) Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul des Stahls.
c) Welche Frequenzen haben die möglichen Obertöne?

Ü 5.2-13 Zwei ebene ungedämpfte Wellen laufen in gleicher Richtung und überlagern sich. Die Frequenzen sind $f_1 = 30$ Hz und $f_2 = 33$ Hz. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist für beide $c_1 = c_2 = 330$ m/s.

a) Welchen räumlichen Abstand haben zwei aufeinander folgende Wellengruppen?
b) Wie groß ist die Schwebungsfrequenz am festen Ort eines Detektors?
c) Wie groß ist die Gruppengeschwindigkeit einer Schwebungsgruppe ?

Ü 5.2-14 Der Brechungsindex von Quarzglas zeigt normale Dispersion. Im Kern einer Glasfaser werden folgende Werte gemessen:

bei $\lambda_1 = 840$ nm: $n_1 = 1{,}47393$,
bei $\lambda_2 = 860$ nm: $n_2 = 1{,}47359$.

Bestimmen Sie näherungsweise, mit welcher Geschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) sich der Schwerpunkt eines kurzen Lichtpulses auf einer Glasfaser ausbreitet. Der Lichtblitz stammt von einem GaAlAs-Laser, der bei der Wellenlänge $\lambda = 850$ nm emittiert. Wie groß ist der Gruppenindex?

Kapitel 6
Optik

6

6

6 Optik

6.1 Einführung 491
6.2 Geometrische Optik 492
6.2.1 Lichtstrahlen 492
6.2.2 Reflexion des Lichtes 493
6.2.3 Brechung des Lichtes 499
6.2.4 Abbildung durch Linsen 510
6.2.5 Blenden im Strahlengang 522
6.2.6 Abbildungsfehler 523
6.2.7 Optische Instrumente 523
6.3 Radio- und Fotometrie 534
6.3.1 Einführung 534
6.3.2 Strahlungsphysikalische Größen 534
6.3.3 Lichttechnische Größen 542
6.3.4 Farbmetrik 545
6.4 Wellenoptik 549
6.4.1 Interferenz und Beugung 549
6.4.2 Polarisation des Lichtes 578
6.5 Quantenoptik 588
6.5.1 Lichtquanten 588
6.5.2 Dualismus Teilchen–Welle 592
6.5.3 Wärmestrahlung 593
6.5.4 Laser 596
6.5.5 Materiewellen 600
6.6 Abbildung mikroskopischer Objekte 603
6.6.1 Beugungsbegrenzte Abbildung 603
6.6.2 Überwindung der Beugungsbegrenzung 606

6 Optik

6.1 Einführung

Die Optik ist die Lehre vom Licht und befasst sich mit den Erscheinungen, die durch unser Sinnesorgan Auge wahrgenommen werden. Die Gliederung der Optik in ihre historisch gewachsenen Teilgebiete ist in Abb. 6.1 schematisch dargestellt.

Die Auffassung über das Wesen des Lichtes änderte sich mehrmals im Lauf der Zeit. Von *Newton* wurde 1672 eine *Korpuskulartheorie* entwickelt. Ihr zufolge sendet eine Lichtquelle kleine Korpuskeln aus, die sich mit großer Geschwindigkeit geradlinig fortbewegen, bis sie entweder direkt oder nach der Reflexion an Gegenständen ins Auge gelangen und dort Sinnesreize auslösen. Mit seiner Korpuskulartheorie war *Newton* in der Lage, die Reflexion und Brechung von Licht zu erklären.

Die Phänomene der *Beugung* und *Interferenz* des Lichtes konnten nur mit der zuerst von *Huygens* (1678) entwickelten *Wellentheorie* des Lichtes erklärt werden, die später durch die Arbeiten von *Young* (1802) erhärtet wurde. War man zunächst noch der Meinung, dass es sich um elastische Longitudinalwellen in einem das Weltall erfüllenden „Äther" handelte, so wurde nach der Entdeckung der Polarisation des Lichtes durch *Malüs* (1808) von *Fres-*

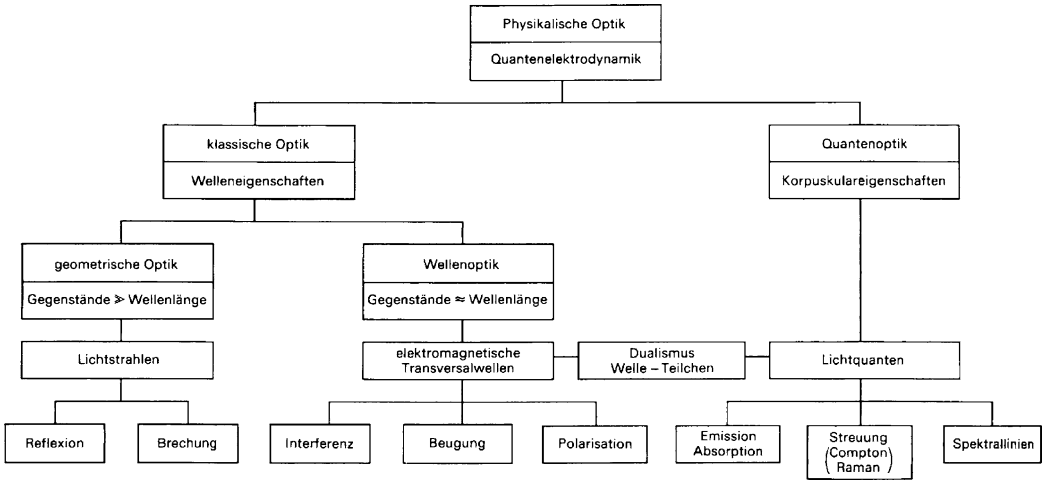


Abb. 6.1 Strukturbild physikalische Optik

nel (1815) der Schluss gezogen, dass das Licht eine transversale Welle darstellt.
Die Natur der Lichtwellen als elektromagnetische Transversalwellen wurde schließlich von *Maxwell* (1865) erkannt. Die *Maxwell'schen Gleichungen* haben elektromagnetische Wellen als Lösung, die sich mit Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ausbreiten. Es gelang, alle Gesetze der Optik aus den Grundgleichungen der Elektrodynamik herzuleiten, sodass die Optik zu einem Teilgebiet der Elektrodynamik wurde.
Abbildung 6.2 zeigt die Einordnung des sichtbaren Lichtes in das Gesamtspektrum

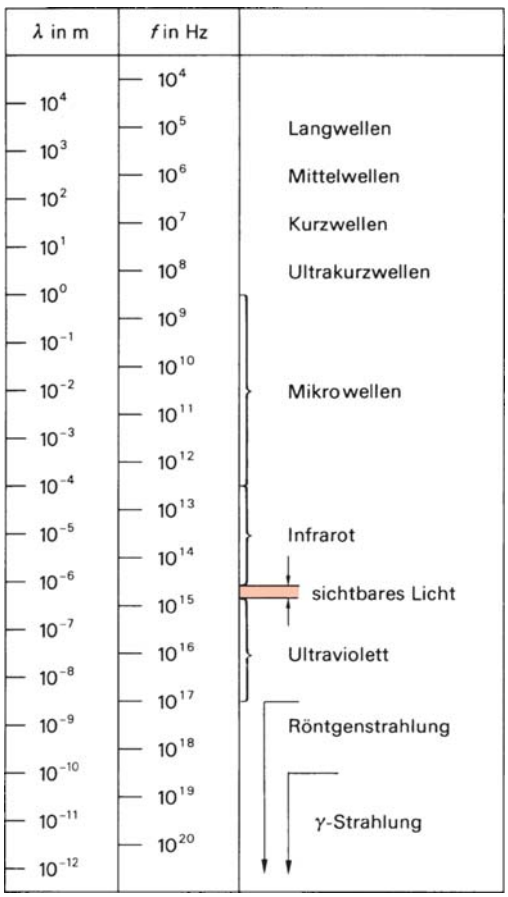


Abb. 6.2 Wellenlängen λ und Frequenzen f im Spektrum der elektromagnetischen Wellen

der elektromagnetischen Wellen. Das sichtbare Spektrum liegt im Wellenlängenbereich $\lambda = 380$ nm bis $\lambda = 780$ nm. Die Wellenlänge λ ist mit der Frequenz f und der Lichtgeschwindigkeit c durch $c = \lambda f$ verknüpft (Abschn. 5.2.1). Mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792{,}458$ km/s ergeben sich Frequenzen des sichtbaren Lichts im Bereich $f = 3{,}84 \cdot 10^{14}$ Hz bis $7{,}89 \cdot 10^{14}$ Hz. Unser Auge ist demnach in einem Frequenzintervall von einer Oktave empfindlich.
Nachdem Ende des 19. Jahrhunderts die Wellentheorie des Lichtes etabliert war, wurden um die Jahrhundertwende Experimente bekannt, die mit der Wellentheorie nicht interpretierbar waren. Diese Schwierigkeiten treten immer dann auf, wenn Licht und Materie in Wechselwirkung treten, z. B. bei der Absorption und Emission von Licht. Einen Ausweg fand *Einstein* (1905) mit der Einführung seiner *Lichtquantenhypothese*. Danach soll Licht aus einzelnen Lichtquanten bestehen, die Energie in ganzen Paketen, d. h. quantenhaft, mit Materie austauschen. Je nach Experiment wurde deshalb Licht entweder als Teilchenstrom oder als elektromagnetische Welle interpretiert. Diese Zweigleisigkeit der Beschreibung wurde mit dem Begriff *Welle-Teilchen-Dualismus* belegt. Erst in der *Quantenoptik* bzw. *Quantenelektrodynamik* wurde eine theoretische Beschreibung gefunden, die beide Aspekte vereinigt.

6.2 Geometrische Optik

6.2.1 Lichtstrahlen

Die *geometrische* Optik oder *Strahlenoptik* fußt auf der Prämisse: Lichtstrahlen breiten sich im homogenen Medium geradlinig aus. Der Begriff der Strahlen stammt aus der *Korpuskulartheorie*, wo der Weg einer Korpuskel durch einen geraden Strahl beschrieben wird.

Auch in der Wellentheorie hat der Lichtstrahl eine sinnvolle Bedeutung; er entspricht der Normalen auf einer Wellenfläche.
Abbildung 6.3a zeigt eine punktförmige Lichtquelle mit konzentrischen kugelförmigen Wellenflächen. Die eingezeichneten Strahlen, die von der Lichtquelle ausgehen, stehen senkrecht auf den Wellenflächen. Die Gesamtheit aller Strahlen, die von der Blende begrenzt werden, nennt man ein *Strahlenbündel*. Wenn die Strahlen – wie in diesem Fall – von einem Punkt ausgehen bzw. sich in einem Punkt schneiden, ist das Bündel *homozentrisch*.
Bei ebenen Wellen, die z. B. von Lasern ausgesandt werden oder in großer Entfernung von Lichtquellen vorliegen, sind die Strahlen parallel (Abb. 6.3b). Der Pfeilrichtung an den Strahlen kommt keine besondere Bedeutung zu, denn der Lichtweg ist grundsätzlich umkehrbar. Lichtstrahlen, die sich durchkreuzen, beeinflussen sich gegenseitig nicht. Ein Strahl verläuft also immer so, als ob keine anderen Strahlen vorhanden wären.
Die geometrische Optik ist anwendbar, solange die Dimension der Gegenstände, Linsen, Spiegel, Blenden usw. groß sind gegenüber der Wellenlänge des Lichtes. Sind dagegen die Abmessungen in der Größenordnung der Wellenlänge, dann werden Beugungseffekte wirksam, die mit der Wellenoptik erklärt werden müssen (Abb. 6.1).

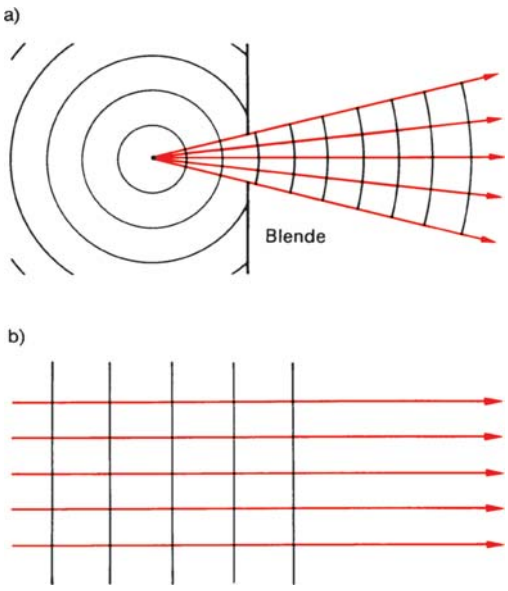


Abb. 6.3 Strahlen- und Wellenflächen:
a) Homozentrisches Strahlenbündel und Kugelwellen, **b**) paralleles Strahlenbündel und ebene Wellen

6.2.2 Reflexion des Lichtes

6.2.2.1 Reflexion an ebenen Flächen

Fällt ein Lichtstrahl nach Abb. 6.4 auf eine spiegelnde Fläche, so wird der Strahl reflektiert. Die Normale zur Fläche durch den Auftreffpunkt wird als *Einfallslot* bezeichnet. Es gilt das *Reflexionsgesetz*:

> Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Einfallslot liegen in einer Ebene; der Einfallswinkel ε und der Reflexionswinkel ε_r sind gleich: $\varepsilon_r = -\varepsilon$.

Das Reflexionsgesetz, das von *Euklid* 300 v. Chr. gefunden wurde, ist theoretisch leicht er-

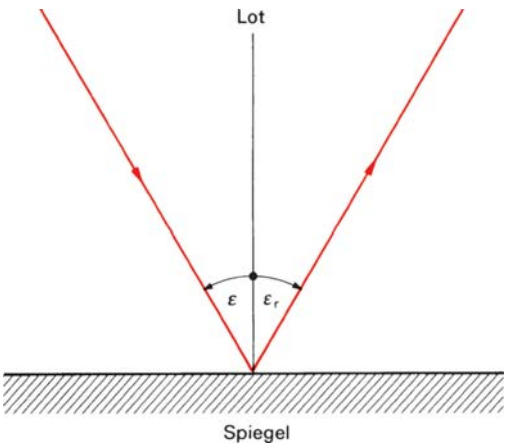


Abb. 6.4 Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel ε ist gleich dem Reflexionswinkel ε_r

klärbar. In Newtons Korpuskulartheorie folgt diese Gesetzmäßigkeit aus dem elastischen Stoß eines leichten Teilchens an einer schweren Wand. Im Wellenbild ergibt sich das Reflexionsgesetz zwanglos aus der Konstruktion Huygens'scher Elementarwellen an der Auftreffstelle (Abschn. 5.2.4.3).

Beispiel

6.2-1 Zwei ebene Spiegel bilden nach Abb. 6.5 einen *Winkelspiegel* mit dem Öffnungswinkel γ. Ein Lichtstrahl, der senkrecht zur gemeinsamen Kante verläuft, wird durch beide Spiegel reflektiert. Wie groß ist der Ablenkungswinkel δ? Was ergibt sich speziell für $\gamma = 45°$ und $\gamma = 90°$?

Lösung

Die Winkelsumme im Dreieck ABC beträgt

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) + \gamma = 180° . \qquad (1)$$

Im Dreieck ABD gilt

$$2\alpha + 2\beta + (180° - \delta) = 180° . \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\delta = 2\gamma$. Für $\gamma = 45°$ ist der Ablenkwinkel $\delta = 90°$. Ein solcher Winkelspiegel wird in der Geodäsie benutzt, um senkrechte Richtungen zu bestimmen. Für $\gamma = 90°$ wird der Ablenkungswinkel $\delta = 180°$, d. h., der einfallende und der reflektierte Strahl sind parallel.

Aus einem 90°-Winkelspiegel wird ein *Tripelspiegel*, wenn man noch eine dritte spiegelnde Fläche senkrecht zu den beiden vorhandenen aufbringt. (Die Flächen stoßen aneinander wie bei einer Würfelecke.) Ein Lichtstrahl, der in einen Tripelspiegel fällt, wird stets so reflektiert, dass der reflektierte Strahl parallel zum einfallenden verläuft. Außer als Rückstrahler an Fahrzeugen wird der Tripelspiegel bei der optischen Entfernungsmessung eingesetzt. Dabei wird ein Lichtpuls von einem Sender ausgestrahlt, an einem Tripelspiegel reflektiert und mit einem Detektor nachgewiesen, der unmittelbar beim Sender steht. Die Entfernung zwischen Sender und Tripelspiegel ergibt sich aus der Laufzeit des Lichtpulses und der Lichtgeschwindigkeit.

Bildentstehung beim Spiegel

Befindet sich ein Gegenstand vor einem Spiegel, so kann ein Beobachter, der in den Spiegel blickt, ein Bild des Gegenstandes sehen. In Abb. 6.6 fällt das Licht einer punktförmigen Lichtquelle L auf einen ebenen Spiegel. Jeder Lichtstrahl wird nach dem Reflexionsgesetz reflektiert. Die gestrichelten Verlängerungen der Strahlen treffen sich hinter dem Spiegel im Punkt L′. Für einen Beobachter scheinen alle

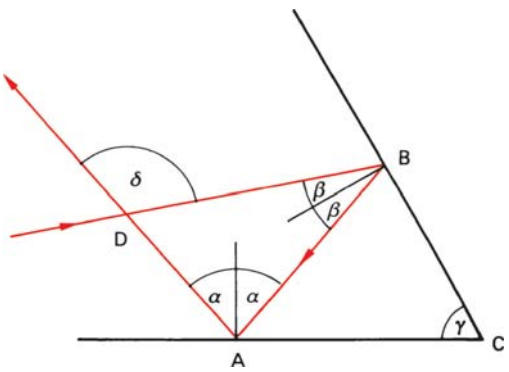


Abb. 6.5 Strahlengang im Winkelspiegel (zu Beispiel 6.2-1)

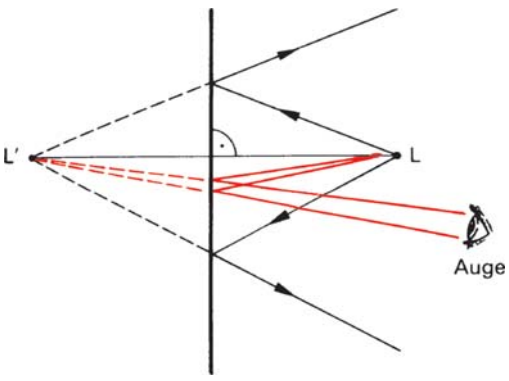


Abb. 6.6 Spiegelbild einer punktförmigen Lichtquelle L in einem Spiegel

Strahlen vom Punkt L′ herzukommen. L′ ist daher das Bild der Lichtquelle L.

> Gegenstandspunkt L und Bildpunkt L′ liegen auf einer Normalen zur Spiegelfläche und haben den gleichen Abstand vom Spiegel.

Es handelt sich in diesem Fall um ein *virtuelles* oder *scheinbares* Bild, weil sich nicht die Strahlen selbst, sondern nur ihre Verlängerungen schneiden. Ein virtuelles Bild kann im Gegensatz zu einem *reellen* Bild, bei dem sich die Strahlen wirklich schneiden, nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht werden.

Zur Übung

Ü 6.2-1 Leiten Sie das Reflexionsgesetz her mit Hilfe der Huygens'schen Elementarwellen (Abschn. 5.2.4.3). Hinweis: Wenn eine ebene Welle auf einen Spiegel fällt, werden an den Schnittpunkten der Wellenflächen mit der Spiegelebene Kugelwellen ausgesandt, deren Einhüllende die neue Wellenfront bildet.

Ü 6.2-2 Ein Winkelspiegel hat den Öffungswinkel $\gamma = 72°$. Konstruieren Sie sämtliche Bilder einer punktförmigen Lichtquelle, die innerhalb des Spiegels steht. Wie viele Bilder ergeben sich?

6.2.2.2 Reflexion an gekrümmten Flächen

Wenn ein Lichtstrahl auf eine gekrümmte spiegelnde Fläche fällt, so ist nach dem Reflexionsgesetz der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel. Die gekrümmte Fläche wird im Auftreffpunkt des Lichtstrahls durch ihre Tangentialebene ersetzt, das Einfallslot ist die Normale durch den Berührpunkt.

Fällt Licht gemäß Abb. 6.7 parallel zur *optischen Achse* (Rotationssymmetrieachse) auf einen *Parabolspiegel*, so schneiden sich alle Strahlen in einem Punkt, dem *Brennpunkt* F. Sitzt dagegen im Brennpunkt eine punktförmige Lichtquelle, so verlassen wegen der Umkehrbarkeit des Strahlengangs alle Strahlen

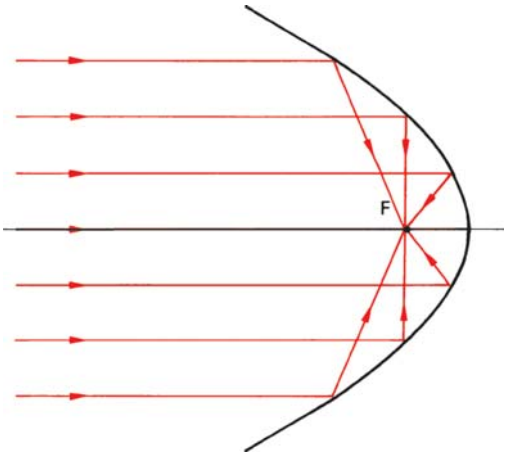


Abb. 6.7 Strahlengang bei einem Parabolspiegel mit Brennpunkt F

als paralleles Lichtbündel den Parabolspiegel. Parabolspiegel werden bei Scheinwerfern benutzt, um eine möglichst gute Bündelung des Lichtes zu erhalten. Selbst bei geometrisch idealer Paraboloidform sind bei einem Scheinwerfer nicht alle Strahlen parallel, weil die Lichtquelle (Lampenwendel) nicht punktförmig ist, sondern eine endliche Ausdehnung hat.

Für die Praxis sind *sphärische Hohl-* oder *Konkavspiegel* von größerer Bedeutung als die Parabolspiegel. Ein sphärischer Hohlspiegel ist eine innen verspiegelte Kugelkalotte. Fällt entsprechend Abb. 6.8a ein Lichtbündel parallel zu optischen Achse CS auf den Hohlspiegel, so können sich infolge der anderen Krümmungsverhältnisse nicht alle Strahlen in einem Punkt treffen wie beim Parabolspiegel.

Die Reflexion eines achsenparallel einfallenden Strahls erkennt man in der oberen Hälfte von Abb. 6.8a. Das Einfallslot ist die Verbindung zwischen Auftreffpunkt A und Kreismittelpunkt C. In der unteren Hälfte von Abb. 6.8a fällt ein achsenparalleles Lichtbündel auf den Spiegel. Die Einhüllende aller reflektierten Strahlen ist eine geschlossene Kurve, die *Katakaustik*. In Abb. 6.8b ist das

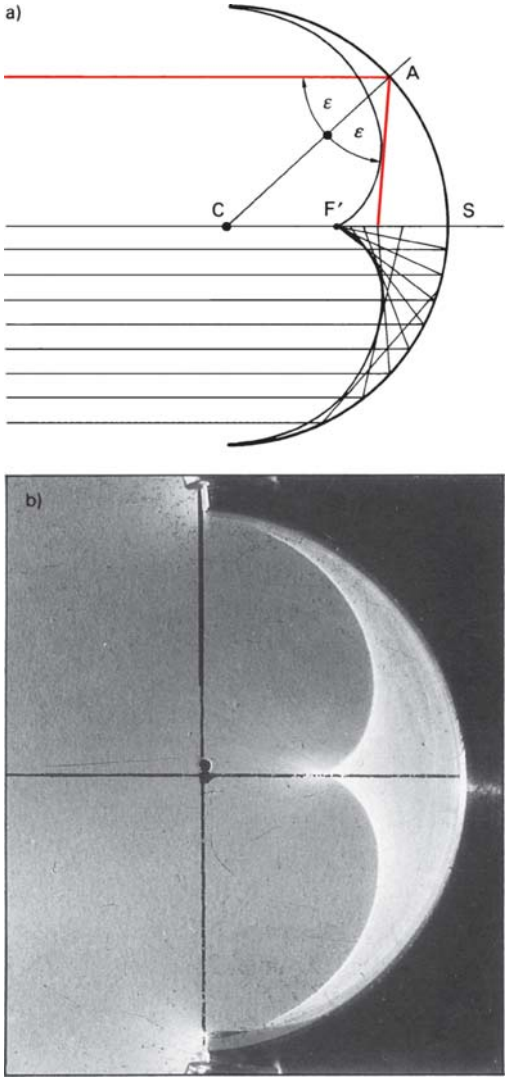


Abb. 6.8 Katakaustik beim Hohlspiegel: **a**) Entstehung, **b**) Fotografie

Foto einer Katakaustik wiedergegeben. Hierbei wurde ein innen verspiegelter Ring mit parallelem Licht beleuchtet.

Bei der Betrachtung von Abb. 6.8a fällt auf, dass diejenigen Strahlen, die nahe der optischen Achse verlaufen, in einem Punkt F′ gesammelt werden. Diese achsennahen Strahlen werden als *Paraxialstrahlen* bezeichnet. Die Reflexion eines Strahls, der parallel zur optischen Achse CS auf einen Hohlspiegel mit dem Krümmungsradius r fällt, ist noch einmal in Abb. 6.9 ausführlich dargestellt.

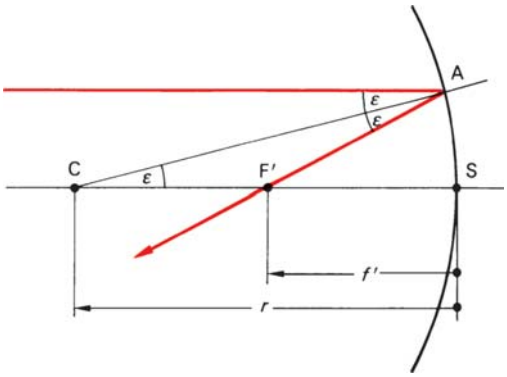


Abb. 6.9 Reflexion eines paraxialen Strahls parallel zur optischen Achse CS am Hohlspiegel

Der Abstand f' des Brennpunktes F′ vom Scheitel S beträgt $f' = r - \mathrm{CF}$. Die Strecke CF′ im gleichschenkligen Dreieck CF′A ist $\mathrm{CF}' = r/(2\cos\varepsilon)$. Damit ergibt sich für die *Brennweite* f' des Hohlspiegels $f' = r(1 - 1/(2\cos\varepsilon))$. Bei paraxialen Strahlen ist der Winkel ε sehr klein und $\cos\varepsilon \approx 1$. Im Rahmen dieser Vereinfachung gilt – unabhängig vom Abstand, den der Strahl von der optischen Achse hat –

$$f' = \frac{r}{2}\,. \tag{6.1}$$

Bildentstehung beim Hohlspiegel

In Abb. 6.10 befindet sich ein Objekt O auf der optischen Achse CS. Der Lichtpunkt sendet in alle Raumrichtungen Lichtstrahlen aus. Diejenigen Strahlen, die auf den Hohlspiegel treffen, werden dort reflektiert und vereinigen sich alle wieder im Punkt O′. Diesen Punkt O′ bezeichnet man als Bild des Gegenstandes O.

Um die Lage des Bildpunktes zu finden, genügt es, zwei ausgewählte Strahlen, die von O ausgehen, zu verfolgen. Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen ist der Bildpunkt. Ein

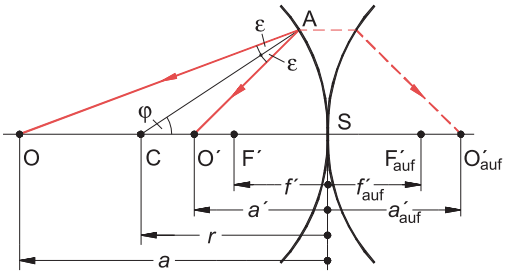


Abb. 6.10 Abbildung eines Punktes O auf der optischen Achse CS eines Hohlspiegels ($r < 0$)

solcher Strahl verläuft in Abb. 6.10 auf der optischen Achse. Er wird am Scheitel S reflektiert und läuft auf der optischen Achse wieder zurück. Der zweite Strahl wird am Punkt A reflektiert und schneidet die optische Achse in O′. Der Zusammenhang zwischen der *Gegenstandsweite a* und der *Bildweite a′* ergibt sich aus einer kleinen Rechnung:
Für die beiden Dreiecke OCA und CO′A gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin(180° - \varphi)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CO'}}{\mathrm{O'A}} .$$

Dabei kann geschrieben werden

$$\mathrm{OC} = a - r = a - 2f' \qquad \text{und}$$
$$\mathrm{O'C} = r - a' = 2f' - a' .$$

Für paraxiale Strahlen gilt näherungsweise OA $\approx a$ und O′A $\approx a'$. Damit ergibt sich

$$\frac{a - 2f'}{a} = \frac{2f' - a'}{a'} .$$

Nach kurzer Umformung erhält man die Abbildungsgleichung des Hohlspiegels:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} . \qquad (6.2)$$

Beim Durchrechnen von Strahlengängen ist es häufig zweckmäßig, den *aufgefalteten Strahlengang* zu benutzen. Dabei wird der Bildpunkt O′ hinter dem Spiegel eingezeichnet (Abb. 6.10). Bei *Auffaltung* gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a'_{\mathrm{auf}}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'_{\mathrm{auf}}} ,$$

dabei ist die aufgefaltete Brennweite

$$f'_{\mathrm{auf}} = -\frac{r}{2} = -f' .$$

Liegt ein Gegenstandspunkt P nicht auf der optischen Achse, so liegt auch sein Bildpunkt P′ außerhalb. Allerdings gilt für den Zusammenhang von Gegenstandsweite a und Bildweite a' auch in diesem Fall die Abbildungsgleichung (6.2), falls nur paraxiale Strahlen an der Abbildung beteiligt sind. Die Lage des Bildpunktes lässt sich nach Abb. 6.11 sehr einfach zeichnerisch konstruieren. Ein von P ausgehender Strahl, der parallel zur optischen Achse verläuft, geht nach der Reflexion durch den Brennpunkt F′. Ein zweiter Strahl, der von P aus durch F′ geht, wird nach der Reflexion achsenparallel. Am Schnittpunkt der beiden reflektierten Strahlen liegt der Bildpunkt P′.
Der Zusammenhang zwischen *Gegenstandsgröße y* und *Bildgröße y′* ist anhand von Abb. 6.11 zu erkennen. Im z,y-Koordinatensystem erhalten alle Größen ein Vorzeichen. Die positive y-Richtung weist

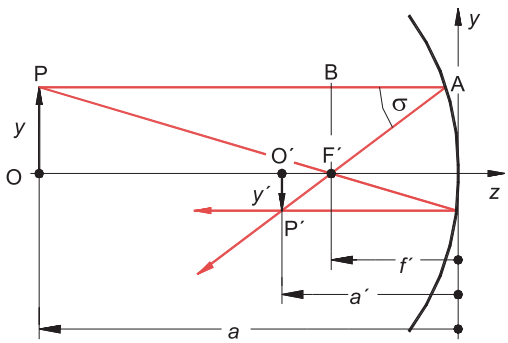


Abb. 6.11 Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes durch einen Hohlspiegel mit Paraxialstrahlen

nach oben, die positive z-Richtung nach rechts. (Weitere Hinweise auf die in der technischen Optik übliche Vorzeichenkonvention s. Abschn. 6.2.3.3.) In den Dreiecken ABF′ und F′O′P′ gilt näherungsweise für paraxiale Strahlen

$$\tan\sigma = \frac{-y'}{a'-f'} = \frac{y}{f'} .$$

Mithilfe der Abbildungsgleichung (6.2) folgt unmittelbar für den *Abbildungsmaßstab* oder die *Lateralvergrößerung*

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} . \qquad (6.3)$$

Durch Umformung von (6.2) ergibt sich die Beziehung

$$a' = \frac{af'}{a-f'} . \qquad (6.4)$$

Setzt man (6.4) in (6.3) ein, so folgt für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{f'}{f'-a} . \qquad (6.5)$$

Es ergeben sich für $|a| > |f'|$ reelle, umgekehrte Bilder. Für $|a| < |f'|$ gilt $a' > 0$; dies bedeutet, dass das Bild rechts hinter dem Spiegel liegt. Das Bild ist virtuell, aufrecht und stets größer als der Gegenstand.

Beispiel

6.2-2 Vor einem Hohlspiegel mit $f' = -5$ cm steht im Abstand $a = -2{,}5$ cm ein $y = 1$ cm großer Gegenstand. Wo liegt das Bild und wie groß ist es?

Lösung

Nach (6.4) ist die Bildweite

$$a' = \frac{af'}{a-f'} = \frac{(-2{,}5)\cdot(-5)}{-2{,}5+5}\,\text{cm} = 5\,\text{cm} .$$

Der Abbildungsmaßstab ist

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = \frac{5\,\text{cm}}{2{,}5\,\text{cm}} = 2 .$$

Also ist die Bildgröße $y' = 2$ cm; das Bild steht aufrecht hinter dem Spiegel, es ist virtuell. Eine zeichnerische Lösung ist in Abb. 6.12 wiedergegeben. Bei genauem Abmessen stellt man fest, dass das zeichnerische Ergebnis vom rechnerischen etwas abweicht. Dies liegt an den rechnerischen Vereinfachungen für paraxiale Strahlen. Die Abbildungsgleichung gilt umso besser, je kleiner die Gegenstandsgröße y im Vergleich zur Brennweite f ist.

Beim sphärischen *Wölb-* oder *Konvexspiegel* ist die Außenseite einer Kugelkalotte verspiegelt. Die für den Hohlspiegel abgeleiteten Gleichungen (6.2) bis (6.5) gelten unverändert auch für den Wölbspiegel, lediglich die Brennweite ändert das Vorzeichen:

$$f' = \frac{r}{2}, \qquad \text{mit } r > 0 . \qquad (6.6)$$

Dies bedeutet, dass der Brennpunkt auf der dem Gegenstand abgewandten Seite des Spiegels liegt. Das Bild ist beim Wölbspiegel immer virtuell, aufrecht und verkleinert. Der Wölbspiegel wird gern als Rückspiegel bei Kraftfahrzeugen benutzt. Er gibt zwar ein verkleinertes Bild der Umwelt wieder, erzeugt aber ein großes Gesichtsfeld.

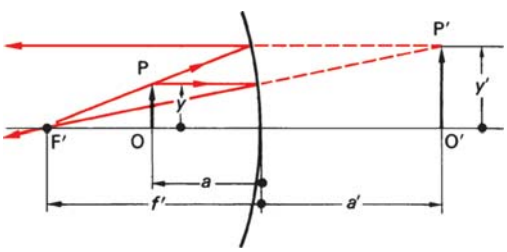


Abb. 6.12 Abbildung eines Gegenstandes innerhalb der Brennweite beim Hohlspiegel (zu Beispiel 6.2-2)

Beispiel

6.2-3 Vor einem Konvexspiegel mit der Brennweite $f' = 5$ cm steht im Abstand $a = -10$ cm ein $y = 2$ cm großer Gegenstand. Wo liegt das Bild und wie groß ist es?

Lösung

Nach (6.4) ist die Bildweite

$$a' = \frac{af'}{a - f'} = \frac{-10 \cdot 5}{-15}\ \text{cm} = 3{,}33\ \text{cm}\ .$$

Der Abbildungsmaßstab beträgt

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = \frac{3{,}33}{10} = 0{,}333\ .$$

Also ist die Bildgröße $y' = 0{,}666$ cm. Eine zeichnerische Lösung zeigt Abb. 6.13.

Zur Übung

Ü 6.2-3 Auf einen Hohl- bzw. Wölbspiegel gegebener Brennweite fällt schief zur optischen Achse ein paraxialer Strahl. Konstruieren Sie seinen Weg nach der Reflexion.

Ü 6.2-4 Konstruieren Sie den Bildpunkt eines parallelen Lichtbündels, das schief zur optischen Achse auf einen Hohl- bzw. Wölbspiegel gegebener Brennweite fällt.

Ü 6.2-5 Auf der optischen Achse eines Hohlspiegels befindet sich im Abstand $a = 5f'(\frac{1}{5}f')$ vom Scheitel eine punktförmige Lichtquelle. Welchen Abstand l hat das Bild von der Lichtquelle?

Ü 6.2-6 Der Mond erscheint von der Erde aus unter einem Winkel von $31'$. Wie groß ist der Durchmesser seines Bildes, das vom 200-Zoll-Spiegel der Mt.-Palomar-Sternwarte (Kalifornien) entworfen wird? Wo entsteht das Bild? Die Brennweite des Spiegels beträgt $f' = -16{,}8$ m.

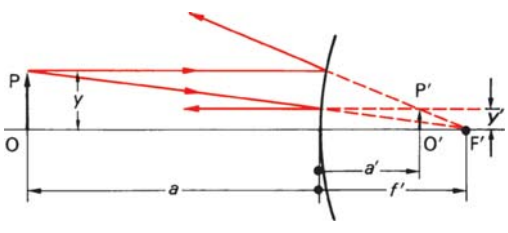


Abb. 6.13 Bildkonstruktion beim Wölbspiegel (zu Beispiel 6.2-3)

Ü 6.2-7 Bezeichnet man beim Hohlspiegel den Abstand des Gegenstandes vom Brennpunkt mit z und den des Bildes mit z', so gilt stets $zz' = f'^2$. Beweisen Sie diese *Abbildungsgleichung nach Newton*.

6.2.3 Brechung des Lichtes

6.2.3.1 Brechung an ebenen Grenzflächen

Fällt ein Lichtstrahl schräg auf eine Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Werkstoffen, so wird die Richtung des Strahls an der Grenzfläche geändert, der Strahl wird gebrochen. Abbildung 6.14 zeigt eine Prinzipskizze dieses Vorgangs sowie ein Foto der Lichtbrechung eines Laserstrahls an der Grenzfläche Luft-

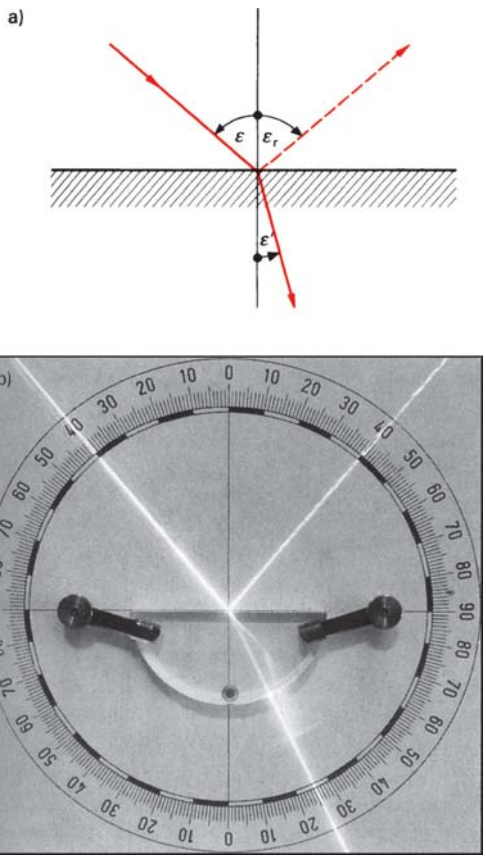


Abb. 6.14 Brechung eines Lichtstrahls an einer ebenen Grenzfläche. **a**) Prinzipskizze, **b**) Brechung an der Grenzfläche Luft–Plexiglas

Plexiglas. Zunächst gibt es an jeder Grenzfläche auch einen mehr oder weniger intensiven reflektierten Strahl, wobei nach dem Reflexionsgesetz Einfallswinkel ε und Reflexionswinkel ε_r gleich sind. Der gebrochene Strahl liegt in einer Ebene mit den beiden anderen Strahlen und dem Lot auf der Grenzfläche. Der *Brechungswinkel* ε' ist kleiner als der Einfallswinkel ε, wenn die Brechung vom *optisch dünneren* ins *optisch dichtere* Medium erfolgt. Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtwegs erfolgt die Brechung beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium so, dass der Strahl vom Lot weg gebrochen wird. Der Zusammenhang zwischen Einfallswinkel ε und Brechungswinkel ε' wurde von dem holländischen Mathematiker *Snellius* (W. Snell von Rayen, 1591 bis 1626) im Jahr 1620 gefunden. Nach *Snellius* ist das Verhältnis zwischen dem Sinus des Einfallswinkels ε und dem Sinus des Brechungswinkels ε' eine Konstante, die von der Natur der beiden Stoffe abhängt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \text{konstant} \,. \tag{6.7}$$

Eine Erklärung des Brechungsgesetzes mit Hilfe von Newtons Korpuskulartheorie verlangt, dass die Korpuskeln, wenn sie z. B. von Luft in Glas eindringen, eine Geschwindigkeitssteigerung erfahren, da nur dann die Brechung zum Lot hin erfolgt. Die Korpuskulartheorie kam spätestens dann zu Fall, als man gelernt hatte, Lichtgeschwindigkeiten zu messen. Es ergab sich dabei, dass die Lichtgeschwindigkeit in Materie stets kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,729{,}458$ km/s im Vakuum; sie ist in Glas kleiner als in Luft.

Die Brechung des Lichtes an Grenzflächen ist zwanglos erklärbar mit der Wellentheorie von *Huygens*. Abbildung 6.15 zeigt eine ebene Welle, die auf eine Grenzfläche zuläuft. Die Phasengeschwindigkeit im oberen Medium beträgt c, im unteren c' mit $c' < c$. Die Schnittpunkte der ebenen Wellenflächen mit der Grenzfläche sind Zentren Huygens'scher Elementarwellen, deren Einhüllende die neue Wellenfront und damit die neue Laufrichtung ergibt. Rechts sind die wesentlichen Punkte und Strecken ohne die Wellenflächen noch einmal gezeichnet. Trifft eine Wellenfront im Punkt C auf die Grenzfläche, so vergeht noch die Zeit $t = \mathrm{AB}/c$, bis auch das rechte Ende der Wellenfront am Punkt B die Grenzfläche trifft. Inzwischen hat die Kugelwelle, die von C ausging, den Weg $\mathrm{CD} = c't$ zurückgelegt. Für die Dreiecke ABC und BCD gilt

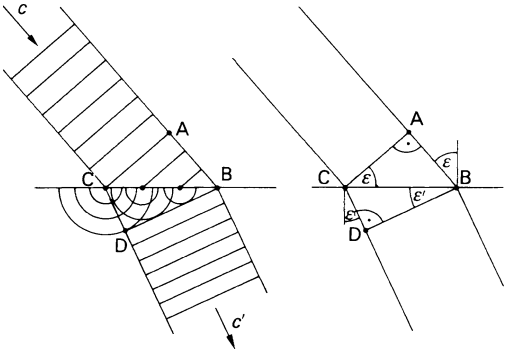


Abb. 6.15 Brechung einer ebenen Welle an einer Grenzfläche

$$\sin \varepsilon = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}} = \frac{tc}{\mathrm{CB}} \qquad \text{und}$$

$$\sin \varepsilon' = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CB}} = \frac{c't}{\mathrm{CB}} \,.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{c}{c'} \,. \tag{6.8}$$

Das Verhältnis der Sinus-Werte von Einfalls- und Brechungswinkel ist gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den benachbarten Gebieten.

Der Quotient zwischen der Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum und der Lichtgeschwindig-

keit c in Materie wird üblicherweise als *Brechzahl* oder *Brechungsindex* n des betreffenden Materials bezeichnet:

$$n = \frac{c_0}{c} \,. \tag{6.9}$$

Mit Hilfe des Brechungsindex nimmt (6.8) die Form des *Snellius'schen Brechungsgesetzes* an:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{n'}{n} = \text{konstant} \,. \tag{6.10}$$

Das Brechungsgesetz kann auch umgeformt werden zu

$$n \sin\varepsilon = n' \sin\varepsilon' = \text{konstant} \,. \tag{6.11}$$

Das Produkt aus Brechungsindex und Sinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Lot bleibt bei einer Brechung konstant. Es wird als *Invariante der Brechung* bezeichnet.

Durchschreitet ein Lichtstrahl eine Schichtstruktur verschiedener Stoffe mit den Brechungsindizes $n_1, n_2, n_3 \ldots$, so gilt mit den Winkeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$, die der Strahl relativ zum Lot einnimmt

$$n_1 \sin\varepsilon_1 = n_2 \sin\varepsilon_2 = n_3 \sin\varepsilon_3 \ldots$$

In Tabelle 6.1 sind die Brechzahlen einiger Stoffe zusammengestellt.
Besonders häufig ist der Fall, dass ein Lichtstrahl an der Grenzfläche zwischen Luft und einem dichteren Medium gebrochen wird. Mit guter Näherung kann der Brechungsindex von Luft $n = 1$ gesetzt werden. Dann gilt das vereinfachte Brechungsgesetz

Tabelle 6.1 Brechzahl n einiger Stoffe für gelbes Na-Licht (Wellenlänge $\lambda = 589\,\text{nm}$) bei der Temperatur $\vartheta = 20°\text{C}$ und dem Druck $p = 1\,013\,\text{mbar}$

Festkörper	n	Flüssigkeiten und Gase	n
Eis	1,310	Luft	1,0003
Flussspat	1,434	Kohlendioxid	1,0045
Quarzglas	1,459	Wasser	1,333
Borkron BK l	1,510	Ethylalkohol	1,362
Flintglas F 3	1,613	Benzol	1,501
Caesiumiodid	1,790	Schwefel-	
Bariumoxid	1,980	kohlenstoff	1,628
Diamant	2,417	Methyleniodid	1,742

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = n' \,. \tag{6.12}$$

Beispiel

6.2-4 Das Foto Abb. 6.14b zeigt die Brechung eines roten Laserstrahls der Wellenlänge $\lambda = 633\,\text{nm}$ an der Grenzfläche Luft-Plexiglas. Wie groß ist der Brechungsindex von Plexiglas?

Lösung

$$n' = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin 40°}{\sin 25{,}5°} = 1{,}49 \,.$$

Der Brechungsindex ist keine Konstante, sondern hängt von der Wellenlänge (Farbe) des Lichts ab. Im Fall *normaler Dispersion* (Abschn. 5.2.4.4) nimmt mit steigender Wellenlänge der Brechungsindex ab.
Bisher wurde vorausgesetzt, dass ein Lichtstrahl vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium eindringt. Bei umgekehrtem Strahlengang, wie er in Abb. 6.16 gezeigt ist, gehört zum Strahl 1 mit dem Einfallswinkel ε_1, der reflektierte Strahl 1r und der gebrochene 1′ mit dem Brechungswinkel ε_1' wobei $\varepsilon_1' > \varepsilon_1$ ist. Mit zunehmendem Winkel

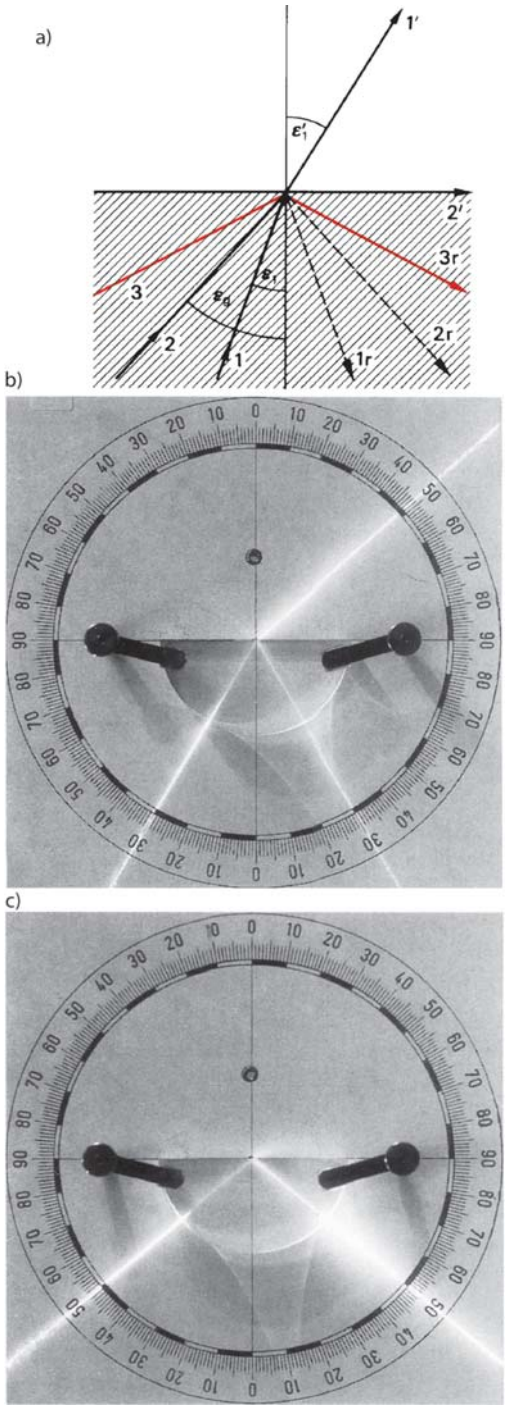


Abb. 6.16 Totalreflexion. **a**) Prinzip, **b**) gebrochener ($\varepsilon < \varepsilon_g$) und **c**) total reflektierter Laserstrahl ($\varepsilon > \varepsilon_g$)

ε steigt ε' verstärkt an, bis für den Strahl 2 beim Einfallswinkel ε_g der Brechungswinkel $\varepsilon'_2 = 90°$ wird. Man nennt ε_g den *Grenzwinkel der Totalreflexion.* Für $\varepsilon > \varepsilon_g$ (Strahl 3) gibt es keinen gebrochenen Strahl mehr, sondern nur noch den reflektierten Strahl 3r. Die ganze Strahlungsleistung des einfallenden Strahls ist im reflektierten Strahl vorhanden; das Licht wird total reflektiert. Abbildung 6.16b zeigt einen gebrochenen, Abb. 6.16c einen total reflektierten Laserstrahl an der Grenzfläche Plexiglas–Luft. Für den Grenzwinkel der Totalreflexion gilt $n' \sin 90° = n \sin \varepsilon_g$ oder

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n'}{n} . \qquad (6.13)$$

Hierbei ist n der Brechungsindex des optisch dichteren, n' der des dünneren Mediums. Ist das dünnere Medium Luft (mit $n' \approx 1$), so gilt

$$\sin \varepsilon_g = \frac{1}{n} . \qquad (6.14)$$

Beispiel

6.2-5 Im Halbleiter GaP (Ausgangsmaterial für Leuchtdioden) ist der Brechungsindex $n = 3{,}3$. Wie groß ist der Grenzwinkel der Totalreflexion?

Lösung

$\sin \varepsilon_g = 1/n = 1/3{,}3 = 0{,}3$ liefert $\varepsilon_g = 17{,}6°$. Von den Lichtstrahlen, die im Innern des Kristalls erzeugt werden, können also nur diejenigen den Kristall verlassen, die innerhalb eines schlanken Kegels von $\varepsilon_g = 17{,}6°$ Öffnungswinkel auf die Kristalloberfläche auftreffen. Alle anderen werden total reflektiert.

Ein Beispiel für die technische Nutzung der Totalreflexion ist die Übertragung von Daten auf *Lichtwellenleitern (optische Nachrichtentechnik).* Abbildung 6.17 zeigt das Prinzip einer *Stufenindexfaser.* Der Brechungsindex nimmt von n_1 im Kern stufenförmig ab auf n_2 im

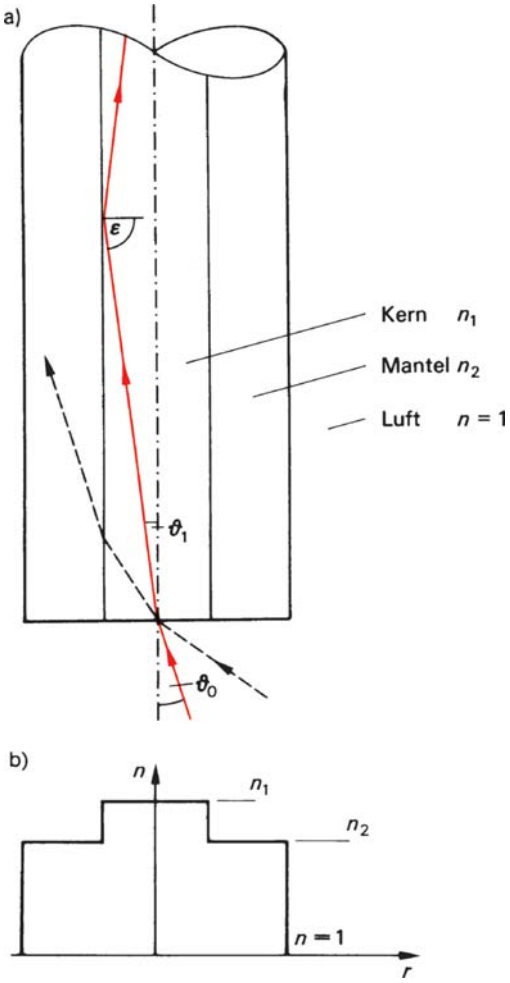


Abb. 6.17 Prinzip eines Lichtwellenleiters (Stufenindexfaser). **a**) Aufbau, **b**) Verlauf der Brechzahl n über dem Radius r

Mantel und $n = 1$ in der umgebenden Luft. Typische Abmessungen einer solchen Glasfaser sind: 50 µm Kerndurchmesser, 125 µm Manteldurchmesser. Ein Lichtstrahl, der unter dem Winkel ϑ_0 auf die Stirnfläche der Faser fällt, wird zum Lot hin gebrochen und trifft schließlich unter dem Winkel $\varepsilon = 90° - \vartheta_1$ auf die Grenzfläche zwischen Kern und Mantel. Er kann dort nur total reflektiert werden, wenn $\varepsilon > \varepsilon_g$ ist mit $\sin \varepsilon_g = n_2/n_1$. Der Eintrittswinkel ϑ_0 des Lichtstrahls kann also nicht beliebig groß werden, sonst ist im Innern die Totalreflexion nicht mehr gegeben (gestrichelt gezeichneter Strahl in Abb. 6.17). Der maximale Aufnahmewinkel $\vartheta_{0,\max}$, unter dem Licht in die Faser eingekoppelt werden kann, bestimmt sich aus der Beziehung

$$\sin \vartheta_{0,\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = A_N \; ; \qquad (6.15)$$

Die Größe A_N ist die *numerische Apertur* der Faser.

Für eine typische Nachrichtenfaser aus Quarzglas, bei der der Kern mit 13,5% GeO_2 dotiert ist, gelten bei $\lambda = 850$ nm die Werte $n_1 = 1{,}474$ und $n_2 = 1{,}453$. Mit diesen ergeben sich die numerische Apertur $A_N = 0{,}248$ und der maximale Einkoppelwinkel $\vartheta_{0,\max} = 14{,}4°$. Eine solche Glasfaser kann also nur Strahlen weiterleiten, die unter diesem verhältnismäßig „schlanken" Winkel auf die Stirnfläche fallen. Ändert sich der Brechungsindex nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich, so ergeben sich gekrümmte Lichtstrahlen. Abbildung 6.18 zeigt als Beispiel hierfür einen Laserstrahl in einer Küvette mit Salzwasser. Die Salzkonzentration und damit auch der Brechungsindex nehmen kontinuierlich von unten nach oben ab. Gekrümmte Lichtstrahlen treten auch auf, wenn infolge von Temperatur-

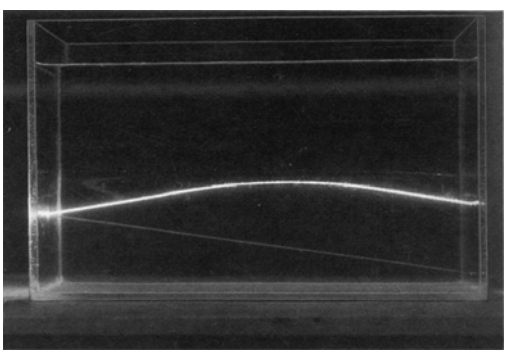


Abb. 6.18 Gekrümmter Lichtstrahl bei kontinuierlich variierendem Brechungsindex

und Dichtegradienten in der Luft der Brechungsindex sich stetig ändert (Luftspiegelung, Fata Morgana).

Ein spezieller Lichtwellenleiter ist die *Gradientenfaser*, die schematisch in Abb. 6.19 dargestellt ist. Bei ihr ändert sich der Brechungsindex kontinuierlich von n_1 in der Mitte auf n_2 im Mantel. Die Gradientenfaser hat gegenüber der Stufenindexfaser den Vorteil, dass Lichtpulse, die unter verschiedenen Winkeln ϑ_0 in die Faser eingekoppelt werden, nahezu dieselbe Laufzeit haben, bis sie am anderen Ende der Faser ankommen. So hat beispielsweise der in Abb. 6.19 gezeichnete Strahl einen größeren Weg zurückzulegen als ein Strahl, der exakt auf der Symmetrieachse läuft. Er befindet sich aber häufig in Gebieten mit kleinerem Brechungsindex, läuft dort also schneller und kompensiert so seinen Umweg. Da Laufzeitdifferenzen verschiedener *Moden* die Übertragungskapazität beschränken, kann auf der Gradientenfaser eine höhere Datenrate übertragen werden als auf der Stufenindexfaser.

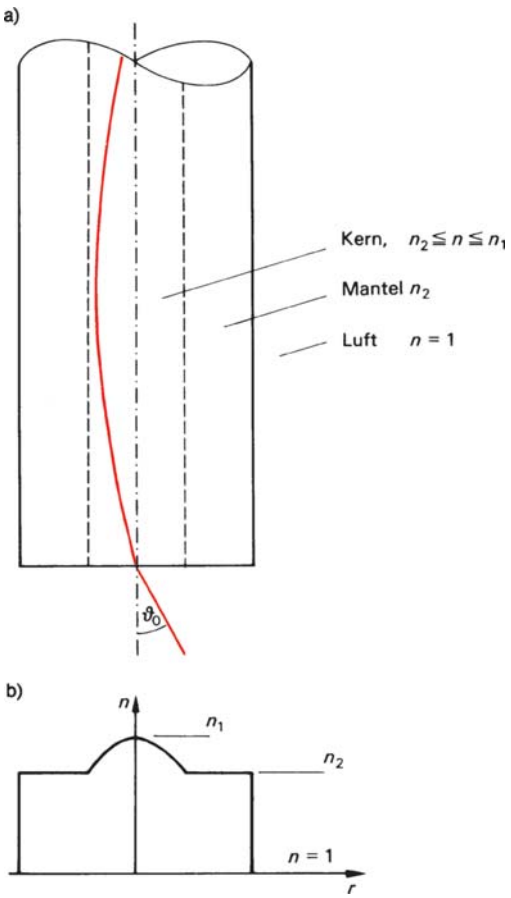


Abb. 6.19 Lichtwellenleiter mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex n (Gradientenfaser). **a**) Aufbau, **b**) Verlauf der Brechzahl n über dem Radius r

Zur Übung

Ü 6.2-8 Ein Lichtstrahl fällt auf einen Glaswürfel mit dem Brechungsindex $n = 1{,}5$. Der Strahl trifft genau die Mitte einer Würfelfläche unter dem Einfallswinkel 60°. Die Einfallsebene ist parallel zu einer Würfelfläche. Berechnen und zeichnen Sie den weiteren Weg des Lichtstrahls.

Ü 6.2-9 Durchquert ein Lichtstrahl eine planparallele Platte, so ist der durchgehende Strahl parallel zum einfallenden, jedoch seitlich versetzt. Wie groß ist der Strahlversatz x in Abhängigkeit von der Plattendicke d, dem Brechungsindex n' und dem Einfallswinkel ε?

Ü 6.2-10 Wie groß ist der Grenzwinkel der Totalreflexion für Plexiglas an Luft? Der Brechungsindex kann aus Abb. 6.16b entnommen werden.

6.2.3.2 Brechung an einem Prisma

In der Optik versteht man unter einem Prisma meist einen dreikantigen Glaskörper gemäß Abb. 6.20. Zwei ebene polierte Flächen sind um den *brechenden Winkel* α gegeneinander geneigt, sie schneiden sich in der *brechenden Kante* K. Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass Lichtstrahlen im *Hauptschnitt* verlaufen, d. h. in einer Ebene, die senkrecht zur brechenden Kante steht. Das Prisma mit dem Brechungsindex n sei umgeben von einem Medium mit dem Brechungsindex n'. In Abb. 6.20 fällt ein Strahl unter dem Einfallswinkel ε_1' auf die linke Prismenfläche und verlässt nach zweimaliger Brechung die rechte Prismenfläche unter dem Ausfallswinkel ε_2'.

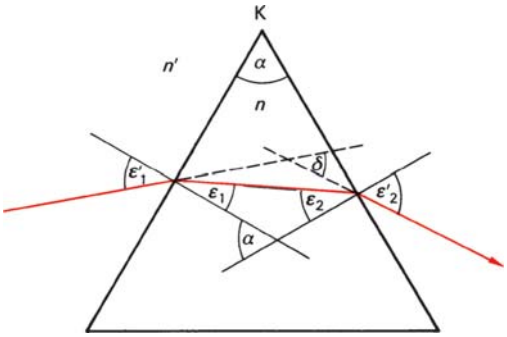


Abb. 6.20 Strahlenverlauf in einem Prisma

Der Ablenkungswinkel δ lässt sich aus elementaren geometrischen Sätzen bestimmen: $\delta = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \alpha$. Mit Hilfe des Brechungsgesetzes $n' \sin\varepsilon'_1 = n \sin\varepsilon_1$ und $n' \sin\varepsilon'_2 = n \sin\varepsilon_2$ sowie der Beziehung $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha$ lässt sich der Ablenkungswinkel δ für beliebige Einfallswinkel ε'_1 berechnen:

$$\delta = \varepsilon'_1 - \alpha + \arcsin\left[\sin\alpha\sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - \sin^2\varepsilon'_1} - \cos\alpha\sin\varepsilon'_1\right] . \quad (6.16)$$

Beispiel

6.2-6 Für ein Prisma mit dem Brechungsindex $n = 1{,}5$ und dem brechenden Winkel $\alpha = 60°$ sollen der Austrittswinkel ε'_2 und der Ablenkungswinkel δ als Funktion des Einfallswinkels ε'_1 dargestellt werden. Die Umgebung sei Luft mit $n' = 1$.

Lösung

Gleichung (6.16) sollte am besten mit einem programmierbaren Rechner ausgewertet werden. Abbildung 6.21 zeigt das Ergebnis. Der Ablenkwinkel δ zeigt ein Minimum beim Einfallswinkel $\varepsilon'_{1,\min} = 48{,}6°$. Der zugehörige Ausfallswinkel beträgt ebenfalls $\varepsilon'_{2,\min} = 48{,}6°$. Der Strahl durchläuft das Prisma also symmetrisch. Dieses Ergebnis kann allgemein mit Hilfe der Differentialrechnung bewiesen werden:

Bei einem Prisma ist die Strahlablenkung minimal, wenn Eintritts- und Austrittswinkel gleich sind.

Für symmetrischen Durchgang gelten $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \frac{1}{2}(\delta + \alpha)$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\alpha$. Mithilfe des Brechungsgesetzes ergibt sich sofort der *minimale Ablenkwinkel*

$$\delta_{\min} = 2\arcsin\left(\frac{n}{n'}\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha . \quad (6.17)$$

Für Beispiel 6.2-6 erhält man $\delta_{\min} = 37{,}2°$. Aus Abb. 6.21 folgt ferner, dass für Eintrittswinkel $\varepsilon'_1 < 27{,}9°$ kein austretender Strahl beobachtet wird, weil an der zweiten brechenden Fläche Totalreflexion auftritt. Aus der Bedingung $\sin\varepsilon_{2,g} = n'/n$ folgt für den Grenzwinkel an der Eintrittsfläche

$$\varepsilon'_{1,g} = \arcsin\left[\frac{n}{n'}\sin\left(\alpha - \arcsin\frac{n'}{n}\right)\right] . \quad (6.18)$$

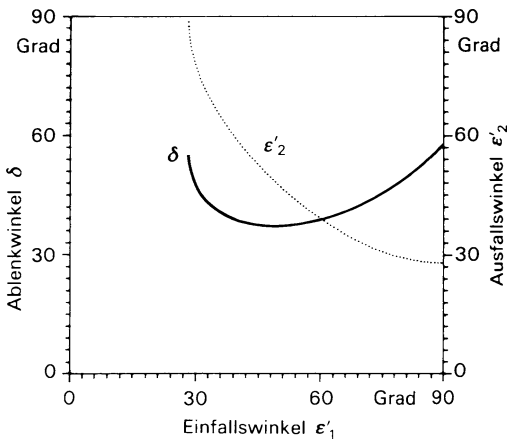


Abb. 6.21 Ablenkwinkel δ und Austrittwinkel ε'_2 in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ε'_1 bei der Brechung eines Lichtstrahls an einem Prisma; Brechungsindex $n = 1{,}5$, Prismenwinkel $\alpha = 60°$

Für Beispiel 6.2-6 ergibt sich in Übereinstimmung mit Abb. 6.21 $\varepsilon'_{1,g} = 27{,}9°$.

Bei einem Prisma mit kleinem brechendem Winkel α und symmetrischem Strahlendurchgang gilt für den minimalen Ablenkwinkel näherungsweise

$$\delta_{\min} \approx \alpha\left(\frac{n}{n'} - 1\right). \qquad (6.19)$$

Da der Ablenkwinkel δ vom Brechungsindex abhängt, wird kurzwelliges Licht bei normaler Dispersion stärker gebrochen als langwelliges Licht. Ein Prisma bietet daher die Möglichkeit, Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge räumlich zu trennen, also spektral zu zerlegen. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt beim *Prismenspektrometer* (Abschn. 6.4.1.7).

Prismen haben in der Optik vielfältige Anwendungen. Meist werden sie anstelle von Spiegeln benutzt, um Lichtstrahlen umzulenken, wobei die Totalreflexion an einer Prismenfläche oder an mehreren ausgenutzt wird. Abbildung 6.22 zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Prisma als *Umlenkprisma*. Der einfallende Lichtstrahl wird an der Hypotenusenfläche total reflektiert. (Der Grenzwinkel der Totalreflexion beträgt $\varepsilon_g = 41{,}5°$ bei Borkron-Glas mit $n = 1{,}51$.)

Fällt nach Abb. 6.23 Licht senkrecht auf die Hypotenusenfläche eines Prismas, so wird es,

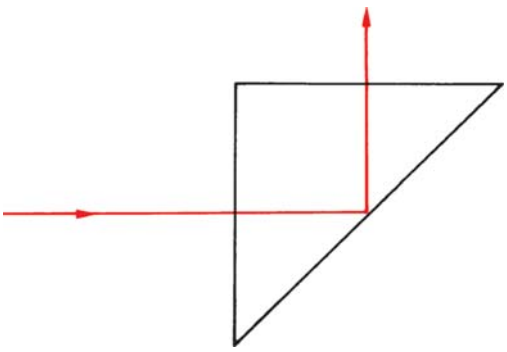


Abb. 6.22 Rechtwinkliges Umlenkprisma

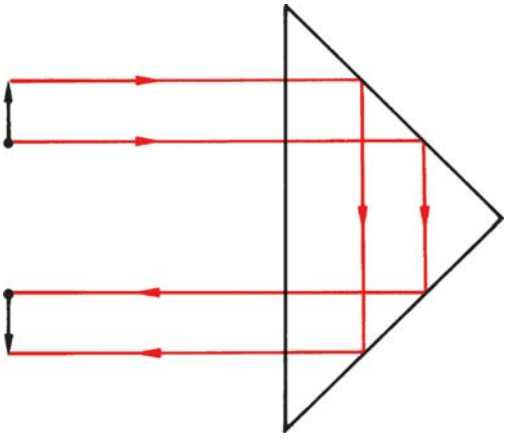


Abb. 6.23 Rechtwinkliges Umkehrprisma

nach zweimaliger Reflexion an den Katheten um 180° umgelenkt, das Prisma parallel verlassen. Zugleich wird das Bild eines Gegenstandes (Pfeil) um 180° gedreht, also z. B. oben mit unten vertauscht. Schickt man den austretenden Strahl noch durch ein zweites Prisma, das gegenüber dem ersten um 90° gedreht ist, so wird auch noch links und rechts vertauscht; man erhält also eine vollkommene Bildumkehr. Ein solches *Umkehrprisma* nach *Porro* (1848) findet im Prismenfeldstecher Verwendung. Das *Umkehr-* oder *Wendeprisma* nach G. B. Amici (1786 bis 1863) entsprechend Abb. 6.24 vertauscht ebenfalls oben und unten, hat aber einen geradsichtigen Stahlengang. Eine vollständige Bildumkehr erhält man, wenn zwei dieser Prismen um 90° verdreht hintereinander gestellt werden.

Abbildung 6.25 zeigt das *Pentagonalprisma* nach *Goullier* (1865). Nach zweimaliger Refle-

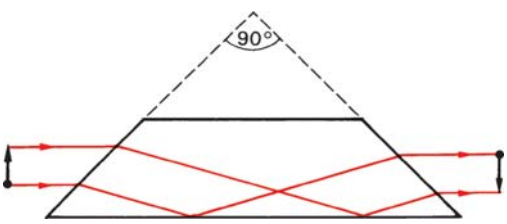


Abb. 6.24 Geradsichtiges Wendeprisma

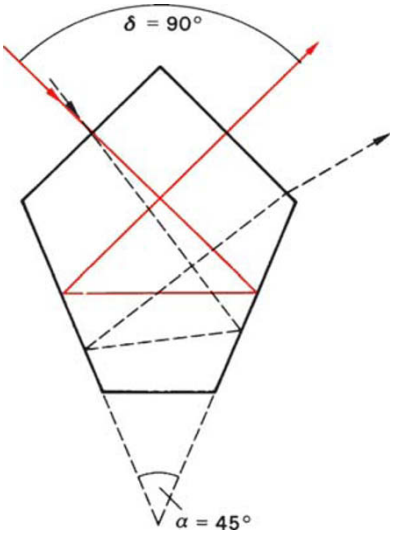


Abb. 6.25 Pentagonalprisma für konstante Ablenkung $\delta = 90°$

xion des einfallenden Lichtstrahls ist der Ablenkwinkel $\delta = 2\alpha$, er ist unabhängig vom Einfallswinkel. Das Pentagonalprisma ist im Prinzip ein mit Glas gefüllter Winkelspiegel (Abb. 6.5). Auch in diesem Fall müssen die Seitenflächen verspiegelt sein, weil die Lichtstrahlen so steil auf die Grenzfläche fallen, dass eine Totalreflexion nicht mehr möglich ist.

Zur Übung

Ü 6.2-11 Ein Prisma mit brechendem Winkel $\alpha = 45°$ und der Brechzahl $n = 1{,}51$ wird nach Abb. 6.20 durchstrahlt. Zeichnen Sie ein Diagramm analog Abb. 6.21. Wie groß ist der minimale Ablenkwinkel $\delta_{\min}$ und der zugehörige Eintritts- und Austrittswinkel $\varepsilon'_{1,\min}$ und $\varepsilon'_{2,\min}$? Bei welchem Grenzwinkel $\varepsilon'_{1,\,g}$ tritt an der rechten Fläche Totalreflexion auf?

Ü 6.2-12 Für ein Prisma mit brechendem Winkel $\alpha = 60°$ wird experimentell der minimale Ablenkwinkel $\delta_{\min} = 47{,}2°$ ermittelt. Wie groß ist der Brechungsindex n des Glases?

6.2.3.3 Brechung an Kugelflächen

Vorzeichenkonvention

Zwei Medien mit den Brechzahlen n und n' seien nach Abb. 6.26 durch eine Kugelfläche

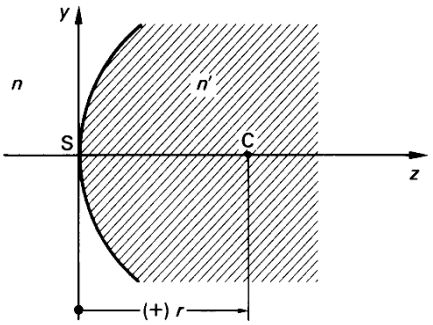


Abb. 6.26 Vorzeichenkonvention an Kugelflächen

voneinander getrennt. Im Folgenden werden für alle Strecken und Winkel Vorzeichen verwendet, wie sie in der technischen Optik gebräuchlich und durch DIN 1335 festgelegt sind. Die Achse durch den Kugelmittelpunkt C ist die optische Achse, zugleich z-Achse des Koordinatensystems. Die positive z-Richtung wird durch die Laufrichtung des Lichts bestimmt und geht im Allgemeinen von links nach rechts. Die y-Achse steht senkrecht auf der z-Achse und weist von unten nach oben. Der Durchstoßpunkt der optischen Achse durch die Kugelfläche ist der Scheitel S. Der Radius der Kugel ist positiv, wenn der Mittelpunkt C rechts vom Scheitel S liegt und negativ, falls C links von S liegt. Sämtliche Strecken, die vom Bezugspunkt S aus nach links gemessen werden, also entgegen der z-Richtung, erhalten ein negatives Vorzeichen. Strecken, die nach rechts gemessen werden, sind positiv.

Die Vorzeichen der Winkel sind gemäß Abb. 6.27 definiert: Die Richtungen des Lichtstrahls (σ und σ') und des Lotes (φ) werden von der optischen Achse aus angegeben. Bei Drehung im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiv) erhält der Winkel ein positives Vorzeichen. Der Einfallswinkel ε und der Brechungswinkel ε' sind mit den beiden anderen Winkeln folgendermaßen verknüpft:

$$\varphi = \sigma - \varepsilon = \sigma' - \varepsilon' \,.$$

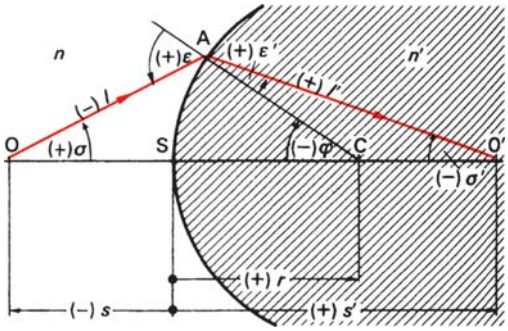


Abb. 6.27 Brechung eines Strahls an einer konvexen Kugelfläche

Abbildung eines Punktes

In Abb. 6.27 geht von einem punktförmigen Objekt O auf der optischen Achse ein Lichtstrahl aus, der die Kugelfläche in A trifft. Für $n' > n$ wird der Strahl zum Einfallslot hin gebrochen und schneidet die optische Achse in O′; O′ ist das Bild des Gegenstandes O. Mittels trigonometrischer Formeln lässt sich eine Beziehung aufstellen zwischen den *Schnittweiten* s und s'.

Der Sinus-Satz liefert für das Dreieck OCA

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sin(180° - \varepsilon)}{-\sin\varphi} \text{ oder } \frac{-s + r}{-l} = \frac{\sin\varepsilon}{-\sin\varphi};$$

ebenso gilt für das Dreieck CO′A

$$\frac{\mathrm{CO'}}{\mathrm{AO'}} = \frac{\sin\varepsilon'}{\sin(180° + \varphi)} \text{ oder } \frac{s' - r}{l'} = \frac{\sin\varepsilon'}{-\sin\varphi}.$$

Einfallswinkel ε und Brechungswinkel ε' sind verknüpft durch das Brechungsgesetz $n \sin\varepsilon = n' \sin\varepsilon'$.

Aus diesen Beziehungen folgt

$$n\frac{s - r}{l} = n'\frac{s' - r}{l'}. \qquad (6.20)$$

Wird diese Gleichung nach s' aufgelöst, so erhält man den Ort des Bildpunktes O′. Wie man leicht erkennt, hängt dieser nicht nur von s und r, sondern auch von der Strecke l bzw. dem Winkel σ ab. Ein Objektpunkt wird demnach nicht als Punkt abgebildet, sondern als Bildlinie auf der optischen Achse. Beschränkt man sich jedoch auf paraxiale Strahlen, dann gelten die Näherungen $l \approx s$ und $l' \approx s'$. Aus (6.20) wird dann

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right). \qquad (6.21)$$

Diese Beziehung ist eine Invariante der Brechung; sie wird auch als *Abbe'sche Invariante* bezeichnet. Die Beschränkung auf achsennahe Strahlen ist Merkmal der Gauß'schen Optik, benannt nach C. F. Gauss (1777 bis 1855), der 1840 die entsprechenden mathematischen Grundlagen schuf.

Beispiel

6.2-7 Abbildung 6.28 zeigt die Abbildung eines punktförmigen Objekts O durch eine Kugelfläche. Es sei $n = 1$ und $n' = 1{,}5$.

a) Für $r = +80$ mm und $s = -500$ mm ist s' zu berechnen.

Lösung

Nach (6.21) gilt

$$s' = \frac{n'r}{n' - \frac{s-r}{s}} = \frac{1{,}5 \cdot 80}{1{,}5 - \frac{-500-80}{-500}} \text{ mm} = 353 \text{ mm}.$$

s' ist positiv, das Bild liegt hinter der brechenden Fläche und ist reell.

b) Wie groß ist s' für $s = -100$ mm und $r = +80$ mm?

Lösung

$s' = -400$ mm.

Das negative Vorzeichen des Wertes bedeutet, dass der Bildort links vom Scheitel liegt, das Bild ist virtuell.

c) Der Objektort liege im Unendlichen, d. h. $s = -\infty$. Wo liegt der Bildpunkt bei einer konkav gekrümmten Kugelfläche mit $r = -80$ mm?

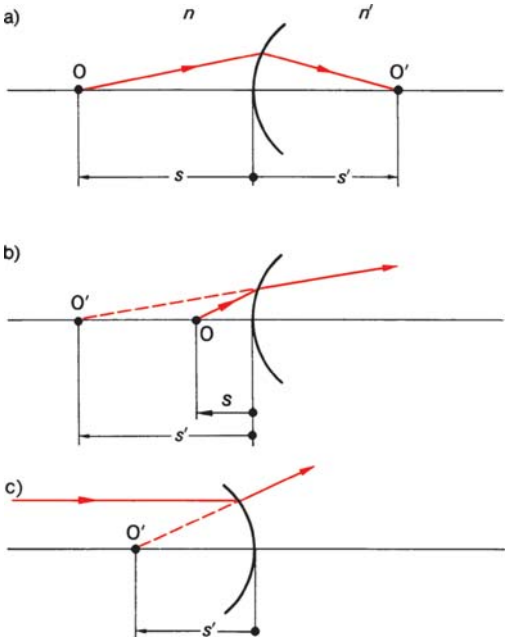


Abb. 6.28 Strahlengang durch eine Kugelfläche (zu Beispiel 6.2-7)

Lösung

Aus (6.21) folgt für $s = -\infty$

$$s' = \frac{n'r}{n'-n} = \frac{-1{,}5 \cdot 80}{0{,}5} = -240\ \text{mm}\ .$$

Das Bild liegt vor der Kugelfläche, es ist virtuell.

Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes

Abbildung 6.29 zeigt die Abbildung eines Punktes O auf der optischen Achse mittels paraxialer Strahlen in den Bildpunkt O′. Ein Punkt P, der gemeinsam mit O auf einem Kreis um C liegt, wird in P′ abgebildet. Gegenstandsweite und Bildweite sind für P und P′ identisch mit den Werten für O und O′. Liegen verschiedene Objektpunkte auf einer Kugelschale um C, so entstehen ihre Bildpunkte auch auf einer Kugelschale um C. Gegenstand und Bild sind einander ähnlich. Beschränkt man sich auf paraxiale Strahlen, d. h. auf Gegenstände und Bilder kleiner Ausdehnung, dann kann man die Kugelflächen in den Punkten O und O′ durch die Tangentialebenen T und T′ annähern:

> Ein kleiner, achsennaher und senkrecht zur optischen Achse stehender Gegenstand wird mit Hilfe von Paraxialstrahlen ähnlich abgebildet.

Der Abbildungsmaßstab ist nach Abb. 6.29

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'-r}{r-s} = \frac{s'-r}{s-r}\ .$$

Unter Berücksichtigung von (6.21) ergibt sich für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}\ . \qquad (6.22)$$

Von J. de Lagrange (1736 bis 1813) wurde 1803 eine wichtige Beziehung zwischen den Neigungswinkeln der Strahlen zur optischen Achse und der Gegenstands- bzw. Bildgröße gefunden. In Abb. 6.27 verlaufen zwei Strahlen unter den beiden spitzen Winkeln σ und σ' zu optischen Achse. Für das Winkelverhältnis γ' gilt bei kleinen Winkeln ($\tan\sigma \approx \sin\sigma \approx \sigma$) $\gamma' = \sigma'/\sigma = s/s'$. Mithilfe von (6.22) folgt daraus

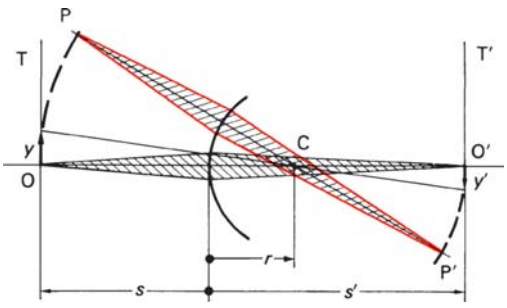


Abb. 6.29 Abbildung eines ausgedehnten Objekts durch eine brechende Kugelfläche

$$n\,y\,\sigma = n'y'\sigma' \,. \qquad (6.23)$$

Das Produkt aus Brechungsindex, Gegenstandsgröße und Strahlneigung ist eine optische Invariante.

Da die Gültigkeit von (6.23) von H. von Helmholtz (1821 bis 1894) auch für ein System von mehreren brechenden Flächen bewiesen wurde, nennt man sie *Helmholtz-Lagrange'sche Gleichung.*

Zur Übung

Ü 6.2-13 Wie tief erscheint ein 1,5 m tiefes Wasserbecken einem Betrachter, der von oben ins Wasser schaut?

6.2.4 Abbildung durch Linsen

6.2.4.1 Dünne Linsen

Linse grenzt an verschiedene Medien

In den meisten optischen Systemen tritt Lichtbrechung an Gläsern auf, die von zwei kugelförmigen Flächen begrenzt werden. Abbildung 6.30 zeigt eine solche Linse und die Abbildung eines Lichtpunktes O auf der optischen Achse. Der Brechungsindex der Linse sei n_L, der der angrenzenden Gebiete n bzw. n'. Die Krümmungsradien der Kugelflächen sind r_1 und r_2.

Ein Lichtstrahl, der von O ausgehend die Linse in A trifft, würde nach O'_1 gebrochen, falls nur die linke Kugelfläche allein vorhanden wäre. Das Bild O'_1 befände sich dann im Medium mit dem Brechungsindex n_L im Abstand s'_1 von der linken Fläche. Die Schnittweiten s_1 und s'_1 sind durch die *Abbe'sche Invariante* (6.21) verknüpft:

$$n\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right) = n_L\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'_1}\right) \,. \qquad (1)$$

Tatsächlich wird der Strahl im Punkt B an der rechten Grenzfläche noch einmal gebrochen,

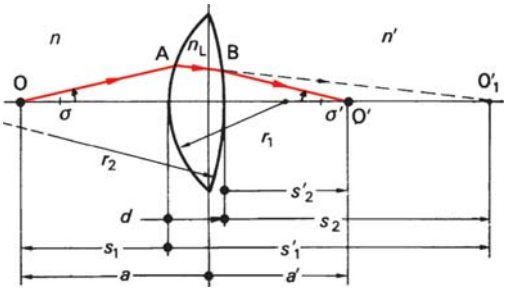


Abb. 6.30 Abbildung eines Punktes auf der optischen Achse durch eine Sammellinse

sodass das Bild im Punkt O′ entsteht. Gleichung (6.21) ergibt, auf die rechte Kugelfläche angewandt (O'_1 spielt die Rolle eines virtuellen Gegenstandes),

$$n_L\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right) = n'\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_2}\right) \,.$$

Die Strecke s_2 hängt mit der Linsendicke d und s'_1 zusammen über die Beziehung $s_2 = s'_1 - d$. Setzt man diese in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$n_L\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_1-d}\right) = n'\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_2}\right) \,. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) lässt sich s'_1 eliminieren und eine Beziehung zwischen den Schnittweiten s_1 und s'_2 herstellen:

$$\frac{n_L r_1 s_1}{n r_1 + (n_L - n)s_1} = \frac{n_L r_2 s'_2}{n' r_2 + (n_L - n')s'_2} + d \,. \qquad (6.24)$$

Die *Schnittweitengleichung* (6.24) verknüpft die Schnittweiten s_1 und s'_2 für ein beliebiges Flächenpaar im Abstand d.

Eine wesentliche Vereinfachung der etwas unhandlichen Gleichung ist möglich, wenn die Linsendicke d vernachlässigbar ist. Für die *unendlich dünne Linse* ($d = 0$) geht die objektseitige Schnittweite s_1 in die Objektweite a und

die bildseitige Schnittweite s_2' in die Bildweite a' über (Abb. 6.30). Aus (6.24) wird dann

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n_\mathrm{L} - n}{r_1} - \frac{n_\mathrm{L} - n'}{r_2} \,. \qquad (6.25)$$

Bei bekannten Linsendaten lässt sich aus (6.25) zu jedem Gegenstandsort der zugehörige Bildort berechnen.
Der Abbildungsmaßstab kann aus der Helmholtz-Lagrange'schen Gleichung (6.23) berechnet werden:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n\,\sigma}{n'\,\sigma'} \,.$$

Für das Verhältnis der beiden Winkel gilt bei paraxialen Strahlen nach Abb. 6.30 $\sigma/\sigma' = a'/a$. Somit erhält man für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{n\,a'}{n'\,a} \,. \qquad (6.26)$$

Die Linse ist beiderseits von Luft umgeben

Eine weitere wesentliche Vereinfachung ergibt sich für den Fall, dass die dünne Linse beidseitig von Luft mit $n = n' = 1$ umgeben ist. Aus (6.25) folgt dann

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = (n_\mathrm{L} - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \,. \qquad (6.27)$$

Der Abbildungsmaßstab ist in diesem Fall

$$\beta' = \frac{a'}{a} \,. \qquad (6.28)$$

Abbildung 6.31 zeigt, dass sich alle Strahlen eines Lichtbündels, das parallel zur optischen

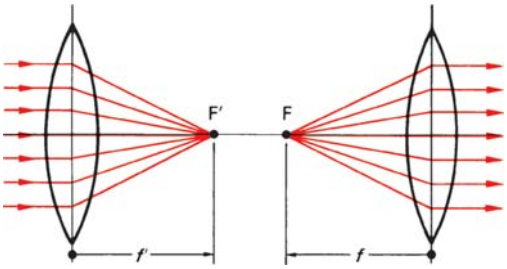


Abb. 6.31 Strahlenbündel durch die Brennpunkte einer Sammellinse

Achse auf eine bikonvexe Linse fällt, in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt ist der *bildseitige Brennpunkt* F′ dieser *Sammellinse.* Die *bildseitige Brennweite* f' lässt sich einfach aus (6.27) berechnen. Wenn die Gegenstandsweite $a = -\infty$ gesetzt wird, folgt für die Bildweite, d. h. für die bildseitige Brennweite die *Linsenmacherformel*

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_\mathrm{L} - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \,. \qquad (6.29)$$

Die Größe $D' = 1/f'$ nennt man die *Brechkraft* einer Linse. Die Maßeinheit für die Brechkraft ist die *Dioptrie:* $1\ \mathrm{dpt} = 1\ \mathrm{m}^{-1}$.
Wie Abb. 6.31 ebenfalls zeigt, verlaufen alle Strahlen, die durch den *gegenstandsseitigen Brennpunkt* F gehen, hinter der Linse achsenparallel, d. h., der Bildort ist $a' = \infty$. Nach (6.27) sind die *gegenstandsseitige Brennweite* f' und die bildseitige Brennweite f' betragsmäßig gleich, es gilt

$$f = -f' \,. \qquad (6.30)$$

Die Abbildungsgleichung (6.27) erhält eine besonders einfache Gestalt, wenn die durch (6.29) definierte Brennweite eingeführt wird:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \,. \tag{6.31}$$

Beispiel

6.2-8 Im Abstand $a = -50$ cm von einer Sammellinse mit der Brennweite $f' = 20$ cm steht ein Gegenstand. Wie groß ist die Bildweite a' und der Abbildungsmaßstab β'?

Lösung

Die Abbildungsgleichung (6.31) liefert für den Bildort

$$a' = \frac{a f'}{a + f'} \tag{6.32}$$

und für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{f'}{a + f'} \,. \tag{6.33}$$

Für dieses Beispiel ergibt sich also

$$a' = \frac{-50\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}}{-50\text{ cm} + 20\text{ cm}} = 33{,}3\text{ cm} \quad \text{und}$$

$$\beta' = \frac{20\text{ cm}}{-50\text{ cm} + 20\text{ cm}} = -0{,}667 \,.$$

Die Eigenschaften der Brennpunktsstrahlen machen auch eine sehr einfache zeichnerische Konstruktion der Abbildung möglich, die anhand von Abb. 6.32 erläutert werden soll. Die vom Punkt P ausgesandten Strahlen 1, 2 und 3 treffen sich wieder im Punkt P′; also ist P′ das Bild des Gegenstandes P. Strahl 1 verläuft parallel zur optischen Achse bis zur Mitte der im Idealfall unendlich dünnen Linse; von dort wird er zum bildseitigen Brennpunkt F′ gebrochen. Strahl 3 geht durch den objektseitigen Brennpunkt F und läuft hinter der Linse parallel zur optischen Achse. Strahl 2 geht durch den Mittelpunkt der Linse und erfährt keine Ablenkung (planparallele Platte der Dicke $d \approx 0$).

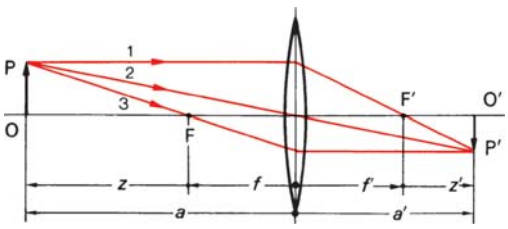


Abb. 6.32 Abbildung eines Gegenstandes mit Hilfe von Brennpunktsstrahlen und Mittelpunktsstrahl

Die Diskussion der Abbildungsgleichung (6.31) sowie der daraus resultierenden Beziehungen (6.32) und (6.33) zeigt, dass reelle Bilder nur entstehen für $|a| > |f|$. Für $a = f$ liegt das Bild im Unendlichen, für $|a| < |f|$ ist $a' < 0$; d. h., das Bild liegt im Gegenstandsraum und ist virtuell. Abbildung 6.33 zeigt die Verknüpfung von Gegenstand und Bild für verschiedene Gegenstandsweiten a.

Für manche Zwecke ist es sinnvoll, die Objekt- bzw. Bildweite von den jeweiligen Brennpunkten aus zu messen. Bezeichnet man nach Abb. 6.32 den Abstand vom objektseitigen Brennpunkt F zum Objekt O mit z und die entsprechende Länge im Bildraum mit z', so gilt

$$z\,z' = -f'^2 \,. \tag{6.34}$$

Diese besonders einfache Beziehung zwischen Objekt- und Bildort wird *Newton'sche Abbildungsgleichung* genannt.

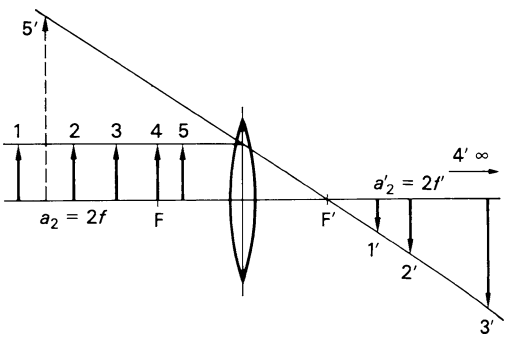


Abb. 6.33 Zuordnung von Gegenstand und Bild bei einer Sammellinse

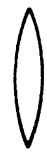
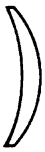
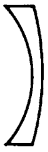
Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

Abb. 6.34 Linsenformen und deren Eigenschaften

Linsentypen

Die bisher behandelte Sammellinse hat ihren Namen von der Fähigkeit, parallel einfallende Strahlen in der Brennebene zu sammeln. Die Brennweite f' hängt nach (6.29) von den Radien der beiden Kugelflächen ab. Wird die Brennweite f' negativ, dann liegt der bildseitige Brennpunkt F′ im Gegenstandsraum, der objektseitige im Bildraum. Mit einer solchen *Zerstreuungslinse* können Lichtstrahlen nicht gebündelt werden, es sind lediglich virtuelle Bilder erzeugbar. Abbildung 6.34 zeigt eine Übersicht gebräuchlicher Linsenformen.

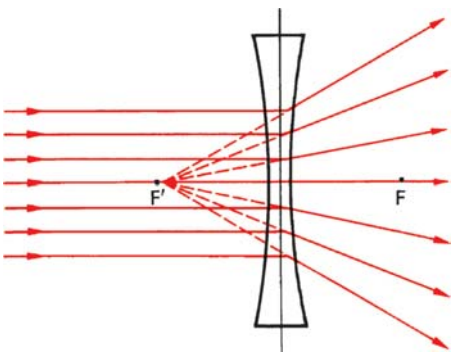


Abb. 6.35 Verlauf von achsenparallelen Strahlen bei einer Zerstreuungslinse mit den Brennpunkten F und F′

Die Bedeutung der Brennpunkte bei einer Zerstreuungslinse wird in Abb. 6.35 erläutert. Fallen Strahlen parallel zur optischen Achse auf die Linse, so scheinen sie nach der Brechung aus F′ zu kommen. Diese Eigenschaft der Brennpunktsstrahlen gestattet wieder eine einfache zeichnerische Konstruktion der Abbildung.

Beispiel

6.2-9 Vor einer Zerstreuungslinse mit der Brennweite $f' = -30\,\text{cm}$ steht im Abstand $a = -60\,\text{cm}$ ein Gegenstand. Wo entsteht das Bild und wie groß ist der Abbildungsmaßstab β'?

Lösung

Abbildung 6.36 zeigt die zeichnerische Konstruktion mit Hilfe der Brennpunktsstrahlen 1 und 2 sowie des nicht abgelenkten Mittelpunktsstrahls 3. Das Bild ist

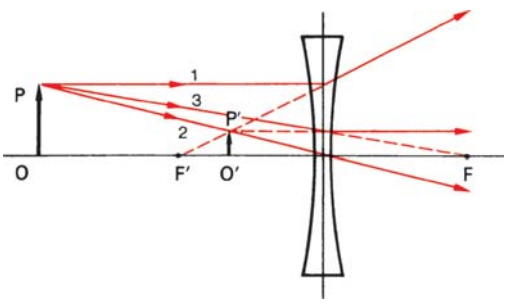


Abb. 6.36 Abbildung eines Gegenstandes mit einer Zerstreuungslinse (zu Beispiel 6.2-9)

aufrecht, verkleinert und virtuell. Ein virtuelles Bild kann nicht auf einer Mattscheibe sichtbar gemacht werden; trotzdem kann es ein Beobachter wahrnehmen. Die von P′ ausgehenden Strahlen können von der Augenlinse wieder auf die Netzhaut fokussiert werden. Die Rechnung ergibt mit (6.32) und (6.33) für die Bildweite $a' = -20\,\text{cm}$ und für den Abbildungsmaßstab $\beta' = 1/3$.

Zur Übung

Ü 6.2-14 Konstruieren Sie den weiteren Weg eines Lichtstrahls, der unter einem beliebigen Winkel schief auf eine Sammellinse (Zerstreuungslinse) fällt.

Ü 6.2-15 Eine plankonvexe Linse mit dem Brechungsindex $n_\text{L} = 1{,}51$ hat an Luft die Brennweite $f' = 10\,\text{cm}$. Sie berührt mit der ebenen Fläche die Glaswand eines Aquariums, das mit Wasser gefüllt ist. a) Sonnenlicht fällt parallel zur optischen Achse auf die Linse. Wo liegt der Fokus F′ im Wasser? b) In welcher Entfernung von der Linse entsteht das Bild eines Fisches, der 20 cm von der Linse entfernt im Wasser schwimmt? Wie groß ist der Abbildungsmaßstab? Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch.

Ü 6.2-16 Von F. W. Bessel (1784 bis 1846) stammt folgende Methode zur experimentellen Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse: Ein leuchtender Gegenstand und eine Mattscheibe werden in festem Abstand $l\,(l > 4f')$ aufgestellt. Bildet man den Gegenstand mit einer Linse auf die Mattscheibe ab, so gibt es zwei Linsenstellungen, bei denen eine Abbildung möglich ist. Berechnen Sie aus dem Abstand t der beiden Linsenorte die Brennweite der Linse.

Ü 6.2-17 Eine plankonvexe Linse mit dem Krümmungsradius $r_1 = 20\,\text{cm}$ bildet einen Gegenstand mit der Gegenstandsweite $a = -70\,\text{cm}$ im Abstand $a' = 93{,}5\,\text{cm}$ ab. Wie groß ist die Brechkraft D' und der Brechungsindex n_L der Linse?

6.2.4.2 Dicke Linsen

Ist die Linsendicke d nicht mehr vernachlässigbar klein, so müssen die vorgenannten Abbildungsgleichungen etwas modifiziert werden. Fällt ein Lichtstrahl entsprechend Abb. 6.37 parallel zur optischen Achse auf eine dicke Sammellinse, so wird er nach zweimaliger Brechung an den beiden Kugelflächen im bildseitigen Brennpunkt F′ die optische Achse schneiden. Der Strahlenverlauf im Innern der Linse ist für die optische Abbildung völlig unwichtig. Der Strahlenverlauf im bildseitigen Außenraum sieht jedenfalls so aus, als ob der Strahl vom Punkt Q′ herkäme. Dieser Schnittpunkt der gestrichelten Strahlverlängerung definiert die Lage der *bildseitigen Hauptebene* H′. Wie später noch gezeigt wird, kann die Lage der Hauptebenen berechnet werden. Dadurch ist eine sehr einfache Konstruktion der Strahlen im Außenraum der Linse möglich. Beispielsweise wird ein Strahl, der durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt F geht, ungeachtet seines tatsächlichen Verlaufs bis zur *gegenstandsseitigen Hauptebene* H verlängert und verläuft von dort parallel zur optischen Achse. Der Abstand des bildseitigen Brennpunktes F′ vom Linsenscheitel S′, d. h. die Strecke $s'_{\text{F}'}$, ergibt sich unmittelbar aus der Schnittweitengleichung (6.24) für einen unendlich weit entfernten Gegenstand, also für $s_1 = -\infty$. Ebenso ist der Ort des objektseitigen Brennpunktes, d. h. die Strecke s_F, aus (6.24) zu ermitteln, indem die Bildweite $s'_2 = \infty$ gesetzt wird. Im Folgenden werden nur Gleichungen angegeben für den Fall, dass die Linse beidseitig von Luft umgeben ist. Für diesen Spezialfall liefert die Schnittweitengleichung (6.24)

$$s'_{\text{F}'} = r_2 \frac{n_\text{L} r_1 - (n_\text{L} - 1)d}{(n_\text{L} - 1)[n_\text{L}(r_2 - r_1) + (n_\text{L} - 1)d]}\,;$$
$$s_\text{F} = -r_1 \frac{n_\text{L} r_2 + (n_\text{L} - 1)d}{(n_\text{L} - 1)[n_\text{L}(r_2 - r_1) + (n_\text{L} - 1)d]}\,. \tag{6.35}$$

Die Brennweiten f' und f, die gemäß Abb. 6.37 von den Hauptebenen zu den entsprechenden Brennpunkten gerechnet werden, können aus folgender Überlegung gewonnen werden: Für

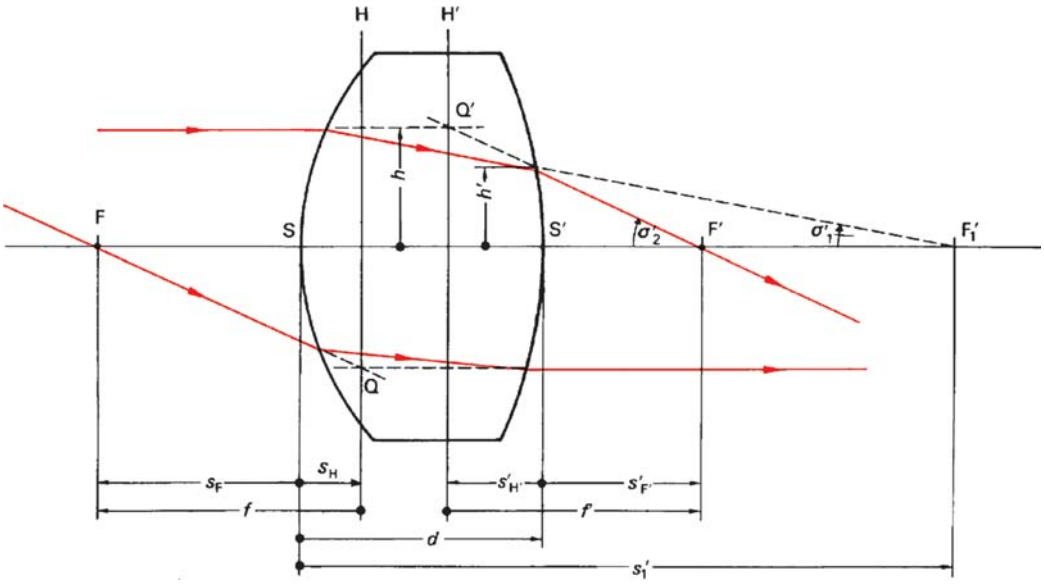


Abb. 6.37 Lage der Hauptebenen bei einer dicken Sammellinse

den Tangens des Winkels σ_2' gilt bei paraxialen Strahlen $\tan\sigma_2' = h'/s_{F'}' = h/f'$; also ist

$$f' = \frac{h}{h'} s_{F'}' \,. \tag{1}$$

Ebenso gilt

$$\tan\sigma_1' = \frac{-h'}{s_1' - d} = \frac{-h}{s_1'} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{h'} = \frac{s_1'}{s_1' - d} \,. \tag{2}$$

Wird (2) in (1) eingesetzt, so gilt für die Brennweite

$$f' = \frac{s_1'}{s_1' - d} s_{F'}' \,.$$

Der Abstand s_1' folgt unmittelbar aus der Abbe'schen Invarianten (6.21) zu

$$s_1' = \frac{n_L}{n_L - 1} r_1 \,.$$

Damit erhält man folgenden Ausdruck für die Brennweite:

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n_L - 1)^2}{n_L} \frac{d}{r_1 r_2} \,. \tag{6.36}$$

Hierin ist das erste Glied die Brennweite der dünnen Linse, wie sie bereits in (6.29) angegeben wurde. Das zweite Glied wirkt gleichsam als Korrekturglied und erfasst den Einfluss der Linsendicke d. Es ist immer dann vernachlässigbar, wenn die Linsendicke klein ist gegenüber der Differenz der Radien, d. h., wenn gilt $d \ll |r_2 - r_1|$.
Gleichung (6.36) lässt sich auch direkt nach der Brennweite auflösen:

$$f' = \frac{n_L}{n_L - 1} \frac{r_1 r_2}{n_L(r_2 - r_1) + (n_L - 1)d} \,. \tag{6.37}$$

Die gegenstandsseitige Brennweite f wird analog zur eben gezeigten Methode berechnet.

Wie schon bei der dünnen Linse sind auch bei der dicken Linse die Beträge der Brennweiten gleich. Es gilt nach (6.30) $f = -f'$.
Falls die Brennweite einer Linse bekannt ist, lässt sich das Gleichungspaar (6.35) für die Abstände der Brennpunkte von den Scheiteln sehr viel einfacher ausdrücken. Aus dem Vergleich von (6.35) und (6.37) folgt

$$s'_{F'} = f'\left(1 - \frac{n_L - 1}{n_L}\frac{d}{r_1}\right);$$
$$s_F = -f'\left(1 + \frac{n_L - 1}{n_L}\frac{d}{r_2}\right). \qquad (6.38)$$

Den Abstand der Hauptebenen von den Scheiteln erhält man nach Abb. 6.37 durch einfache Differenzbildung zweier Strecken, nämlich $s'_{H'} = s'_{F'} - f'$ und $s_H = s_F - f$. Dabei ergibt sich

$$s'_{H'} = -f'\frac{n_L - 1}{n_L}\frac{d}{r_1};$$
$$s_H = -f'\frac{n_L - 1}{n_L}\frac{d}{r_2}. \qquad (6.39)$$

Wird nach Abb. 6.38 die Gegenstandsweite a als Entfernung des Gegenstandes von der Hauptebene H definiert und entsprechend die Bildweite a' als Abstand zwischen Hauptebene H' und Bild, so gilt auch bei dicken Linsen die von den dünnen Linsen her bereits bekannte Abbildungsgleichung (6.31): $1/a' - 1/a = 1/f'$. Ebenso wird der Abbildungsmaßstab nach der bereits bekannten Gleichung (6.28) berechnet: $\beta' = a'/a$.

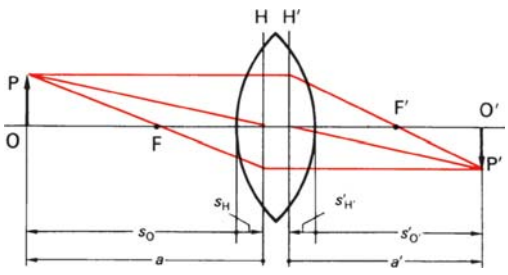


Abb. 6.38 Abbildung eines Gegenstandes durch eine dicke Sammellinse (zu Beispiel 6.2-10)

Beispiel

6.2-10 Gegeben sei eine Linse mit $r_1 = 5$ cm. $r_2 = -5$ cm, $d = 3$ cm, $n_L = 1{,}7$. Ein Gegenstand ist $s_O = -8$ cm vom linken Scheitel entfernt (Abb. 6.38). In welchem Abstand $s'_{O'}$ vom rechten Scheitel entsteht das Bild? Wie groß ist β'?

Lösung

Die Brechkraft der Linse beträgt nach (6.36)

$$D' = 0{,}7 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)\text{cm}^{-1} - \frac{0{,}7^2}{1{,}7} \cdot \frac{3}{25}\text{cm}^{-1}$$
$$= 0{,}245\ \text{cm}^{-1} = 24{,}5\ \text{dpt}.$$

Die Brennweite ist $f' = 4{,}07$ cm. Für die Abstände der Hauptebenen von den Scheiteln gilt nach (6.39)

$$-s'_{H'} = s_H = 4{,}07\ \text{cm} \cdot \frac{0{,}7}{1{,}7} \cdot \frac{3}{5} = 1{,}01\ \text{cm}.$$

Abbildung 6.38 zeigt die Lage der beiden Hauptebenen. Für die weitere Rechnung benötigt man zunächst die Gegenstandsweite

$$a = s_O - s_H = -8\ \text{cm} - 1{,}01\ \text{cm} = -9{,}01\ \text{cm}.$$

Die Bildweite a' folgt aus der Abbildungsgleichung (6.32):

$$a' = \frac{af'}{a + f'} = \frac{-9{,}01 \cdot 4{,}07}{-9{,}01 + 4{,}07}\text{cm} = 7{,}42\ \text{cm}.$$

Der Abstand von der rechten Linsenfläche ist

$$s'_{O'} = a' + s'_{H'} = 7{,}42\ \text{cm} - 1{,}01\ \text{cm} = 6{,}41\ \text{cm}.$$

Der Abbildungsmaßstab wird nach (6.28) berechnet:

$$\beta' = \frac{a'}{a} = -\frac{7{,}42\ \text{cm}}{9{,}01\ \text{cm}} = -0{,}82.$$

Die grafische Lösung ist in Abb. 6.38 wiedergegeben. Das Bild ist reell, Kopf stehend und verkleinert.

Zur Übung

Ü 6.2-18 Gegeben sei eine plankonvexe Linse mit den Daten $r_1 = \infty$. $r_2 = -4$ cm, $d = 2$ cm und $n_L = 1{,}7$. a) Wie groß ist die Brennweite f' der Linse? b) Wo befinden sich die Hauptebenen H und H′ relativ zu den Linsenscheiteln S und S′? c) Im Abstand $s_O = -12$ cm von der ebenen Fläche befindet sich ein Objekt. In welcher Entfernung $s'_{O'}$, von der Kugelfläche entsteht das Bild? d) Wie groß ist der Abbildungsmaßstab β'?

Ü 6.2-19 Eine Glaskugel mit dem Radius r und der Brechzahl n_L wird als Linse verwendet. Wie groß ist die Brennweite f', und wo befinden sich die Hauptebenen?

Ü 6.2-20 Wie hängt bei einer Plankonvex-(Plankonkav-)Linse die Brennweite f' von der Linsendicke ab?

Ü 6.2-21 Wie groß ist die Brennweite f' einer Meniskuslinse mit $r_1 = r_2 = r$ und der Dicke d? Wo liegen die Hauptebenen? Zeichnen Sie maßstäblich die Brechung eines von links kommenden achsenparallelen Strahls für $r = 5$ cm, $d = 3$ cm und $n_L = 1{,}7$.

6.2.4.3 Linsensysteme

Viele optische Systeme bestehen aus mehreren Linsen mit gemeinsamer optischer Achse. Der für eine optische Abbildung relevante Strahlenverlauf kann konstruiert werden, wenn die *Gesamtbrennweite* sowie die Lage der zwei *Hauptebenen des Systems* bekannt sind. Man führt also letztlich das System ersatzweise auf eine dicke Linse zurück.

Beispiel

6.2-11 Zwei dünne Sammellinsen L_1 und L_2 gemäß Abb. 6.39 sind im Abstand $e = 25$ cm angebracht. Die Brennweiten betragen $f_1' = 60$ cm und $f_2' = 50$ cm. Wie groß ist die Gesamtbrennweite f' und wo liegen die Hauptebenen des Systems?

Lösung

Sehr einfach lässt sich das Problem zeichnerisch lösen. In Abb. 6.39 fällt von links her ein achsenparalleler Strahl auf die Linse L_1 und wird auf F_1' zu gebrochen. Hinter der Linse L_2 verläuft der Strahl parallel zur Geraden AB (s. Ü 6.2-14), sodass er schließlich die optische Achse im Brennpunkt F′ schneidet. Der Schnittpunkt der Strahlverlängerungen definiert die Lage der bildseitigen Hauptebene H′. Nach obigem Muster wird der Weg eines von rechts parallel zur optischen Achse einfallenden Strahls konstruiert. Brennpunkt F und Hauptebene H sind somit bestimmt.

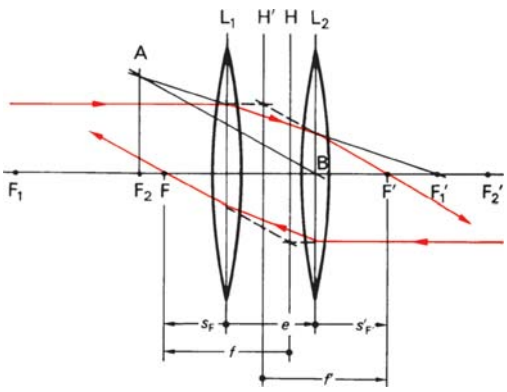


Abb. 6.39 Lage der Hauptebenen bei einem System aus zwei Sammellinsen (zu Beispiel 6.2-11)

Durch Anwendung der Abbildungsgleichung (6.31) erhält man für die Abstände der Brennpunkte von den Linsen

$$\frac{1}{s'_{F'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1' - e} \quad \text{und} \quad \frac{1}{s_F} = -\frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_2' - e} \,. \tag{6.40}$$

Für Beispiel 6.2-11 ergibt sich $s'_{F'} = 20{,}6$ cm und $s_F = -17{,}6$ cm.

Die Brennweite des Systems, als Abstand zwischen Brennpunkt und zugeordneter Hauptebene definiert, lässt sich durch elementare geometrische Überlegungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird, berechnen. Das Ergebnis ist

$$f' = -f = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e} \,. \tag{6.41}$$

Für Beispiel 6.2-11 ergibt sich $f' = 35{,}3$ cm.

Die Brechkraft des Systems ist

$$D' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'} \quad \text{oder}$$

$$D' = D_1' + D_2' - e\, D_1' D_2' \,. \tag{6.42}$$

Besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn der Abstand e der Linsen gegenüber den Brennweiten vernachlässigbar ist. Dies ist

praktisch der Fall, wenn sich zwei Linsen berühren. Aus (6.42) resultiert dann.

$$D' = D'_1 + D'_2 \,. \tag{6.43}$$

Bei eng zusammenstehenden Linsen ist die Brechkraft des Systems gleich der Summe der Brechkräfte der einzelnen Linsen.

Um die Brennweite einer Zerstreuungslinse zu messen, kombiniert man diese mit einer Sammellinse größerer Brechkraft, sodass das System insgesamt sammelnd wirkt. Für dieses System bestimmt man dann durch Ausmessen einer reellen Abbildung die Gesamtbrennweite (Ü 6.2-16). Die Brennweite der Zerstreuungslinse lässt sich dann aus (6.43) berechnen.

Zur Übung

Ü6.2-22 Eine dünne plankonvexe Linse hat den Krümmungsradius $r_1 = 20\,\text{cm}$ und den Brechungsindex $n_{L1} = 1{,}75$. Eine plankonkave Linse mit dem Brechungsindex $n_{L2} = 1{,}52$ wird so neben die erste Linse gestellt, dass sich die beiden ebenen Flächen berühren. Das System hat dann die Gesamtbrennweite $f' = 60\,\text{cm}$. a) Wie groß ist der Krümmungsradius r_2 der Zerstreuungslinse? b) Welchen Abstand e müssen die beiden Linsen haben, damit die Gesamtbrennweite auf $f' = 30\,\text{cm}$ abnimmt? c) Bestimmen sie zeichnerisch und rechnerisch die Lage der Hauptebenen von b). d) In welchem Abstand $s'_{O'}$ von der Zerstreuungslinse wird ein Objekt abgebildet, das $s_O = -65\,\text{cm}$ vor der Sammellinse steht? Wie groß ist der Abbildungsmaßstab β'?

Ü 6.2-23 Ein Laserstrahl soll von 2 mm Durchmesser auf 10 mm aufgeweitet werden. Zur Verfügung steht eine Zerstreuungslinse mit $f'_1 = -10\,\text{cm}$. Welche Brennweite f'_2 braucht die noch erforderliche Sammellinse? Wie groß ist der Abstand e der zwei Linsen?

6.2.4.4 Matrixmethoden

Optische Systeme bestehen meist aus mehreren Linsen und anderen Bauelementen. Eine elegante Beschreibung des Weges, den ein Lichtstrahl durch ein solches System nimmt, bietet die Matrixmethode.

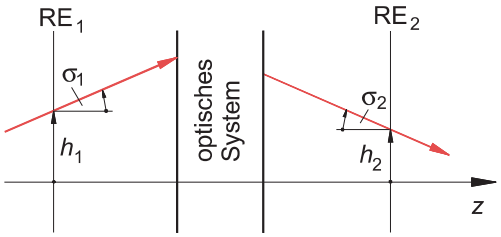


Abb. 6.40 Strahlenverlauf bei einem beliebigen optischen System

Ein Strahl ist durch zwei Parameter beschreibbar (Abb. 6.40). Beispielsweise durch die Höhe h_1 in einer beliebigen Referenzebene RE_1 sowie sowie den Neigungswinkel σ_1 relativ zur optischen Achse. Die Höhe h_2 und der Winkel σ_2 in einer anderen Referenzebene RE_2 hängt linear von den Eingangsdaten h_1 und σ_1 ab und kann in Form einer Matrixgleichung geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ist die *Systemmatrix*, deren Form von den optischen Bauteilen des Systems abhängt.

Im Wesentlichen wird der Weg eines Strahls durch ein optisches System durch zwei Vorgänge beeinflusst: den *Transfer* und die *Brechung*.

Transfermatrix

Als Transfer wird der Weg eines Strahls innerhalb eines homogenen Mediums (einheitlicher Brechungsindex) bezeichnet. Nach Abb. 6.41 gilt für die Winkel $\sigma_2 = \sigma_1$ und für die Höhen $h_2 = h_1 + d\tan\sigma_1$ bzw. bei paraxialer Optik $h_2 = h_1 + d\sigma_1$. In Matrixschreibweise gilt

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

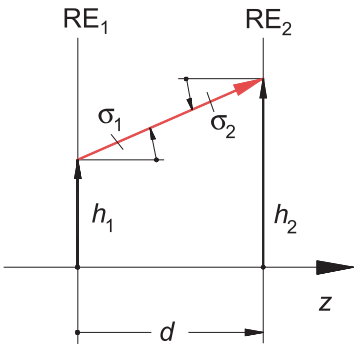


Abb. 6.41 Transfer eines Strahls zwischen zwei Referenzebenen

mit der *Transfermatrix*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

Brechungsmatrix

Abbildung 6.42 zeigt die Brechung eines Strahls an einer Kugelfläche, die zwei Medien mit den Brechzahlen n und n' voneinander trennt.

Aus den Beziehungen $\sigma' = \varepsilon' + \varphi = \varepsilon' - \frac{h}{r}$ und $\sigma = \varepsilon + \varphi = \varepsilon - \frac{h}{r}$ für die Winkel sowie dem Brechungsgesetz in paraxialer Form $n\,\varepsilon = n'\,\varepsilon'$ folgt

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix}$$

mit der *Brechungsmatrix*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{n'\,r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

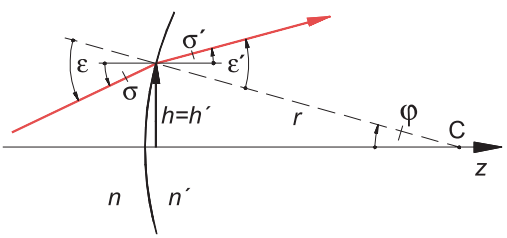


Abb. 6.42 Brechung an einer Kugelfläche

Strahlmatrix einer Linse

Nach Abb. 6.43 falle ein Strahl auf eine dicke Linse mit Brechzahl n_L, die links und rechts umgeben ist von Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2. Der Weg des Lichtstrahls wird durch drei Matrizen beschrieben:

Brechung an der Fläche S_1

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ \sigma'_1 \end{pmatrix}_{S_1} = \boldsymbol{B}_{S_1} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1},$$

Transfer von S_1 nach S_2

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_{S_1 S_2} \begin{pmatrix} h'_1 \\ \sigma'_1 \end{pmatrix}$$

und Brechung an der Fläche S_2

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix}_{S_2} = \boldsymbol{B}_{S_2} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}_{S_2}.$$

Insgesamt werden damit die Ausgangsgrößen mit den Eingangsgrößen verknüpft durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h'_2 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix}_{S_2} &= \boldsymbol{B}_{S_2} \boldsymbol{T}_{S_1 S_2} \boldsymbol{B}_{S_1} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1} \\ &= \boldsymbol{L}_\mathrm{dick} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1} \end{aligned}$$

mit der Strahlmatrix für dicke Linsen

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{dick} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_\mathrm{L}-n'}{n'\,r_2} & \frac{n_\mathrm{L}}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n_\mathrm{L}}{n_\mathrm{L}\,r_1} & \frac{n}{n_\mathrm{L}} \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

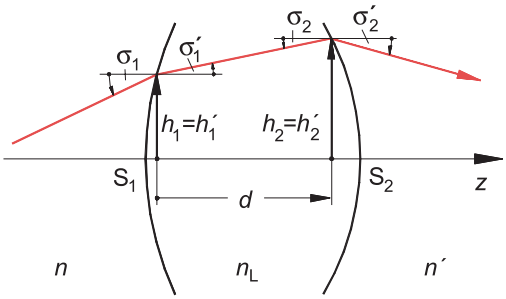


Abb. 6.43 Verlauf eines Strahls durch eine dicke Linse

Für den Fall der dünnen Linse ($d = 0$), die beidseitig von Luft umgeben ist ($n = n' = 1$) ergibt sich

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_\text{L}-1}{r_2} & n_\text{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n_\text{L}}{n_\text{L}\, r_1} & \frac{1}{n_\text{L}} \end{pmatrix} .$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation führt dies zu der Matrix

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_\text{L} - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Matrixelement C der $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$-Matrix ist nach (6.29) identisch mit der negativen Brechkraft der Linse. Damit vereinfacht sich die Matrix zu

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D' & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.48)$$

Reflexionsmatrix

Abbildung 6.44 zeigt die Reflexion an einem sphärischen Spiegel (Abb. 6.10). In der Praxis wird der Strahlengang gerne *aufgefaltet*, d. h. nach rechts weiter gezeichnet. Die Höhen und Winkel hängen zusammen gemäß

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix} \quad \text{mit der } \textit{Reflexionsmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix} . \qquad (6.49)$$

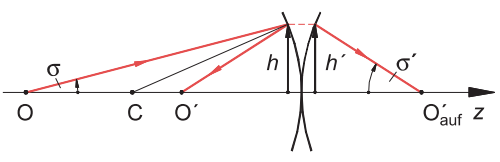


Abb. 6.44 Strahlengang am Hohlspiegel mit Auffaltung

Systemmatrix

Für ein beliebiges System brechender und reflektierender Flächen (Abb. 6.40) sind die Höhen und Winkel an zwei Referenzebenen durch (6.44) verknüpft. Die Systemmatrix ergibt sich durch Matrizenmultiplikation verschiedenster Transfer-, Brechungs- und Reflexionsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} , \qquad \text{mit}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_k \boldsymbol{M}_{k-1} \ldots \boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{M}_1 .$$

Für die Determinante der Systemmatrix gilt

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = \frac{n_1}{n_2} , \qquad (6.50)$$

wobei n_1 und n_2 die Brechungsindizes an den Referenzebenen RE_1 und RE_2 sind. Sehr häufig ist am Anfang und am Ende eines Systems Luft, sodass sich (6.60) vereinfacht zu

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = 1 .$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis zur Kontrolle der Systemmatrix auf etwaige Rechenfehler.
Falls eines oder mehrere Matrixelemente der Systemmatrix null sind, ergeben sich interessante Schlussfolgerungen (Abb. 6.45).
$A = 0$: Ein paralleles Strahlenbündel wird auf einen Punkt in der Referenzebene RE_2 fokussiert. Damit ist RE_2 identisch mit der bildseitigen Brennebene.
$B = 0$: Strahlen, die von einem Punkt der Referenzebene RE_1 ausgehen, vereinigen sich wieder in einem Punkt der Referenzebene RE_2. Damit sind RE_1 und RE_2 Gegenstands- und Bildebene (sie sind konjugiert). Der *Abbildungsmaßstab* ist

$$\beta' = \frac{y'}{y} = A . \qquad (6.51)$$

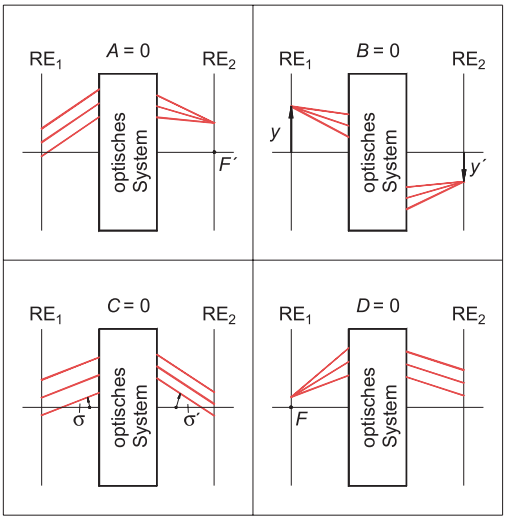


Abb. 6.45 Strahlengänge beim Verschwinden spezieller Matrixelemente

$C = 0$: Parallelstrahlen werden in Parallelstrahlen übergeführt. Es liegt also ein afokales System vor (Fernrohr, Abschn. 6.2.7.4). Die Winkelvergrößerung (Vergrößerung des Fernrohrs) ist

$$\gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma} = D\,. \tag{6.52}$$

$D = 0$: Alle Strahlen, die von einem Punkt der Referenzebene RE_1 ausgehen, werden zu Parallelstrahlen. Damit ist RE_1 die gegenstandseitige Brennebene.

Lage der Kardinalpunkte

Bezüglich der zwei Referenzebenen RE_1 und RE_2 (Abb. 6.40) lassen sich einfache Ausdrücke finden für die Abstände zu den interessanten Punkten eines optischen Systems. Sie sind in Tabelle6.2 zusammen gestellt.

Beispiel

6.2-12 Für das System von zwei dünnen Sammellinsen des Beispiels 6.2-11 Abb. 6.39 soll mithilfe der Matrizenmethode die Systembrennweite bestimmt werden.

Lösung

Zweckmäßigerweise legt man die Referenzebene RE_1 in die Linse L_1 und die Ebene RE_2 in die Linse L_2. Damit wird die Systemmatrix ein Produkt aus zwei Linsenmatrizen nach (6.48) sowie einer Transfermatrix nach (6.45):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}_2\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1'} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e}{f_1'} & e \\ -\frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_2'} + \frac{e}{f_1' f_2'} & 1 - \frac{e}{f_2'} \end{pmatrix}$$

und numerisch mit $f_1' = 60$ cm, $f_2' = 50$ cm und $e = 25$ cm

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0.5833 & 25\ \text{cm} \\ -0{,}02833\ \text{cm}^{-1} & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle: $\det \boldsymbol{M} = 1$.
Für die Gesamtbrennweite bzw. Brechzahl gilt nach (6.58)
$\frac{1}{f'} = -C = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'} = 2{,}83$ dpt, in Übereinstimmung mit den Gleichungen (6.41) und (6.42). Ebenso

Tabelle 6.2 Lage der Kardinalpunkte eines optischen Systems

Kardinalpunkt	Beziehung
Abstand des objektseitigen Brennpunktes F von RE_1	$s_{1,\mathrm{F}} = \frac{D}{C}$ (6.53)
Abstand des bildseitigen Brennpunktes F′ von RE_2	$s'_{2,\mathrm{F}'} = -\frac{A}{C}$ (6.54)
Abstand der objektseitigen Hauptebene H von RE_1	$s_{1,\mathrm{H}} = \frac{D - (n_1/n_2')}{C}$ (6.55)
Abstand der bildseitigen Hauptebene H′ von RE_2	$s'_{2,\mathrm{H}'} = \frac{1 - A}{C}$ (6.56)
objektseitige Brennweite	$f = \frac{n_1/n_2'}{C}$ (6.57)
bildseitige Brennweite	$f' = -\frac{1}{C}$ (6.58)

einfach lassen sich aus der Systemmatrix die Gleichungen (6.40) für die Lage der Brennpunkte sowie der Hauptpunkte herleiten.

Beispiel

6.2-13 Im Abstand $s_O = -40$ cm von der Linse L_1 des Systems von Beispiel 6.2-12 stehe ein Gegenstand. Wo entsteht das Bild? Wie groß ist der Abbildungsmaßstab?

Lösung

Das System wird nach links und rechts so erweitert, dass die Referenzebene RE_1 mit der Gegenstandsebene übereinstimmt und RE_2 mit der Bildebene (Abb. 6.46). Die Systemmatrix wird damit:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & s'_{O'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5833 & 25\ \text{cm} \\ -0{,}02833\ \text{cm}^{-1} & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 40\ \text{cm} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5833 - 0{,}02833\ \text{cm}^{-1} s'_{O'} & 48{,}33\ \text{cm} - 0{,}6333 s'_{O'} \\ -0{,}02833\ \text{cm}^{-1} & -0{,}6333 \end{pmatrix}$$

Nach Abb. (6.45) liegt eine optische Abbildung vor, wenn $B = 0$ ist. Aus $48{,}33\ \text{cm} - 0{,}6333\, s'_{O'} = 0$ folgt $s'_{O'} = 76{,}3$ cm. Der Abbildungsmaßstab ist nach (6.51) $\beta' = A = 0{,}5833 - 0{,}02833\ \text{cm}^{-1} \cdot 76{,}3\ \text{cm} = -1{,}58$. Das Bild ist reell, umgekehrt und vergrößert.

Zur Übung

Ü 6.2-24 Ein Linsensystem besteht aus drei dünnen Linsen der Brennweiten $f'_1 = 3$ cm, $f'_2 = -7{,}5$ cm und $f'_3 = 1{,}5$ cm. Die Abstände zwischen den Linsen sind $e_{12} = 3$ cm und $e_{23} = 9$ cm. Wie groß ist die Brennweite des Systems? Wo liegen die Brennpunkte und die Hauptpunkte? Die Linsen befinden sich an Luft.

Ü 6.2-25 Bestimmen Sie die Brennweite sowie die Lage der Brennpunkte und der Hauptpunkte für eine Glaslinse, welche die Form einer Halbkugel hat, die beiderseits von Luft umgeben ist. Linsendaten: $n_L = 1{,}5$; $r_1 = +3$ cm; $r_2 = \infty$. Wo erscheint das Bild eines Objektes, das sich im Abstand $s_O = -10$ cm vom linken Linsenscheitel befindet? Geben Sie den Abstand $s'_{O'}$ von der rechten Planseite an.

6.2.5 Blenden im Strahlengang

In jedem optischen System sind *Blenden* vorhanden, die den Querschnitt der zur Abbildung verwendeten Lichtstrahlen begrenzen. Abbildung 6.47 zeigt die Abbildung des Gegenstandes $P_1\,P_2$ durch eine Sammellinse ins reelle Bild $P'_1P'_2$. Innerhalb des schraffierten Kegels laufen alle Strahlen, die vom Punkt P_2 ausgehen und in P'_2 gesammelt werden. Das Strahlenbündel ist begrenzt durch eine materielle Blende oder *Pupille*. Die Linse entwirft von der Blende ein reelles Bild, die *Austrittspupille* AP, durch die wieder alle Strahlen gehen müssen. Vom Gegenstandspunkt O, der auf der optischen Achse liegt, gelangen alle Strahlen, die innerhalb des strichpunktierten Kegels liegen, zur Abbildung. Der Öffnungswinkel σ wird *objektseitiger Aperturwinkel* genannt, der konjugierte Winkel σ' ist der *bildseitige Aperturwinkel*. Allgemein wird σ durch die *Eintrittspupille* EP begrenzt, σ' durch die Austrittspupille AP. In Abb. 6.47 spielt also die reale Blende zugleich die Rolle der Eintrittspupille. Lässt man den Durchmesser der Eintrittspupille gegen null gehen, so werden die zur Abbildung gelangenden Lichtkegel immer

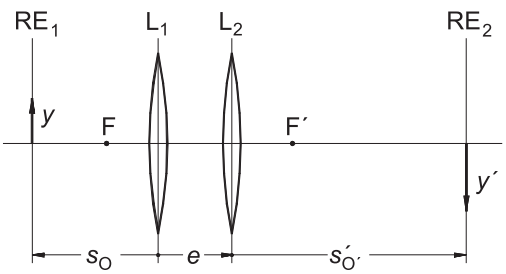


Abb. 6.46 Zu Beispiel 6.2-13

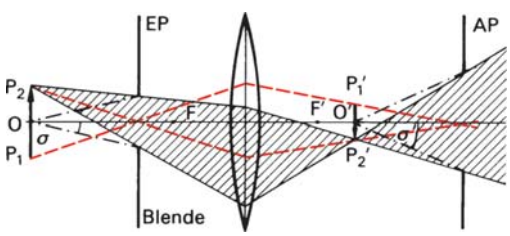


Abb. 6.47 Strahlbegrenzung durch eine Blende

schlanker, bis schließlich nur noch die rot gestrichelten *Hauptstrahlen* übrig bleiben.
Es ist offensichtlich, dass die Lichtmenge, die vom Gegenstand zum Bild gelangt, von der Größe der Eintrittspupille abhängt. Die Blende steuert damit die Helligkeit des Bildes.
Eine weitere Funktion einer Blende ist die Begrenzung des *Gesichtsfelds*. Diese Blendenwirkung ist in Abb. 6.48 verdeutlicht, wo der Gegenstandsraum von Abb. 6.47 noch einmal dargestellt ist. Für diejenigen Gegenstandspunkte, die sich innerhalb der Grenzen P_1 und P_2 befinden, gelangen alle Strahlen, die die Eintrittspupille passiert haben, auch auf das Bild. Für Gegenstandspunkte zwischen P_1 und P_3 bzw. P_2 und P_4 wirkt die Linsenfassung als Blende, sodass nur ein Teil der Strahlen auf das Bild gelangt. Gegenstandspunke schließlich, die außerhalb von P_3 und P_4 sitzen, werden durch die vorliegende Anordnung überhaupt nicht mehr abgebildet. Das Gesichtsfeld ist hier nicht scharf begrenzt, sondern es wird nach außen hin allmählich dunkler. Diesen Effekt bezeichnet man als *Vignettierung* oder *Abschattung*. Soll das Gesichtsfeld scharf begrenzt sein, so muss in der Bildebene eine *Gesichtsfeldblende* angebracht werden. Anstelle einer körperlichen Blende kann auch das Bild einer Blende, eine *Luke*, das Gesichtsfeld begrenzen.

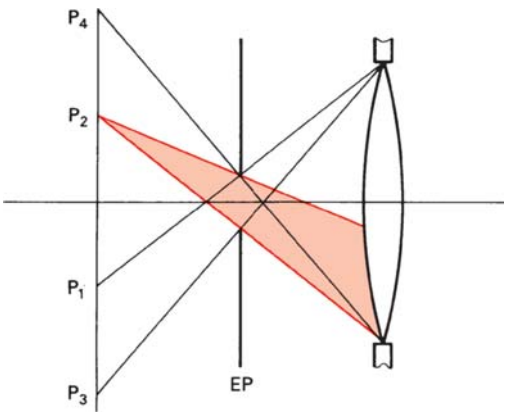


Abb. 6.48 Begrenzung des Gesichtsfelds bei einem ausgedehnten Gegenstand

Zur Übung

Ü6.2-26 In 30 cm Abstand vor einer Sammellinse steht eine Blende mit 12 mm Durchmesser. Ihr Bild (AP) entsteht 60 cm hinter der Linse. a) Welchen Durchmesser hat die Austrittspupille? b) Konstruieren Sie mithilfe der Pupillenstellungen die Abbildung eines Gegenstandes mit $a = -50$ cm Gegenstandsweite und $y = 1$ cm Größe. c) Wie groß muss der Linsendurchmesser mindestens sein, damit auch die Randpartien ohne Abschattung abgebildet werden?

6.2.6 Abbildungsfehler

Bei der bisherigen Beschreibung optischer Abbildungen ist idealisierend vorausgesetzt, dass nur achsennahe Strahlen an der Abbildung beteiligt sind. Sobald Strahlen in großem Abstand von der optischen Achse bzw. unter großen Winkeln gegen diese verlaufen, ist die Abbildung mit Fehlern behaftet. Tabelle 6.3 zeigt eine knappe Zusammenstellung der wichtigsten Abbildungsfehler.
Zur Behebung der Abbildungsfehler sind immer mehr oder weniger komplizierte Linsensysteme erforderlich. Dabei wird ausgenutzt, dass bestimmte Fehler in verschiedenen Linsentypen gegenläufig sind, sodass sie sich bei der Kombination ganz oder teilweise aufheben. Eine vollkommene Korrektur aller Abbildungsfehler ist nicht möglich.

6.2.7 Optische Instrumente

6.2.7.1 Das menschliche Auge

In Abb. 6.49 sind die wichtigsten Teile des menschlichen Auges dargestellt. Das Auge wird eingehüllt von der stabilen *Lederhaut* Le. Darunter liegt die für den Stoffwechsel wichtige *Aderhaut* A, die mit der lichtempfindlichen *Netzhaut* N ausgekleidet ist. Die lichtdurchlässigen Teile des Auges sind die

Tabelle 6.3 Abbildungsfehler

Bezeichnung	Ursache und Auswirkung	Beseitigung
sphärische Aberration (Öffnungsfehler)	Ein Objektpunkt auf der optischen Achse wird, falls nur achsennahe Strahlen an der Abbildung beteiligt sind, weiter von einer Sammellinse entfernt abgebildet, als bei der ausschließlichen Verwendung achsenferner Strahlen. Daher wird ein Punkt durch weit geöffnete Strahlenbündel nicht als Punkt, sondern als Zerstreuungsscheibchen abgebildet.	Kombination mehrerer Linsen verschiedener Brennweite (z. B. Sammellinse und Zerstreuungslinse); Variation der Linsenform. Ein korrigiertes System wird als Aplanat bezeichnet.
Astigmatismus und Bildfeldwölbung	Ausgedehnte ebene Objekte werden nicht in einer Ebene, sondern auf zwei gekrümmten Bildschalen, die sich auf der optischen Achse berühren, abgebildet. Deshalb entsteht bei der Abbildung eines Punktes, der außerhalb der optischen Achse liegt, auch bei der Verwendung schlanker Strahlenbündel kein Bildpunkt, sondern zwei zueinander senkrecht verlaufende Bildstriche auf den beiden Bildschalen in verschiedenen Abständen von der Linse.	Kombination mehrerer Linsen aus geeigneten Gläsern; Veränderung der Blendenlage. Ein korrigiertes System ist ein Anastigmat.
Koma	Strahlenbündel großer Öffnung bilden einen Punkt, der außerhalb der optischen Achse liegt, nicht als Punkt, sondern als ovale Figur mit kometenhaftem Schweif ab.	Abblenden; Fehler ist stark abhängig von der Blendenlage.
Verzeichnung	Bei falscher Blendenlage sind Bild und Objekt nicht geometrisch ähnlich. Liegt die Blende zu weit im Gegenstandsraum, wird ein Quadrat tonnenförmig verzeichnet, liegt sie zu weit im Bildraum, resultiert eine kissenförmige Verzeichnung.	Blende bzw. Pupille sollte in der Linsenebene liegen. Verwirklicht im orthoskopischen Objektiv.
chromatische Aberration	Farbfehler, der aufgrund der Dispersion des Linsenmaterials entsteht, wenn zur Abbildung kein monochromatisches Licht verwendet wird. Das Bild wird unscharf und erhält farbige Ränder.	Kombination von Sammellinse aus Kronglas und Zerstreuungslinse aus Flintglas; korrigiertes Objektiv ist ein Achromat.

Hornhaut H, die mit *Kammerwasser* gefüllte *vordere Augenkammer* K, die *Linse* Li sowie der gallertartige *Glaskörper* G.

Das normalsichtige Auge ist im Ruhezustand so eingestellt, dass paralleles Licht unendlich ferner Gegenstände auf die Netzhaut fokussiert wird, wie es Abb. 6.50 zeigt. Dabei regelt die *Iris* I (*Regenbogenhaut*) als Eintrittspupille die Lichtmenge, die ins Auge fällt. Die Brechung des Lichts findet vorwiegend an der gekrümmten Hornhaut statt. Die Linse sorgt lediglich dafür, dass Gegenstände in verschiedenen Entfernungen scharf gesehen werden. Zu diesem Zweck wird die Krümmung der Augenlinse mithilfe des *Ziliarmuskels Z* verändert (*Akkommodation*). Der nächstgelegene Punkt, den man eben noch scharf sehen kann, wird *Nahpunkt* genannt. Er liegt bei Jugendlichen

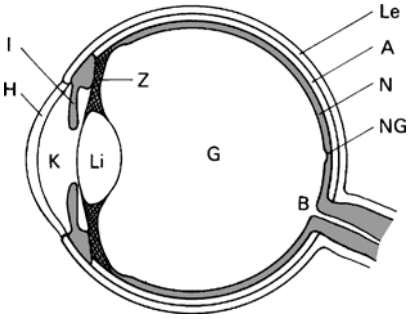


Abb. 6.49 Querschnitt durch das menschliche Auge

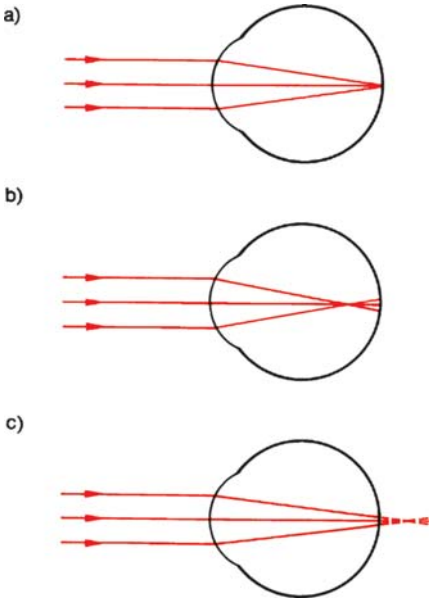


Abb. 6.50 Menschliches Auge: **a**) normalsichtig, **b**) kurzsichtig, **c**) übersichtig (weitsichtig)

bei etwa 10 cm und nimmt mit zunehmendem Alter zu. Als *Bezugssehweite* oder *deutliche Sehweite* wurde der Abstand $a_B = -25$ cm festgelegt, in dem der normalsichtige Mensch ohne Anstrengung Gegenstände betrachten kann. Der *Fernpunkt* liegt beim normalsichtigen Auge im Unendlichen.

Beim *kurzsichtigen* Auge ist die Brechkraft des Systems so groß, dass parallel einfallende Strahlen schon vor der Netzhaut vereinigt werden (Abb. 6.50b). Der Kurzsichtige kann unendlich entfernte Gegenstände nicht scharf sehen, sein Fernpunkt liegt im Endlichen. Zur Korrektur wird eine Brille mit Zerstreuungslinsen verwandt.

Beim *übersichtigen* (*weitsichtigen*) Auge ist die Brechkraft so gering, dass der Brennpunkt hinter der Netzhaut liegt (Abb. 6.50c). Der Übersichtige kann durch Akkommodation diesen Fehler zum Teil ausgleichen. Die ständige Anspannung des Augenmuskels wirkt aber ermüdend. Zur Korrektur trägt der Übersichtige eine Sammellinse.

Hat das Auge in zwei zueinander senkrechten Richtungen verschiedene Brennweiten, so liegt *Augenastigmatismus* vor. Zur Korrektur muss das Brillenglas in verschiedenen Richtungen unterschiedlich gekrümmt sein.

Die eigentlich lichtempfindlichen Sinneszellen des Auges sind die in der Netzhaut eingebetteten *Stäbchen* und *Zapfen*. Die Zapfen können verschiedene Farben (rot, grün, blau) unterscheiden, während die wesentlich empfindlicheren Stäbchen farbuntüchtig sind. Die Lichtempfindung wird über Nervenfasern dem Sehzentrum des Gehirns zugeleitet. An der Stelle, wo die Sehnerven das Auge verlassen, ist die Netzhaut unempfindlich (*blinder Fleck* B in Abb. 6.49). Die größte Dichte der Zapfen besteht in der *Netzhautgrube* NG; nach außen hin nimmt die Anzahl der Zapfen ab, gleichzeitig nimmt die Anzahl der Stäbchen zu.

Das Auflösungsvermögen des Auges ist eng mit der Struktur der Netzhaut verknüpft. So können zwei Punkte nicht mehr getrennt wahrgenommen werden, wenn ihre Bildpunkte so aneinander liegen, dass nur ein einziger Zapfen angeregt wird. Der *physiologische Grenzwinkel,* unter dem Gegenstände noch getrennt wahrgenommen werden können, beträgt etwa eine Winkelminute für Bilder in der Netzhautgrube NG (Abb. 6.49). In der Bezugssehweite 25 cm müssen demnach zwei Punkte 0,07 mm

weit auseinander sein, damit man sie noch als getrennt wahrnimmt.

Funktion der optischen Instrumente

Nach Abb. 6.51 entwerfen die brechenden Teile des Auges auf der Netzhaut ein umgekehrtes reelles Bild eines Gegenstandes. Die Größe des Netzhautbildes ist direkt proportional zum Sehwinkel σ, unter dem das Objekt erscheint. Will man von einem Gegenstand mehr Details erkennen, muss er näher ans Auge gebracht werden. Dadurch nimmt der Sehwinkel bzw. die scheinbare Größe des Gegenstandes zu. Bei Unterschreiten des Nahpunktes wird das Netzhautbild wegen mangelnder Akkommodationsfähigkeit unscharf. Eine weitere Vergrößerung ist nur möglich, wenn optische Instrumente (Lupe, Mikroskop, Fernrohr) zu Hilfe genommen werden. Die Aufgabe der optischen Instrumente besteht darin, den Sehwinkel zu vergrößern. Da das Netzhautbild dem Tangens des Sehwinkels proportional ist, definiert man sinnvollerweise als *Vergrößerung* (*Angularvergrößerung*) eines Instruments

$$\Gamma' = \frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma} \approx \frac{\sigma'}{\sigma} \,. \qquad (6.59)$$

Dabei ist σ' der Sehwinkel mit, σ derjenige ohne Instrument. Meist kann man den Tangens durch den Winkel selbst ersetzen.

Zur Übung

Ü 6.2-27 Der Nahpunkt eines übersichtigen Auges sei $a_N = -50$ cm. Welche Brechkraft muss eine Brille haben, damit der Nahpunkt des Auges in die Bezugssehweite $a_B = -25$ cm rückt? (Der Abstand e' zwischen Brillenglas und Augenlinse sei vernachlässigbar.)

Ü 6.2-28 Bei einem kurzsichtigen Menschen liegt der Fernpunkt $a_F = -50$ cm vor dem Auge. Welche Brechkraft braucht seine Brille, damit er wieder bis unendlich sehen kann?

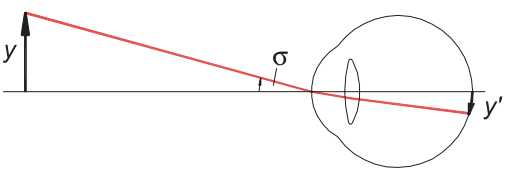


Abb. 6.51 Definition des Sehwinkels σ

6.2.7.2 Lupe

Die Lupe ist eine Sammellinse kurzer Brennweite. Ihre Vergrößerung ist umso höher, je stärker die Brechkraft der Linse ist. Nach DIN 58 383 versteht man unter Lupen im engeren Sinne solche, die eine mindestens dreifache Vergrößerung haben. Bei geringeren Vergrößerungen spricht man von *Lesegläsern*. Die Vergrößerung hängt nicht nur von der Lupe selbst ab, sondern auch ganz wesentlich vom Abstand zwischen Gegenstand und Lupe bzw. Auge. Da es praktisch unmöglich ist, für alle vorkommenden Abstände mit einfachen Formeln eine Vergrößerung zu berechnen, gibt man in der Regel die *Normalvergrößerung* der Lupe an. Dazu wird festgelegt, dass der Gegenstand in der Brennebene der Linse steht und das Auge auf Unendlich akkommodiert ist.
Abbildung 6.52 zeigt den Strahlengang für diesen Fall. Es ist im Prinzip gleichgültig für die Vergrößerung, wo das Auge steht; denn alle Strahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes ausgehen, verlaufen hinter der Linse unter demselben Winkel σ' zur optischen Achse. Allerdings ist das Gesichtsfeld am größten, wenn

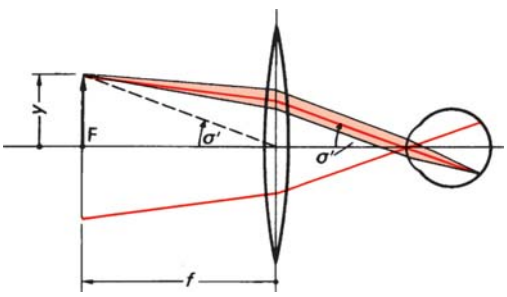


Abb. 6.52 Strahlengang bei der Lupe

sich das Auge möglichst nahe an der Linse befindet. Welches Strahlenbündel zur Abbildung herangezogen wird, legt die Augenpupille fest. Die Augenlinse vereinigt die Parallelstrahlen zu einem Punkt auf der Netzhaut.

Nach Abb. 6.52 gilt für den Winkel σ' die Beziehung $\tan\sigma' = y/f = -y/f'$. Zur Bestimmung der Vergrößerung vergleicht man diesen Winkel mit jenem, unter dem das Objekt für das unbewaffnete Auge erscheint, wenn es im Abstand $a_B = -25$ cm (Bezugssehweite) angeordnet ist: $\tan\sigma = y/a_B$. Somit gilt für die *Normalvergrößerung der Lupe*

$$\Gamma'_L = -\frac{a_B}{f'} . \tag{6.60}$$

Die Vergrößerung ist positiv, weil a_B ein negatives Vorzeichen hat. Eine Lupe bewirkt also gegenüber der Betrachtung mit unbewaffnetem Auge keine Bildumkehr.

Soll die Vergrößerung gesteigert werden, so wird der Abstand zwischen Lupe und Objekt vermindert. Dadurch entsteht ein virtuelles vergrößertes Bild in endlichem Abstand vom Auge. Bringt man die Linse nach Abb. 6.53 in eine solche Position, dass das virtuelle Bild im Abstand der Bezugssehweite a_B von der Linse entsteht, dann gilt für den Winkel σ', unter dem der Hauptstrahl die Linse durchgesetzt

$$\tan\sigma' = \frac{y}{a} = \frac{y'}{a_B} .$$

Unter der Voraussetzung, dass sich das Auge dicht an der Lupe befindet, durchsetzt der Hauptstrahl die Augenlinse unter demselben Winkel. Das Verhältnis der Sehwinkel mit und ohne Instrument ist dann

$$\frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma} = \frac{y'}{y} = \beta' .$$

In diesem Fall ist also die Angularvergrößerung identisch mit der Lateralvergrößerung (Abbildungsmaßstab). Mit $a' = a_B$ ergibt sich

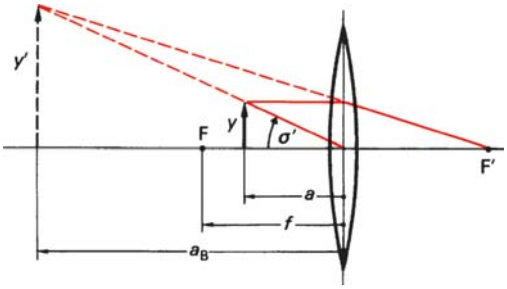


Abb. 6.53 Gegenstand innerhalb der Brennweite einer Lupe

aus der Abbildungsgleichung (6.31) sofort die Lupenvergrößerung bei Akkommodation:

$$\Gamma'_{L,A} = 1 - \frac{a_B}{f'} = 1 + \Gamma'_L . \tag{6.61}$$

6.2.7.3 Mikroskop

Für sehr starke Vergrößerungen wäre nach (6.60) eine Lupe mit extrem kleiner Brennweite erforderlich, was technisch schwer zu realisieren ist. Eine kleine Brennweite lässt sich aber auch erzielen, wenn man anstatt einer Linse ein Linsensystem mit zwei Linsen nimmt. Obwohl die beiden Linsen selbst verhältnismäßig große Brennweiten haben können, ist nach (6.41) bei geeignetem Abstand die Gesamtbrennweite des Systems klein.

Der Strahlengang im Mikroskop ist in Abb. 6.54 dargestellt. Das *Objektiv* Ob entwirft von dem Gegenstand G ein vergrößertes reelles *Zwischenbild* ZB. Dieses Zwischenbild wird mithilfe des *Okulars* Ok betrachtet. Das Okular hat die Funktion einer Lupe und dient der weiteren Vergrößerung des Zwischenbildes. Die parallelen Strahlen, die in Abb. 6.54 das Okular verlassen, werden durch die Augenlinse auf die Netzhaut des Betrachters fokussiert.

Die Abbildung geschieht im Mikroskop in zwei Stufen. Dementsprechend lässt sich die Mikro-

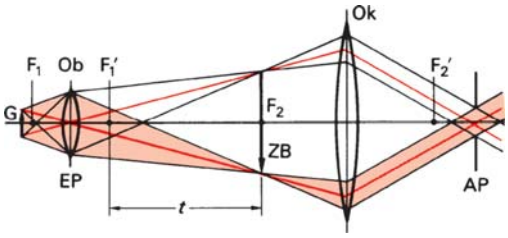


Abb. 6.54 Strahlengang beim Mikroskop

skopvergrößerung Γ'_M aus dem Abbildungsmaßstab β'_{Ob} des Objektives und der Lupenvergrößerung Γ'_{Ok} des Okulars berechnen:

$$\Gamma'_M = \beta'_{Ob}\Gamma'_{Ok} \,. \tag{6.62}$$

Der Abbildungsmaßstab β'_{Ob} wird mithilfe der elementaren Gleichungen (6.28) und (6.31) berechnet. Er ist besonders einfach darstellbar mithilfe der *optischen Tubuslänge t* des Mikroskops: $\beta'_{Ob} = -t/f'_{Ob}$. Somit ist die Gesamtvergrößerung des Mikroskops

$$\Gamma'_M = \frac{t}{f'_{Ob}}\frac{a_B}{f'_{Ok}} \,. \tag{6.63}$$

In der Praxis kann man die Gesamtvergrößerung eines Mikroskops sofort aus den Zahlen bestimmen, die auf Objektiv und Okular eingraviert sind. Steht beispielsweise auf einem Objektiv 40/0,65, so beträgt der Abbildungsmaßstab $|\beta'| = 40$ und die numerische Apertur ist $A_N = 0{,}65$. Ist z. B. auf dem Okular 10× eingraviert, dann ergibt sich die Mikroskopvergrößerung $|\Gamma'_M| = 400$. Die *mechanische Tubuslänge* moderner Mikroskope ist in der Regel $t = 160$ mm. Normwerte für Objektiv- und Okularvergrößerungen sind in DIN 58 886 festgelegt.

Die Öffnung der abbildenden Strahlenbündel wird in Abb. 6.54 durch den Durchmesser des Objektivs begrenzt. Das Objektiv ist demnach die Eintrittspupille EP des Systems. Die Austrittspupille AP ist das vom Okular entworfene Bild der Eintrittspupille. An der Stelle der Austrittspupille sollte sich die Pupille des beobachtenden Auges befinden.

Sowohl das Objektiv als auch das Okular eines Mikroskops besteht zur Korrektur der Abbildungsfehler immer aus mehreren Linsen. Abbildung 6.55a zeigt Ansicht und Schnitt ei-

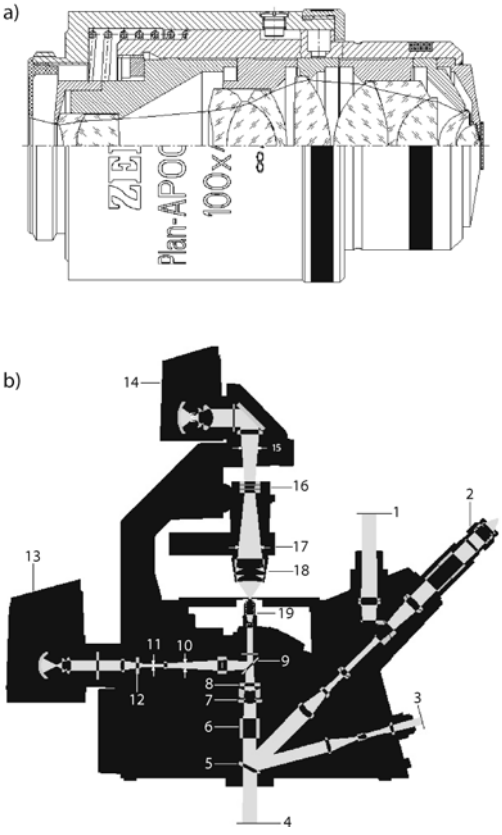


Abb. 6.55 Technische Ausführung eines Mikroskops: **a**) Objektiv, Plan-Apochromat 100 × /1,40 Oil, **b**) Inverses Mikroskop (Axiovert 200), bei dem das Objekt von unten betrachtet wird. Diese Anordnung hat besondere Vorteile für biologische Präparate, die am Boden einer Kulturschale wachsen. 13, 14: Lampen für Auf- und Durchlicht, 18: Kondensor, 19: 6-fach Objektivrevolver, 2: Okular.
Werbilder: Carl Zeiss AG, Göttingen

nes modernen Planapochromaten, der besonders gegen sphärische und chromatische Aberration sowie Bildfeldwölbung korrigiert ist. In Abb. 6.55b sind Aufbau und Strahlengang eines modernen Mikroskops wiedergegeben. Das Auflösungsvermögen des Mikroskops ist in Abschn. 6.4.1.5 beschrieben.

Zur Übung

Ü 6.2-29 Bei einem Mikroskop ist die Objektivbrennweite $f'_{\mathrm{Ob}} = 4$ mm, die Okularbrennweite $f'_{\mathrm{Ok}} = 25$ mm und die Tubuslänge $t = 160$ mm. a) Wie groß ist die Mikroskopvergrößerung Γ'_{M}? b) In welchem Abstand z_{Ob} vom vorderen Ojektivbrennpunkt muss sich das Objekt befinden, wenn es von einem auf unendlich eingestellten Auge scharf gesehen werden soll? c) Das Okular wird um Δz_{Ok} nach hinten verschoben und entwirft dadurch ein reelles Bild. In welchem Abstand a'_{Ok} vom Okular muss man einen Schirm aufstellen, um das Bild aufzufangen, und wie groß ist der gesamte Abbildungsmaßstab β'? Zeichnen Sie ein Diagramm für $1\ \mathrm{mm} \leqq \Delta z_{\mathrm{Ok}} \leqq 25\ \mathrm{mm}$. Was ergibt sich speziell für $\Delta z_{\mathrm{Ok}} = 1$ mm?

Ü 6.2-30 Ein Mikroskop kann ersatzweise wie eine Lupe mit extrem kleiner Brennweite behandelt werden. Berechnen Sie für das Mikroskop von Ü 6.2-29 die Gesamtbrennweite f' und die Lupenvergrößerung Γ'_{L}. Wieso ist die Gesamtbrennweite negativ?

6.2.7.4 Fernrohr

Das Fernrohr hat die Aufgabe, den Sehwinkel, unter dem weit entfernte Gegenstände erscheinen, zu vergrößern. Das Bild soll mit entspanntem Auge betrachtet werden. Dies bedeutet, dass ein ins Fernrohr eintretendes paralleles Strahlenbündel auch wieder als paralleles Bündel austreten muss. Diese Bedingung wird von einem *afokalen* System mit zwei Linsen erfüllt. Dabei fällt der bildseitige Brennpunkt der ersten Linse mit dem gegenstandsseitigen der zweiten zusammen.

Abbildung 6.56 zeigt die beiden Grundtypen des Fernrohrs. Das *Kepler'sche* (1611) oder *astronomische* Fernrohr hat zwei Sammellinsen, das *Galilei'sche* (1609) oder *holländische* Fernrohr eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse. Beim Kepler'schen Fernrohr entwirft das Objektiv in seiner bildseitigen Brennebene ein reelles Zwischenbild ZB eines unendlich entfernten Gegenstandes, das dann mit dem als Lupe wirkenden Okular betrachtet wird. Befindet sich das Objekt in endlicher Entfernung, so entsteht das Zwischenbild hinter der bildseitigen Brennebene. Eine Scharfeinstellung geschieht am einfachsten dadurch, dass der Abstand zwischen Objektiv und Okular verlängert wird. Beim Galilei'schen Fernrohr kommt es nicht zur Ausbildung eines reellen Zwischenbildes, denn die konvergierenden Strahlen treffen auf die Zerstreuungslinse, bevor sie sich in einem Punkt vereinigen können. Die Vergrößerung des Fernrohrs lässt sich anhand von Abb. 6.56 folgendermaßen bestimmen: Der Winkel σ, unter dem ein Strahlenbündel von einem weit entfernten Gegenstand ins Objektiv fällt, ist derselbe Winkel, unter dem man den Ge-

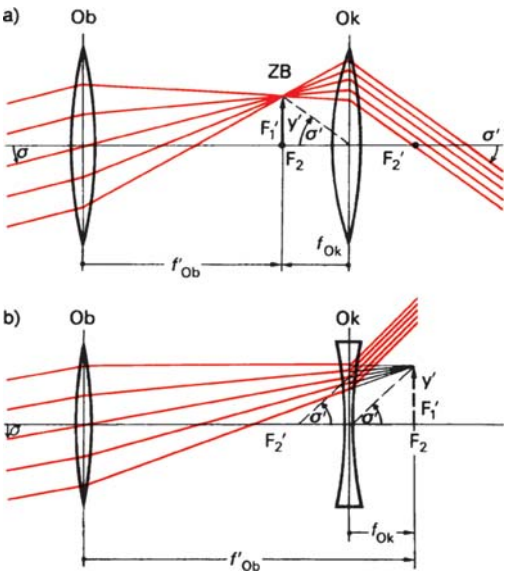


Abb. 6.56 Grundtypen des Fernrohrs: **a**) Kepler'sches Fernrohr, **b**) Galilei'sches Fernrohr

genstand mit unbewaffnetem Auge sehen würde. Der Sehwinkel σ', unter dem die Strahlen ins Auge gelangen, ist offensichtlich größer als σ. Nach Abb. 6.56 gilt für die Winkelfunktionen (Vorzeichen der Winkel s. Abschn. 6.2.3.3 und DIN 1335) $\tan\sigma' = -y'/f'_{\mathrm{Ok}}$ und $\tan\sigma = y'/f'_{\mathrm{Ob}}$. Damit ergibt sich für die Vergrößerung des Fernrohrs

$$\Gamma'_{\mathrm{F}} = -\frac{f'_{\mathrm{Ob}}}{f'_{\mathrm{Ok}}} \,. \tag{6.64}$$

Setzt man die Brennweiten vorzeichenrichtig in (6.64) ein, wird die Vergrößerung des Kepler'schen Fernrohrs negativ, die des Galilei'schen Fernrohrs positiv. Dieser Sachverhalt lässt sich auch leicht anhand von Abb. 6.56 erkennen: Die prinzipielle Richtung eines Lichtbündels beim Galilei'schen Fernrohr wird beibehalten, während sie sich beim Kepler'schen umkehrt. Das Kopf stehende Bild stört in der Astronomie nicht, für irdische Beobachtungen jedoch muss das Bild aufgerichtet werden.

Im *terrestrischen Fernrohr* wird nach Abb. 6.57a mit der *Umkehrlinse* U das reelle Zwischenbild Kopf stehend abgebildet und dann durch das Okular betrachtet. Wie Abb. 6.57b am Beispiel eines Zielfernrohrs zeigt, sind solche Fernrohre sehr lang. Die Bildumkehr ist auch mithilfe von Umkehrprismen möglich. Abbildung 6.57c zeigt einen Prismenfeldstecher, bei dem mit einem *Porro'schen Prismensatz* (Abschn. 6.2.3.2) das Bild aufgerichtet wird. Dieses Fernrohr ist sehr kurz. Zusätzlich wird durch die Strahlumlenkung an den Prismen der gegenseitige Abstand der beiden Objektive wesentlich größer als der Augenabstand. Dieser Effekt unterstützt das stereoskopische Sehen.



Abb. 6.57 Bildumkehr beim terrestrischen Fernrohr. **a**) Prinzip, **b**) technische Ausführung in einem Zielfernrohr, **c**) Prismenfeldstecher mit Porro'schem Umkehrprismensatz, **d**) Fernglas mit geradsichtigem Prismensystem nach Schmidt-Pechan. Werkbilder: Carl Zeiss, Oberkochen

Abbildung 6.58 zeigt die Abbildung eines Lichtbündels, das parallel zur optischen Achse ins Objektiv fällt. Die Objektivöffnung defi-

niert die Eintrittspupille EP des Systems. Ihr Bild, die Austrittspupille AP, erscheint in der Gegend des Brennpunktes F_2' des Okulars. Beim Kepler'schen Fernrohr erscheint die Austrittspupille als reelles Bild der Eintrittspupille. An der Stelle der Austrittspupille sollte sich das Auge des Beobachters befinden. Hält man z. B. einen Feldstecher gegen den Himmel und blickt von weitem auf das Okular, so sieht man deutlich die Austrittspupille als hellen Fleck von einigen mm Durchmesser.

Beim *Galilei'schen Fernrohr* erscheint die Austrittspupille als virtuelles Bild zwischen den beiden Linsen. Da man das Auge nicht unmittelbar an die Stelle der Austrittspupille bringen kann, erscheint das Gesichtsfeld nicht scharf begrenzt. Es ist außerdem verhältnismäßig klein, vergleichbar mit einem Blick durch ein Schlüsselloch. Der Vorteil des Galilei'schen Fernrohrs ist seine kurze Baulänge. In Abb. 6.58 sind zwei Fernrohre gleicher Vergrößerung gezeichnet, dabei ist das Galilei'sche etwa halb so lang wie das Kepler'sche Fernrohr. Das Galilei'sche Fernrohr wird am meisten als Opernglas verwendet.

Wie man Abb. 6.58 entnimmt, verhalten sich die Strahldurchmesser von Ein- und Austrittspupille wie die Brennweiten von Objektiv und Okular. Es gilt also

$$|\Gamma_F'| = \frac{D_{EP}}{D_{AP}} \,. \tag{6.65}$$

Nach DIN 58 386 wird mithilfe von (6.65) die Vergrößerung eines Fernrohrs gemessen.

Das Gesichtsfeld des *Kepler'schen Fernrohrs* kann wesentlich erweitert werden, wenn man an der Stelle des reellen Zwischenbildes eine *Feldlinse* FL oder *Kollektivlinse* gemäß Abb. 6.59 anbringt. Diese Feldlinse ändert zwar nicht die Vergrößerung, bricht die Strahlen aber so, dass sie die Okularlinse verhältnismäßig zentral durchsetzen. Dadurch können die Strahlen unter einem größeren Winkel ins Objektiv einfallen und treffen trotzdem noch auf die Okularlinse. Die Austrittspupille rückt durch diese Maßnahmen näher ans Okular.

Bei Fernrohren werden in der Regel als wichtigste Kenngrößen die Vergrößerung und der Durchmesser der Eintrittspupille angegeben. Steht beispielsweise auf einem Feldstecher 8×30, so sind $\Gamma_F' = 8$ und $D_{EP} = 30\,\text{mm}$. Als Maß für die Leistungsfähigkeit bei Dämmerung kann nach DIN 58 386 vom Hersteller die *Dämmerungszahl Z* angegeben werden:

$$Z = \sqrt{|\Gamma_F'| D_{EP}} \,. \tag{6.66}$$

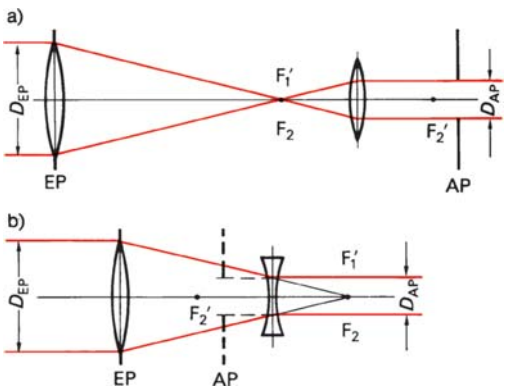


Abb. 6.58 Pupillenlage beim Fernrohr; Abbildung eines achsenparallelen Lichtbündels beim **a**) Kepler'schen und **b**) Galilei'schen Fernrohr

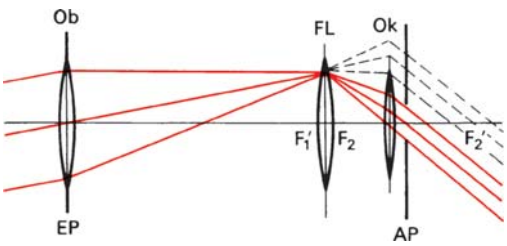


Abb. 6.59 Wirkung einer Feldlinse beim Kepler'schen Fernrohr

D_{EP} ist der Durchmesser der Eintrittspupille in mm. Mit $D_{EP} = |\Gamma'_F| D_{AP}$ gilt auch $Z = |\Gamma'_F| \sqrt{D_{AP}}$.

Für den Feldstecher 8×30 ergibt sich $Z = \sqrt{240} = 15{,}5$. Ist bei einem Fernrohr die Austrittspupille größer als 8 mm, dann ist $D_{AP} = 8$ mm zu setzen. Dieser Grenzwert ist der maximale Durchmesser der menschlichen Augenpupille.

Schließlich sei noch die Frage untersucht, ob die *Helligkeit* eines betrachteten Gegenstandes gesteigert wird, wenn man ihn mit einem Fernrohr betrachtet. Ein Maß für die Helligkeit ist der Lichtstrom Φ (Abschn. 6.3), der auf einen Zapfen der Netzhaut fällt. Ohne Fernrohr sei dieser Lichtstrom Φ_0. Benutzt man ein Fernrohr, so wird wegen der großen Objektivöffnung zwar mehr Licht eingefangen als vom unbewaffneten Auge; dieser große Lichtstrom wird aber auf ein größeres Netzhautbild verteilt, sodass im Endeffekt die Helligkeit mit Instrument gleich der Helligkeit ohne Instrument ist. (Tatsächlich erscheint das Bild mit Instrument sogar dunkler wegen der unvermeidlichen Absorptions- und Reflexionsverluste an den Linsen.) Andere Verhältnisse ergeben sich bei der Betrachtung punktförmiger Objekte. In diesen Fällen ist das Bild wieder nur ein Punkt, und zwar sowohl bei Betrachtung mit unbewaffnetem Auge als auch bei der Betrachtung durch ein Fernrohr. Dies bedeutet, dass der eingefangene Lichtstrom vollständig, z. B. auf einen Zapfen der Netzhaut gelenkt wird. Der Lichtstrom wird durch das Instrument im Verhältnis der Flächen von Eintrittspupille und Augenpupille gesteigert. Ist die Augenpupille so groß wie die Austrittspupille des Instruments, nimmt die Helligkeit mit dem Quadrat der Fernrohrvergrößerung zu:

$$\Phi = \Gamma'^2_F \Phi_0 \,. \tag{6.67}$$

Bei der Betrachtung von Fixsternen werden selbst mit den größten astronomischen Fernrohren die Sterne nur punktförmig wiedergegeben. Der Sinn der Fernrohre in der Astronomie besteht deshalb nicht in einer Vergrößerung der Objekte, sondern in einer Steigerung der Helligkeit. So kann man mit dem Fernrohr Sterne sehen, die mit dem bloßen Auge nicht wahrnehmbar sind. Das Auflösungsvermögen des Fernrohrs ist in Abschn. 6.4.1.5 beschrieben.

Zur Übung

Ü 6.2-31 Bei einem Feldstecher 8×30 beträgt der Abstand zwischen Objektiv und Okular $l = 200$ mm bei Einstellung auf Unendlich. a) Wie groß ist die Brennweite von Objektiv und Okular? b) Zur Einstellung auf nahe Objekte lässt sich das Okular um $\Delta l = 5$ mm herausdrehen. Welches ist der kürzeste Abstand vom Objektiv, in dem Gegenstände noch scharf gesehen werden, wenn das Auge auf unendlich akkommodiert ist?

Ü 6.2-32 Zeigen Sie, dass der Einbau einer Feldlinse gemäß Abb. 6.59 die Vergrößerung eines Fernrohrs nicht beeinflusst. (Hinweis: Berechnen Sie die Brennweite des Systems Feldlinse-Okular.)

Ü 6.2-33 Ein Fixstern wird mit einem astronomischen Fernrohr betrachtet. Die Objektivbrennweite ist $f'_{Ob} = 2{,}4$ m, die Okularbrennweite $f'_{Ok} = 4$ cm, der Objektivdurchmesser $D_{EP} = 32$ cm. a) Wie groß ist die Fernrohrvergrößerung? b) Welchen Durchmesser hat die Austrittspupille? c) Berechnen Sie die Dämmerungszahl Z. d) Wie groß ist die Helligkeitssteigerung gegenüber der Beobachtung mit bloßem Auge, falls Augenpupille und Austrittspupille gleich groß sind? e) Wie groß ist die Helligkeitssteigerung, wenn sich die Augenpupille auf 8 mm vergrößert hat?

6.2.7.5 Fotoapparat

Der Fotoapparat ist das optische Instrument, das dem menschlichen Auge am meisten ähnelt. Anstelle der Augenlinse steht ein Objektiv, das zur Korrektur von Abbildungsfehlern immer aus mehreren Einzellinsen zusammengesetzt ist. Das Objektiv entwirft das Bild ei-

nes Gegenstandes nach Abb. 6.60 in der Filmebene FE. Dort befindet sich statt der Netzhaut ein lichtempfindlicher Film, oder bei Digitalkameras ein CCD-Chip. Das Objektiv kann nicht wie das Auge auf unterschiedliche Objektabstände akkommodieren. Deshalb muss für verschiedene Entfernungen der Abstand zwischen Objektiv und Film gemäß der Abbildungsgleichung variiert werden.

Wie beim Auge kann der Lichtstrom, der auf den Film fällt, mithilfe einer Irisblende geregelt werden. Ein Maß für die einfallende Lichtmenge ist nach DIN 4521 die *relative Öffnung* D_{EP}/f'. Diese wichtige Kenngröße ist meist auf dem Kameraobjektiv angegeben. Steht beispielsweise auf einer Kamera 1:2,8; $f = 45$ mm, dann beträgt die maximale relative Öffnung 1/2,8 und die Brennweite $f' = 45$ mm. Der Objektivdurchmesser ist bei dieser Kamera $D_{EP} = 16$ mm.

Von größerer praktischer Bedeutung ist der Kehrwert der relativen Öffnung, die *Blendenzahl k*. Es gilt

$$k = \frac{f'}{D_{EP}} \,. \tag{6.68}$$

Die Blendenzahl kann an der Kamera eingestellt werden. Die Werte sind so abgestuft, dass sich die Fläche und damit der Lichtstrom von einem Wert auf den andern um den Faktor 2 ändern. Dies bedeutet, dass sich aufeinander folgende Blendenzahlen um $\sqrt{2}$ ändern müssen. Die in DIN 4522 genormte Hauptreihe der Blendenzahlen lautet ausschnittsweise

1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22 .

Eine absolut scharfe Abbildung auf einem ebenen Film ist theoretisch nur möglich, wenn das Objekt auch eben ist; hierbei steht die Objektebene OE in Abb. 6.61 senkrecht zur optischen Achse. Objektpunkte, die vor oder hinter der idealen Objektebene OE liegen, werden in der Filmebene FE als kleine *Unschärfekreise* abgebildet. Da sowohl das Auge als auch das Filmmaterial infolge seiner Körnung ein begrenztes Auflösungsvermögen haben, kann man stets eine bestimmte Unschärfe auf dem Film tolerieren. Gibt man einen akzeptablen Durchmesser u' des Unschärfekreises an, so liegt der Objektbereich, der „scharf" abgebildet wird, zwischen den Grenzen a_v und a_h. Dabei liegt a_v vor, a_h hinter der theoretischen Objektebene OE. Durch elementare Rechnung erhält man für die Grenzwerte

$$a_v = \frac{af'^2}{f'^2 - u'k(a+f')} \quad \text{und}$$
$$a_h = \frac{af'^2}{f'^2 + u'k(a+f')} \,. \tag{6.69}$$

Die *Schärfentiefe* beträgt dann

$$\Delta a = a_v - a_h \,. \tag{6.70}$$

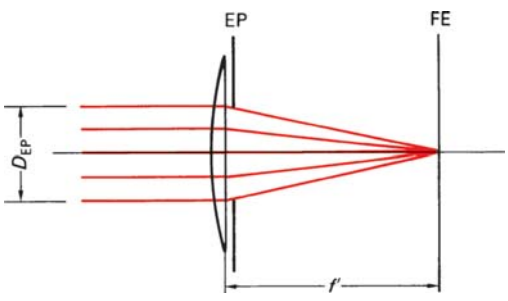


Abb. 6.60 „Unendliche" Einstellung beim Fotoapparat

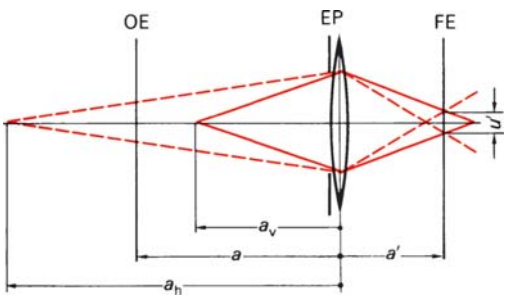


Abb. 6.61 Schärfentiefe beim Fotoapparat

Die Schärfentiefe wird mit zunehmender Blendenzahl k immer größer. Die Größe des zulässigen Unschärfekreises hängt von dem verwendeten Filmformat ab. Als Faustformel kann verwendet werden

$$u' = \frac{\text{Formatdiagonale}}{1000} . \qquad (6.71)$$

Beispiel

6.2-14 Mit einer Kleinbildkamera (Format 24 mm × 36 mm) mit $f' = 45$ mm Brennweite soll bei Blende 8 ein Objekt fotografiert werden, das sich in $a = -3$ m Entfernung befindet. Innerhalb welcher Gegenstandsweiten a_v und a_h wird die Abbildung scharf? Wie groß ist die Schärfentiefe?

Lösung

Zulässiger Unschärfekreis nach (6.71):

$$u' = \frac{\text{Formatdiagonale}}{1000} = \frac{43{,}3 \text{ mm}}{1000} = 0{,}0433 \text{ mm} ;$$

nach (6.69) ist $a_v = -1{,}99$ m, $a_h = -6{,}07$ m und die Schärfentiefe $\Delta a = a_v - a_h = 4{,}08$ m.

Zur Übung

Ü 6.2-34 Berechnen Sie die Schärfentiefe für die in Beispiel 6.2-14 angegebenen Zahlenwerte, jedoch mit Blende 2,8.

Ü 6.2-35 Mit einer Kleinbildkamera ($f' = 45$ mm) soll mit Blende 8 fotografiert werden. Welche Entfernung a muss eingestellt werden, wenn die hintere Grenzentfernung $a_h = -\infty$ sein soll? Wie groß ist dann die vordere Grenzentfernung a_v?

6.3 Radio- und Fotometrie

6.3.1 Einführung

In der geometrischen Optik des letzten Abschnitts werden oft Begriffe, wie z. B. Lichtintensität und Helligkeit, verwendet, ohne dass diese im Einzelnen definiert sind. Die *Strahlungs-* oder *Lichtmessung* beschäftigt sich mit der Messung dieser Größen. Hierbei interessiert z. B. die Messung der *Strahlungsleistung* sowie deren räumliche und spektrale Verteilung.

Bei der objektiven *Radiometrie* wird die Strahlungsleistung mit einem „unbestechlichen" Messinstrument gemessen. Je nach Empfängertyp ist der Wellenbereich nicht auf das sichtbare Spektrum beschränkt. Zur Kennzeichnung solcher *strahlungsphysikalischer Größen* werden die Formelzeichen mit dem *Index* „e" (für *energetisch*) versehen. Wird die Strahlung mit dem Auge bewertet, spricht man von subjektiver *Fotometrie*. Die so erhaltenen *lichttechnischen Größen* werden durch den *Index* „v" (für *visuell*) bei den physikalischen Größen gekennzeichnet. Es versteht sich von selbst, dass lichttechnische Größen nur für den sichtbaren Spektralbereich definiert sind. Ebenso versteht man unter „Licht" im engeren Sinn elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich $\lambda = 380$ nm bis $\lambda = 780$ nm. Die in der Fotometrie verwendeten Begriffe, Formelzeichen und Maßeinheiten sind in DIN 5031 festgelegt.

6.3.2 Strahlungsphysikalische Größen

Fällt elektromagnetische Strahlung auf einen geeigneten Empfänger, so kann man die in einer bestimmten Zeit zugeführte *Strahlungsenergie* messen. Zur Messung bieten sich verschiedene physikalische Effekte an. Beispielsweise wird beim *Bolometer* die Erwärmung eines geschwärzten Platinbleches über die Änderung des elektrischen Widerstands gemessen. Beim *Thermoelement* fließt ein Thermostrom, wenn es bei Bestrahlung erwärmt wird. Bestimmte *Halbleiter* ändern bei Bestrahlung ihren elektrischen Widerstand (innerer Fotoef-

fekt). Bei *Fotodioden* fließt während der Bestrahlung ein Fotostrom.

Die *Strahlungsleistung* Φ_e (auch *Strahlungsfluss*), die auf einen Detektor trifft, hängt mit der Strahlungsenergie Q_e folgendermaßen zusammen:

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt} . \tag{6.72}$$

Die Strahlungsleistung wird im SI-Maßsystem in Watt, die Strahlungsenergie in Joule gemessen: 1 W = 1 J/s.

Die Strahlungsleistung, die auf einen Empfänger fällt, hängt außer von seiner Fläche auch von seinem Abstand zum Sender ab. Abbildung 6.62 zeigt drei verschiedene Empfänger in den Entfernungen r_1, r_2 und r_3 von einem Sender. Die Abmessungen sind so gewählt, dass alle Empfänger auf einem gemeinsamen Kegel liegen. Es ist einleuchtend, dass jeder dieser Empfänger die gleiche Strahlungsleistung nachweisen würde. Was allen drei Empfängern gemeinsam ist, ist der *Raumwinkel* Ω, unter dem sie vom Sender aus gesehen werden. Zur Definition des Raumwinkels: Um einen leuchtenden Punkt wird eine Kugel mit Radius r beschrieben. Beleuchtet die Strahlung eine Figur der Fläche A auf der Kugel, dann sagt man, dass die Strahlung im Raumwinkel $\Omega = A/r^2$ auftritt. Die SI-Maßeinheit des Raumwinkels ist der *Steradiant:* 1 sr = 1 m^2/m^2. Der Übersichtlichkeit wegen schreibt man gern

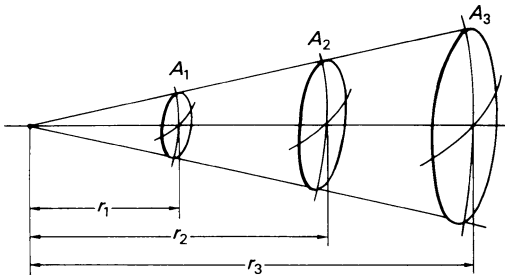


Abb. 6.62 Zur Definition des Raumwinkels

$$\Omega = \frac{A}{r^2}\Omega_0 \tag{6.73}$$

mit $\Omega_0 = 1$ sr. Der größte Raumwinkel beträgt $4\,\pi$ sr, wenn die Strahlung den ganzen Raum erfüllt. Strahlt ein Strahler nur in den Halbraum, beträgt der Raumwinkel $2\,\pi$ sr. Falls die bestrahlte Fläche nicht zu groß ist, macht man keinen nennenswerten Fehler, wenn die Empfängerfläche eben anstatt kugelförmig ist. Diese Näherung ist gut erfüllt, wenn der Abstand zwischen Sender und Empfänger größer ist als die in DIN 5032 definierte *fotometrische Grenzentfernung*. Diese soll mindestens das Zehnfache der größten Querdimension von Empfänger bzw. Sender betragen.

Im Folgenden wird vereinfacht nur ein Fall betrachtet: Der Abstand zwischen Sender und Empfänger ist größer als die fotometrische Grenzentfernung. Es handelt sich also um kleine Sender und Empfänger, die räumlich weit auseinander liegen.

Abbildung 6.63 zeigt einen Sender mit der Fläche A_1, der Licht aussendet, das vom Empfänger mit der Fläche A_2 nachgewiesen wird. Der wirksame Raumwinkel beträgt

$$\Omega = \frac{A_2 \cos\varepsilon_2}{r^2}\Omega_0 . \tag{6.74}$$

Er enthält die Projektion der Fläche A_2 auf die Verbindungsgerade von Sender und Empfänger. Die Strahlungsleistung, die auf den Empfänger fällt, ist proportional zum Raumwinkel. Es gilt

$$\Phi_e = I_e\,\Omega \tag{6.75}$$

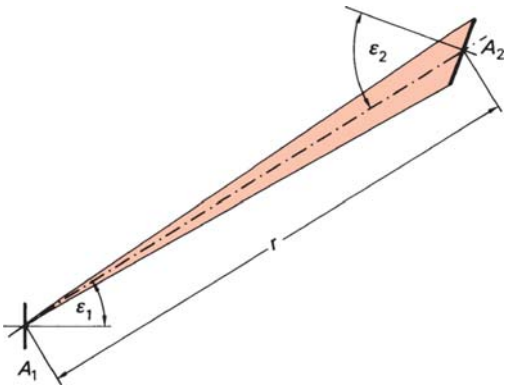


Abb. 6.63 Strahlenkegel, der vom Sender auf den Empfänger fällt

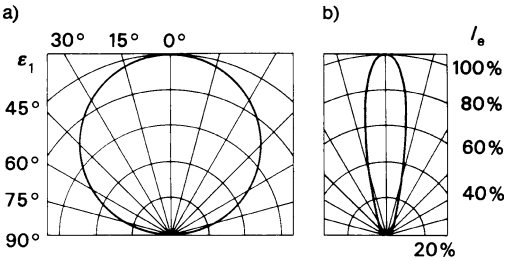


Abb. 6.64 Strahlstärke I_e in Abhängigkeit vom Abstrahlwinkel ε_1 im Polardiagramm **a**) beim Lambert'schen Strahler, **b**) bei einer Leuchtdiode

mit der *Strahlstärke* I_e als Proportionalitätskonstanten. Die Maßeinheit der Strahlstärke ist 1 W/sr.

Die Strahlstärke I_e und damit der Strahlungsfluss Φ_e, der in einen bestimmten Raumwinkel Ω ausgesandt wird, ist proportional zur Senderfläche A_1. Beobachtet man die Senderfläche unter dem Winkel ε_1 (Abb. 6.63) von der Seite, dann wird von der Senderfläche nur die Projektion $A_1 \cos \varepsilon_1$ wirksam. Die Strahlstärke kann demnach geschrieben werden als

$$I_e(\varepsilon_1) = L_e A_1 \cos \varepsilon_1 \ . \qquad (6.76)$$

Die Größe L_e nennt man die *Strahldichte*. Ihre Maßeinheit ist 1 W/(m^2 sr). Die Strahldichte ist abhängig von den Sendereigenschaften, beispielsweise von dem Werkstoff, der Oberflächenbeschaffenheit oder der Temperatur.

Die Strahlstärke I_e als Funktion des Abstrahlungswinkels ε_1 (Abb. 6.63) kann experimentell bestimmt werden und wird häufig in den Datenblättern von Emittern angegeben. Abbildung 6.64 zeigt das Abstrahlverhalten von zwei verschiedenen Strahlungsquellen. Das Diagramm Abb. 6.64a zeigt die Abstrahlcharakteristik eines *Lambert-Strahlers* (J. W. Lambert, 1728 bis 1777). Bei ihm ist die Strahldichte L_e konstant, die Strahlstärke I_e befolgt das *Lambert'sche Cosinusgesetz*

$$I_e(\varepsilon_1) = I_e(0) \cos \varepsilon_1 \ . \qquad (6.77)$$

Alle Körper mit rauen, diffus reflektierenden Flächen, wie z. B. Gipswände, Pappe und Papier, verhalten sich in guter Näherung wie *Lambert'sche Strahler*. Sie erscheinen aus allen Richtungen gleich hell. Betrachtet man sie von der Seite, dann nimmt zwar die Strahlstärke mit dem Cosinus des Winkels ab, im gleichen Verhältnis erscheint aber auch die Senderfläche vermindert. Die Fläche erscheint deshalb dem Auge gleich hell. Aus der Tatsache, dass Sonne und Mond über die ganze Oberfläche gleichmäßig hell leuchten, folgt, dass auch diese Körper *Lambert'sche Strahler* sind.

Abbildung 6.64b zeigt das Abstrahlungsdiagramm einer Leuchtdiode (LED). Bei ihr ist die Strahldichte L_e nicht konstant, sondern hängt vom Winkel ε_1 ab. Die gezeigte LED hat eine schlanke Strahlungskeule in Vorwärtsrichtung, wie sie vorzugsweise bei Lichtschranken eingesetzt wird.

Mit den bisher definierten Begriffen gilt für die Strahlungsleistung Φ_e, die auf einen Empfän-

ger trifft (Abb. 6.63),

$$\Phi_e = L_e A_1 \cos\varepsilon_1 \Omega \ .$$

Mit dem Raumwinkel

$$\Omega = \frac{A_2 \cos\varepsilon_2}{r^2}\Omega_0$$

ergibt sich eine Beziehung, die völlig symmetrisch Sender- und Empfängergrößen enthält, nämlich das *fotometrische Grundgesetz:*

$$\Phi_e = L_e \frac{A_1 \cos\varepsilon_1 A_2 \cos\varepsilon_2}{r^2}\Omega_0 \ . \qquad (6.78)$$

Bei ausgedehnten Strahlungsquellen und Empfängern erscheinen verschiedene Orte auf der Sender- bzw. Empfängeroberfläche unter verschiedenen Winkeln ε_1 und ε_2. Ferner kann die Strahldichte L_e vom Ort auf der Senderoberfläche abhängen. Das bedeutet, dass (6.78) streng genommen nur differentiell formuliert werden kann:

$$\mathrm{d}^2\Phi_e = L_e \frac{\mathrm{d}A_1 \cos\varepsilon_1 \,\mathrm{d}A_2 \cos\varepsilon_2}{r^2}\Omega_0 \ . \qquad (6.79)$$

Dies ist die Strahlungsleistung, die von einem Senderelement der Fläche $\mathrm{d}A_1$ auf ein Element $\mathrm{d}A_2$ des Empfängers fällt. Die gesamte Strahlungsleistung Φ_e ergibt sich dann aus einer Integration über die Sender- und Empfängerfläche.

Eine weitere Größe, die den Sender charakterisiert, ist die *spezifische Ausstrahlung* M_e. Darunter versteht man das Verhältnis von insgesamt abgegebener Strahlungsleistung Φ_e zur Senderfläche A_1:

$$M_e = \frac{\Phi_e}{A_1} = L_e \cos\varepsilon_1 \Omega \ . \qquad (6.80)$$

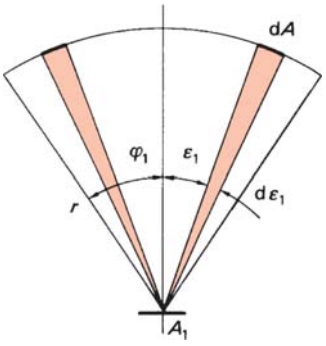


Abb. 6.65 Zur Berechnung der spezifischen Ausstrahlung

Die spezifische Ausstrahlung wird in $\mathrm{W/m^2}$ gemessen.

Für einen Lambert-Strahler sei ein Zusammenhang zwischen der spezifischen Ausstrahlung und der Strahldichte hergeleitet. Der Sender schickt die Strahlung in einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel φ_1, wie es Abb. 6.65 zeigt. In den roten Raumbereich, der von den Kegeln mit den Öffnungswinkeln ε_1 und $\varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_1$ begrenzt wird, fließt der Strahlungsfluss $\mathrm{d}\Phi_e = I_e(\varepsilon_1)\,\mathrm{d}\Omega$. Dabei ist der Raumwinkel

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2}\Omega_0 = 2\pi \sin\varepsilon_1 \,\mathrm{d}\varepsilon_1 \Omega_0 \ .$$

Mit $I_e(\varepsilon_1) = L_e A_1 \cos\varepsilon_1$ beträgt der Strahlungsfluss

$$\mathrm{d}\Phi_e = L_e A_1 \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_1 2\pi \,\mathrm{d}\varepsilon_1 \Omega_0 \ .$$

Den gesamten Strahlungsfluss erhält man durch Integration vom Winkel $\varepsilon_1 = 0$ bis $\varepsilon_1 = \varphi_1$ zu

$$\Phi_e = L_e A_1 2\pi\Omega_0 \int_0^{\varphi_1} \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_1 \,\mathrm{d}\varepsilon_1$$
$$= L_e A_1 \pi \sin^2\varphi_1 \Omega_0 \ .$$

Für die spezifische Ausstrahlung folgt unmittelbar

$$M_e = L_e \pi \sin^2 \varphi_1 \Omega_0 \,. \tag{6.81}$$

Von besonderem Interesse ist es, wenn der Strahler in den kompletten Halbraum emittiert. Der Öffnungswinkel des Kegels beträgt dann $\varphi_1 = \pi/2$ und aus (6.81) folgt für die spezifische Ausstrahlung des Lambert'schen Strahlers

$$M_e = L_e \pi \Omega_0 \,. \tag{6.82}$$

Auf der Empfängerseite interessiert außer dem auftreffenden Strahlungsfluss Φ_e auch die *Bestrahlungsstärke* E_e, d. h. der auf die Empfängerfläche bezogene Strahlungsfluss

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A_2} \,. \tag{6.83}$$

Die Maßeinheit der Bestrahlungsstärke ist $1\,\mathrm{W/m^2}$. Für die Bestrahlungsstärke folgt mit (6.74) und (6.75) das *fotometrische Entfernungsgesetz*

$$E_e = \frac{I_e(\varepsilon_1)}{r^2} \cos \varepsilon_2 \, \Omega_0 \,. \tag{6.84}$$

Wird ein Empfänger eine bestimmte Zeitspanne Δt bestrahlt, dann ergibt das Produkt aus Bestrahlungsstärke und Zeit die *Bestrahlung* H_e, nämlich die auftreffende Energie je Flächeneinheit: $H_e = E_e \Delta t$, gemessen in $\mathrm{W\,s/m^2} = \mathrm{J/m^2}$. Allgemein gilt

$$H_e = \int E_e(t)\, \mathrm{d}t \,. \tag{6.85}$$

Die strahlungsphysikalischen Größen sind noch einmal in Tabelle 6.4 zusammengestellt.

Beispiel

6.3-1 Ein Flächenelement der Erde, das senkrecht zur Sonne ausgerichtet ist, empfängt die Bestrahlungsstärke $E_e = 1{,}35\,\mathrm{kW/m^2}$ (außerhalb der Atmosphäre). Diese Größe heißt *Solarkonstante*. Die Sonne erscheint unter dem halben Öffnungswinkel $\varphi_2 = 16'$. Wie groß ist die spezifische Ausstrahlung M_e der Sonne?

Lösung

Abbildung 6.66 zeigt schematisch die kugelförmige Sonne mit Radius r sowie einen Empfänger auf der Erde im Abstand R ($R \gg r$). Die Kugelschicht auf der Sonne, begrenzt durch die Winkel ε_1 und $\varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_1$, hat die Fläche $\mathrm{d}A_1 = 2\pi r^2 \sin \varepsilon_1 \, \mathrm{d}\varepsilon_1$. Von ihr fällt der Strahlungsfluss

$$\mathrm{d}\Phi_e = L_e \frac{\mathrm{d}A_1 \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, A_2 \cos \varepsilon_2}{R^2} \Omega_0$$

auf den Empfänger. Infolge des großen Abstands von Erde und Sonne gilt in guter Näherung $\cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \cos \varepsilon_1$ und $\cos \varepsilon_2 = 1$. Damit sind

$$\mathrm{d}\Phi_e = \frac{L_e}{R^2} A_2 \cos \varepsilon_1 \, \mathrm{d}A_1 \Omega_0$$

und

$$\mathrm{d}E_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{A_2} = \frac{L_e}{R^2} \cos \varepsilon_1 \, \mathrm{d}A_1 \, \Omega_0 \,.$$

Die gesamte Bestrahlungsstärke erhält man durch Integration über alle Winkel ε_1 von 0 bis $\pi/2$:

$$E_e = L_e \pi \left(\frac{r}{R} \right)^2 \Omega_0 \,.$$

Für das Verhältnis der Längen gilt $r/R \approx \varphi_2$. Nach (6.82) ist $M_e = L_e \pi \Omega_0$; damit folgt $E_e = M_e \varphi_2^2$. Die spezifische Ausstrahlung der Sonne ist somit

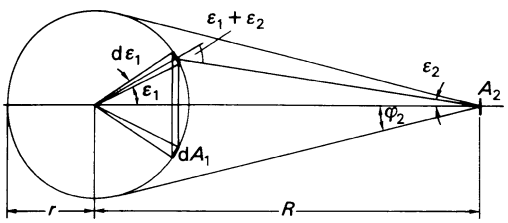


Abb. 6.66 Zur Ableitung der spezifischen Ausstrahlung der Sonne (zu Beispiel 6.3-1)

Tabelle 6.4 Zusammenstellung radiometrischer Größen. Die vereinfachten Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass die Strahlungsenergie konstant ist bezüglich Zeit, Fläche und Raumwinkel. Wenn dies nicht erfüllt ist, gelten die vereinfachten Gleichungen für die Mittelwerte

Größe	Symbol	Einheit	Beziehung	Erklärung
Strahlungsenergie	Q_e	W s = J	$Q_e = \int \Phi_e \, dt$	Energietransport durch elektromagnetische Strahlung
Strahlungsleistung	Φ_e	W = J/s	$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$	Leistung der elektromagnetischen Strahlung
spezifische Ausstrahlung	M_e	W/m^2	$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA_1} \approx \frac{\Phi_e}{A_1}$	Quotient aus Strahlungsleistung und Senderfläche
Strahlstärke	I_e	W/sr	$I = \frac{d\Phi_e}{d\Omega_1} \approx \frac{\Phi_e}{\Omega_1}$	Quotient aus Strahlungsleistung und Raumwinkel, in den die Strahlung austritt
Strahldichte	L_e	$\frac{W}{sr \cdot m^2}$	$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega_1 \, dA_1 \cos\varepsilon_1} = \frac{dI_e}{dA_1 \cos\varepsilon_1}$ $L_e \approx \frac{I_e}{A_1 \cos\varepsilon_1}$	Quotient aus Strahlungsleistung und Raumwinkel (d. h. Strahlstärke) sowie Projektion der Senderfläche auf eine Ebene senkrecht zur Betrachtungsrichtung
Bestrahlungsstärke	E_e	W/m^2	$E = \frac{d\Phi_e}{dA_2} \approx \frac{\Phi_e}{A_2}$	Quotient aus Strahlungsleistung und bestrahlter Fläche
Bestrahlung	H_e	J/m^2	$H_e = \int E_e \, dt \approx E_e t$	Zeitintegral der Bestrahlungsstärke

$$M_e = \frac{E_e}{\varphi_2^2} = \frac{1{,}35 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2}{(4{,}65 \cdot 10^{-3})^2} = 62{,}4 \text{ MW/m}^2 \, .$$

Jeder Quadratmeter der Sonnenoberfläche strahlt also 62,4 MW aus.

Optische Abbildung

Es soll untersucht werden, wie sich die fotometrischen Größen bei einer optischen Abbildung verhalten.

Abbildung 6.67 zeigt eine einfache Abbildung eines Gegenstands mit der Fläche A_1 durch eine Sammellinse. Das Bild hat die Fläche A_2. Der Strahlungsfluss, der von der Linse aufgenommen wird, ist nach (6.81)

$$\Phi_e = A_1 L_{e,1} \pi \sin^2\varphi_1 \Omega_0 \, . \qquad (1)$$

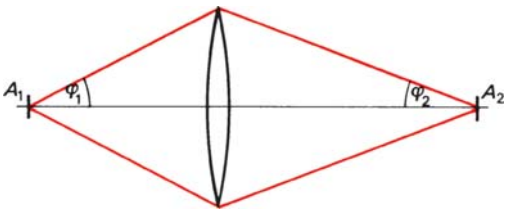


Abb. 6.67 Strahlungsverhältnisse bei der optischen Abbildung

$L_{e,1}$ ist die Strahldichte des Gegenstands. Werden Verluste an der Linse vernachlässigt, so gelangt der gesamte Strahlungsfluss ins Bild und wegen der Symmetrie gilt eine analoge Beziehung:

$$\Phi_e = A_2 L_{e,2} \pi \sin^2\varphi_2 \Omega_0 \, . \qquad (2)$$

Für schlanke Strahlenbüschel gilt $\sin \varphi \approx \varphi$, sodass aus (1) und (2) folgt

$$L_{e,1} A_1 \varphi_1^2 = L_{e,2} A_2 \varphi_2^2 .$$

Nun ist aber nach der *Helmholtz-Lagrange'schen* Gleichung (6.23) $y_1 \varphi_1 = y_2 \varphi_2$ oder $A_1 \varphi_1^2 = A_2 \varphi_2^2$.
Daraus ergibt sich, dass die Strahldichte für Gegenstand und Bild gleich groß ist, d. h. $L_{e,1} = L_{e,2}$. Selbstverständlich kann sich die Bestrahlungsstärke E_e ändern. Falls der Strahlungsfluss vom Objekt verlustlos zum Bild gelangt, hängt die Bestrahlungsstärke des Bildes vom Abbildungsmaßstab β' ab. Ist etwa $\beta' = 2$, dann ist die Bildfläche viermal so groß wie die Objektfläche, und die Bestrahlungsstärke wurde auf ein Viertel vermindert.

Bei der optischen Abbildung bleibt die Strahldichte L_e überall konstant; die Bestrahlungsstärke E_e kann sich ändern.

Dieser Satz gilt auch für weit geöffnete Strahlenbüschel, wenn die Abbildung aberrationsfrei ist.

Spektrale Größen

Wenn die Strahlung über einen größeren Wellenlängenbereich verteilt ist, werden zur Charakterisierung der Wellenlängenabhängigkeit *spektrale strahlungsphysikalische Größen* erforderlich. Zu jeder Größe X_e wird die spektrale Größe $X_{e,\lambda}$ definiert als

$$X_{e,\lambda} = \frac{\mathrm{d}X_e}{\mathrm{d}\lambda} . \qquad (6.86)$$

So ist z. B. die spektrale Strahldichte $L_{e,\lambda} = \mathrm{d}L_e/\mathrm{d}\lambda$, gemessen in $\mathrm{W/(m^2\,sr\,nm)}$.
Die spektralen strahlungsphysikalischen Größen $X_{e,\lambda}$ werden mit einem Spektrometer experimentell bestimmt. Die jeweilige Größe X_e erhält man bei bekanntem $X_{e,\lambda}$ durch Integration:

$$X_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X_{e,\lambda}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda . \qquad (6.87)$$

Der spektrale Strahlungsfluss einer blauen LED ist in Abb. 6.68 wiedergegeben. Die Breite solcher LED-Spektren ist typischerweise $\Delta\lambda \approx 40$ nm.
Von großer praktischer Bedeutung ist das Spektrum der *Temperaturstrahler*. Jeder Körper sendet in Abhängigkeit von seiner Temperatur elektromagnetische Strahlung aus. Diese Strahlung wird sichtbar, wenn die Temperatur etwa 600 °C erreicht (Rotglut). Mit steigender Temperatur verschiebt sich die Glühfarbe über hellrot (850 °C), gelb (1 000 °C) nach weiß (1 300 °C). Der spektrale Verlauf der ausgesandten Strahlung ist für einen *schwarzen Körper* theoretisch berechenbar. Ein schwarzer Körper zeichnet sich dadurch aus, dass er alle auftreffende Strahlung absorbiert; sein Reflexionsvermögen ist null. Ein schwarz gestrichener oder berußter

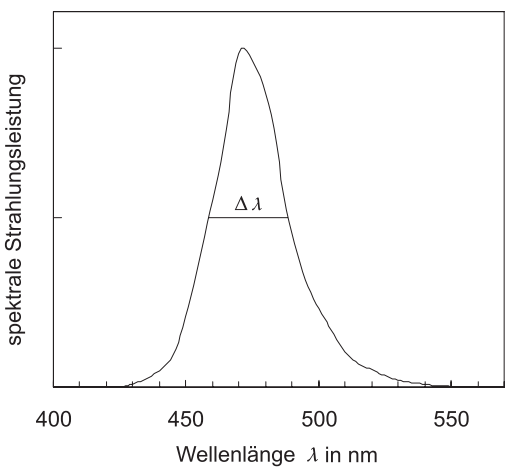


Abb. 6.68 Spektrum einer blauen Leuchtdiode

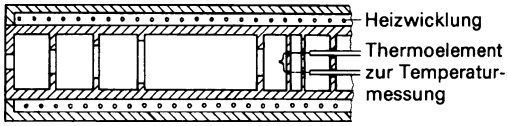


Abb. 6.69 Hohlraumstrahler

Körper erfüllt diese Bedingung nur unvollkommen, sehr gut dagegen ein kleines Loch in der Wand eines Hohlraums. Abbildung 6.69 zeigt die technische Ausführung eines solchen *Hohlraumstrahlers*. Lichtstrahlen, die durch das Loch ins Innere gelangen, werden vielfach reflektiert und gestreut, bis sie schließlich absorbiert werden. Es besteht nur eine geringe Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Strahl wieder durch das Loch nach außen gelangt. Dieses erscheint daher absolut schwarz. Heizt man die Wände des Hohlraums, tritt aus der Öffnung Strahlung, die bei höherer Temperatur sichtbar wird. (Das Loch ist dann selbstverständlich nicht mehr schwarz.)

Eine gültige theoretische Beschreibung des Spektrums der Wärmestrahlung (s. auch Abschn. 6.5.3) gelang 1900 M. Planck (1858 bis 1947). Danach gilt für die spektrale Strahldichte

$$L_{e,\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \frac{1}{\Omega_0} . \qquad (6.88)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 in der *Planck'schen Strahlungsgleichung* sind

$$c_1 = 2hc^2 = 1{,}191 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{W\,m^2} \quad \text{und}$$
$$c_2 = hc/k = 1{,}439 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\,K} .$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und k die Boltzmann-Konstante. Die Konstante h nennt man das *Planck'sche Wirkungsquantum*; sie hat den Wert

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} .$$

Der Verlauf der spektralen Strahldichte $L_{e,\lambda}$ über der Wellenlänge λ ist in Abb. 6.70 dargestellt. Hat der Strahler eine Temperatur nahe der Raumtemperatur, liegt die maximale Emission bei $\lambda \approx 10\,\mu\mathrm{m}$. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Maximum ins sichtbare Gebiet. Bei $T = 6\,000\,\mathrm{K}$, etwa der Temperatur an der Sonnenoberfläche entsprechend, liegt das Maximum mitten im sichtbaren Spektralbereich $0{,}38\,\mu\mathrm{m} < \lambda < 0{,}78\,\mu\mathrm{m}$.

Die gestrichelte Hyperbel (in der doppeltlogarithmischen Darstellung eine Gerade) in Abb. 6.70 verbindet die Maxima der Strahlungsisothermen. Die Verschiebung des Maximums mit der Temperatur wird durch das *Wien'sche Verschiebungsgesetz* beschrieben (W. Wien, 1864 bis 1928):

$$\lambda_{\max} T = \text{konstant} = 2\,898\,\mu\mathrm{m\,K} . \qquad (6.89)$$

Die gesamte Strahldichte L_e eines schwarzen Körpers erhält man nach (6.87) durch Integration aus der spektralen Strahldichte $L_{e,\lambda}$ gemäß $L_e = \int L_{e,\lambda}\, d\lambda$.

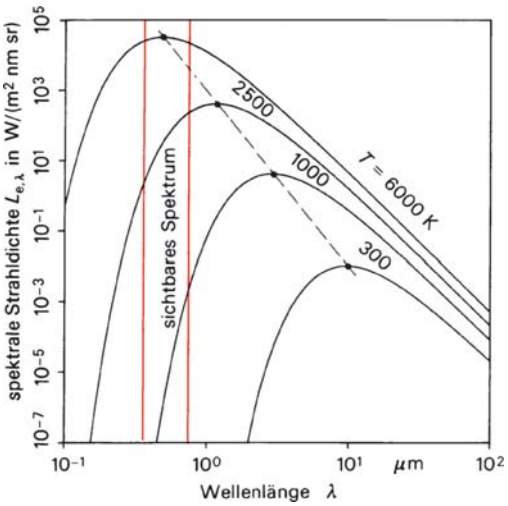


Abb. 6.70 Spektrale Strahldichte eines schwarzen Strahlers

Mithilfe von thermodynamischen Überlegungen fanden 1879 bzw. 1884 J. STEFAN (1835 bis 1893) bzw. L. BOLTZMANN (1844 bis 1906), dass die abgestrahlte Leistung proportional zur vierten Potenz der Temperatur ist: $L_e \sim T^4$. Dieses *Stefan-Boltzmann'sche Gesetz* wird üblicherweise für die spezifische Ausstrahlung M_e geschrieben:

$$M_e(T) = \sigma T^4 \tag{6.90}$$

mit der Konstanten

$$\sigma = \frac{2\,\pi^5\,k^4}{15\,h^3\,c^2} = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\,K^4)}\ .$$

Zur Übung

Ü 6.3-1 Um die Strahlungseigenschaften einer Leuchtdiode zu messen, wird gemäß Abb. 6.63 ein Detektor im Abstand $r = 0{,}5$ m um die LED geführt. Als Funktion des Winkels ε_1 registriert man folgende Strahlungsleistungen ($\varepsilon_2 = 0$):

ε_1 in °	0	30	45	60	80	90
Φ_e in nW	62,0	53,3	43,8	31,7	10,8	0 .

Sender- und Empfängerfläche sind $A_1 = A_2 = 1\ \mathrm{mm^2}$. a) Berechnen Sie die Strahlstärke I_e für die angegebenen Winkel. b) Prüfen Sie nach, ob sich die LED wie ein Lambert-Strahler verhält und zeichnen Sie ein Strahlungsdiagramm analog Abb. 6.64. c) Wie groß ist die Strahldichte L_e? d) Welche spezifische Ausstrahlung hat die LED? e) Wie groß ist die maximale Bestrahlungsstärke E_e des Empfängers?

Ü 6.3-2 Ein Hohlraumstrahler wird bei der Temperatur $T = 1800$ K betrieben. Die Strahlung wird durch einen Monochromator geschickt, der lediglich im Wellenlängenbereich $640\ \mathrm{nm} \leqq \lambda \leqq 680\ \mathrm{nm}$ durchlässig ist. a) Wie groß ist die Strahldichte L_e der durchgelassenen Strahlung unter der Annahme, dass der Monochromator verlustlos arbeitet? (Um die numerische Integration $L_e = \int L_{e,\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$ zu umgehen, kann näherungsweise gesetzt werden $L_e \approx L_{e,\lambda}\,(660\ \mathrm{nm}) \cdot 40\ \mathrm{nm}$.) b) Berechnen Sie zum Vergleich die Strahldichte L_e einer roten LED, die bei $\lambda = 660$ nm mit einer Halbwertsbreite von $\Delta\lambda = 40$ nm strahlt. Die Strahlstärke beträgt $I_e = 5 \cdot 10^{-4}$ W/sr, die Fläche $A = 0{,}5\ \mathrm{mm^2}$.

Ü 6.3-3 Mit einer Sammellinse (Brennglas) der Brennweite $f' = 100$ mm und dem Durchmesser $d_1 = 40$ mm wird die Sonne auf ein Papier abgebildet. Der Sonnendurchmesser erscheint von der Erde aus unter dem Winkel 32′. a) Welchen Durchmesser d_2 hat das Sonnenbild? b) Wie groß ist die Bestrahlungsstärke $E_{e,2}$ auf dem Papier, wenn die Bestrahlungsstärke am Ort der Linse $E_{e,1} = 750\ \mathrm{W/m^2}$ beträgt?

6.3.3 Lichttechnische Größen

Die in Abschn. 6.3.2 definierten strahlungsphysikalischen Größen lassen sich mit einem geeichten Empfänger objektiv messen. Dient als Empfänger das Auge, so bewertet dieses die auftreffende Strahlung nach einer bestimmten Charakteristik. Betrachtet man beispielsweise eine rote ($\lambda = 660$ nm) und eine grüne Leuchtdiode ($\lambda = 560$ nm), die beide dieselbe Strahlungsleistung abgeben, dann erscheint im Vergleich die grüne LED etwa 16 mal heller als die rote. Die Augenempfindlichkeit hängt also offensichtlich stark von der Wellenlänge des Lichtes ab. Da die Helligkeitsempfindung von einem zum anderen Beobachter schwankt, wurden mit einer großen Anzahl von Testpersonen Vergleiche durchgeführt. So entstand der *Hellempfindlichkeitsgrad* des *Standard-Beobachters*, der von der *Commission Internationale de l'Eclairage* (CIE) festgelegt wurde.

Abbildung 6.71 zeigt den spektralen Verlauf des Hellempfindlichkeitsgrads. Bei Tageslicht (Zapfensehen, *fotopische* Anpassung) ist der Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$. Bei Nacht (Stäbchensehen, *skotopische* Anpassung) wird der Hellempfindlichkeitsgrad durch die Kurve $V'(\lambda)$ beschrieben; beide Kurven sind auf 1 normiert. Offensichtlich spricht das Auge bei Nacht auf Blautöne stärker an als am Tage *(Purkinje-Effekt)*. Die Zahlenwerte für $V(\lambda)$ und $V'(\lambda)$ sind in DIN 5031 tabelliert.

Die Helligkeitsempfindung des Auges hängt also ab von der Strahlungsleistung Φ_e, die ins

Tabelle 6.5 Fotometrische Größen

Strahlungsphysikalische Größen			lichttechnische Größen		
Benennung	Zeichen	Maßeinheit	Benennung	Zeichen	Maßeinheit
Strahlungsenergie	Q_e	W s	Lichtmenge	Q_v	lm s
Strahlungsleistung	Φ_e	W	Lichtstrom	Φ_v	lm
spezifische Ausstrahlung	M_e	W/m^2	spezifische Lichtausstrahlung	M_v	lm/m^2
Strahlstärke	I_e	W/sr	Lichtstärke	I_v	cd = lm/sr
Strahldichte	L_e	W/(m^{2}sr)	Leuchtdichte	L_v	cd/m^2
Bestrahlungsstärke	E_e	W/m^2	Beleuchtungsstärke	E_v	lx = lm/m^2
Bestrahlung	H_e	W s/m^2	Belichtung	H_v	lx s

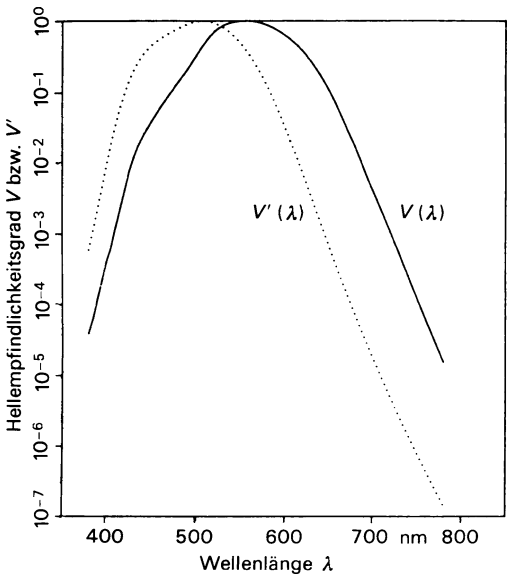


Abb. 6.71 Hellempfindlichkeitsgrad des Standard-Beobachters. $V(\lambda)$: Tagessehen, fotopische Anpassung $V'(\lambda)$: Nachtsehen, skotopische Anpassung

Auge gelangt, und vom Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$. Der *Lichtstrom* Φ_v (Index v für visuell) ist ein Maß für den Helligkeitseindruck. Für monochromatische Lichtquellen gilt bei *fotopischer Anpassung*

$$\Phi_v = K_m \, \Phi_e \, V(\lambda) \, . \tag{6.91}$$

Die Konstante K_m wird als Maximalwert des *fotometrischen Strahlungsäquivalents* bei Tagessehen bezeichnet. Sie ist eng verknüpft mit der weiter unten eingeführten Maßeinheit für die *Lichtstärke*, der *Candela*, und beträgt $K_m = 683$ lm/W (Lumen/Watt).

Beispiel

6.3-2 Eine rote LED emittiert Licht der Wellenlänge $\lambda = 660$ nm. Die Strahlungsleistung beträgt $\Phi_e = 46\,\mu$W. Wie groß ist der Lichtstrom Φ_v?

Lösung

Bei $\lambda = 660$ nm ist der Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda) = 6{,}1 \cdot 10^{-2}$. Damit errechnet sich der Lichtstrom zu

$$\Phi_v = 683 \text{ lm/W} \cdot 46 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot 6{,}1 \cdot 10^{-2}$$
$$= 1{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ lm} \, .$$

Bei *skotopischer Anpassung* gilt für die Berechnung des Lichtstroms die Beziehung

$$\Phi_v' = K_m' \, \Phi_e \, V'(\lambda) \, . \tag{6.92}$$

Der Maximalwert des fotometrischen Strahlungsäquivalents bei Nachtsehen beträgt $K_m' = 1\,699$ lm/W. Im Folgenden sind nur noch die Gleichungen für das Tagessehen angegeben. Die Beziehungen für das Nachtsehen entsprechen den vorgenannten Darlegungen.

Ist die Strahlung nicht monochromatisch sondern spektral breitbandig, dann muss für die Berechnung des Lichtstroms über das sichtbare Spektrum integriert werden:

$$\Phi_v = K_m \int_{380\,nm}^{780\,nm} \Phi_{e,\lambda}(\lambda) V(\lambda)\, d\lambda \,. \quad (6.93)$$

So wie die Strahlungsleistung nach der Bewertung durch das Auge in den Lichtstrom umgewandelt wird, kann für jede andere strahlungsphysikalische Größe X_e eine entsprechende lichttechnische Größe X_v angegeben werden. Die Berechnung erfolgt nach

$$X_v = K_m \int_{380\,nm}^{780\,nm} X_{e,\lambda}(\lambda) V(\lambda)\, d\lambda \,. \quad (6.94)$$

Die Bezeichnungen dieser neuen lichttechnischen Größen sind zusammen mit ihren Maßeinheiten in Tabelle 6.5 den entsprechenden strahlungsphysikalischen Größen gegenübergestellt.

Die lichttechnischen Größen haben Maßeinheiten, die mit der SI-Basiseinheit für die Lichtstärke 1 cd (Candela) verknüpft sind. Die Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz in eine bestimmte Richtung aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $I_e = 1/683$ W/sr beträgt (Abschn. 1.3).

Licht mit der Frequenz $f = 540$ THz hat die Wellenlänge $\lambda = 555$ nm. Der Hellempfindlichkeitsgrad ist in diesem Fall $V(555\,nm) = 1$. Somit gilt für die Lichtstärke 1 Candela

$$I_v = 1\,cd = K_m I_e = K_m \frac{1}{683} \frac{W}{sr} \,.$$

Tabelle 6.6 Lichtstrom einiger Lichtquellen

Lichtquelle	Lichtstrom
Leuchtdiode (weiß)	bis 200 lm
Glühlampe 230 V, 60 W	730 lm
Glühlampe 230 V, 100 W	1380 lm
Leuchtstoffröhre 230 V, 40 W	2300 lm
Quecksilberdampflampe 230 V, 125 W	5400 lm
Quecksilberdampflampe 230 V, 2000 W	125 000 lm

Hieraus folgt sofort für den Umrechnungsfaktor K_m der bereits genannte Wert $K_m = 683\,(cd\,sr)/W = 683\,lm/W$. Als abgeleitete Einheiten sind für den Lichtstrom das Lumen ($1\,lm = 1\,cd\,sr$) und für die Beleuchtungsstärke das Lux ($1\,lx = 1\,lm/m^2$) eingeführt.

In Tabelle 6.6 sind einige in der Praxis vorkommende Werte für den Lichtstrom zusammengestellt. Daten zur Beleuchtungsstärke zeigt Tabelle 6.7. Die Anforderungen an die Beleuchtungsstärke in Innenräumen sind in DIN 5035 niedergelegt. Beleuchtungsstärken für Straßenbeleuchtung findet man in DIN 5044. Die lichttechnischen Anwendungen sind in Abschn. 4.2.2.2, Abb. 4.49 und 4.50 dargestellt.

Tabelle 6.7 Daten zur Beleuchtungsstärke

Beleuchtung	Beleuchtungsstärke
Sonne, Sommer	70 000 lx
Sonne, Winter	5500 lx
Tageslicht, bedeckter Himmel	1000 bis 2000 lx
Vollmond	0,25 lx
Sterne ohne Mond, klare Nacht	10^{-3} lx
Grenze der Farbwahrnehmung	3 lx
Arbeitsplatzbeleuchtung, hohe Ansprüche	1000 lx
Wohnzimmerbeleuchtung	120 lx
Straßenbeleuchung	1 lx bis 16 lx

Zur Übung

Ü 6.3-4 Welche Lichtstärke I_v muss eine Lichtquelle haben, damit an einem $r = 1{,}5$ m entfernten Arbeitsplatz bei senkrechter Beleuchtung die Beleuchtungsstärke $E_v = 500$ lx beträgt?

Ü 6.3-5 Eine gelbe LED emittiert Licht bei $\lambda = 590$ nm. Die Emissionsfläche beträgt $A_1 = 0{,}5\ \text{mm}^2$. Die Abstrahlungscharakteristik gehorcht dem Lambert'schen Cosinus-Gesetz. Im Abstand $r = 1$ m unter dem Winkel $\varepsilon_1 = 30°$ zur Sendernormalen (Abb. 6.63) befindet sich ein Empfänger ($\varepsilon_2 = 0$) mit der Fläche $A_2 = 20\ \text{mm}^2$. Die auf den Empfänger fallende Strahlungsleistung beträgt $\Phi_e = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ W. a) Wie groß ist der Lichtstrom Φ_v, der auf den Detektor trifft? (Die Augenempfindlichkeit ist V (590 nm) = 0,757.) b) Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke am Ort des Empfängers. c) Unter welchem Raumwinkel Ω erscheint der Detektor vom Sender aus? d) Wie groß ist die Lichtstärke $I_v(0)$ der LED senkrecht zur strahlenden Fläche? e) Wie groß ist die Leuchtdichte L_v der LED? (Die LED kann als monochromatische Lichtquelle angesehen werden.)

6.3.4 Farbmetrik

Die verbale Beschreibung einer Farbe ist schwierig, da der Farbeindruck subjektiv unterschiedlich empfunden wird. Deshalb wurden Methoden entwickelt, um eine Farbe durch Maßzahlen objektiv zu charakterisieren. Mit solchen Maßzahlen kann eine bestimmte Farbe überwacht und reproduziert werden. Die Grundlagen der Farbmessung sind in DIN 5033 festgelegt.

Zur eindeutigen Kennzeichnung einer Farbe genügen drei Angaben: entweder abstrakte Zahlen oder anschauliche Begriffe wie *Farbton, Sättigung* und *Helligkeit*. Durch Farbmischung kann mithilfe von drei beliebigen, aber voneinander unabhängigen Grundfarben (sogen. *Primärvalenzen*) jede beliebige Farbe erzeugt werden. Häufig werden für Farbmischversuche die von der CIE im Jahr 1931 festgelegten Primärvalenzen Rot, Grün und Blau verwendet, die in Tabelle 6.8 näher beschrieben sind.

Tabelle 6.8 Primärvalenztripel Rot, Grün und Blau

Farbe	Wellenlänge	relative Strahlungsleistung
Rot ***R***	700,0 nm	72,096
Grün ***G***	546,1 nm	1,3791
Blau ***B***	435,8 nm	1,0000

Farbmischung

Bei *additiver* Farbmischung werden beispielsweise nach dem Schema von Abb. 6.72 drei Farben auf einer ideal weißen Wand überlagert. Die Farben verschmelzen auch dann zu einer Mischfarbe, wenn sie nicht miteinander, sondern hintereinander in schneller Folge dem Auge dargeboten werden (z.B. beim Farbenkreisel). Beim Farbfernseher liegen kleine Farbelemente so dicht beieinander, dass sie vom Auge nicht mehr getrennt werden können und so eine Mischfarbe entsteht. Die additive Mischung des Sonnenlichts ergibt die Farbe Weiß. Ebenso ergibt sich Weiß, wenn zwei sogen. Komplementärfarben additiv gemischt werden, z.B.

Rot – Blaugrün, Orange – Blau, Gelb – Violett.

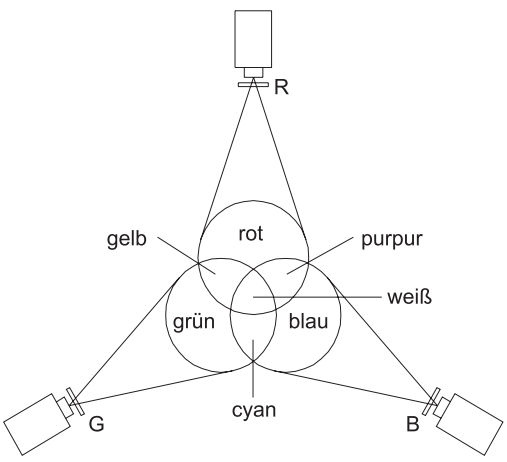


Abb. 6.72 Additive Farbmischung

Bei der additiven Mischung zu „Weiß“ entsteht je nach Helligkeit der verwendeten Lichtquellen die Reihe der unbunten Farben von Weiß über verschiedene Graustufen bis Schwarz.
Werden mithilfe von Farbfiltern aus weißem Licht spektrale Anteile entfernt, entsteht durch *subtraktive* Farbmischung farbiges Licht (z. B. beim Diapositiv). Wird eine bestimmte Farbe aus dem Spektrum entfernt, so verbleibt als Mischfarbe seine Komplementärfarbe. Mit drei passend gewählten Filtern (z. B. Blaugrün, Gelb und Purpur) kann die ganze Reihe der unbunten Farben erzeugt werden. Körperfarben undurchsichtiger Körper beruhen auf selektiver Remission. So entsteht beispielsweise das Blattgrün der Pflanzen dadurch, dass das Chlorophyll im roten Spektralbereich ($640 \leq \lambda \leq 680\,\mathrm{nm}$) absorbiert und deshalb die Komplementärfarbe grün vom Blatt remittiert wird.

Farbmaßzahlen

Eine Strahlung, die auf das Auge trifft und schließlich eine bestimmte Farbempfindung auslöst, wird beschrieben durch die als *Farbreizfunktion* φ_λ bezeichnete spektrale Strahlungsverteilung. Zur Bestimmung der Maßzahlen einer Farbe $\boldsymbol{F}$ kann man beispielsweise durch additive Farbmischung aus den drei Primärvalenzen $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{B}$ eine Farbe erzeugen, die der vorgegebenen Farbe gleich ist. In einem dreidimensionalen Farbraum, der von den drei Basisvektoren $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird, kann jede Farbe $\boldsymbol{F}$ eindeutig als Vektor dargestellt werden:

$$\boldsymbol{F} = R\boldsymbol{R} + G\boldsymbol{G} + B\boldsymbol{B}$$

Die Farbmaßzahlen R, G und B sind nicht immer positiv. Insbesondere können viele der hoch gesättigten Spektralfarben nur so gemischt werden, dass beispielsweise Rot zusammen mit der auszumessenden Farbe genau so erscheint, wie die Mischung aus Grün und Blau (so genannte äußere Mischung):

$$\boldsymbol{F} + R\boldsymbol{R} = G\boldsymbol{G} + B\boldsymbol{B}\,, \qquad \text{oder}$$
$$\boldsymbol{F} = -R\boldsymbol{R} + G\boldsymbol{G} + B\boldsymbol{B}\,.$$

Die Nachteile negativer Farbmaßzahlen umgeht man durch eine rechnerische Koordinatentransformation auf ein anderes Primärvalenzsystem, in dem nur positive Farbmaßzahlen vorkommen. Von der CIE wurde deshalb 1931 ein *Normvalenzsystem* mit den *Normvalenzen* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{Z}$ eingeführt. Diese sind zwar physikalisch nicht erzeugbar, trotzdem kann jede Farbe in diesem virtuellen Primärvalenzsystem dargestellt werden:

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{X} + Y\boldsymbol{Y} + Z\boldsymbol{Z}\,. \tag{6.95}$$

Die *Normfarbwerte* X, Y und Z werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} X &= k \int \varphi_\lambda \bar{x}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \\ Y &= k \int \varphi_\lambda \bar{y}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \\ Z &= k \int \varphi_\lambda \bar{z}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,. \end{aligned} \tag{6.96}$$

k ist eine geeignet wählbare Konstante, $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ sind die *Normspektralwerte*, die durch Messungen mit Testpersonen gefunden wurden und durch die CIE 1931 für den *farbmetrischen Normalbeobachter* mit $2°$*-Gesichtsfeldgröße* festgelegt wurde. Weitere Funktionen für ein Gesichtsfeld von 10° wurden 1964 definiert. Die Normspektralwerte sind in DIN 5033 in Schritten von $\Delta\lambda = 5\,\mathrm{nm}$ tabelliert und in Abb. 6.73 dargestellt. In der

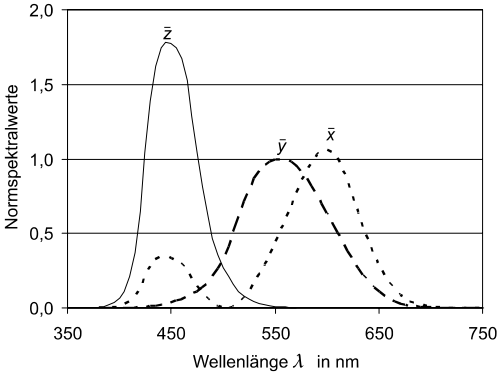


Abb. 6.73 Normspektralwertfunktionen $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ für den farbmetrischen Normalbeobachter mit 2°-Gesichtsfeldgröße. Die Kurven sind so normiert, dass die Fläche unter den Kurven gleich ist

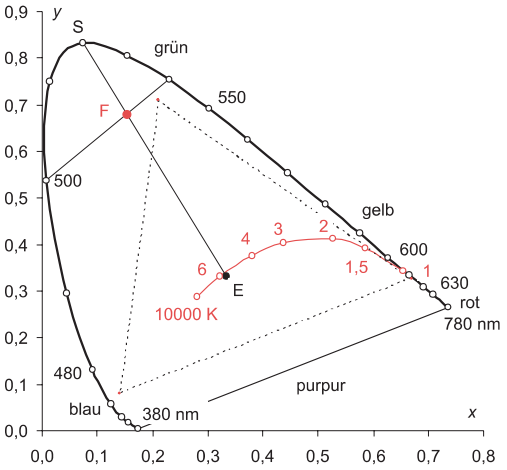


Abb. 6.74 Normfarbtafel für das 2°-Normvalenzsystem. E: Farbort des energiegleichen Spektrums (Unbuntpunkt). 1; 1,5; 2…10: Farborte des schwarzen Strahlers mit Temperaturen in 1 000 K. Innerhalb des gestrichelten Dreiecks liegen die Farborte, die sich mit einer Farbfernsehbildröhre realisieren lassen

Praxis werden obige Integrale über Summen berechnet. Im 2°-Normvalenzsystem ist die Normspektralwertfunktion $\bar{y}(\lambda)$ identisch mit dem in Abb. 6.71 dargestellten Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$. Dadurch ist der Normfarbwert Y proportional zu den photometrischen Größen wie Leuchtdichte, Lichtstrom usw.

Farbtafel

Verzichtet man beispielsweise auf die Angabe der Helligkeit, dann kann die *Farbart* durch zwei Angaben gekennzeichnet werden. Anstelle der dreidimensionalen Darstellung einer Farbvalenz durch die Normfarbwerte X, Y und Z wird deshalb in der Praxis meist eine Darstellung in einer ebenen *Normfarbtafel* bevorzugt. Dazu werden die *Normfarbwertanteile*

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}\,,\qquad y = \frac{Y}{X+Y+Z}\,,\qquad z = \frac{Z}{X+Y+Z} \tag{6.97}$$

gebildet und y gegen x aufgetragen. Die Berechnung von z ist entbehrlich, denn $x + y + z = 1$. Nach der Darstellung von Abb. 6.74 ist jeder Farbart in der Farbtafel ein Punkt zugeordnet. Die Normfarbwertanteile der Spektralfarben bilden einen geschlossenen hufeisenförmigen Kurvenzug, den *Spektralfarbenzug*. Die Verbindungsgerade seiner Eckpunkte ist die *Purpurgerade*. Alle reellen Farben liegen innerhalb der so umschlossenen Fläche.

Beispiel

6.3-3 Welche Normfarbwertanteile x und y hat gelbes Natriumlicht der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm, das von einer Spektrallampe ausgesandt wird?

Lösung

Für spektral schmalbandiges Licht gilt nach (6.96) $X = k\bar{x}(\lambda)$, $Y = k\bar{y}(\lambda)$ und $Z = k\bar{z}(\lambda)$. Die Normspektralwerte für $\lambda = 589$ nm können durch lineare Interpolation aus der DIN 5033 entnommen werden: $\bar{x} = 1{,}0168$, $\bar{y} = 0{,}7689$ und $\bar{z} = 0{,}0012$. Damit ergibt sich $X = 1{,}0168\,k$, $Y = 0{,}7689\,k$ und $Z = 0{,}0012\,k$. Mit $X + Y + Z = 1{,}7869\,k$ folgt $x = 0{,}5690$, $y = 0{,}4303$ und $z = 0{,}0007$. Zur Kontrolle: $x + y + z = 1$.

Der Unbuntpunkt E in Abb. 6.74 ist der Farbort des *energiegleichen Spektrums*, d. h. φ_λ = konstant. Er hat die Normfarbwertanteile $x = y = z = 1/3$. Die unbunte Farbe E entsteht aber auch durch Mischung von zwei *Kompensationsfarben*, die auf gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden durch den Unbuntpunkt liegen, beispielsweise durch die Spektralfarben mit $\lambda = 490$ nm und $\lambda = 600$ nm.

Dicht am Unbuntpunkt (Weißpunkt) vorbei führt der Kurvenzug der Farben des schwarzen Strahlers. Der geringste Abstand liegt bei $T \approx 5600$ K. Zur Kennzeichnung der Farbart eines Strahlers kann die *Farbtemperatur* T_f verwendet werden. Das ist die Temperatur eines Planck'schen Strahlers, der dieselbe Farbart hat. Liegt der Farbort des Strahlers nicht auf dem Planck'schen Kurvenzug, kann lediglich eine *ähnlichste Farbtemperatur* T_n angegeben werden.

Die Eckpunkte des gestrichelten Dreiecks in Abb. 6.74 sind die Farborte der drei beim Farbfernsehen verwendeten Primärfarben. Sie haben folgende Koordinaten: Rot: (0,67/0,33), Grün: (0,21/0,71), Blau: (0,14/0,08). Innerhalb des gestrichelten Dreiecks liegen alle Farbarten, die mit der Farbbildröhre darstellbar sind. Damit können nahezu alle in der Natur vorkommenden Farbarten nachgebildet werden.

Alle Farbarten, die sich durch Mischung von zwei Farben herstellen lassen, liegen auf einer Geraden. Beispielsweise kann die Farbe F in Abb. 6.74 durch Mischung der beiden Spektralfarben $\lambda = 500$ nm und $\lambda = 540$ nm erzeugt werden, aber natürlich auch durch beliebige andere Kombinationen. Die Farbart F kann auch aufgefasst werden als additive Mischung von Weiß (Unbuntpunkt E) mit der Spektralfarbe S (hier: $\lambda = 520$ nm). Alle Punkte auf der Geraden EFS haben denselben *Buntton* (Farbton) aber unterschiedliche *Sättigung*. Die Wellenlänge des Punktes S wird als bunttongleiche Wellenlänge λ_d bezeichnet.

Eine anschauliche Beschreibung einer Farbe ist auch möglich mithilfe der *Helmholtz-Maßzahlen*. Dies ist die Angabe der bunttongleichen Wellenlänge λ_d, der Sättigung oder Buntheit sowie der Helligkeit (z. B. Normfarbwert Y oder Leuchtdichte L_v). Die Sättigung wird durch den *spektralen Farbanteil*

$$p_e = \frac{FE}{SE} = \frac{y_F - y_n}{y_S - y_n} = \frac{x_F - x_n}{x_S - x_n} \qquad (6.98)$$

beschrieben. Dabei sind (x_F, y_F) die Normfarbwertanteile der zu beschreibenden Farbvalenz F, (x_n, y_n) die des Unbuntpunktes E und (x_S, y_S) die der bunttongleichen Spektralfarbe.

Beispiel

6.3-4 Welchen spektralen Farbanteil p_e hat die Farbart des Punktes F in Abb. 6.74?

Lösung

Entweder durch direktes Ausmessen oder durch Berechnen der beiden sich schneidenden Geraden und damit der Abstände FE und SE folgt $p_e = 0{,}693$.

In der Farbtafel von Abb. 6.74 weichen geometrische Abstände stark von den empfundenen Farbabständen ab. Insbesondere ist der Bereich der grünen Farben im Vergleich zu Rot und Blau stark ausgedehnt. Um eine bessere Übereinstimmung zu erhalten, wurde 1976 von der CIE die UCS (Uniform Chromaticity Scale)–Farbtafel eingeführt, die eine projektive Transformation der Normfarbtafel darstellt und deren Koordinaten u' und v' durch folgende Transformationsgleichungen aus den Normfarbwertanteilen x und y hervorgehen:

$$u' = \frac{4x}{3 - 2x + 12y} \quad \text{und} \qquad (6.99)$$

$$v' = \frac{9y}{3 - 2x + 12y}\,.$$

Farbmessverfahren

Für die praktische Messung von Farben haben sich drei Verfahren herausgebildet:

- Beim *Gleichheitsverfahren* wird die zu untersuchende Farbe in einem zweigeteilten Gesichtsfeld mit Farben, deren Maßzahlen bekannt sind, verglichen.
- Beim *Spektralverfahren* werden nach (6.96) die Normfarbwerte X, Y und Z berechnet. Die Farbreizfunktion φ_λ muss mit einem Spektralfotometer gemessen werden.
- Beim *Dreibereichsverfahren* wird die Strahlung auf drei verschiedene Detektoren gerichtet, deren spektrale Empfindlichkeit mithilfe von Filterschichten den drei Normspektralfunktionen von Abb. 6.73 angepasst sind. Die drei Empfängersignale sind damit proportional zu den Normfarbwerten X, Y und Z.

Zur Übung

Ü 6.3-6 Alle Farbarten, die sich durch Mischung aus zwei Ausgangsfarben herstellen lassen, liegen in der Normfarbtafel von Abb. 6.74 auf einer Geraden. Zeigen Sie, dass man durch Mischen der Spektralfarben $\lambda = 490$ nm (Türkis) und $\lambda = 600$ nm (Orange) Weiß erzeugen kann.

Ü 6.3-7 Die Farbreizfunktion einer LED wird näherungsweise beschrieben durch $\varphi(\lambda) = k \exp\left(-\frac{(x-\lambda_0)^2}{2\sigma^2}\right)$, mit $\lambda_0 = 640$ nm und $\sigma = 17$ nm. Bestimmen Sie die Normfarbwertanteile x und y des Lichts.

6.4 Wellenoptik

6.4.1 Interferenz und Beugung

6.4.1.1 Kohärenz

Die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der Wellenausbreitung gehen aus Abschn. 5.2 hervor. Der vorliegende Abschnitt soll spezielle Eigenschaften der Lichtwellen vertiefen.

In Abschn. 5.2.4 ist gezeigt, dass sich zwei Wellen derselben Frequenz auslöschen, wenn der Gangunterschied Δ der beiden Wellen ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt:

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Umgekehrt verstärken sich die Wellen beim Gangunterschied $\Delta = m\lambda$ (Tabelle 5.10). Dass solche Interferenzeffekte auch bei Licht beobachtet werden können, wurde erstmals von T. Young 1801 gezeigt. Der *Young'sche Interferenzversuch am Doppelspalt* (Abschn. 6.4.1.6) beweist eindeutig die Wellennatur des Lichtes. Im Gegensatz zur Interferenz mechanischer Wellen ist die Interferenz von Licht nicht ganz einfach zu beobachten. Eine wesentliche Bedingung für die Beobachtung stationärer Interferenzmuster ist die *Kohärenz* der wechselwirkenden Wellen. Zwei Wellen werden *kohärent* genannt, wenn die gegenseitige Phasendifferenz während der Beobachtungszeit konstant bleibt. Gibt es zwischen zwei Wellen keine feste Phasenbeziehung, spricht man von *inkohärenten* Wellen. Das spontan emittierte Licht eines heißen Körpers stammt von einzelnen voneinander unabhängigen Atomen. Aus diesem Grund können Wellen, die von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgesandt werden, nicht miteinander interferieren. Es ist praktisch ausgeschlossen, dass zwischen den unabhängig ausgestrahlten Wellenzügen eine feste Phasenbeziehung besteht. Zur Interferenz des Lichtes müssen deshalb die interferierenden Lichtwellen von demselben Punkt einer Lichtquelle stammen. Experimentell ist dies möglich durch Aufspalten eines Lichtstrahls mithilfe von z. B. teildurchlässigen Platten und Spiegeln. Abbildung 6.75 zeigt die Überlagerung von zwei Wellenzügen, die jeweils aus derselben Lichtquelle stammen.

Die elektromagnetischen Wellen, die von Temperaturstrahlern ausgesandt werden,

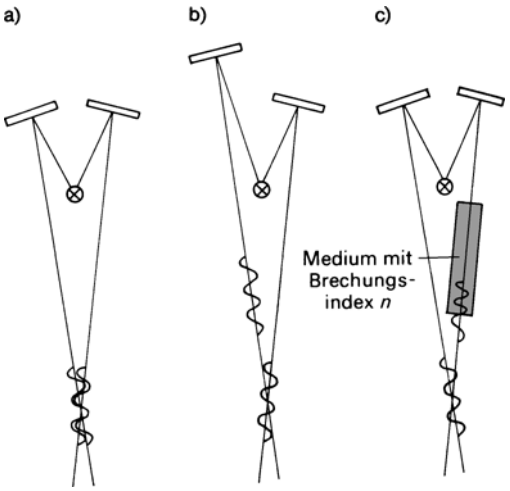


Abb. 6.75 Erzeugung kohärenter Wellenzüge durch Reflexion: **a**) konstruktive Interferenz, **b**) keine Interferenz, zu große geometrische Wegdifferenz, **c**) keine Interferenz, zu große optische Wegdifferenz

sind nicht beliebig lang, sondern sie sind Wellenzüge endlicher Länge (Abb. 5.65). Die Bedeutung dieser Tatsache für die Interferenz geht aus Abb. 6.75 klar hervor. Während in Abb. 6.75a die beiden Wellenzüge miteinander interferieren, kommt es in Abb. 6.75b und c nicht zur Interferenz. Der Grund ist offensichtlich: In Abb. 6.75b ist die Wegdifferenz s zwischen den beiden Teilwellen größer als die Länge der beiden Wellenzüge. Sie treffen deshalb nacheinander am Interferenzort ein und können nicht miteinander interferieren. In Abb. 6.75c sind zwar die geometrischen Wege gleich, das rechte Wellenpaket läuft aber eine bestimmte Strecke durch ein Medium (Brechungsindex n) und kommt infolge der verminderten Ausbreitungsgeschwindigkeit verspätet am Interferenzort an. Entscheidend für die Beobachtung der Interferenz ist daher, dass die *optische Wegdifferenz* $n\,s$ nicht größer wird als die mittlere Länge der Wellenzüge.
Verschiebt man, ausgehend von Abb. 6.75a, den linken Spiegel nach oben, bis schließlich die Stellung von Abb. 6.75b erreicht ist, so wird das ursprünglich stark ausgeprägte Interferenzbild immer kontrastärmer, bis es schließlich ganz verschwindet. Der größte Gangunterschied der beiden Wellen, bei dem gerade noch Interferenz beobachtet werden kann, ist die *Kohärenzlänge* l. Diese entspricht der mittleren Länge der interferierenden Wellenzüge und ist verknüpft mit der mittleren Zeitdauer τ des Emissionsaktes nach der Beziehung

$$l = c\,\tau \tag{6.100}$$

mit c als der Lichtgeschwindigkeit. Die Zeit τ, während der ein Wellenzug ausgesandt wird, beträgt bei isolierten Atomen typischerweise $\tau \approx 10^{-8}$ s. Dies ergibt Wellenzüge mit der Länge $l \approx 3$ m. Bei hoher Temperatur und großer Atomdichte wird die Kohärenzlänge erheblich vermindert, wie aus Tabelle 6.9 hervorgeht.
Ein Wellenzug der Länge l wird nach *Fourier* beschrieben als Integral über Sinuswellen verschiedener Frequenzen und Wellenlängen.
Dabei müssen Frequenzen innerhalb der Bandbreite

Tabelle 6.9 Kohärenzeigenschaften verschiedener Lichtquellen

Lichtquelle	Frequenzbandbreite Δf	Kohärenzlänge l
weißes Licht	$\approx$ 200 THz	$\approx$ 1,5 µm
Spektrallampe, Raumtemperatur	1,5 GHz	20 cm
Kr-Spektrallampe, auf $T = 77$ K gekühlt	375 MHz	80 cm
Halbleiterlaser GaAlAs	2 MHz	150 m
HeNe-Laser, frequenzstabilisiert	150 kHz	2 km

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau} \tag{6.101}$$

überlagert werden. Auch auf der Wellenlängenskala ist ein Wellenzug endlicher Länge nicht beliebig scharf, sondern er hat eine Linienbreite

$$|\Delta\lambda| = \lambda \frac{|\Delta f|}{f} \,. \tag{6.102}$$

Bei einer Spektrallampe ist der Frequenzbereich Δf im Allgemeinen nicht durch (6.101) bestimmt. In Wirklichkeit sind die Spektrallinien durch den *Doppler-Effekt* und Stöße verbreitert. Ein typischer Wert für die Breite des Frequenzbandes einer Cd-Spektrallampe ist $\Delta f = 1\,500$ MHz. Dies entspricht bei $\lambda = 509$ nm einer Linienbreite von $\Delta\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-12}$ m und einer Kohärenzlänge von $l = 20$ cm.

Selbst bei genügend großer Kohärenzlänge kann ein Interferenzversuch mit Licht misslingen, wenn die strahlende Fläche oder die Öffnung der Lichtbündel zu groß ist. Hat die Lichtquelle die Größe b und ist der halbe Öffnungswinkel σ, dann wird Interferenz nur beobachtet, wenn die *Kohärenzbedingung*

$$2\, b \sin\sigma \ll \lambda \tag{6.103}$$

erfüllt ist.

Die kurze Kohärenzlänge von Licht normaler Lampen rührt daher, dass die Emissionsakte der einzelnen Atome nicht miteinander korreliert sind. Der *Laser* (Abschn. 6.5.4) ist eine Lichtquelle, bei der die einzelnen Atome bei der Lichtaussendung miteinander kooperieren und ihr Licht jeweils phasengerecht aussenden. Dadurch entsteht ein fast monochromatischer Wellenzug mit mehreren Kilometern Kohärenzlänge. In der Praxis vorkommende Kohärenzlängen sind in Tabelle 6.9 zusammengestellt.

Die Interferenz von Licht aus zwei kohärenten Lichtquellen wurde 1821 von A. J. Fresnel (1788 bis 1827) demonstriert. Im klassischen *Fresnel'schen Spiegelversuch* wird nach Abb. 6.76 das Licht einer Lichtquelle L mithilfe eines Winkelspiegels so reflektiert, dass die Wellen aus den virtuellen Bildern L_1 und L_2 herzukommen scheinen. Die beiden virtuellen Lichtquellen L_1 und L_2 senden kohärente Wellen aus, die im Überlappungsgebiet zur Interferenz gebracht werden. Die konzentrischen Kreise in Abb. 6.76 sollen Wellenberge darstellen. Dann ist an jedem Schnittpunkt der Kreise die Bedingung für konstruktive Interferenz erfüllt. Längs der eingezeichneten Punkte verstärken sich also die Wel-

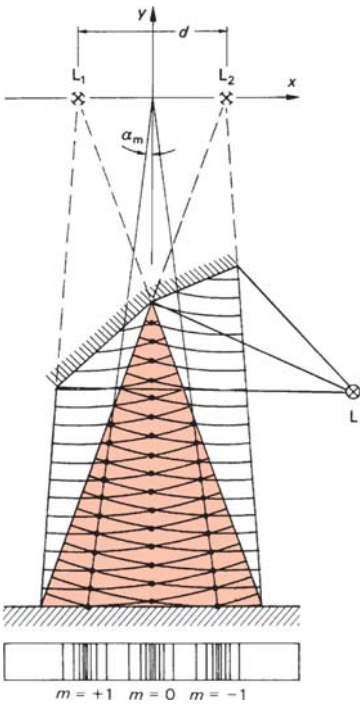


Abb. 6.76 Fresnel'scher Spiegelversuch

len, dazwischen löschen sie sich aus. Auf einer Wand, die von den Lichtbündeln getroffen wird, entsteht das unten stehende stationäre Interferenzbild. Die Ordnungszahl m gibt den Gangunterschied der interferierenden Wellen in Vielfachen der Wellenlänge an: $\Delta = m\lambda$. Wie bereits in Abschn. 5.2.4.3 erwähnt, liegen die Punkte konstruktiver Interferenz auf konfokalen Hyperbeln mit den Brennpunkten L_1 und L_2. Die Hyperbeln entsprechen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.104)$$

mit $a = m(\lambda/2)$ und $b^2 = (d/2)^2 - a^2$; d ist der Abstand der beiden virtuellen Lichtquellen. In großem Abstand von den Lichtquellen schmiegen sich die Hyperbeln an ihre Asymptoten an. Dies sind Geraden, die aus dem Koordinatenursprung kommen und mit der y-Achse die Winkel α_m einschließen. Für die Asymptotenwinkel gilt

$$\sin \alpha_m = m\frac{\lambda}{d} . \qquad (6.105)$$

Der Abstand zwischen zwei Interferenzstreifen an der Wand ist proportional zur verwendeten Wellenlänge. Nimmt man Weißlicht anstelle von monochromatischem Licht, ist die konstruktive Interferenzbedingung nur für die Interferenzlinie nullter Ordnung ($m = 0$) zu erfüllen. Es erscheint ein weißer Interferenzstreifen nullter Ordnung, der von schwarzen Streifen begrenzt ist. Die Interferenzstreifen höherer Ordnung bekommen farbige Ränder.

Zur Übung

Ü 6.4-1 Die theoretische Grenze der Frequenzbandbreite eines Lasers ist $\Delta f \approx 1$ Hz. Berechnen Sie die theoretische Linienbreite für $\lambda = 600$ nm und die Kohärenzlänge l.

Ü 6.4-2 Bei einem Experiment mit dem Fresnel'schen Winkelspiegel beträgt der Abstand der beiden virtuellen Lichtquellen (Abb. 6.76) $d = 0{,}6$ mm. Im Abstand $D = 2$ m von den Lichtquellen befindet sich eine Wand, auf der die Interferenzstreifen beobachtet werden. Wie groß ist der Abstand Δx zwischen zwei Interferenzstreifen in der Nähe der Symmetrieachse, wenn als Lichtquelle eine Natriumdampflampe mit $\lambda = 589$ nm verwendet wird?

6.4.1.2 Interferenzen an dünnen Schichten

Interferenzen gleicher Neigung

Interferenzen zwischen kohärenten Lichtwellen entstehen durch Reflexion von Lichtwellen an planparallelen Schichten. In Abb. 6.77 fällt ein Lichtstrahl von der Lichtquelle L auf eine durchlässige Platte mit dem Brechungsindex n. Im Auftreffpunkt A wird der Strahl teilweise reflektiert und gebrochen. Der gebrochene Strahl wird in B wieder teilweise reflektiert und gebrochen, ebenfalls in C, D und so fort. Zunächst sei die Überlagerung der beiden Strahlen 1′ und 2′ betrachtet (die weiteren Strahlen 3′, 4′ und so fort haben vernachlässigbare Intensitäten). Die beiden Parallelstrahlen werden im Brennpunkt F′ einer Linse vereinigt. (Bei Betrachtung mit dem Auge ist dies die Augenlinse.) Ob am Punkt F′ Helligkeit oder Dunkelheit herrscht, hängt vom Gangunterschied der beiden interferierenden Lichtwellen 1′ und 2′ ab.

Die geometrische Wegdifferenz der Strahlen 1′ und 2′ ist nach Abb. 6.77 AB + BC − AP. Die optische Wegdifferenz beträgt n (AB + BC) − AP. Für die Wegdifferenzen gilt

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 2\frac{d}{\cos \varepsilon'}; \quad \mathrm{AP} = 2d \tan \varepsilon' \sin \varepsilon .$$

Mithilfe des Brechungsgesetzes $\sin \varepsilon / \sin \varepsilon' = n$ ergibt sich daraus die Gangdifferenz

$$s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} .$$

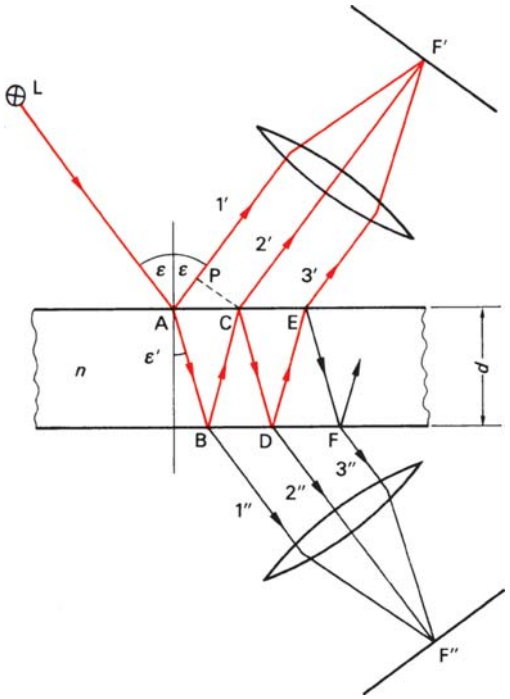


Abb. 6.77 Interferenzen an planparalleler Platte

Dies ist noch nicht der vollständige Gangunterschied. Wie bereits in Abschn. 5.2.4.2 erläutert, erfährt der am dichteren Medium reflektierte Strahl 1′ einen Phasensprung um π, was einem zusätzlichen Gangunterschied von $\lambda/2$ entspricht. Der Strahl 2′ erleidet bei der Reflexion in B keinen Phasensprung.
Somit beträgt der Gangunterschied der beiden Strahlen 1′ und 2′

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} - \frac{\lambda}{2} \,. \qquad (6.106)$$

Die Wellen verstärken sich bei $\Delta = m\lambda$, sie löschen sich aus für $\Delta = (2m + 1)(\lambda/2)$.
Die Bedingung für *Helligkeit* lautet somit

$$2\,d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \,. \qquad (6.107)$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$ *Dunkelheit* herrscht bei

$$2\,d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} = (m + 1)\lambda \,. \qquad (6.108)$$

Die Bedingungen (6.107) und (6.108) sind bei vorgegebener Plattendicke d und Wellenlänge λ nur für ganz bestimmte Winkel ε einzuhalten. Alle Strahlen, die mit dem gleichen Winkel ε auf die Platte treffen, erzeugen in der Brennebene der Linse (oder auf der Netzhaut des Auges) eine Interferenzlinie. Verschiedene Winkel ε, die Gleichungen (6.107) und (6.108) befriedigen, erzeugen *Interferenzlinien gleicher Neigung*, die wegen der Symmetrie kreisförmig sind und als *Haidinger'sche Ringe* bezeichnet werden.
Die durchgelassenen Strahlen 1″ und 2″ in Abb. 6.77 werden im Brennpunkt F″ überlagert. Für sie beträgt der Gangunterschied $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}$. Der in (6.106) zusätzlich eingebrachte Gangunterschied von $\lambda/2$ für die Reflexion am dichteren Medium taucht hier nicht auf. Daraus folgt, dass sich die Interferenzen in F″ komplementär zu jenen in F′ verhalten, d. h., die Bedingungen für Helligkeit und Dunkelheit sind genau vertauscht. Die Interferenzen des durchgelassenen Lichtes sind nicht so gut sichtbar wie die des reflektierten Lichtes, weil die Intensitäten der Strahlen 1″ und 2″ sehr unterschiedlich sind (z. B. 10:1), während 1′ und 2′ nahezu dieselbe Intensität haben.

Farben dünner Blättchen

Dünne Schichten, wie z. B. Seifenlamellen, Ölfilme auf Wasser, Aufdampfschichten und Oxidschichten, zeigen bei Beleuchtung mit weißem Licht oft herrliche *Interferenzfarben.* Diese entstehen, wenn nach (6.107) und (6.108) je nach Dicke, Brechungsindex und Einfallswinkel aus dem angebotenen weißen Spektrum eine Farbe oder mehrere

Farben reflektiert, andere dagegen ausgelöscht werden. Aus der Farbe kann man bei einiger Übung die Schichtdicke recht genau bestimmen.

Beispiel

6.4-1 Eine Seifenlamelle mit der Dicke $d = 350\,\text{nm}$ wird mit weißem Licht senkrecht beleuchtet. Welche Farbe hat das von der Seifenhaut reflektierte Licht, wenn der Brechungsindex $n = 1{,}33$ beträgt?

Lösung

Nach (6.107) wird Licht der Wellenlänge reflektiert, die der Bedingung

$$\lambda_\text{m} = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{931\,\text{nm}}{m + \frac{1}{2}}$$

genügt. Folgende Wellenlängen erfüllen diese Voraussetzung:

$m = 0$: $\lambda_0 = 1\,862\,\text{nm}$,
$m = 1$: $\lambda_1 = 621\,\text{nm}$,
$m = 2$: $\lambda_2 = 372\,\text{nm}$,
$m = 3$: $\lambda_3 = 266\,\text{nm}$ usw.

Da nur die Wellenlänge $\lambda_1 = 621\,\text{nm}$ im sichtbaren Spektralbereich liegt, erscheint die Seifenblase rot.

Reflexvermindernde Schichten

Interferenzen an dünnen Schichten werden benutzt, um Reflexe an Glasoberflächen zu beseitigen. In der Regel werden Linsen für optische Geräte vergütet, d. h. mit einer reflexmindernden Schicht überzogen.

Die Wirkungsweise einer Vergütungsschicht geht aus Abb. 6.78 hervor. Auf ein Glas mit dem Brechungsindex n_G sei eine dünne Schicht (Dicke d) mit dem Brechungsindex n_1 aufgebracht. Darüber sei Luft mit dem Brechungsindex $n_0 = 1$. Der einfallende Strahl e wird an zwei Grenzflächen reflektiert und liefert die Strahlen r_1 und r_2. Schichtdicke d und Brechungsindex n_2 sind nun so zu wählen, dass sich die beiden reflektierten Strahlen auslöschen. Nach dem Energieerhaltungssatz hat

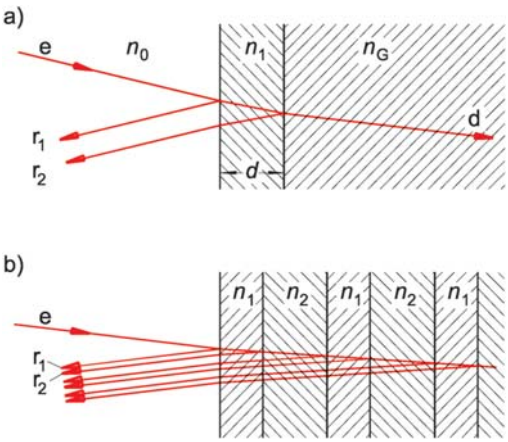


Abb. 6.78 Interferenzen an dünnen Schichten: **a**) Reflex vermindernde Schicht, **b**) dielektrischer Spiegel

dann der durchgehende Strahl d die ganze Strahlungsleistung des einfallenden Strahls.

Ist $n_\text{G} > n_1 > n_0$, dann entsteht sowohl r_1 als auch r_2 durch Reflexion am optisch dichteren Medium. Beide Strahlen erfahren also den Phasensprung π. Bei senkrechtem Einfall ist deshalb die Gangdifferenz der beiden Strahlen $\Delta = 2\,n_1\,d$.

Die Bedingung für Auslöschung ist $\Delta = (2\,m + 1)(\lambda/2)$ oder $(2\,m + 1)(\lambda/2) = 2n_1 d$. Für $m = 0$ erhält man die kleinste Schichtdicke. Sie beträgt ein Viertel der Lichtwellenlänge in der Schicht:

$$d = \frac{\lambda}{4\,n_1}\,. \qquad (6.109)$$

Eine vollständige Auslöschung der reflektierten Wellen erreicht man nur, wenn deren Amplituden gleich sind. Dies ist dann der Fall, wenn der Brechungsindex n_1 des Vergütungsmaterials der Bedingung $n_1 = \sqrt{n_0\,n_\text{G}}$ genügt. Als Beschichtungssubstanzen haben sich z. B. *Kryolith* (Na_3AlF_6) mit $n = 1{,}33$ und *Magnesiumfluorid* (MgF_2) mit $n = 1{,}38$ bewährt.

Beispiel

6.4-2 Wie dick muss eine Entspiegelungsschicht aus MgF_2 sein, um die Reflexe für sichtbares Licht (λ = 550 nm) zu verringern?

Lösung

Nach (6.109) ist die erforderliche Mindestdicke

$$d = \frac{550\,\text{nm}}{4 \cdot 1{,}38} = 100\,\text{nm}\,.$$

Grundsätzlich gelingt die Beseitigung der Reflexe nur für eine diskrete Wellenlänge, z. B. für die Mitte des sichtbaren Spektrums mit λ = 550 nm. Der Effekt ist aber nicht sehr selektiv, sodass man für das ganze sichtbare Spektrum eine merkliche Entspiegelung erhält. Das rötliche oder violette Aussehen vergüteter Linsen kommt daher, dass bevorzugt die Wellenlängen von den Enden des sichtbaren Spektrums reflektiert werden.
Eine spektral breitbandige Entspiegelung ist möglich, wenn drei $\lambda/4$-Schichten aufgedampft werden.

Dielektrische Spiegel

Spiegel mit Reflexionsgraden von $\varrho > 99{,}9\%$ sind möglich mit dielektrischen Mehrfachschichten, bei denen abwechselnd eine Schicht mit hohem n_1 und niedrigem Brechungsindex n_2 auf ein Substrat aufgebracht wird (Abb. 6.78b). Die Schichtdicken werden so gewählt, dass die optischen Dicken ein Viertel der Vakuumwellenlänge betragen:

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 = \lambda/4\,. \qquad (6.110)$$

Da bei jeder Reflexion an einer Schicht mit höherem Brechungsindex ein Phasensprung von π oder $\lambda/2$ auftritt, sind die Gangunterschiede von jeweils zwei benachbarten reflektierten Strahlen r_1 und r_2 eine ganze Wellenlänge. Es kommt also zu konstruktiver Interferenz. Dielektrische Spiegel werden vorzugsweise als Laserspiegel eingesetzt.

Interferenzen gleicher Dicke

Fallen nach Abb. 6.79 zwei kohärente Strahlen auf einen Keil, sodass sie sich im Punkt P wieder vereinigen, dann herrscht in P Helligkeit oder Dunkelheit je nach Gangunterschied der beiden Strahlen. Die beiden Strahlen 1′ und 2′ können entweder mit einer Linse auf einem Schirm oder mit der Augenlinse auf der Netzhaut vereinigt werden. Der Gangunterschied der beiden Teilwellen bestimmt sich bei kleinem Keilwinkel α nach (6.106) zu

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} - \frac{\lambda}{2}\,.$$

Da mit größer werdendem Abstand von der Keilkante die Dicke d zunimmt, erhält man in regelmäßigen Abständen helle und dunkle Interferenzstreifen, sogenannte *Fizeau-Streifen* (H. Fizeau, 1819 bis 1896). Diese *Interferenzstreifen gleicher Dicke* verlaufen parallel zur Keilkante. An der Keilkante selbst ist $d = 0$ und somit der Gangunterschied infolge des Phasensprungs von Strahl 1 eine halbe Wellenlänge. Die Strahlen löschen sich also an der Keilkante aus, sodass man dort immer einen dunklen Streifen sieht. Wie schon bei den Interferenzen gleicher Neigung beschrieben, treten auch beim durchgehenden Licht Interfe-

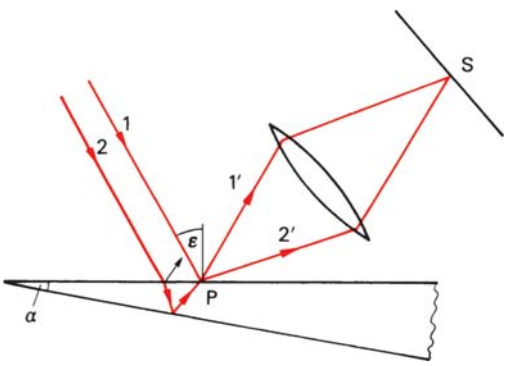


Abb. 6.79 Interferenzen an einem Keil

renzstreifen auf, die sich komplementär zu jenen des reflektierten Lichts verhalten.

Streifen gleicher Dicke sind auch die als *Newton'sche Ringe* bekannten Interferenzkurven, die an flachen Luftkeilen entstehen. Sie treten z. B. auf, wenn ein hinter Glas gerahmtes Diapositiv ungleichmäßig am Glas anliegt. Die Newton'schen Ringe lassen sich sehr schön beobachten mit einer Anordnung, die 1665 zuerst von *Hooke* und 1676 von *Newton* benutzt wurde. Nach Abb. 6.80 wird auf eine ebene Glasplatte eine plankonvexe Linse mit großem Krümmungsradius aufgesetzt. Wird die Anordnung von oben mit parallelem Licht beleuchtet, dann entstehen Interferenzstreifen gleicher Dicke am Luftkeil, die in diesem Fall wegen der Symmetrie Kreise um den Berührpunkt sind. Da der Keilwinkel bei diesem Luftkeil nicht konstant ist, nimmt der Abstand der Ringe nach außen ab.

Bei der Berechnung des Gangunterschieds von zwei interferierenden Wellen muss wieder beachtet werden, dass zusätzlich zur geometrischen Wegdifferenz $2\,d$ eine halbe Wellenlänge addiert oder subtrahiert werden muss, weil ein Strahl am optisch dichteren Medium (Planplatte) reflektiert wird. An einer Stelle mit der Keildicke d beträgt demnach der Gangunterschied $\Delta = 2d - \lambda/2$.

Die Radien der hellen Interferenzringe können leicht anhand von Abb. 6.80 berechnet werden. Helligkeit tritt auf, wenn der Gangunterschied der interferierenden Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Dies ist der Fall für die Dicken d_m des Luftkeils

$$d_m = \frac{\lambda}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Die Dicke d_m ist mit dem Radius r_m und dem Krümmungsradius R der Linse verknüpft durch $d_m = R - \sqrt{R^2 - r_m^2}$. Für $r_m \ll R$ gilt näherungsweise

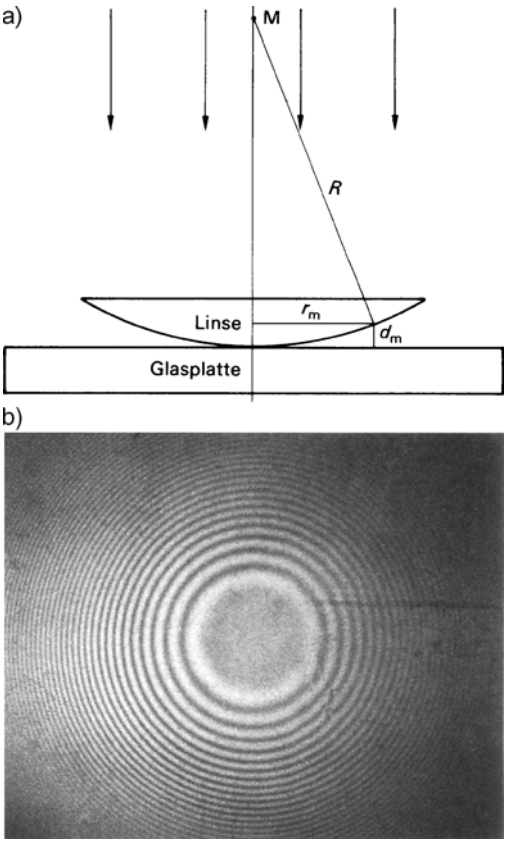


Abb. 6.80 Newton'sche Ringe: **a**) Versuchsaufbau nach Hooke, **b**) Ringsystem bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht

$$d_m \approx \frac{1}{2}\frac{r_m^2}{R}\,. \qquad (2)$$

Durch Kombination von (1) und (2) folgt für die Radien der hellen Kreise

$$r_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R} \qquad (6.111)$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$ Dunkle Ringe haben die Radien

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}\,. \qquad (6.112)$$

An der Berührungsstelle der beiden Gläser ist immer ein dunkler Fleck. Bei bekannter Lichtwellenlänge kann z. B. durch Ausmessen der Interferenzringe der Krümmungsradius R des gekrümmten Glases berechnet werden.

Oberflächenprüfung

Beobachtet man Unregelmäßigkeiten im System der Newton'schen Kreisringe, so weist dies darauf hin, dass bei der gekrümmten Fläche Abweichungen von der idealen Kugelform vorliegen. (Die Ebenheit der Planplatte ist selbstverständlich Voraussetzung.) Allgemein kann man aus Unregelmäßigkeiten im System der Fizeau-Streifen an Luftkeilen auf Oberflächenfehler der Platten schließen. Da der Abstand zwischen zwei benachbarten Interferenzstreifen gleicher Dicke immer einer Dickenänderung des Keils von einer halben Wellenlänge entspricht, können aus Verschiebungen der Interferenzstreifen Oberflächenfehler (z. B. Rauigkeiten) im Bereich von Bruchteilen der Lichtwellenlänge vermessen werden. Verschiedene Interferenzmuster, die bei der Oberflächenprüfung von Optikteilen entstehen, sind in DIN 3140, Teil 5, zusammengestellt. Mithilfe der Fizeau-Streifen werden *Passfehler* von Optikbauteilen klassifiziert.

Zur Übung

Ü 6.4-3 Zur Bestimmung der Wellenlänge von monochromatischem Licht werden Newton'sche Ringe nach Abb. 6.80 ausgemessen. Die Plankonvexlinse hat die Brennweite $f' = 5$ m und den Brechungsindex $n = 1{,}5$. Der zehnte dunkle Ring hat den Radius $r_{10} = 4$ mm. Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtes?

Ü 6.4-4 Eine dicke Glasplatte mit Brechungsindex $n_G = 1{,}5$ ist mit einem dünnen Film mit $n_F = 1{,}3$ überzogen. Eine monochromatische ebene Welle variabler Wellenlänge fällt senkrecht auf die Platte. Licht der Wellenlänge $\lambda = 693{,}3$ nm wird stark, Licht der Wellenlänge $\lambda = 594{,}3$ nm wird nicht reflektiert. Wie dick ist der Film?

Ü 6.4-5 Eine Glasplatte ($n_G = 1{,}5$) ist mit MgF_2 ($n = 1{,}33$) überzogen. a) Wie dick muss die Antireflexschicht sein, damit Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 633$ nm bei senkrechtem Einfall nicht reflektiert wird? b) Für welche Wellenlänge wird die Reflexion minimal, wenn Licht unter $\varepsilon = 45°$ zur Oberfläche einfällt?

6.4.1.3 Interferometer

Interferometer sind optische Geräte, bei denen mithilfe von Lichtinterferenzen physikalische Größen, wie z. B. Länge, Brechzahl, Winkel und Wellenlänge, gemessen werden. Der wichtigste Interferometer-Grundtyp ist das *Michelson-Interferometer* (A. A. Michelson, 1852 bis 1931).

Aufbau und Arbeitsweise des Michelson-Interferometers sind schematisch in Abb. 6.81 dargestellt. Von der Lichtquelle L fällt Licht unter 45° auf den teilverspiegelten Strahlteiler T. Dabei entstehen zwei unter 90° verlaufende Teilstrahlen 1 und 2, die nach der Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 in sich selbst zurückgeworfen werden. Die reflektierten Strahlen werden erneut durch den Strahlteiler geteilt, sodass schließlich die Überlagerung der Strahlen 1′ und 2′ mithilfe der Fernrohrs F betrachtet werden kann. Die auftretenden Interferenzerscheinungen können auch mit

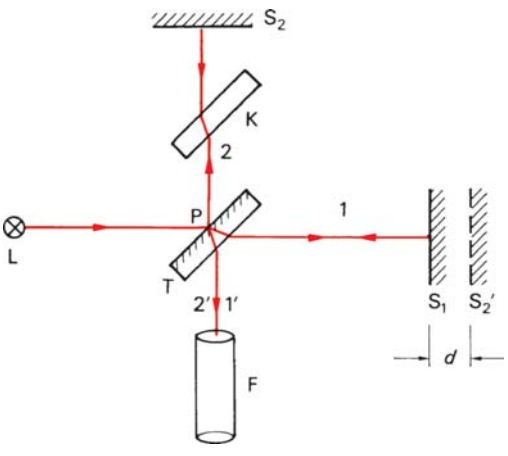


Abb. 6.81 Wirkungsweise des Michelson-Interferometers

dem bloßen Auge betrachtet bzw. mittels einer Linse auf einen Schirm projiziert werden. Die Kompensationsplatte K sorgt für gleiche Glaswege der interferierenden Teilstrahlen.

Wenn die beiden Spiegel S_1 und S_2 gleich weit vom Punkt P entfernt sind, treffen die Strahlen $1'$ und $2'$ ohne Gangunterschied beim Fernrohr ein und verstärken sich. Verstärkung tritt ebenfalls ein, wenn einer der beiden Spiegel um ein Vielfaches der halben Wellenlänge verschoben wird. Verschiebt man dagegen um ein ungeradzahliges Vielfaches einer Viertelwellenlänge, dann löschen sich die Strahlen $1'$ und $2'$ aus. Völlige Dunkelheit oder Helligkeit wird nur beobachtet, wenn ebene Wellen, z. B. von einem Laser, interferieren.

Eine Lichtquelle, die Kugelwellen aussendet, erzeugt als Interferenzmuster *Haidinger'sche Ringe*, die so zustande kommen: In Abb. 6.81 ist mit S_2' das virtuelle Bild des Spiegels S_2 eingezeichnet. Die Interferenzlinien, die beobachtet werden, sind die Interferenzen gleicher Neigung an einer planparallelen Platte der Dicke d. Kippt man einen der beiden Spiegel ganz leicht, dann beobachtet man die Fizeau-Streifen am Luftkeil. Bei Verwendung von weißem Licht und gleichen Abständen der Spiegel vom Punkt P ist der Streifen nullter Ordnung leicht zu identifizieren als einziger achromatischer Streifen.

Bei der Verschiebung eines Spiegels verschiebt sich das System der Interferenzstreifen, sodass man durch Auszählen der durchlaufenden Streifen die Verschiebung eines Spiegels in Vielfachen von $\lambda/2$ messen kann. Auf diese Art wurde von *Michelson* u. a. die *Länge des Meter-Prototyps* in Vielfachen der Lichtwellenlänge einer bestimmten Spektrallampe ausgemessen und so eine neue Meterdefinition eingeführt, die bis 1983 Gültigkeit hatte (Abschn. 1.3). In der optischen Messtechnik misst man die Länge von Endmaßen und Präzisionsmaßstäben mithilfe des Michelson-Interferometers.

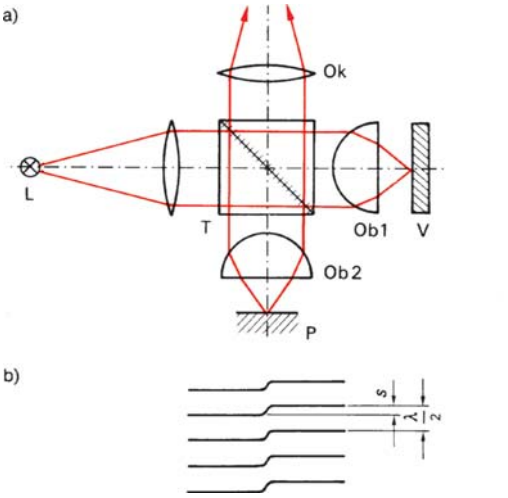


Abb. 6.82 Interferenzmikroskop: **a**) Aufbau, **b**) Interferenzstreifen an einer Stufe der Höhe s

Bei der Oberflächenprüfung mithilfe des *Interferenzmikroskops* nach Abb. 6.82a wird das vergrößerte Bild eines Prüflings P mit Interferenzstreifen überlagert. Zwei identische Mikroskopobjektive Ob 1 und Ob 2 bilden sowohl den Prüfling als auch eine Vergleichsplatte V hoher optischer Güte mithilfe des Okulars Ok ab. Alle Unebenheiten auf der Oberfläche des Prüflings spiegeln sich im System der Fizeau-Streifen wider. Abbildung 6.82b zeigt das entstehende Interferenzmuster, wenn die Oberfläche des Prüflings eine Stufe aufweist. Der Abstand zweier Streifen entspricht einer halben Wellenlänge. Unter der Annahme, dass eine Versetzung von 1/10 der Streifenbreite noch messbar ist, kann man mit dem Interferenzmikroskop Höhenunterschiede auf der Objektoberfläche vom Betrag $s = \lambda/20$ bestimmen. Bei Verwendung von grünem Licht mit $\lambda = 540$ nm beträgt die messbare Höhenauflösung also $s = 27$ nm.

6.4.1.4 Beugung am Spalt

Eine fundamentale Prämisse der geometrischen Optik ist die geradlinige Ausbreitung des

Lichtes. Tatsächlich wird dies auch beobachtet, wenn sich Lichtstrahlen ungestört im homogenen Raum ausbreiten. Sobald aber Hindernisse die freie Ausbreitung stören, stellt man fest, dass Lichtstrahlen ihre Richtung ändern. Sie werden an den Rändern der Hindernisse *gebeugt*. Wie im Folgenden verdeutlicht, ist die Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes umso stärker, je kleiner die Dimensionen der Öffnungen und Hindernisse sind, an denen das Licht gebeugt wird.

Bei der Untersuchung der Beugungserscheinungen unterscheidet man zwei Fälle der experimentellen Ausführung, die in Abb. 6.83 dargestellt sind. Abbildung 6.83a zeigt die *Beugung nach Fresnel*. Lichtquelle L und Beobachtungspunkt P auf dem Schirm liegen in endlichem Abstand von der Öffnung. Bei der *Fraunhofer'schen Beugung* (J. Fraunhofer, 1787 bis 1826) liegt sowohl die Lichtquelle als auch der Beobachtungsschirm im Unendlichen (Abb. 6.83b). Praktisch kann dies nach Abb. 6.83c realisiert werden, indem Lichtquelle und Schirm jeweils im Brennpunkt einer Linse stehen. Alle folgenden Ableitungen beziehen sich auf die Fraunhofer'sche Betrachtungsweise; die Beugung nach *Fresnel* ist in Abschn. 6.4.1.9 beschrieben.

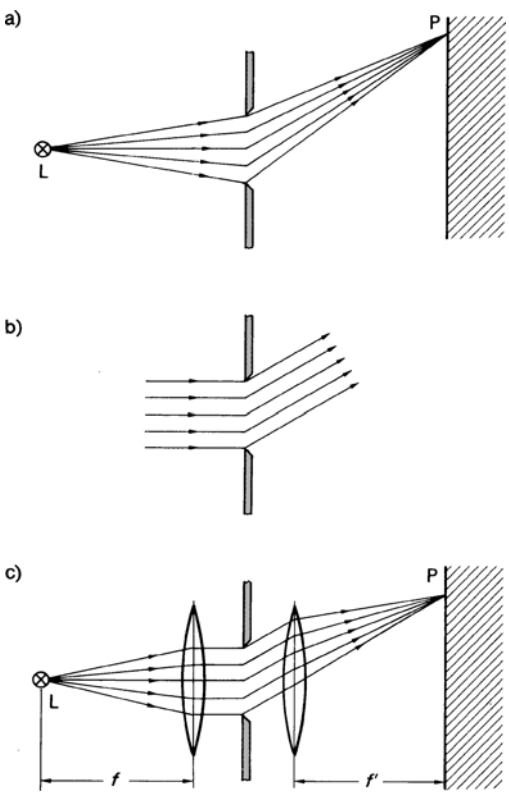


Abb. 6.83 Beugung an einer Öffnung: **a**) Fresnel'sche Betrachtung, **b**) und **c**) Fraunhofer'sche Betrachtung

Bei der Fraunhofer'schen Beugung am Spalt entsteht auf einem Schirm die in Abb. 6.84 gezeigte Helligkeitsverteilung. Ein zentraler heller Streifen ist symmetrisch von dunklen und hellen Streifen umgeben. Der Abstand der Beugungsstreifen vergrößert sich mit abnehmender Spaltbreite und zunehmender Wellenlänge.

Zur Ableitung der Beugungsverhältnisse am Spalt sei nach Abb. 6.85 ein Spalt mit der Breite b, der senkrecht zur Zeichenebene nicht begrenzt sein soll, von links mit parallelem Licht beleuchtet. Es treffen also ebene Wellen auf den Spalt. Die Lichtintensität in einem beliebigen Punkt hinter dem Spalt kann mit Hilfe des *Prinzips von Huygens und Fresnel* (Abschn. 5.2.4.3) bestimmt werden. Danach sendet jeder Punkt auf einer Wellenfläche Kugelwellen aus, die im betrachteten Aufpunkt überlagert werden. In Abb. 6.85 sind innerhalb des Spalts acht diskrete Sender solcher Elementarwellen im Abstand s angeordnet. Allgemein seien es p Sender mit $p \to \infty$. Die Intensität, die in großer Entfernung vom Spalt in Rich-

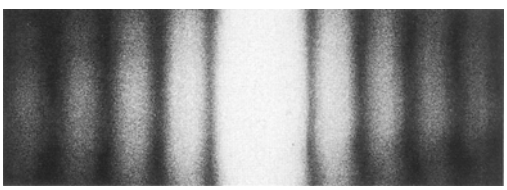


Abb. 6.84 Beugungsbild eines Spaltes

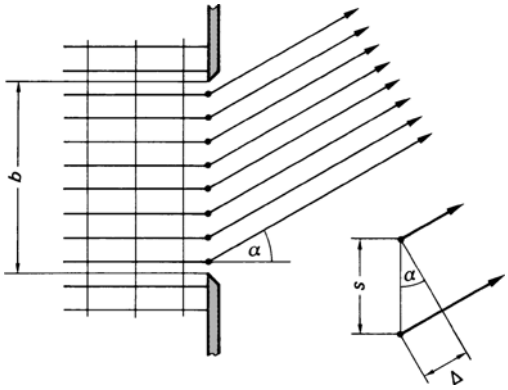


Abb. 6.85 Beugung am Spalt; Überlagerung von Elementarwellen

tung des Winkels α zur Spaltnormalen auf tritt, ergibt sich aus den nachfolgenden Überlegungen.

Alle acht (p) elektromagnetischen Wellen haben in großem Abstand dieselbe Amplitude $\hat{E}$ der elektrischen Feldstärke. Lediglich die Phasenlagen der ankommenden Wellen sind verschieden, denn zwischen jeweils zwei benachbarten Wellen besteht nach Abb. 6.85 der Gangunterschied $\Delta = s\sin\alpha = b\sin\alpha/p$. Die Phasendifferenz zwischen zwei benachbarten Kugelwellen ist am Aufpunkt

$$\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi\frac{b\sin\alpha}{p\lambda} .$$

Die resultierende Feldstärke ist demnach

$$\begin{aligned} E_\alpha = {} & \hat{E}\cos(\omega t) + \hat{E}\cos(\omega t + \varphi) + \\ & + \hat{E}\cos(\omega t + 2\varphi) + \\ & + \cdots + \hat{E}\cos[\omega t + (p-1)\varphi] . \end{aligned}$$

Diese Summe kann sehr einfach bestimmt werden, wenn die Wellen komplex geschrieben und in der komplexen Ebene addiert werden:

$$\underline{E}_\alpha = \hat{E}e^{j\omega t}(e^0 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + \cdots + e^{j(p-1)\varphi})$$

Abbildung 6.86 zeigt die Addition der acht Zeiger, die jeweils um den Phasenwinkel φ gegeneinander verdreht sind. Für die Länge des resultierenden Zeigers liest man ab

$$\hat{E}_\alpha = 2r\sin(\Phi/2) \qquad \text{mit} \qquad \Phi = p\varphi .$$

Mit $\varphi \approx \hat{E}/r$ ergibt sich

$$\hat{E}_\alpha = 2\frac{\hat{E}}{\varphi}\sin\frac{p\varphi}{2} .$$

Setzt man für den Phasenwinkel

$$\varphi = 2\pi\frac{b\sin\alpha}{p\lambda}$$

ein, dann ist

$$\hat{E}_\alpha = \hat{E}_0\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha} .$$

Der Vorfaktor $\hat{E}_0 = p\hat{E}$ ist die Amplitude der Feldstärke, die aus der Überlagerung von p Wellen ohne Phasenverschiebung resultiert, die also in Geradeausrichtung ($\alpha = 0$) beobachtet wird.

Beachtet man, dass die Intensität proportional zum Quadrat der Feldstärke ist (Abschn. 5.2.2.2), dann ergibt sich für die Intensität I_α der in Richtung α abgebeugten Strahlung

$$I_\alpha = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)^2} . \qquad (6.113)$$

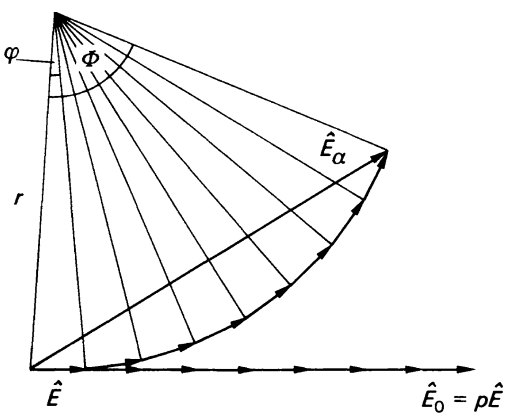


Abb. 6.86 Addition von p Elementarwellen

Abbildung 6.87 zeigt die Intensitätsverhältnisse bei der Beugung am Spalt. Aufgetragen ist die mathematische Funktion $I_\alpha/I_0 = \sin^2 x/x^2$ mit $x = (\pi b/\lambda)\sin\alpha$. Die Funktion hat Nullstellen (physikalisch: Dunkelheit) für $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ und so fort. Daraus folgt, dass sich die Teilwellen völlig auslöschen in den Richtungen mit den Winkeln α_m, die gegeben sind durch die Beziehung

$$\sin\alpha_m = \pm m\frac{\lambda}{b} \qquad (6.114)$$

mit der Ordnungszahl $m = 1, 2, 3, \ldots$ Es ist bemerkenswert, dass immer dann Dunkelheit herrscht, wenn die Wellen, die von den Rändern des Spalts ausgehen, einen Gangunterschied von einem Vielfachen der Wellenlänge aufweisen.

Außer dem zentralen Hauptmaximum nullter Ordnung gibt es Nebenmaxima höherer Ordnung, die näherungsweise in der Mitte zwischen den Nullstellen liegen. Für die Lage der Nebenmaxima gilt

$$\sin\alpha_m \approx \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{b} \qquad (6.115)$$

mit $m = 1, 2, 3, \ldots$

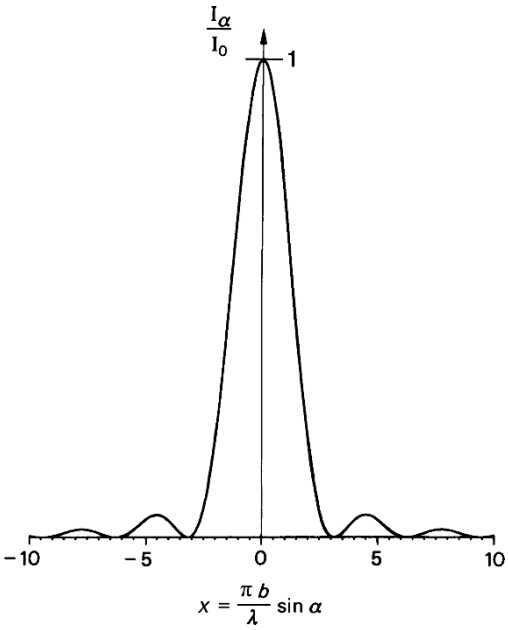


Abb. 6.87 Intensitätsverteilung bei der Beugung am Spalt

Beispiel

6.4-3 Ein Spalt wird mit monochromatischem Licht eines HeNe-Lasers ($\lambda = 633$ nm) beleuchtet. Man betrachtet das Beugungsbild auf einer $l = 8$ m entfernten Wand. Der Abstand zwischen den beiden Minima erster Ordnung beträgt $s = 30$ cm. Wie groß ist die Spaltbreite b?

Lösung

Nach (6.114) gilt für die Winkel des ersten Minimums $\sin\alpha_1 = \pm\lambda/b$. Der Abstand der beiden Minima ist deshalb

$$s = 2l\tan\alpha_1 \approx 2l\sin\alpha_1 = 2l\,(\lambda/b)\,.$$

Die Spaltbreite beträgt

$$b = \frac{2l\lambda}{s} = \frac{2\cdot 8\,\text{m}\cdot 633\,\text{nm}}{0{,}3\,\text{m}} = 33{,}8\,\mu\text{m}\,.$$

Bei der bisherigen Betrachtung war der Spalt in einer Richtung unendlich ausgedehnt. Begrenzt man den Spalt auch in der Höhe, so findet auch in dieser Richtung Beugung statt; hier sind die Winkel, unter denen dunkle Streifen auftreten, wieder durch (6.114) gegeben.

Ein praktisch wichtiger Fall ist die Beugung an einer *Lochblende* mit dem Durchmesser d. Aus Symmetriegründen ist klar, dass das Beugungsbild rotationssymmetrisch sein muss. Abbildung 6.88 zeigt ein Beugungsbild hinter einer Lochblende. Das zentrale *Airy'sche Beugungsscheibchen*, in das etwa 84% der gesamten durch das Loch gehenden Enerie fällt, ist von dunklen und hellen Ringen umgeben. Die mathematische Berechnung der Intensitätsverteilung führt auf *Bessel-Funktionen* und

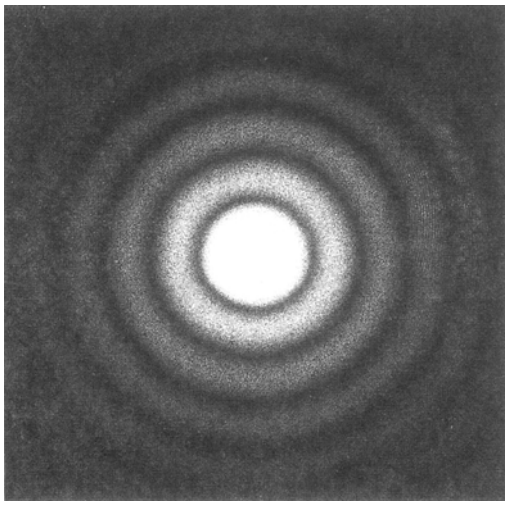


Abb. 6.88 Beugungsbild hinter einer Lochblende

wurde erstmals 1835 von G. B. Airy (1801 bis 1892) gelöst. Die Funktion

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2 \quad \text{mit} \quad x = \pi\frac{d}{\lambda}\sin\alpha \,. \tag{6.116}$$

beschreibt den normierten Intensitätsverlauf in Abhängigkeit vom Winkel α. $J_1(x)$ ist die Bessel-Funktion 1. Ordnung, d der Durchmesser der Blende. Der Winkel, unter dem der erste dunkle Ring auftritt, ist gegeben durch

$$\sin\alpha_1 = 1{,}22\frac{\lambda}{d} \,. \tag{6.117}$$

Weitere Minima treten auf für $\sin\alpha_2 = 2{,}232(\lambda/d)$, $\sin\alpha_3 = 3{,}238(\lambda/d)$ und so fort.
Vertauscht man in Abb. 6.83c den Spalt mit einem Draht gleicher Dicke, so stellt man fest, dass außerhalb der geometrisch optischen Abbildung die gleiche Beugungsfigur auftritt wie beim Spalt. Abbildung 6.89 zeigt das Beugungsbild eines Drahtes. (Für die Aufnahme wurde das Zentralbild wegen seiner großen

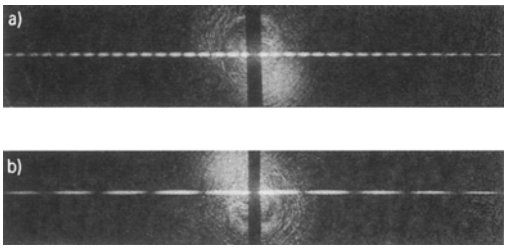


Abb. 6.89 Beugungsbild eines Drahtes: **a**) Durchmesser 0,2 mm, **b**) Durchmesser 0,05 mm

Helligkeit ausgeblendet; die Beugungsfiguren sind in der Senkrechten begrenzt, weil der Laser, mit dem der Draht beleuchtet wurde, ein Lichtbündel von nur wenigen Millimetern Durchmesser aussendet.) Die Tatsache, dass komplementäre Hindernisse (z. B. Spalt und Draht) dieselbe Beugungsfigur liefern, wurde von J. Babinet (1794 bis 1872) entdeckt und wird als *Babinet'sches Theorem* bezeichnet.

Zur Übung

Ü 6.4-6 Die in Abb. 6.88 gezeigte Beugungsfigur entstand durch Beleuchtung einer Lochblende mit einem HeNe-Laser mit $\lambda = 633$ nm. Der Schirm, auf dem das Bild entstand, war $s = 1{,}45$ m von der Lochblende entfernt, der Durchmesser des dritten schwarzen Rings war $d_3 = 30$ mm. Welchen Durchmesser d hat die Lochblende?

Ü 6.4-7 Wie groß ist das Intensitätsverhältnis der Nebenmaxima zum Hauptmaximum bei der Beugung am Spalt? Bestimmen Sie mithilfe eines Rechners die Zahlenwerte für die ersten drei Minima.

Ü 6.4-8 Stellen Sie ein Programm auf zur Berechnung der Halbwertsbreite der Beugungsfigur von Abb. 6.87. Wie groß ist der Winkel $\alpha_{1/2}$, für den die Intensität auf $I_0/2$ zurückgeht?

6.4.1.5 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Alle optischen Instrumente, wie z. B. Fernrohr, Mikroskop und auch das menschliche Auge, haben ein begrenztes Auflösungsvermögen. Dies bedeutet, dass sehr eng benachbarte

Punkte eines Objektes nicht mehr getrennt abgebildet werden. Ursache für das endliche Auflösungsvermögen ist die Beugung des Lichts beispielsweise an Blenden oder Linsenfassungen. Betrachtet man etwa mit einem Fernrohr einen Fixstern, dann wird nach den Gesetzen der geometrischen Optik als Bild ein Lichtpunkt erwartet. Tatsächlich erhält man aber infolge der Beugung an der Objektivöffnung ein *Airy'sches Beugungsscheibchen* mit endlichem Durchmesser, umgeben von schwächeren Ringen (Abb. 6.88). Wenn man zwei benachbarte Fixsterne betrachtet, erhält man zwei Beugungsscheibchen, die selbstverständlich nur dann getrennt wahrgenommen werden, wenn sie einen bestimmten Mindestabstand voneinander haben. Ist der Abstand der beiden Beugungsscheibchen zu klein, dann verschwimmen beide zu einem hellen Fleck, und dies bedeutet, dass die beiden Sterne dem Beobachter wie ein Stern erscheinen.

Die Frage, welchen Abstand die Beugungsscheibchen für eine sichere Auflösung haben müssen, ist nicht eindeutig zu beantworten. Häufig wird das *Rayleigh'sche Kriterium* zugrunde gelegt. Nach Lord Rayleigh (1842 bis 1919) sind zwei Objekte dann sicher zu trennen, wenn das Maximum nullter Ordnung der Beugungsfigur des ersten Objekts und das erste Minimum des zweiten Objekts aufeinander fallen. Dieser Zustand ist in Abb. 6.90 dargestellt. Die ausgezogene Gesamtintensität als Summe der beiden gestrichelten Beugungsfiguren zeigt eine deutliche Einsattelung. Mithilfe von (6.117) folgt, dass zwei Objektpunkte, die unter dem Winkel δ erscheinen, dann aufgelöst werden, wenn die Beziehung

$$\delta \geqq 1{,}22\frac{\lambda}{d} \qquad (6.118)$$

erfüllt ist. Hier ist d der Objektiv- bzw. Blendendurchmesser. Da es sich stets um kleine Winkel handelt, ist der Sinus durch den Winkel selbst im Bogenmaß ersetzt. Aus (6.118) folgt:

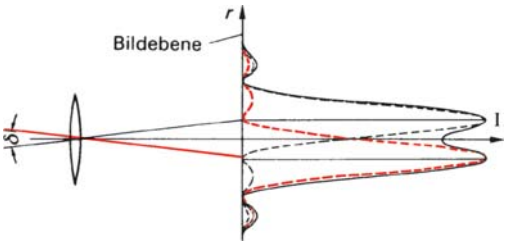


Abb. 6.90 Intensitätsverteilung der Beugungsbilder zweier punktförmiger Objekte in der Bildebene einer Linse

> Das Auflösungsvermögen eines optischen Instruments ist umso besser, je größer der Objektivdurchmesser und je kleiner die Wellenlänge des Lichtes ist.

Das Auflösungsvermögen großer astronomischer Spiegelteleskope ist nicht beugungsbegrenzt, sondern durch atmosphärische Störungen eingeschränkt. Diese werden vermieden bei Teleskopen, die im Weltraum stationiert sind.

Beispiel

6.4-4 Welche Auflösung hat das seit 1990 im Weltraum stationierte *Hubble-Teleskop* mit einem Spiegeldurchmesser von $d = 2{,}4$ m?

Lösung

Für die Wellenlänge $\lambda = 550$ nm folgt aus (6.118) für den Grenzwinkel

$$\delta = 2{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0{,}058'' \,.$$

Gleichung (6.118) gibt auch das Auflösungsvermögen des Auges an. Der Grenzwinkel des Auflösungsvermögens infolge der Beugung an der Pupille stimmt etwa überein mit dem *physiologischen Grenzwinkel* von einer Winkelminute (Abschn. 6.2.7.1).

Beim Mikroskop gelten dieselben vorgenannten Überlegungen. Der Grenzwinkel

nach (6.118) lässt sich umrechnen in einen Mindestabstand y, den zwei Objektpunkte haben müssen, damit sie getrennt werden:

$$y \geqq 0{,}61 \frac{\lambda}{A_\mathrm{N}} \,. \qquad (6.119)$$

Hierbei ist $A_\mathrm{N} = n \sin\sigma$ die numerische Apertur des Objektivs; σ ist der halbe Öffnungswinkel, unter dem das Objektiv vom Objekt aus erscheint, n ist der Brechungsindex des Mediums, das sich zwischen Objekt und Objektiv befindet. Gleichung (6.119) setzt voraus, dass man selbstleuchtende Objekte betrachtet. Ein Objekt das von einer Lampe beleuchtet wird und das Licht diffus ins Objektiv streut, kann wie ein Selbstleuchter angesehen werden. Beleuchtet man ein Objekt mit kohärentem Licht, dann können an feinen Strukturen der Objektoberfläche Beugungserscheinungen auftreten, die das Auflösungsvermögen bestimmen. *Abbe* zeigte, dass in diesem Fall das Auflösungsvermögen gemäß $y = \lambda/A_\mathrm{N}$ berechnet wird. Dieser Ausdruck stimmt bis auf den Faktor 0,61 mit (6.119) überein (Abschn. 6.6).
Aus den vorgenannten Überlegungen folgt:

Mit einem Mikroskop sind Objektstrukturen in der Größenordnung der Lichtwellenlänge auflösbar.

Beispiel

6.4-5 Welchen kleinsten Abstand zweier Objektpunkte kann man mit einem Lichtmikroskop noch auflösen?

Lösung

Mikroskope mit Ölimmersion haben eine maximale numerische Apertur von etwa $A_\mathrm{N} = 1{,}4$. Nach (6.119) gilt dann $y \geqq 0{,}44\lambda$. Dies bedeutet also praktisch, dass zwei Teilchen dann getrennt werden, wenn ihr Abstand eine halbe Wellenlänge beträgt. Beleuchtet man das Objekt mit blauem Licht der Wellenlänge $\lambda = 450$ nm, dann ist $y \geqq 200$ nm.

Zur Übung

Ü 6.4-9 Welchen Grenzwinkel können zwei Objektpunkte haben, damit sie mit dem Auge aufgelöst werden? Der Pupillendurchmesser sei $d = 2$ mm. Der Glaskörper des Auges hat den Brechungsindex $n = 1{,}34$. Die Berechnung soll für grünes Licht der Wellenlänge $\lambda = 550$ nm durchgeführt werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem physiologischen Grenzwinkel.

Ü 6.4-10 Ab welcher Größe kann man Objekte auf dem Mond mit dem bloßen Auge unterscheiden, wenn die Augenpupille $d = 4$ mm Durchmesser hat?

Ü 6.4-11 Ein Wanderer betrachtet eine $s = 15$ km weit entfernte Burg. An einer Burgwand befindet sich eine Fensterfront mit Fenstern im Abstand $y = 1$ m. a) Kann er mithilfe eines Fernrohres 8×30 die Fensterreihe auflösen? b) Welches Auflösungsvermögen hat sein Auge bei einer Pupillengröße von $d = 1{,}5$ mm?

6.4.1.6 Beugung am Gitter

Mehrere Spalte, die nach dem Muster gemäß Abb. 6.91 in regelmäßigen Abständen angeordnet sind, bezeichnet man als Beugungsgitter. Ein solches Gitter kann z. B. so hergestellt werden, dass in eine durchsichtige Glasplatte Striche eingeritzt werden, die lichtundurchlässig sind. Die Breite eines Spaltes sei b, der Abstand zweier Spalte ist die *Gitterkonstante* g. Senkrecht zur Zeichenebene seien die Spalte unbegrenzt. Bei Fraunhofer'scher Beobachtung fällt von links her ein paralleles Lichtbündel (ebene Wellen) auf das Gitter. Beobachtet wird die in Richtung des Winkels α abgebeugte Intensität I_α in unendlich großer Entfernung (Abb. 6.83b).
Zur Berechnung der abgebeugten Intensität I_α bei insgesamt p Spalten werden entsprechend Abb. 6.85 die Feldstärken von p interferierenden Wellen addiert.

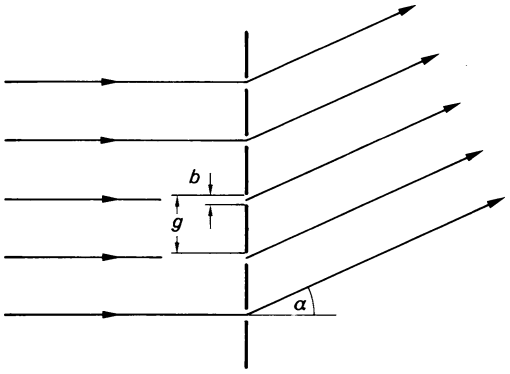


Abb. 6.91 Beugung am Gitter

Zwei benachbarte Wellen haben den Gangunterschied $\Delta = g\sin\alpha$; die Phasenwinkel unterscheiden sich um $\varphi = (2\pi/\lambda)g\sin\alpha$.
Die Addition der p Wellen ergibt eine resultierende Feldstärke

$$\hat{E}_\alpha = \frac{\hat{E}_0}{p}\,\frac{\sin\frac{p\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\hat{E}_0}{p}\,\frac{\sin\left(p\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}\,.$$

Für die Intensität erhält man

$$I_\alpha = \frac{I_0}{p^2}\,\frac{\sin^2\left(p\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}\,.$$

Die Intensitätsverteilung infolge der Beugung an jedem einzelnen Spalt wird durch (6.113) berücksichtigt.
Die gesamte Gitterbeugungsfunktion lautet

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)^2}\,0 \cdot \frac{\sin^2\left(p\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}{p^2\sin^2\left(\frac{\pi g}{\lambda}\sin\alpha\right)}\,. \qquad (6.120)$$

Die Gitterbeugungsfunktion ist ein Produkt aus zwei Faktoren; hierbei beschreibt der erste Faktor I_1 die Beugungsfunktion des Einzelspaltes, der zweite Faktor I_2 die *Interferenzfunktion* des Gitters.
Zunächst sei der historisch bedeutsame Fall des *Doppelspalts* ($p = 2$) angeführt. Mithilfe eines Doppelspalts wurde 1802 von *Young* erstmals ein Interferenzversuch mit Licht erfolgreich durchgeführt und die Wellennatur des Lichtes bewiesen. Young bestimmte damit als erster die Wellenlänge des Lichtes. Abbildung 6.92 zeigt die Intensitätsverteilung bei der Beugung am Doppelspalt. Man sieht deutlich die langsam variierende Einhüllende der Spaltfunktion, die die rasch variierende Interferenzfunktion moduliert.

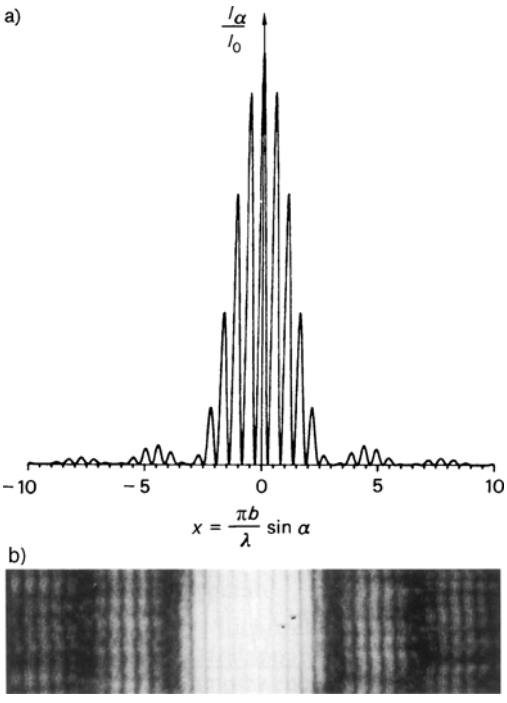


Abb. 6.92 Beugung am Doppelspalt; Spaltbreite $b = 106\,\mu m$, Spaltabstand $g = 609\,\mu m$ **a)** theoretische Intensitätsverteilung, **b)** Fotografie des Beugungsbildes

Für die allgemeine Untersuchung des Auftretens von Maxima und Minima wird zunächst die Interferenzfunktion

$$I_2 = \frac{\sin^2(p\,z)}{p^2 \sin^2(z)} \quad \text{mit} \quad z = \frac{\pi g}{\lambda} \sin\alpha$$

betrachtet. Wie Abb. 6.93 zeigt, hat diese Funktion Hauptmaxima bei den Stellen $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$ Hauptmaxima treten also auf unter den Winkeln α_m, die die Gleichung

$$\sin\alpha_m = \pm m \frac{\lambda}{g} \tag{6.121}$$

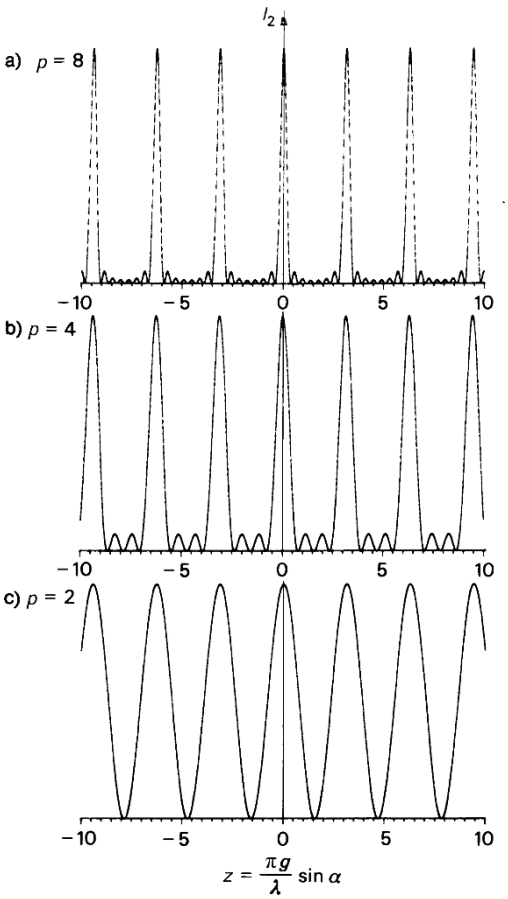


Abb. 6.93 Interferenzfunktion bei $p = 2$, 4 und 8 Spalten

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllen. Bei diesen Winkeln beträgt der Gangunterschied benachbarter Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Das Ergebnis stimmt mit (5.209) und (6.105) überein, die die konstruktive Interferenz beim Doppelspalt beschreiben.

Zwischen den Hauptmaxima liegen $p - 2$ Nebenmaxima, deren Höhen im Vergleich zu den Hauptmaxima mit steigender Strichzahl p immer schwächer werden. Bei den üblicherweise verwendeten großen Linienzahlen der optischen Gitter ist die Intensität der Nebenmaxima praktisch vernachlässigbar. Die Hauptmaxima werden mit steigender Strichanzahl p immer schärfer. Die zunehmende Schärfe der Linien mit steigender Strichanzahl ist typisch für die *Vielstrahlinterferenz*. Je mehr Teilwellen an der Interferenz beteiligt sind, umso schärfer werden die Bedingungen für konstruktive Interferenz. Typische Gitter kommerzieller Spektrometer haben 1000 und mehr Striche pro mm. Bei einer Breite von 50…100 mm kann man also mit $p \approx 100\,000$ Spalten rechnen.

Die gesamte theoretische Beugungsfunktion (6.120) ist in Abb. 6.94 für den Fall $p = 40$ und $g = 10\,b$ dargestellt. Die Winkel der Hauptmaxima entsprechen (6.121). Ihre Intensität nimmt nach außen geringfügig ab. Alle Linien befinden sich noch im Hauptmaximum der Spaltfunktion. Abbildung 6.95 zeigt Fotos der Beugungsbilder, die in großem Abstand hinter zwei verschiedenen Gittern entstanden. In Abb. 6.95b erkennt man besonders deutlich die abnehmende Intensität mit zunehmender Ordnungszahl der Beugungsmaxima.

Der Abstand der Maxima vergrößert sich, wenn das Gitter gedreht wird. Das einfallende Licht trifft dann nicht mehr senkrecht auf das Gitter, sondern nach Abb. 6.96 unter dem Einfallswinkel β. Wie man sich leicht klar macht, beträgt der Gangunterschied zwischen zwei interferierenden Wellen $\Delta = g(\sin\alpha - \sin\beta)$.

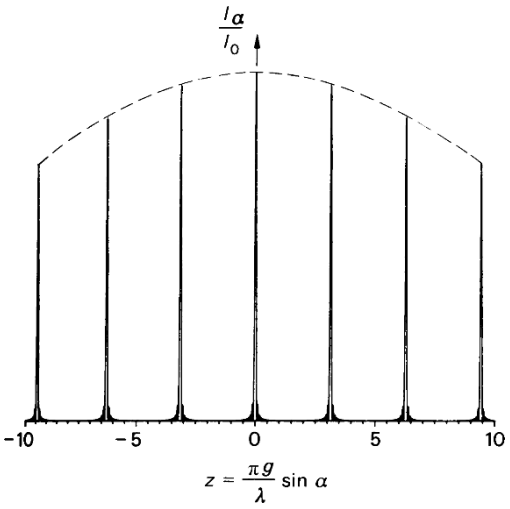


Abb. 6.94 Beugungsfunktion eines Gitters mit $p = 40$ Spalten

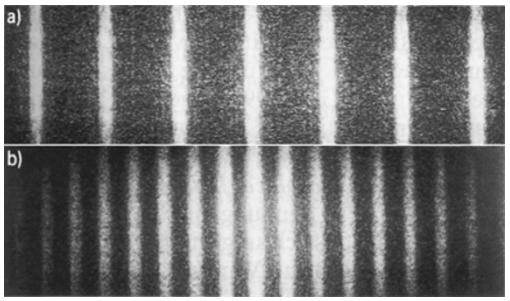


Abb. 6.95 Beugungsbild eines Strichgitters mit dem Spaltabstand $g = 0{,}04$ mm (**a**) und $g = 0{,}1$ mm (**b**)

Beugungsmaxima treten auf unter den Winkeln α_m, die der Beziehung

$$g\,(\sin\alpha_m - \sin\beta) = \pm m\lambda \qquad (6.122)$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$ genügen.
Die vorstehenden Betrachtungen zur Beugung am Gitter zeigen, dass die Richtungen, unter denen Beugungsmaxima auftreten, von der Wellenlänge des Lichtes abhängen. Man kann daher mithilfe von Gittern sehr präzise Wellenlängenmessungen vornehmen. Dieser Aspekt ist in Abschn. 6.4.1.7 ausführlich erläutert.

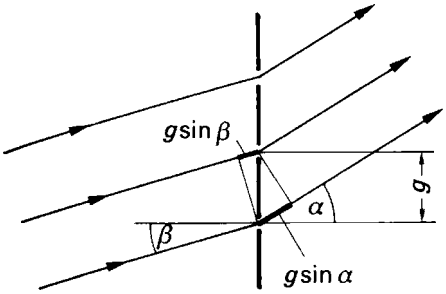


Abb. 6.96 Beugungsgitter bei schiefer Durchstrahlung

Wird ein Objekt unter dem Mikroskop beleuchtet, dann können an feinen Strukturen Beugungserscheinungen ähnlich jenen beim Gitter auftreten. *Abbe* konnte zeigen, dass ein Bild der betrachteten Struktur nur dann beobachtet werden kann, wenn außer dem Strahl nullter Ordnung mindestens auch die Beugungsmaxima erster Ordnung ins Objektiv eintreten können. Die Details werden umso deutlicher, je mehr Beugungsmaxima vom Objektiv aufgenommen werden. Aufgrund dieser Tatsache gelangte *Abbe* zu einer Beziehung für das *Auflösungsvermögen eines Mikroskops*, die nahezu identisch ist mit (6.119) des vorstehenden Abschnitts. Nach *Abbe* sind zwei Objektpunkte dann auflösbar, wenn ihr Abstand y die Beziehung

$$y \geqq \frac{\lambda}{A_\mathrm{N}} \qquad (6.123)$$

erfüllt; A_N ist die numerische Apertur des Objektivs (Abschn. 6.6.1).

Zur Übung

Ü 6.4-12 Bei einem Gitter ist die Gitterkonstante doppelt so groß wie die Spaltbreite: $g = 2\,b$. Welche Beugungsordnungen m werden im Beugungsbild beobachtet?

Ü 6.4-13 Welche Beugungsordnungen treten auf, wenn ein Gitter mit 1200 Strichen/mm mit grünem Licht der Wellenlänge $\lambda = 550$ nm durchstrahlt wird?

Ü 6.4-14 Ein Strichgitter mit 1000 Strichen/mm wird mit gelbem Natriumlicht der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm durchstrahlt. a) Unter welchem Winkel α_1 zur Gitternormalen liegen die Beugungsmaxima erster Ordnung? b) Das Gitter wird um $\beta = 10°$ gedreht. Welche Winkel α_1 ergeben sich jetzt für die erste Ordnung?

6.4.1.7 Spektralapparate

Zur Messung von Lichtwellenlängen wurden verschiedene Spektralapparate entwickelt, die je nach Verwendungszweck etwas anders gebaut sind. In Tabelle 6.10 sind einige Geräte angeführt. Das Herz aller Spektralapparate ist entweder ein Prisma oder ein Gitter, mit deren Hilfe das Spektrum der verschiedenen Lichtwellenlängen räumlich auseinandergezogen wird.

Tabelle 6.10 Spektralapparate

Spektroskop	Beobachtung eines Spektrums mit dem Auge. Häufig als Taschenінstrument in der analytischen Chemie eingesetzt.
Spektrograph	Komplettes Spektrum wird auf Fotoplatte registriert. Vergleich mit Eichspektrum bekannter Spektrallinien liefert die Wellenlänge. Schwärzung ist Maß für die Lichtintensität.
Spektrometer	Wellenlängenbestimmung einzelner Spektrallinien anhand einer geeichten Wellenlängenskala über Winkelmessung.
Monochromator	Ausblenden eines schmalbandigen Wellenlängenbereichs aus einem angebotenen Spektrum.
Spektralfotometer	Kombination von Monochromator und fotoelektrischem Empfänger (*Fotomultiplier*) zur Bestimmung spektraler Stoffdaten, wie z. B. Absorptionsgrad und Transmissionsgrad.

Abbildung 6.97 zeigt den schematischen Aufbau eines Spektrometers bzw. Monochromators nach *Czerny-Turner*. Das durch den Eintrittsspalt E eintretende Licht wird mithilfe des Hohlspiegels S_1 als paralleles Lichtbündel auf das Reflexionsgitter G geworfen. Das abgebeugte Lichtbündel wird durch den Hohlspiegel S_2 auf den Austrittsspalt A fokussiert. Welche Wellenlänge durchgelassen wird, hängt von der Winkelstellung des Gitters ab. Das Gitter wird mit einem geeigneten Getriebe langsam gedreht, sodass die durchgelassene Wellenlänge proportional zur Zeit t anwächst. Stellt man hinter den Austrittsspalt eine Fotodiode mit nachgeschaltetem Verstärker, dann kann auf einem x, t-Schreiber ein Spektrum aufgezeichnet werden. Auf diese Weise entstand z. B. das Spektrum der LED von Abb. 6.68.

Reflexionsgitter moderner Spektrometer sind fast immer als *Echelette-Gitter* (frz. *echelette: kleiner Maßstab)* ausgeführt. In eine Glasoberfläche wird mit einem Diamanten ein sägezahnähnliches Profil eingeritzt, wie es in Abb. 6.98 gezeigt ist. (Bei den *holografischen Gittern* wird das Profil auf fotochemischem Weg geätzt.) Beim Einfallswinkel β ist der Beugungswinkel α_m für die m-te Ordnung wieder durch (6.122) gegeben. Will man nun in eine bestimmte Ordnung m besonders viel Licht be-

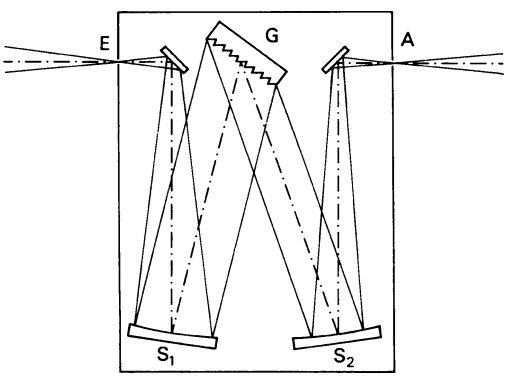


Abb. 6.97 Gittermonochromator, schematisch

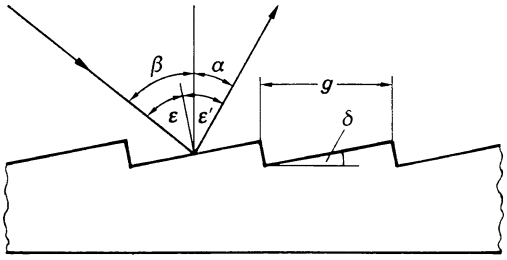


Abb. 6.98 Echelette-Gitter

kommen, dann muss der *Blaze-Winkel* δ (engl. *to blaze: flammen*) so gewählt werden, dass die Beugungsrichtung der natürlichen Reflexionsrichtung entspricht. Dies ist der Fall für den Blaze-Winkel

$$\delta = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \,. \tag{6.124}$$

Während bei einem normalen Transmissionsgitter das gebeugte Licht in viele Ordnungen mehr oder weniger gleichmäßig verteilt wird (Abb. 6.95), kann bei einem Echelette-Gitter praktisch das gesamte gebeugte Licht in eine bestimmte Beugungsordnung gelenkt werden. Das spektrale Auflösungsvermögen eines Spektralapparats hängt von seinem Gitter, der verwendeten Beugungsordnung und der Spaltbreite ab. Im Folgenden wird das Auflösungsvermögen eines Gitters ermittelt. Abbildung 6.99 zeigt eine vereinfachte Darstellung der Beugungsfunktion, wie sie z. B. an der rechten Wand des Monochromators von Abb. 6.97 entsteht. Die Hauptmaxima von zwei dicht benachbarten Wellenlängen λ und $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ werden in der m-ten Ordnung dann getrennt, wenn das Intensitätsmaximum von $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ auf das erste Minimum von λ fällt (Rayleigh'sches Kriterium). Da der Raum zwischen zwei Hauptmaxima von $p-1$ Minima durchsetzt ist, muss gelten

$$m(\lambda + \mathrm{d}\lambda) - m\,\lambda = \frac{(m+1)\lambda - m\lambda}{p} \,.$$

Hieraus folgt sofort für das Auflösungsvermögen eines Gitters

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = m\,p \,. \tag{6.125}$$

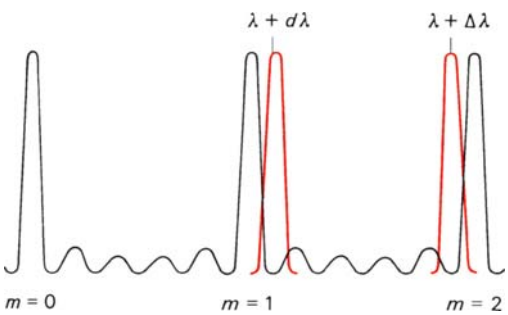


Abb. 6.99 Zum Auflösungsvermögen eines Gitters. Die Beugungsfunktion für die Wellenlänge λ ist schwarz

Das Auflösungsvermögen ist also umso größer, je mehr Striche das Gitter hat und je höher die Beugungsordnung ist, mit der man arbeitet.
Wie Abb. 6.99 zeigt, ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$ beschränkt. Wird $\Delta\lambda$ zu groß, dann verschmilzt z. B. die Linie $\lambda + \Delta\lambda$ erster Ordnung mit der Linie λ zweiter Ordnung. Auf dieselbe Weise wie oben macht man sich klar, dass der nutzbare Wellenlängenbereich – das ist der Bereich, in dem das Gitterspektrometer eine eindeutige Wellenlängenmessung erlaubt – beschränkt ist auf

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \,. \tag{6.126}$$

Beispiel

6.4-6 Mit einem Gitter mit der Strichanzahl $p = 120\,000$ bei 1200 Strichen/mm sollen die beiden Natrium-D-Linien getrennt werden. Ist dies möglich? Wie groß ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$? Die Wellenlängen betragen $\lambda_1 = 589{,}5930$ nm und $\lambda_2 = 588{,}9963$ nm.

Lösung

Mit dem genannten Gitter kann nur in der ersten Ordnung gemessen werden, da für $m > 1$ nach (6.121) der Sinus des Beugungswinkels größer als 1 wäre. Das Auflösungsvermögen beträgt somit $\lambda/\mathrm{d}\lambda = 1{,}2 \cdot 10^5$. Erforderlich ist zur Trennung der D-Linien

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{589\ \mathrm{nm}}{0{,}5967\ \mathrm{nm}} = 987\ .$$

Das genannte Gitter kann also mehr als hundert mal feinere Wellenlängendifferenzen auflösen. Der nutzbare Wellenlängenbereich ist $\Delta\lambda = \lambda = 589$ nm.

Ist ein Spektrum mit einem großen Wellenlängenbereich zu untersuchen, muss eine Vorzerlegung des Spektrum beispielsweise mithilfe eines *Prismenmonochromators* durchgeführt werden, der in Abb. 6.100 schematisch dargestellt ist. Die Trennung benachbarter Wellenlängen (ausgezogene und gestrichelte Strahlen) hängt ab von der Basislänge B des Prismas sowie von der Dispersion $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ des Glases. Das Auflösungsvermögen eines Prismas beträgt (ohne Beweisführung an dieser Stelle)

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = B\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| . \qquad (6.127)$$

Im Allgemeinen haben Gitterspektrometer ein höheres Auflösungsvermögen als Prismenspektrometer. Letztere haben aber keine Begrenzung im nutzbaren Wellenlängenbereich.

Zur Übung

Ü 6.4-15 Auf ein Echelette-Gitter mit 450 Strichen/mm fällt das Licht eines HeNe-Lasers mit $\lambda = 633$ nm unter dem Einfallswinkel $\beta = 50°$. a) Wie groß ist der Beugungswinkel α_1 für die erste Ordnung? b) Wie groß muss der Blaze-Winkel δ sein, damit maximale Intensität in der ersten Ordnung auftritt?

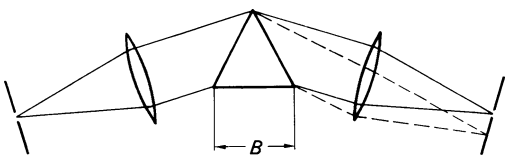


Abb. 6.100 Schema eines Prismenspektrometers

Ü 6.4-16 Die beiden Natrium-D-Linien mit $\lambda_1 = 589{,}5930$ nm und $\lambda_2 = 588{,}9963$ nm sollen mit einem Gitter getrennt werden, das 50 Striche/mm hat. a) Wie breit muss das Gitter mindestens sein, wenn in der ersten Ordnung gemessen werden soll? b) Welches Auflösungsvermögen hat dieses Gitter, wenn es in der dritten Ordnung benutzt wird?

Ü 6.4-17 Welche Basisbreite muss ein Prisma mindestens haben, damit man mit ihm die beiden Na-D-Linien auflösen kann? Das Prisma aus Flintglas F3 hat bei $\lambda = 589$ nm die Dispersion $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda = -8{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{m}^{-1}$.

6.4.1.8 Röntgenbeugung an Kristallgittern

Die Röntgenbeugung an Raumgittern ist von besonderer Wichtigkeit bei der Untersuchung der Kristallstruktur fester Körper. Zur Herleitung der wesentlichen Beziehungen sei als erstes die Beugung einer Lichtwelle an einer linearen Punktreihe nach Abb. 6.101a betrachtet. Parallele Strahlen sollen unter dem *Glanzwinkel* α_0 gegen die x-Achse auf die Punktreihe fallen. Die an den einzelnen Punkten gestreuten Lichtwellen interferieren konstruktiv miteinander, wenn der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Strahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Aus Abb. 6.101a folgt sofort, dass Interferenzmaxima auftreten für die Winkel α gegen die x-Achse, für die gilt

$$a\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = h\lambda \qquad (6.128)$$

mit der Ordnungszahl $h = 0, 1, 2, \ldots$ Diese Gleichung ist physikalisch gleichwertig mit (6.122). Wegen der Symmetrie liegen die Intensitätsmaxima der verschiedenen Ordnungen h auf Kegeln um die x-Achse mit halbem Öffnungswinkel α (Abb. 6.101b). Bei Fraunhofer'scher Betrachtung wird das

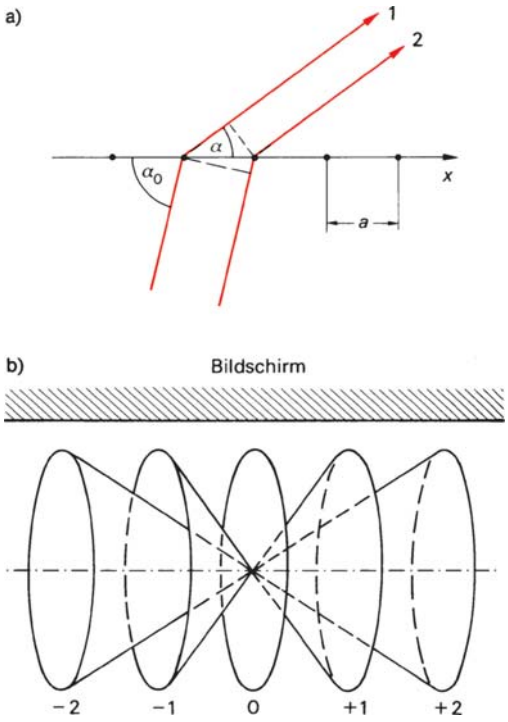


Abb. 6.101 Beugung an einer Punktreihe. **a**) Zur Ableitung der Bedingung für konstruktive Interferenz, **b**) Beugungskegel

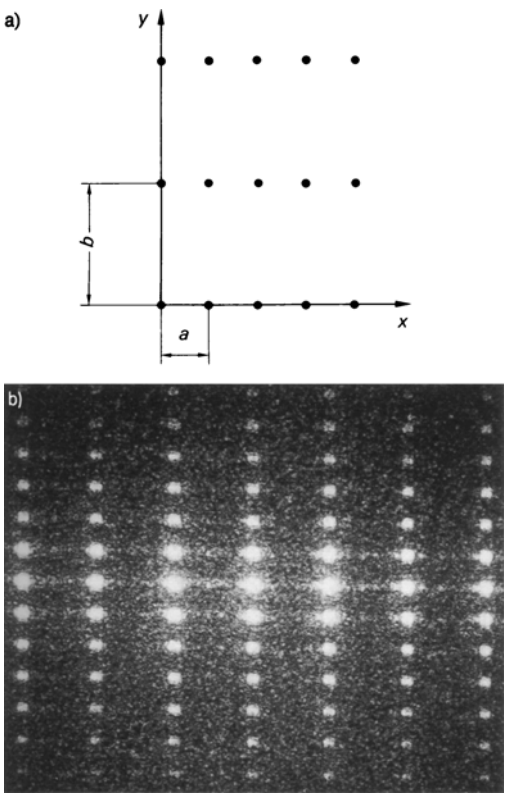


Abb. 6.102 Beugung am Flächengitter: **a**) Punktgitter, **b**) Beugungsbild hinter einem Kreuzgitter mit $a = 0{,}04$ mm, $b = 0{,}1$ mm

gebeugte Licht auf einem Bildschirm in großer Entfernung aufgefangen. Als Schnittkurven der Kegel mit dem Schirm ergibt sich eine Hyperbelschar. Bei kleiner Ordnungszahl h gehen die Interferenzlinien in eine Schar nahezu paralleler Geraden über, sodass man das vom ebenen Gitter her bekannte Interferenzbild erhält (Abb. 6.95).

Die lineare Punktreihe wird nun nach Abb. 6.102a zu einem ebenen Punktgitter erweitert. Lichtstrahlen, die unter den Winkeln α_0 und β_0 relativ zur x- bzw. y-Achse auftreffen, interferieren konstruktiv, wenn die unter den Winkeln α und β gestreuten Strahlen außer (6.128) noch dem Ausdruck

$$b\,(\cos\beta - \cos\beta_0) = k\lambda$$

mit der Ordnungszahl $k = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechen. Das Interferenzmuster, das jetzt auf einem Schirm entsteht, ist ein System von Punkten, die an den Schnittpunkten von zwei gekreuzten Hyperbelscharen liegen. Bei kleinen Ordnungszahlen h und k entsteht ein rechteckiges Punktmuster gemäß dem Foto Abb. 6.102b. Tatsächlich ist dies das Beugungsbild eines Kreuzgitters (zwei gekreuzte Strichgitter). Nach dem *Theorem von Babinet* ergibt sich dabei aber dasselbe Interferenzmuster (Abschn. 6.4.1.4).

Aus dem Flächengitter nach Abb. 6.102a wird ein Raumgitter, wenn gleichartige Flächengitter in der dritten Dimension übereinander gestapelt werden. Der Abstand gleichartiger

Netzebenen in der z-Richtung sei c. Lichtstrahlen sollen unter den Winkeln α_0, β_0 und γ_0 gegen die x-, y- bzw. z-Achse auftreffen. Interferenzmaxima werden beobachtet unter den Winkeln α, β und γ gegen die Achsen, die dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= h\lambda\,, \\ b\,(\cos\beta - \cos\beta_0) &= k\lambda\,, \\ c\,(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= l\lambda \end{aligned} \qquad (6.129)$$

mit ganzzahligen Ordnungszahlen h, k, l entsprechen. Für eine beliebige, aber feste Wellenlänge sind diese *Laue-Gleichungen* im Allgemeinen nicht zu erfüllen. Bestrahlt man das Raumgitter aber mit weißem Licht, dann können mit verschiedenen Wellenlängen die Laue-Gleichungen für einige Winkel α, β und γ erfüllt werden.

Ideale dreidimensionale Gitter sind die *Kristallgitter* der Festkörper. Nach einem Vorschlag von M. v. Laue (1879 bis 1960) zeigten *Friedrich* und *Knipping* 1912, dass Beugung von Röntgenstrahlung an Kristallgittern möglich ist. (Sichtbares Licht wird an Kristallen nicht gebeugt, weil die Wellenlänge viel zu groß ist im Vergleich zur Gitterkonstanten.) Zur Herstellung einer Laue-Aufnahme wird auf einen Kristall „weiße" Röntgenstrahlung gerichtet. Eine Fotoplatte, die hinter dem Kristall angebracht ist, wird an den Stellen geschwärzt, an denen Beugungsmaxima auftreffen. Abbildung 6.103 zeigt ein solches *Laue-Diagramm*. Das Punktmuster spiegelt die Symmetrie des Kristallgitters in Bezug auf die Durchstrahlungsrichtung wider. Mit Hilfe von Laue-Aufnahmen werden Kristalle orientiert, wenn sie z. B. in bestimmten Richtungen geschnitten werden sollen.

Historisch ist die Laue-Beugung deshalb so bedeutend, weil damit zugleich die Wellennatur der Röntgenstrahlen sowie die Raumgitterstruktur der Kristalle bewiesen werden konnten.

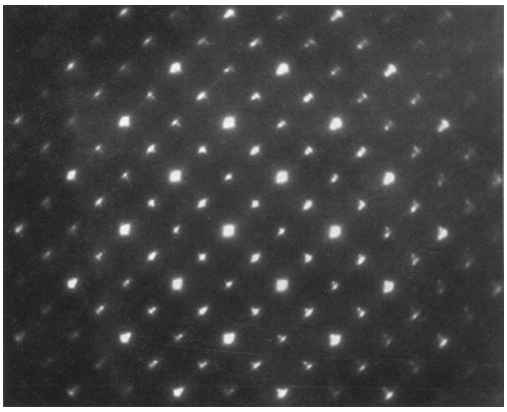


Abb. 6.103 Laue-Aufnahme eines Kupfer-Einkristalls in (100)-Orientierung. Die vierzählige Symmetrie des kubisches Kristalls spiegelt sich im Beugungsbild wider. Foto: Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart

Eine einfachere Erklärung der Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallgittern stammt von W. H. Bragg (1862 bis 1942) und Sohn W. L. Bragg(1890 bis 1971). Danach kann die Röntgenbeugung an Kristallen auf die Reflexion von Röntgenstrahlen an den verschiedenen Netzebenen eines Kristalls zurückgeführt werden. Jeder Kristall ist von einer großen Anzahl von Netzebenen durchzogen, auf denen die einzelnen Atome angeordnet sind, wie Abb. 6.104 zeigt. Der Abstand benachbarter Netzebenen ist für verschiedene Netzebenenscharen unterschiedlich. Fällt nach Abb. 6.105 ein paralleles Strahlenbündel auf einen Kristall, dann werden die einzelnen Röntgenstrahlen an verschiedenen Netzebenen reflektiert. Konstruktive Interferenz liegt vor, wenn der Gangunterschied benachbarter reflektierter Strahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge beträgt, d. h., wenn die *Bragg'sche Bedingung*

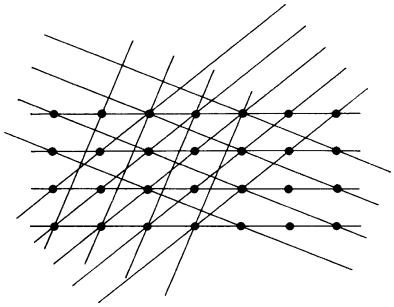


Abb. 6.104 Netzebenen eines Kristalls

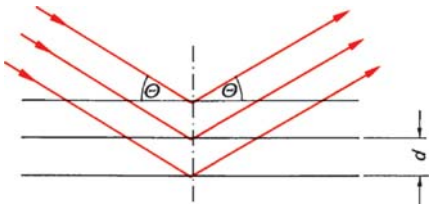


Abb. 6.105 Reflexion von Röntgenstrahlen an einer Netzebenenschar

$$2\,d\sin\Theta = m\lambda \qquad (6.130)$$

mit der Ordnungszahl $m = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllt ist; d ist der Abstand benachbarter Netzebenen, Θ der Glanzwinkel. Die Bragg'sche Bedingung ist den Laue'schen Gleichungen (6.129) äquivalent. Nur wenn weißes Licht auf einen Kristall fällt, können die Reflexe an den verschiedenen Netzebenenscharen zugleich beobachtet werden.

Trifft monochromatische Röntgenstrahlung auf einen Kristall, dann werden nach der Bragg'schen Bedingung Reflexe nur beobachtet, wenn der Glanzwinkel Θ ganz bestimmte Werte annimmt. Beim *Drehkristall-Spektrometer* nach *Bragg* entsprechend Abb. 6.106 fällt Röntgenstrahlung durch einen Spalt S auf einen Einkristall K, der langsam gedreht wird. Ein Röntgendetektor D dreht sich mit doppelter Winkelgeschwindigkeit mit. Registriert der Detektor beim Winkel Θ einen Röntgenreflex, dann kann bei bekanntem Netzebenenabstand d die Wellenlänge der Röntgenstrahlung bestimmt werden.

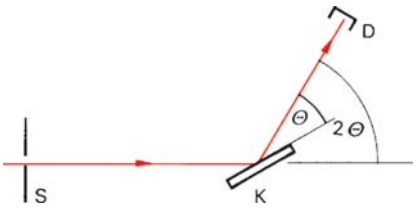


Abb. 6.106 Schema eines Drehkristall-Spektrometers

Beispiel

6.4-7 Die Strahlung einer Röntgenröhre mit Molybdänanode fällt auf einen LiF-Kristall mit $2\,d = 4{,}027 \cdot 10^{-10}$ m. Wie groß ist die Wellenlänge der Röntgenstrahlung, wenn der Reflex erster Ordnung unter dem Glanzwinkel $\Theta = 10{,}15\,^\circ$ auftritt?

Lösung

Nach (6.130) gilt

$$\lambda = 2d\sin\Theta = 4{,}027 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot \sin 10{,}15^\circ$$
$$= 7{,}1 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 71\ \text{pm}\,.$$

Eine für die Praxis sehr wichtige Methode zur Bestimmung von Netzebenenabständen und damit zur Strukturanalyse ist das *Pulververfahren* nach *Debye-Scherrer*. Hierbei werden keine großen Einkristalle benötigt, sondern viele kleine Kristallite. Dazu wird das Material meist pulverisiert und zu einem kleinen Stäbchen gepresst. Fällt ein monochromatischer Röntgenstrahl R nach Abb. 6.107a auf das Stäbchen P, wird die Röntgenstrahlung an den willkürlich orientierten Netzebenen der regellos verteilten Kriställchen gebeugt. Genügend viele Netzebenen schließen mit dem Primärstrahl einen Winkel Θ ein, der die Bragg'sche Bedingung (6.130) befriedigt. Die abgebeugten Röntgenstrahlen liegen auf Kegelmänteln um den Primärstrahl und schwärzen einen Film F, der konzentrisch um das Stäbchen gelegt ist. Aus der Lage der Linien auf dem Film (Abb. 6.107b) lassen sich die Netzebenenabstände und damit die Kristallstruktur bestimmen.

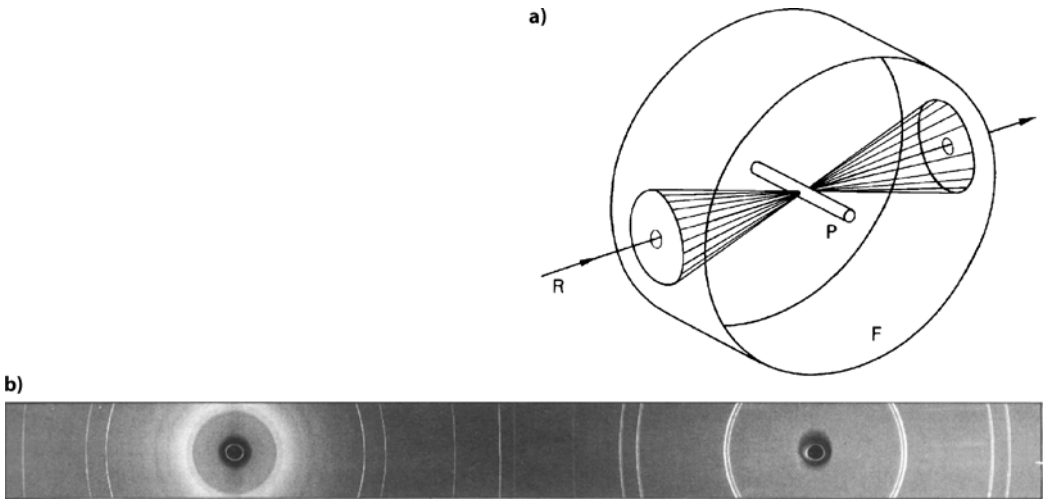


Abb. 6.107 Pulvermethode nach Debye-Scherrer: **a**) Debye-Scherrer-Kamera (schematisch), **b**) Debye-Scherrer-Aufnahme einer Palladium-Silicium-Legierung (fotografisches Positiv). Foto: Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart

Zur Übung

Ü 6.4-18 Ein kubischer Kristall mit $a = b = c = 0{,}3$ nm wird in z-Richtung mit Röntgenstrahlen bestrahlt, a) Welche Wellenlänge muss die Strahlung haben, damit ein $(1, 1, -1)$-Reflex, d. h. $h = k = 1, l = -1$, auftritt? b) In welchen Richtungen sind Beugungsmaxima beobachtbar?

Ü 6.4-19 Der Abstand benachbarter (100)-Netzebenen in NaCl beträgt $d = 0{,}28$ nm. Unter welchen Glanzwinkeln treten die ersten drei Beugungsordnungen auf, wenn Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 7{,}1 \cdot 10^{-11}$ m auf einen Einkristall fällt?

Ü 6.4-20 Der Abstand zwischen (100)-Ebenen des Eisens beträgt $d = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ m. Eisenpulver wird in einer Debye-Scherrer-Kammer mit Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ m bestrahlt. a) Wie groß sind die Winkel zwischen dem Primärstrahl und den gestreuten Strahlen der ersten zwei Beugungsordnungen? b) Welches ist die größte beobachtbare Beugungsordnung?

6.4.1.9 Holografie

Die Holografie ist eine Methode, mit der man räumliche Bilder von Gegenständen erzeugen kann. Der Raumeindruck ist so echt wie bei der Betrachtung des Gegenstands selbst. Steht z. B. im Vordergrund des Bildes ein Hindernis, so kann man durch Bewegen des Kopfes um das Hindernis herum schauen wie beim realen Objekt. Die Holografie wurde von D. Gabor (1900 bis 1979) 1948 entwickelt, ist aber praktisch erst nutzbar, seit mit dem Laser eine intensive kohärente Lichtquelle zur Verfügung steht.

Wird ein Gegenstand mit einer kohärenten Lichtquelle beleuchtet, dann sendet jeder bestrahlte Punkt des Objekts Huygens'sche Elementarwellen aus, deren Gesamtheit die vom Objekt abgestrahlte Welle ergibt. Die Wellenfront dieser Welle enthält alle Informationen über das Objekt, sodass es nach Gabor möglich sein sollte, rückwärts aus der Form der Wellenfront die Form des Objekts zu rekonstruieren. Zum besseren Verständnis diene folgendes Gedankenexperiment: Wirft man eine Handvoll Steine ins Wasser, so hängt die sich ausbreitende Wellenfront von den Amplituden (Größe der Steine) und Phasenlagen (Zeitpunkt des Eintauchens) aller Elementarwellen ab. Ändert sich Amplitude oder Phase auch nur einer Ele-

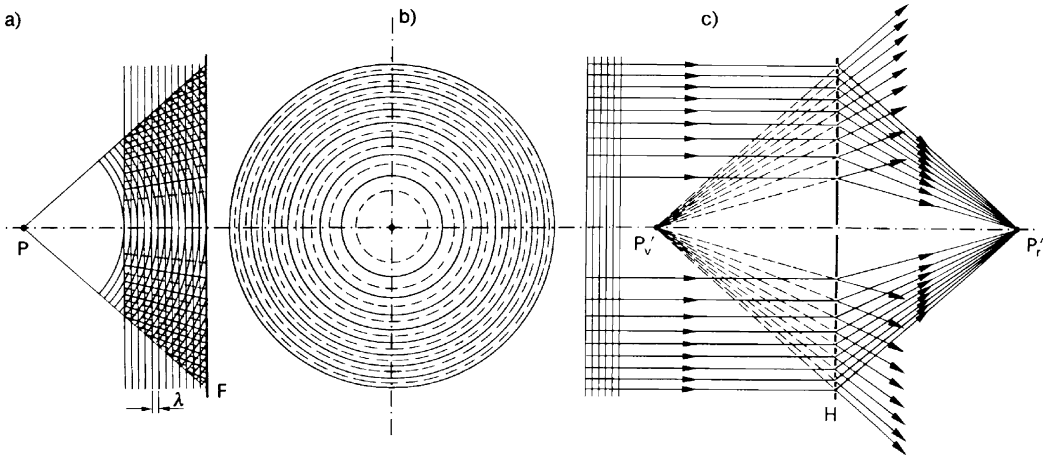


Abb. 6.108 Prinzip der Holografie. **a**) Überlagerung einer Kugelwelle des Punktes P mit einer ebenen Referenzwelle, **b**) Hologramm (Fresnel'sches Zonensystem), **c**) Wiedergabe des Bildes

mentarwelle, dann ändert sich auch die Form der resultierenden Wellenfront.

Bei der gewöhnlichen Fotografie geht der räumliche Eindruck verloren, weil die Schwärzung des Films nur von der Intensität (Amplitudenquadrat) der Lichtwelle abhängt, nicht aber von ihrer Phase. Die Information, die in der Phasenlage steckt, geht verloren. Bei der Holografie wird diese Information dadurch konserviert, dass die Welle, die vom Objekt ausgeht, mit einer sog. *Referenzwelle* zur Interferenz gebracht wird. Das auf einer Fotoplatte registrierte Interferenzmuster enthält dann Informationen über Amplitude und Phase der Wellen.

Das Prinzip sei zunächst anhand von Abb. 6.108 demonstriert. In Abb. 6.108a ist eine kugelförmige Objektwelle, die von einem Objektpunkt P ausgeht, mit einer ebenen Referenzwelle gleicher Wellenlänge zur Interferenz gebracht. Orte gleicher Phase (Verstärkung) der Wellen sind als ausgezogene Linien gezeichnet, Orte mit entgegengesetzter Phase (Auslöschung) sind gestrichelt dargestellt. Ein Film F wird an den Stellen maximaler Amplitude geschwärzt; es entsteht das *Fresnel'sche Zonensystem* gemäß Abb. 6.108b als Interferenzmuster. Zur Wiedergabe des Bildes wird nach Abb. 6.108c das entwickelte *Hologramm* H nur noch mit der Referenzwelle beleuchtet. Das Hologramm wirkt wie ein Strichgitter, an dem die Referenzwelle gebeugt wird. (Die abrupten Übergänge zwischen undurchsichtigen und transparenten Stellen sind in Wirklichkeit stetig.) Ein Teil der gebeugten Strahlen trifft sich im reellen Bildpunkt P_r', der andere Teil divergiert und scheint aus dem virtuellen Bildpunkt P_v' zu kommen. Damit wurde ein Bild des Gegenstands entworfen. Erwähnenswert ist, dass eine *Zonenplatte* parallele Lichtstrahlen bündelt wie eine Sammellinse; man nennt sie deshalb auch *Zonenlinse*.

Bei der Aufnahme eines Hologramms eines ausgedehnten Objekts O wird nach Abb. 6.109a ein Laserstrahl L in zwei Teilstrahlen zerlegt, von denen einer das Objekt beleuchtet, der andere (rot) als Referenzstrahl verwendet wird. Die einzelnen Objektpunkte senden Kugelwellen aus, sodass auf der Fotoplatte F ein kompliziertes Interferenzmuster entsteht. Nach der Entwicklung hat das Hologramm etwa das Aussehen eines Gewirrs von Fingerabdrücken.

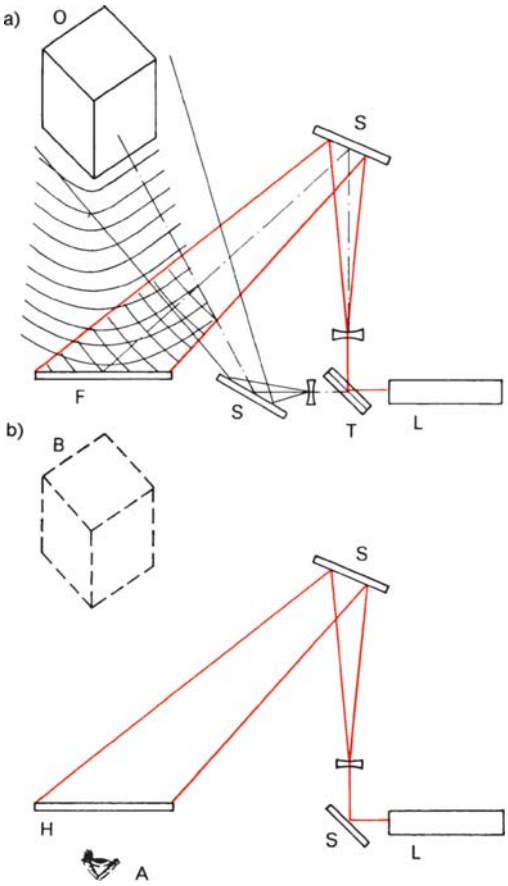


Abb. 6.109 Holografie-Apparatur, schematisch: **a**) Aufnahme, **b**) Wiedergabe

Von der Form des Objekts ist nichts zu erkennen. Zur Bildwiedergabe stellt man das Hologramm H nach Abb. 6.109b an seine alte Stelle und beleuchtet es mit der Referenzwelle. Für das Auge A entsteht dann ein dreidimensionales Bild B an der Stelle, wo vorher das Objekt stand.

Für die Wiedergabe des Bildes ist in der Regel derselbe Laser wie bei der Aufnahme erforderlich. Ein *Weißlichthologramm* kann dagegen auch mit weißem Licht betrachtet werden. Bei der Aufnahme eines Weißlichthologramms fällt die Gegenstandswelle z. B. von

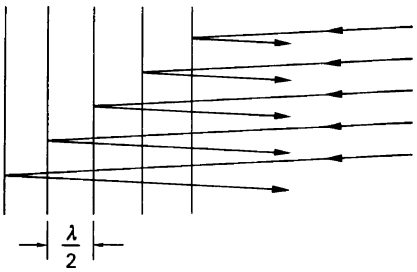


Abb. 6.110 Reflexion von weißem Licht an den Schwärzungsebenen eines Weißlichthologramms

vorn, die Referenzwelle von hinten auf die Fotoplatte. Dadurch bilden sich stehende Wellen aus, die gemäß Abb. 6.110 im Abstand $\lambda/2$ die Fotoplatte schwärzen. Bei dicker Emulsion erhält man damit mehrere praktisch parallel übereinander liegende Hologramme. Die Betrachtung des Hologramms erfolgt in Reflexion. Weißes Licht fällt auf die verschiedenen einzelnen Hologramme und wird an ihnen reflektiert wie an den Netzebenen eines Kristalls. Nach der Bragg'schen Gleichung (6.130) wird nur einfarbiges Licht reflektiert. Je nach Blickrichtung erscheint das Bild in einer anderen Farbe. Verwendet man bei der Aufnahme drei Laser mit den Farben rot, grün und blau, so werden in verschiedenen Tiefen der Emulsion Hologramme für rotes, grünes bzw. blaues Licht erzeugt. Bei Betrachtung dieses *Farbhologramms* mit weißem Licht entsteht durch additive Farbmischung ein farbiges Bild des Gegenstands.

Anwendungen

Einen Überblick über die wichtigsten technischen Anwendungen der Holografie zeigt Tabelle 6.11.

Für die *Speicherung von Informationen* sind Hologramme besonders gut geeignet, weil in jedem Punkt des Hologramms die Information vom ganzen Objekt steckt. Dies bedeutet praktisch, dass selbst ein Teilstück eines zerbrochenen Hologramms bei der Rekonstruk-

Tabelle 6.11 Technische Anwendungen der Holografie

Speicherung von Informationen	holografische Korrelation	Interferenzholografie	Herstellung optischer Bauteile
Archivierung von – dreidimensionalen Bildern, z. B. Werkstücke, Modelle, Kunstwerke, – zweidimensionalen Bildern, wie Ätzmasken für Halbleiterfertigung, digitale optische Datenspeicher.	Vergleich eines Werkstückes mit einem holografisch fixierten Muster, automatische Formerkennung, Erkennung von Formfehlern an Werkstücken und Werkzeugen.	Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung, Vermessen von Bewegungen und Verformungen aufgrund mechanischer oder thermischer Belastung, Schwingungsanalyse	Ersatz von lichtbrechenden optischen Bauteilen wie Linsen, Spiegel, Prismen, Strahlteiler durch Hologramme. Holografische Herstellung von Beugungsgittern.

tion wieder das gesamte dreidimensionale Bild liefert (allerdings konstrastärmer als das Bild eines vollständigen Hologramms). Ein Hologramm ist daher ein gegen Informationsverlust geschützter Speicher. Hat man *digitale Daten* in Form von ebenen Punktmustern vorliegen, dann kann man auf einem Hologramm mehrere hundert Vorlagen abspeichern. Dazu wird nach jeder Aufnahme das Hologramm um einen definierten Winkel gedreht (Winkelkodierung). Bei der Wiedergabe kann je nach Winkel zwischen Hologramm und Referenzwelle ein bestimmtes Teilbild ausgelesen werden. Man rechnet mit einer Speicherkapazität von 10^{11} bis 10^{12} bit auf einem Hologramm.

Bei der *holografischen Korrelation* wird zunächst von einem Muster ein Hologramm aufgenommen. Bei der Wiedergabe sitzt ein Bauteil, das mit dem Muster verglichen werden soll, an der Stelle des Objekts. Beleuchtet man das Hologramm nur noch mit der Objektwelle (Referenzwelle ausgeschaltet), dann wird durch Beugung der Objektwelle am Hologramm die Referenzwelle rekonstruiert, die auf einen Fotodetektor fokussiert werden kann. Dies gelingt ideal, wenn die beiden zu vergleichenden Bauteile formgleich sind. Weicht die Form des Prüflings vom Muster ab, so wird ein abweichender Fotostrom registriert, dessen Abweichung vom Sollwert ein Maß für den Formfehler des Objektes ist. Dieses Prüfverfahren ist kaum zeitaufwändig und kann automatisiert werden.

Die *Interferenzholografie* ist eine wichtige Methode in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, der Verformungs- und Schwingungsanalyse von Bauteilen. Bewegungen oder Verformungen aufgrund mechanischer oder thermischer Belastungen werden durch Interferenzstreifen sichtbar. Es sind mehrere Methoden in der Praxis gebräuchlich. Beim *Doppelbelichtungsverfahren* werden hintereinander zwei Hologramme des Objekts auf einer Fotoplatte aufgenommen. Hat sich der Gegenstand zwischen den beiden Aufnahmen verformt, dann ist sein Bild mit Interferenzlinien überzogen, aus denen der Grad der Verformung abgelesen werden kann. Beim *Echtzeitverfahren* wird nur ein Hologramm eines Objektes aufgenommen. Bei der Betrachtung wird das Objekt selbst nicht entfernt. Dadurch kommt es zur Interferenz zwischen dem Bild des Hologramms und dem Objekt selbst. Man kann nun das Objekt z. B.

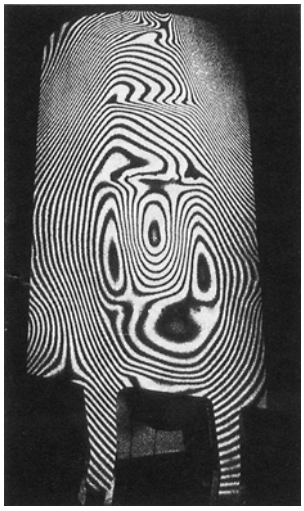


Abb. 6.111 Interferenzholografische Aufnahme der Bremsklappe eines Flugzeugs. Die Interferenzlinien zeigen die Verformung des aus CFK bestehenden Bauteils bei Erwärmung. Werkfoto: Dornier GmbH, Friedrichshafen

durch mechanische Belastung deformieren und die Formänderung in Echtzeit beobachten. Die *Zeitmittelholografie* ist eine Methode zur Schwingungsanalyse. Hierbei wählt man zur Belichtung des Hologramms eine Zeit, die groß ist gegen die Schwingungsdauer. Dadurch entstehen helle Knotenlinien und dunkle Schwingungsbäuche. Abbildung 6.111 zeigt eine Doppelbelichtungsaufnahme eines Bauteils, das sich infolge Erwärmung verformt hat.

Mithilfe von Hologrammen können optische Bauteile ersetzt werden, die zum Teil sehr arbeitsintensiv aus Glas gefertigt werden. Ein Beispiel ist die fokussierende Wirkung der Zonenplatte in Abb. 6.108c.

Zur Übung

Ü 6.4-21 Welche Radien haben die Kreisringe maximaler Schwärzung der Fresnel'schen Zonenplatte nach Abb. 6.108b, wenn die Entfernung des Punktes P vom Film $s = 50\,\text{cm}$ und die Wellenlänge des Lasers $\lambda = 633\,\text{nm}$ beträgt?

Ü 6.4-22 Die Zonenplatte von Ü 6.4-21 wird mit einem Kr-Laser der Wellenlänge $\lambda' = 647{,}1\,\text{nm}$ beleuchtet. In welchem Abstand von der Zonenplatte entsteht das Bild?

6.4.2 Polarisation des Lichtes

6.4.2.1 Einführung

Durch die Experimente der Beugung und Interferenz wird die Wellennatur des Lichtes bewiesen. Die Väter der Wellenlehre, die Forscher *Huygens, Fresnel* und *Young,* dachten dabei an eine longitudinale Welle, bei der sich ein bestimmter Zustand in einem „Äther" ausbreitet, analog zu den Schallwellen in Gasen. Durch einen Zufall fand E. L. Malus (1775 bis 1812) im Jahr 1808, dass Licht eine „Seitlichkeit" aufweist. Er blickte durch ein Kalkspatprisma auf ein Fenster, in dem sich das Sonnenlicht spiegelte. Durch Drehen des Prismas veränderte sich die Helligkeit; unter einem bestimmten Blickwinkel wurde gar kein Licht vom Prisma durchgelassen. Malus zog daraus den Schluss, dass das Licht bei der Reflexion am Fensterglas seinen natürlichen Charakter verlor, es wurde *polarisiert.*

Seit *Maxwell* weiß man, dass Licht eine transversale elektromagnetische Welle ist, bei der sich ein elektrisches und magnetisches Feld, charakterisiert durch die elektrische und magnetische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$, mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Abbildung 5.50 zeigt ein Momentbild einer ebenen elektromagnetischen Welle. Die Feldvektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ stehen senkrecht aufeinander und schwingen gleichphasig. Natürliches Licht besteht aus kurzen Wellenzügen, die völlig regellos mit willkürlichen Schwingungsrichtungen ausgestrahlt werden (Abschn. 6.4.1.1). Da im zeitlichen Mittel jede Schwingungsrichtung vorkommt, ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung keine Richtung ausgezeichnet.

Natürliches Licht kann mithilfe eines *Polarisators* (Abschn. 6.4.2.2) polarisiert werden. Abbildung 6.112 zeigt eine solche *linear* polarisierte Welle. Der $\boldsymbol{E}$-Vektor des Lichts schwingt in der *Schwingungsebene,* die durch den Polarisator P vorgegeben wird. Senkrecht zu dieser Ebene schwingt der $\boldsymbol{H}$-Vektor (nicht gezeichnet) in der *Polarisationsebene*. Um nachzuweisen, dass das natürliche Licht durch den Polarisator linear polarisiert wurde, schickt man das Licht durch einen *Analysator* A, der wie der Polarisator aufgebaut ist. Ist die Analysatorrichtung um den Winkel φ gegenüber der Schwingungsrichtung verdreht, dann wird vom elektrischen Feldvektor $\boldsymbol{E}$ nur die Projektion $E\cos\varphi$ vom Analysator durchgelassen. (Hinter dem Analysator schwingt das Licht in Richtung der Analysatorachse.) Das *Gesetz von Malus* beschreibt den Zusammenhang zwischen den Intensitäten I_0 und I vor und hinter dem Analysator sowie dem Winkel φ:

$$I = I_0 \cos^2\varphi \,. \tag{6.131}$$

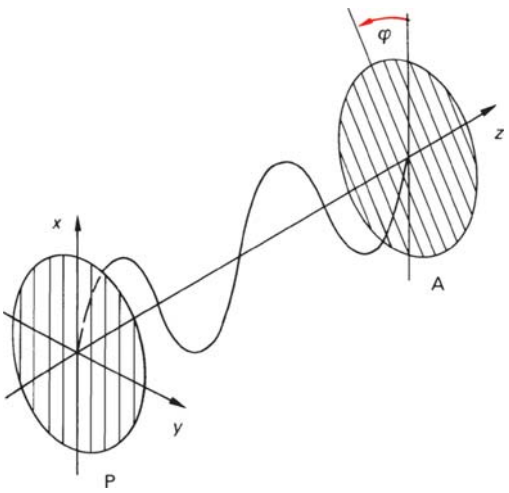


Abb. 6.112 Linear polarisiertes Licht

Stehen Polarisator und Analysator gekreuzt ($\varphi = 90°$), dann lässt der Analysator kein Licht durch.

Abbildung 6.113 zeigt zwei Lichtwellen, bei denen die elektrischen Feldvektoren $\boldsymbol{E}$ in zwei zueinander senkrechten Ebenen schwingen. Sind die Amplituden $\boldsymbol{E}$ gleich groß und beträgt der Gangunterschied der Wellen $\lambda/4$ (Phasendifferenz $\pi/2$), dann läuft der resultierende Feldvektor auf einer Schraubenlinie um die z-Achse. Licht dieser Art nennt man *zirkular* polarisiert. In Abb. 6.113 handelt es sich um eine rechts zirkulare Polarisation; hierbei läuft der $\boldsymbol{E}$-Vektor auf einer Rechtsschraube. Trifft diese rechts zirkular polarisierte Welle auf einen Analysator A, dann läuft der $\boldsymbol{E}$-Vektor, wenn man der Welle entgegenblickt, im Uhrzeigersinn auf einem Kreis. Dies bedeutet, dass im zeitlichen Mittel zirkular polarisiertes Licht durch einen einfachen Analysator nicht ausgelöscht werden kann. Dazu muss erst mithilfe eines $\lambda/4$-*Plättchens* der Gangunterschied zwischen den beiden Teilwellen rückgängig gemacht werden, sodass man wieder linear polarisiertes Licht erhält, das durch einen quer stehenden Analysator ausgelöscht werden kann.

Sind bei der Überlagerung von zwei senkrecht zueinander schwingenden Teilwellen entwe-

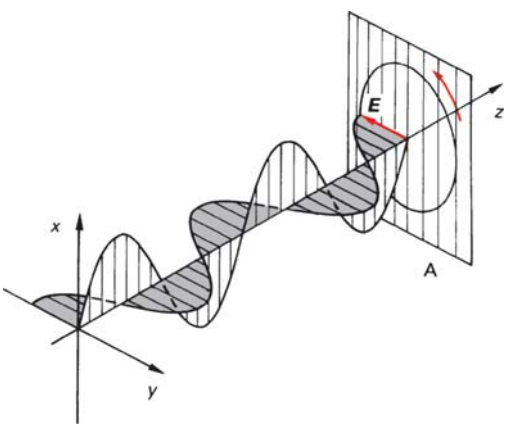


Abb. 6.113 Zirkular polarisiertes Licht

der die Amplituden nicht gleich oder ist der Gangunterschied von $\lambda/4$ verschieden, dann läuft der resultierende Feldvektor auf einer elliptischen Schraube; das Licht ist *elliptisch* polarisiert.
Durch Interferenzversuche stellt man fest, dass senkrecht zueinander polarisierte Wellen nicht miteinander interferieren; die Intensitäten addieren sich einfach.

6.4.2.2 Erzeugung von polarisiertem Licht

Reflexion und Brechung

Natürliches Licht, das auf eine Glasoberfläche fällt, ist nach der Reflexion teilweise polarisiert, und zwar so, dass $\boldsymbol{E}$-Vektoren, die senkrecht zur Einfallsebene schwingen, dominieren. Das reflektierte Licht ist vollständig polarisiert, wenn der Einfallswinkel so gewählt wird, dass der reflektierte und der gebrochene Strahl aufeinander senkrecht stehen. Die Schwingungsrichtung ist dabei senkrecht zur Einfallsebene. Nach Abb. 6.114 ist der erforderliche Einfallswinkel ε_p, der als *Polarisationswinkel* oder *Brewster'scher Winkel* bezeichnet wird, aus dem Brechungsgesetz ableitbar:

$$\sin\varepsilon_p = n\sin(90^\circ - \varepsilon_p) = n\cos\varepsilon_p \qquad \text{oder}$$

$$\tan\varepsilon_p = n \tag{6.132}$$

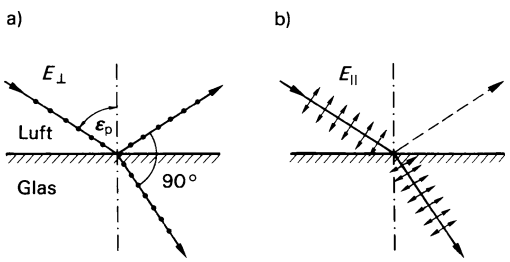


Abb. 6.114 Zum Brewster'schen Gesetz:
a) Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene,
b) Schwingungsrichtung in der Einfallsebene

mit n als dem Brechungsindex. Dieses *Brewster'sche Gesetz* (D. Brewster, 1781 bis 1868) liefert für Kronglas mit der Brechzahl $n = 1{,}51$ den Polarisationswinkel $\varepsilon_p = 56{,}5^\circ$.
Zur Erklärung des Brewster'schen Gesetzes wird in Abb. 6.114 ein beliebiger $\boldsymbol{E}$-Vektor des einfallenden natürlichen Lichtes in zwei Komponenten zerlegt, wobei $E_\perp$ senkrecht zur Einfallsebene, $E_\parallel$ parallel zur Einfallsebene schwingt. Die ins Glas eindringende elektromagnetische Welle regt die Elektronen des Glases zu erzwungenen Schwingungen an, die dann ihrerseits nach den Maxwell'schen Gleichungen elektromagnetische Wellen abstrahlen. Die Abstrahlcharakteristik ist wie bei einer linearen Antenne so geartet, dass in der Schwingungsrichtung nichts abgestrahlt wird (Abb. 6.114b), während senkrecht zur Schwingungsrichtung die Abstrahlung maximal ist (Abb. 6.114a).
Der gebrochene Strahl enthält vorwiegend Feldvektoren, die in der Einfallsebene schwingen. Lässt man einen Lichtstrahl unter dem Brewster'schen Winkel auf einen Stapel von Glasplatten fallen, dann ist das durchgehende Licht praktisch vollständig parallel zur Einfallsebene polarisiert.

Doppelbrechung

Blickt man durch einen isländischen Kalkspat ($CaCO_3$) auf ein beschriebenes Papier, dann erscheint die Schrift doppelt, wie Abb. 6.115 zeigt. Dieser Effekt der Doppelbrechung ist auf die *anisotropen* optischen Eigenschaften des Kristalls zurückzuführen. (Anisotropie bedeutet, dass physikalische Eigenschaften von Stoffen, besonders von Kristallen, richtungsabhängig sind.) Der Kalkspat lässt sich leicht spalten; hierbei nehmen seine Spaltflächen die Form eines Rhomboeders an. Das in Abb. 6.116 gezeichnete regelmäßige Rhomboeder hat als Spaltflächen sechs Rhomben (Rauten), bei denen jeweils zwei



Abb. 6.115 Doppelbrechender Kalkspat

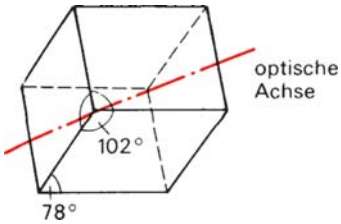


Abb. 6.116 Optische Achse eines Kalkspats

gegenüberliegende Winkel 102° bzw. 78° betragen. Die strichpunktierte Achse geht durch zwei gegenüberliegende Ecken, an denen drei 102°-Winkel zusammenstoßen. Sie wird *kristallografische Hauptachse* oder *optische Achse* genannt. Sie ist eine dreizählige Symmetrieachse des Kristalls.

In Abb. 6.117 fällt ein Strahl senkrecht auf eine Spaltfläche eines Kalkspats. Die gezeichnete Ebene, die sowohl den Lichtstrahl als auch die optische Achse enthält, wird *Hauptschnitt* genannt. Es zeigt sich, dass der Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen aufspaltet. Der *ordentliche Strahl* o geht ungebrochen durch die Grenzfläche, wie man es von den Gläsern gewohnt ist. Der *außerordentliche Strahl* e (extraordinär) wird seitlich abgelenkt. Eine Untersuchung mit Hilfe eines Analysators zeigt, dass die beiden Strahlen senkrecht zueinander polarisiert sind. Beim ordentlichen Strahl liegt die Schwingungsrichtung senkrecht zum Hauptschnitt, beim außerordentlichen liegt sie im Hauptschnitt.

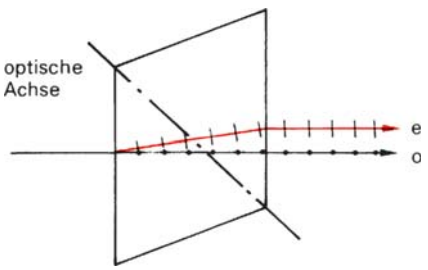


Abb. 6.117 Strahlenverlauf im Hauptschnitt eines Kalkspats

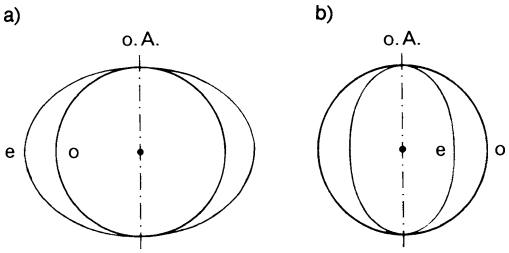


Abb. 6.118 Wellenflächen in einachsigen Kristallen. **a**) negativer Kristall (z. B. Kalkspat) **b**) positiver Kristall (z. B. Quarz)

Die Geschwindigkeit, mit der sich ordentliche Strahlen ausbreiten, ist in jeder Raumrichtung gleich. Wellenflächen von Elementarwellen sind daher Kugeln. Bei außerordentlichen Strahlen ist die Lichtgeschwindigkeit richtungsabhängig. Wellenflächen sind in diesem Fall Rotationsellipsoide, wie sie in Abb. 6.118 dargestellt sind. In Richtung der optischen Achse ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit für beide Polarisationsrichtungen gleich. Senkrecht dazu ergeben sich die größten Abweichungen. In *negativen* Kristallen ist die Lichtgeschwindigkeit des außerordentlichen Strahls größer, in *positiven* kleiner als die des ordentlichen Strahls. Quantitativ wird dies beschrieben durch zwei verschiedene Brechungsindizes; Tabelle 6.12 enthält einige Zahlenwerte.

Tabelle 6.12 Brechzahlen einachsiger Kristalle für gelbes Natrium-Licht (Wellenlänge $\lambda = 589$ nm)

Substanz	n_o	n_e	$n_e - n_o$	Bezeichnung
Kalkspat	1,6584	1,4864	−0,1720	negativ
Turmalin	1,6425	1,6220	−0,0205	
Quarz	1,5442	1,5533	+0,0091	positiv
Rutil	2,6158	2,9029	+0,2871	

Abbildung 6.119 zeigt das Zustandekommen der verschiedenen Laufrichtungen im Kristall. An den Auftreffstellen der einfallenden Strahlen werden Huygens'sche Elementarwellen ausgesandt (Abschn. 5.2.4.3). Als Einhüllende der Kugeln bzw. Ellipsoide ergeben sich zwei verschiedene Wellenfronten und damit ein Auseinanderlaufen der ordentlichen und außerordentlichen Strahlen.

Die Tatsache, dass natürliches Licht in einem doppelbrechenden Kristall in zwei zueinander senkrecht polarisierte Teilstrahlen zerlegt wird, kann man nutzen, um Polarisatoren herzustellen. Durch eine geeignete Anordnung ist dafür zu sorgen, dass ordentlicher und außerordentlicher Strahl voneinander getrennt werden. Es wurden verschiedene *Polarisationsprismen* konstruiert, die diese Aufgabe erfüllen. W. Nicol (1768 bis 1851) entwickelte 1828 das erste brauchbare Prisma. Am häufigsten wird heute das in Abb. 6.120 gezeigte Prisma von P. Glan (1877) und S. P. Thompson (1883) benutzt. Bei diesem Kalkspatprisma steht die optische Achse senkrecht zur Zeichenebene. Das Prisma wird diagonal durchgeschnitten und anschließend wieder z. B. mit Kanadabalsam verkittet. Treffen die einfallenden Strahlen an die verkittete Grenzfläche, dann wird der ordentliche Strahl total reflektiert, denn der Brechungsindex $n = 1{,}542$ von Kanadabalsam ist kleiner als der Brechungsindex von Kalkspat für den ordentlichen Strahl. An der geschwärzten Seitenwand des Prismas wird der ordentliche Strahl absorbiert, während der außerordentliche das Prisma verlässt.

Bei einem Kalkspat, in den das Licht senkrecht zur optischen Achse eintritt (wie beim Glan-Thompson-Prisma), findet keine Aufspaltung der beiden Teilstrahlen statt, wie man sich leicht anhand von Abb. 6.121 überzeugt. Da aber die außerordentliche Wellenfront e schneller fortschreitet als die ordentliche o, besteht nach Verlassen des Kristalls zwischen den beiden senkrecht zueinander polarisierten Teilwellen ein Gangunterschied $\Delta = d(n_o - n_e)$. Dieser Effekt wird ausgenutzt zur Herstellung von elliptisch oder zirkular

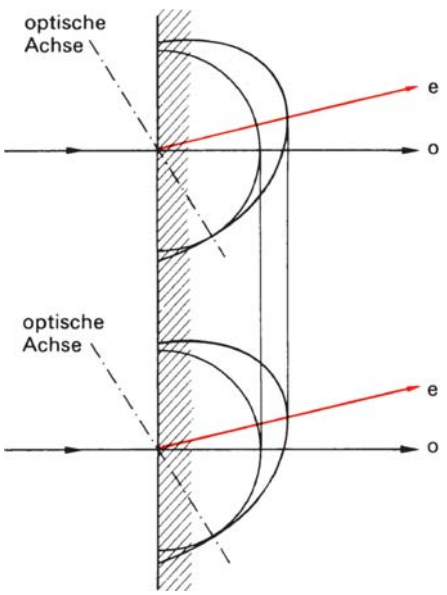


Abb. 6.119 Aufspaltung von Strahlen, die schräg zur optischen Achse auf einen Kalkspat fallen

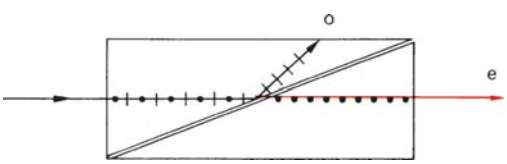


Abb. 6.120 Glan-Thompson-Prisma

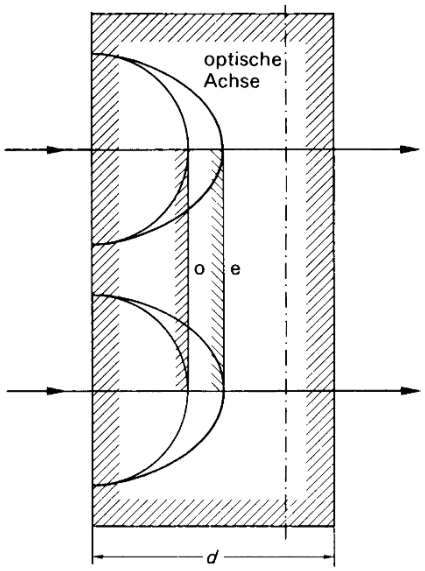


Abb. 6.121 Senkrechter Lichteinfall auf einen Kalkspat, der parallel zur optischen Achse geschnitten ist

polarisiertem Licht. Dazu lässt man linear polarisiertes Licht, dessen Schwingungsrichtung unter 45° zur optischen Achse geneigt ist, auf den Kristall fallen. Der $\boldsymbol{E}$-Vektor wird dann im Kristall in zwei gleich große, aufeinander senkrecht stehende Anteile zerlegt. Die Zusammensetzung der Teilwellen hinter dem Kristall ergibt zirkular polarisiertes Licht, falls der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ beträgt, d. h., wenn die Beziehung

$$d\,(n_\mathrm{o} - n_\mathrm{e}) = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (6.133)$$

mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllt ist. Beträgt der Gangunterschied $\Delta = \lambda/2$, dann ergibt sich wieder linear polarisiertes Licht, allerdings hat sich die Schwingungsebene um 90° gedreht.

In der Praxis benutzt man gern Gips- oder Glimmerplättchen, die sich dünn spalten lassen. Obwohl bei diesen zweiachsigen Kristallen die Verhältnisse etwas komplizierter sind, gilt das oben Gesagte sinngemäß.

Dichroismus

Einige doppelbrechende Kristalle absorbieren sichtbares Licht (sie sind farbig) in der Weise, dass das Absorptionsmaximum für den ordentlichen Strahl bei einer anderen Wellenlänge liegt als jenes für den außerordentlichen. Beleuchtet man sie mit linear polarisiertem Licht, so erscheinen sie je nach Schwingungsrichtung in *verschiedenen Farben (Dichroismus)*. Ein klassischer Vertreter dieser Gruppe ist der grüne Turmalin. Bestrahlt man eine etwa 1 mm dicke Turmalinplatte mit natürlichem Licht, dann wird der ordentliche Strahl praktisch vollständig absorbiert und nur der außerordentliche verlässt (geschwächt) den Kristall.

Moderne *Polarisationsfolien* bestehen aus Kunststoffen, die mit dichroitischen Farbstoffen eingefärbt sind. Eine einheitliche Ausrichtung der Farbstoffmoleküle wird erreicht durch mechanische Reckung der Kunststoffe oder durch Ausrichtung in elektrischen oder magnetischen Feldern. Solche *Polaroid-Filter* sind sehr großflächig herstellbar. Abbildung 6.122 zeigt die Wirkungsweise von zwei Polarisationsfolien. Der erreichbare Polarisationsgrad liegt meist unter 99%. Für



Abb. 6.122 Betrachtung einer Buchseite durch zwei Polarisationsfolien.
a) Polarisationsrichtungen parallel,
b) Polarisationsrichtungen gekreuzt

exakte Messungen verwendet man deshalb auch heute noch Polarisationsprismen.

6.4.2.3 Technische Anwendungen der Doppelbrechung

Substanzen, die von Natur aus nicht doppelbrechend sind, können unter der Wirkung äußerer Felder (mechanische Spannungen, elektrische und magnetische Felder) *akzidentelle* Doppelbrechung zeigen.

Spannungsdoppelbrechung

Gläser und Kunststoffe werden infolge mechanischer Spannungen doppelbrechend. So vergrößert sich z. B. in einem auf Zug beanspruchten Glasstab der Abstand der Atome in Längsrichtung, wodurch sich der Brechungsindex vermindert. Quer zur Zugrichtung wird infolge der Querkontraktion der Atomabstand reduziert und dementsprechend der Brechungsindex vergrößert. Der Stab wird also doppelbrechend wie ein positiv einachsiger Kristall mit der optischen Achse in der Beanspruchungsrichtung.

Zur experimentellen Untersuchung des ebenen Spannungszustands in mechanisch belasteten Bauteilen stellt man ein Modell des Bauteils aus Kunststoff her. Bringt man dieses Modell zwischen gekreuzte Polarisationsfolien, dann wird das an sich schwarze Gesichtsfeld infolge der Spannungsdoppelbrechung aufgehellt. (Das Licht wird elliptisch polarisiert.) Dabei schwingen ordentlicher und außerordentlicher Strahl in den Hauptspannungsrichtungen. Nach Durchlaufen des Modells besteht ein Gangunterschied zwischen den Teilstrahlen, der proportional ist zur Differenz der Hauptspannungen: $\Delta \sim \sigma_1 - \sigma_2$. Alle Orte, bei denen die Hauptspannungsrichtungen mit den Schwingungsrichtungen von Polarisator und Analysator übereinstimmen, erscheinen schwarz, da hier kein elliptisches Licht entsteht. Auf diese Weise entstehen im Bild dunkle Linien, die *Isoklinen*, die Punkte gleicher Hauptspannungsrichtung verbinden. Bei Verwendung von weißem Licht entstehen als *Isochromaten* bezeichnete farbige Linien. Sie kennzeichnen Orte mit gleicher Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_2$ oder Hauptschubspannung τ_{max}. Abbildung 6.123 zeigt Isochromaten, die an einem Modell aus einem Verbundwerkstoff (GFK, glasfaserverstärkter Kunststoff) aufgenommen wurden.

Rasch abgekühlte Gläser stehen unter permanenten inneren Spannungen, die man spannungsoptisch sichtbar machen kann. Linsen und Prismen müssen absolut spannungsfrei sein. (Der Brechungsindex darf nicht von der Richtung abhängen.) Sie dürfen daher zwischen gekreuzten Polarisatoren keine Aufhellung bewirken.

Elektromagnetische Lichtschalter

Elektrische und magnetische Felder können in isotropen Substanzen Doppelbrechung hervorrufen. Tabelle 6.13 zeigt eine Zusammenstellung der wichtigsten Effekte. Lichtmodulatoren oder Lichtschalter, die einen dieser Effekte ausnutzen, haben im Prinzip den Aufbau,

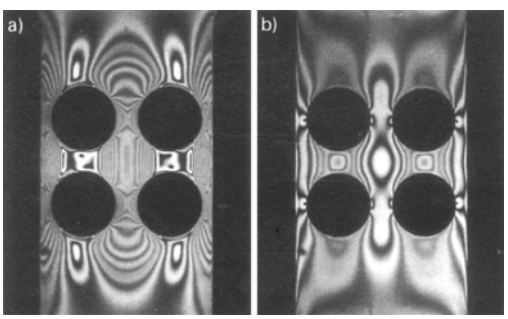


Abb. 6.123 Isochromaten an einem Modell eines glasfaserverstärkten Kunststoffs, das senkrecht zu den Faserachsen auf Zug beansprucht wird. **a**) Bohrungen ohne Einlagerungen, **b**) Einlagerungen mit guter Haftung zur Matrix. Fotos: S. Roth, G. Grüninger, DFVLR Stuttgart

Tabelle 6.13 Elektrooptische und magnetooptische Effekte

	Kerr-Effekt (J. Kerr, 1875)	Pockels-Effekt (F. C. Pockels, 1893)	Cotton-Mouton-Effekt (A. Cotton, H. Mouton, 1907)
Erklärung	Optisch isotropes Material wird im transversalen elektrischen Feld doppelbrechend.	Piezoelektrische Kristalle ohne Symmetriezentrum werden im elektrischen Feld doppelbrechend.	Flüssigkeiten mit anisotropen Molekülen werden im transversalen Magnetfeld doppelbrechend.
Feldabhängigkeit	$\lvert n_o - n_e\rvert \sim E^2$	$\lvert n_o - n_e\rvert \sim E$	$\lvert n_o - n_e\rvert \sim H^2$
Gangunterschied nach Durchlaufen der Länge l	$\Delta = \lambda l K E^2$; K: Kerr-Konstante z. B. $K = 2{,}48 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{mV^{-2}}$ für Nitrobenzol bei $\lambda = 589$ nm	$\Delta = l n_o^3 r_{63} E$ für longitudinale Zelle; r_{63}: elektrooptische Konstante, z. B. $r_{63} = 24 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{mV^{-1}}$, $n_o = 1{,}5$ für KD*P	$\Delta = \lambda l C H^2$; C: Cotton-Mouton'sche Konstante, z. B. $C = 3{,}181 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{mA^{-2}}$ für Nitrobenzol bei $\lambda = 589$ nm
Geometrie	Elektrisches Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes	Feld meist in longitudinaler Richtung, auch transversal möglich	Magnetfeld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes
Materialien	Nitrobenzol, Nitrotoluol, Schwefelkohlenstoff, Benzol; in Festkörpern um eine Zehnerpotenz, in Gasen um drei Zehnerpotenzen kleinerer Effekt	ADP (Ammoniumdihydrogenphosphat), KDP (Kaliumdihydrogenphosphat) KD*P (deuteriertes KDP), Lithiumniobat	Benzol, Toluol, Nitrobenzol
typische Feldstärke für Gangunterschied $\Delta = \lambda/2$	$E \approx 10^6$ V/m	Halbwellenspannung bei longitudinaler Zelle mit KD*P, $U \approx 4$ kV	$H \approx 10^7$ A/m
Modulationsfrequenz	modulierbar bis etwa 200 MHz	modulierbar über 1 GHz	langsam

der in Abb. 6.124 für eine *Pockels-Zelle* (W. Pockels, 1865 bis 1913) dargestellt ist. Zwischen gekreuzten Polarisatoren P und A ist ein Kristall K angebracht, bei dem z. B. die Stirnseiten mit einem transparenten Metallfilm überzogen sind. Legt man eine Spannung U und damit ein elektrisches Feld in longitudinaler Richtung an, dann wird der Kristall doppelbrechend. Die ordentliche und außerordentliche Welle, deren Schwingungsrichtung senkrecht aufeinander stehen, laufen mit verschiedenen Geschwindigkeiten durch den Kristall, sodass an dessen Ende zwei Wellen mit einem Gangunterschied Δ ankommen. Die Überlagerung ergibt elliptisch polarisiertes Licht, das vom Analysator nicht zurückgehalten werden kann. Besteht zwischen der ordentlichen und der außerordentlichen Welle ein Gangunterschied von einer halben Wellenlänge, dann ergibt die Überlagerung wieder linear polarisier-

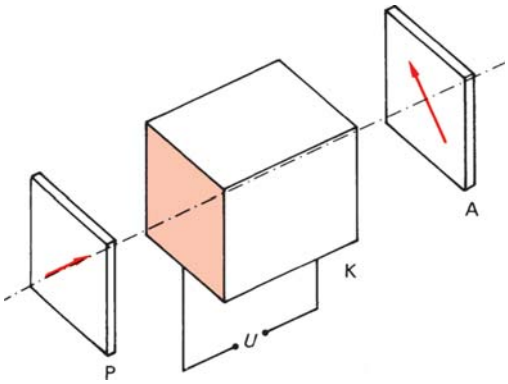


Abb. 6.124 Lichtmodulation mit einer Pockels-Zelle

tes Licht, das aber gegenüber der Polarisationsrichtung um 90° gedreht ist und somit durch den Analysator nicht geschwächt wird.
Mit elektrooptischen Zellen lässt sich Licht praktisch trägheitslos schalten. Sie finden Verwendung bei der Hochgeschwindigkeitsfotografie, Lichtmodulation beim Tonfilm und Bildfunk, zur Lichtgeschwindigkeitsmessung und als Güteschalter (Q-switch) in Riesenimpulslasern. Die magnetooptische Doppelbrechung ist von geringem praktischen Interesse, da der Effekt verhältnismäßig schwach ausgeprägt ist.

Flüssigkristallanzeigen

(*Liquid Crystal Displays*, *LCD*) beruhen auf dem Prinzip der Drehung der Schwingungsebene von polarisiertem Licht. Flüssigkristalle sind organische Substanzen, die keine Eigengestalt haben, sondern sich wie Flüssigkeiten einer vorgegebenen Gefäßform anpassen. Sie bestehen aus langen, stäbchenförmigen Molekülen mit starker Nahordnung. So richten sich z. B. in *nematischen* Flüssigkristallen die zigarrenähnlichen Moleküle im Mittel parallel aus (Abschn. 9.1.6, Abbildung 9.28).
Bei einer Flüssigkristall-Drehzelle nach *Schadt-Helfrich* befindet sich in einem 5 µm bis 15 µm breiten Raum zwischen zwei Glasplatten ein nematischer Flüssigkristall. Die Glasplatten sind mit einer transparenten Elektrodenschicht überzogen, die durch eine besondere Behandlung (Schrägbedampfen, Reiben) so präpariert ist, dass sich die Moleküle in einer Vorzugsrichtung anlagern. Sind die Vorzugsrichtungen der beiden Platten um 90° gegeneinander verdreht, dann ordnen sich die Moleküle schraubenförmig an, wie Abb. 6.125a zeigt. Strahlt man linear polarisiertes Licht, dessen Schwingungsrichtung parallel zur Orientierungsrichtung der Deckschicht weist, in eine solche *verdrillte nematische Phase* (**T**wisted **N**ematic, TN) der Dicke d, dann läuft die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung der Moleküllängsachsen langsamer als die dazu orthogonale Komponente. Infolge dieser Doppelbrechung wird das linear polarisierte Licht zu elliptischem, das bei richtig dimensionierter Dicke des Flüssigkristalls in der Tiefe $d/2$ zu zirkular polarisiertem wird und schließlich über elliptisches wieder in linear polarisiertes übergeht, allerdings mit einer um 90° gedrehten Schwingungsrichtung. Die Schwingungsebene wird nicht gedreht, wenn zwischen den Elektroden ein elektrisches Feld liegt (Spannung U = 1,5 V bis 5 V). Dann richten sich nämlich die Moleküle im Innern der Zelle parallel zum elektrischen Feld aus; lediglich unmittelbar an den Elektroden bleibt die Vorzugsrichtung erhalten (Abb. 6.125b).
Abbildung 6.126 zeigt den Aufbau einer Reflexionsanzeige. Umgebungslicht fällt von vorn

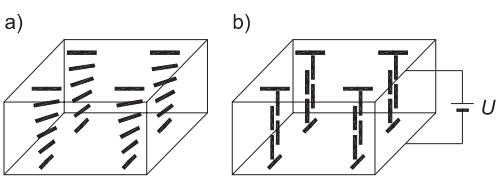


Abb. 6.125 Prinzip einer Flüssigkristall-Drehzelle (TN-Zelle), **a**) spannungslos, **b**) mit angelegter Spannung

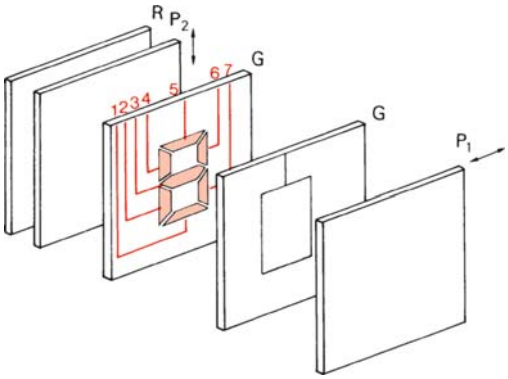


Abb. 6.126 Aufbau einer Reflexions-Drehzelle

rechts auf die Zelle und erhält durch den Polarisator P_1 eine waagrechte Schwingungsrichtung. Die beiden Glasplatten G sind mit transparenten Elektroden versehen, wobei die Elektroden der hinteren Zelle aus sieben einzeln ansteuerbaren Elementen bestehen. Zwischen den beiden Glasplatten befindet sich die verdrillte nematische Phase, in der die Schwingungsrichtung des Lichts um 90° gedreht wird. Das Licht durchsetzt den Polarisator P_2, dessen Durchlassrichtung gegenüber P_1 um 90° verdreht ist. Nach der Reflexion am Reflektor R dreht sich der Lichtweg um und das reflektierte Licht tritt wieder vorn rechts aus der Zelle aus. Aktiviert man jetzt beispielsweise die Elektroden 1, 3, 5, 6 und 7, so erscheint die dunkle Ziffer 3 auf hellgrauem Hintergrund. Nach ähnlichem Prinzip lassen sich auch Transmissionsanzeigen konstruieren. Der besondere Vorteil der LCD-Anzeigen ist der geringe Leistungsbedarf von nur etwa 5 $\mu W/cm^2$.

6.4.2.4 Optische Aktivität

Schneidet man eine Quarzplatte senkrecht zur optischen Achse und strahlt linear polarisiertes Licht parallel zur optischen Achse ein, so entsteht keine Doppelbrechung (ordentlicher und außerordentlicher Strahl sind gleich schnell), jedoch dreht sich die Schwingungsrichtung des polarisierten Lichtes um einen bestimmten Winkel. Substanzen, die in der Lage sind, die Schwingungsebene von polarisiertem Licht zu drehen, nennt man *optisch aktiv*. Außer Quarz zeigen noch andere Kristalle, wie z. B. Zinnober, Natriumchlorat und Kaliumbromat, eine optische Aktivität. Der Effekt hängt mit der Kristallstruktur zusammen, denn beim Schmelzen verschwindet er. Tatsächlich sind die Siliciumatome des Quarzes schraubenförmig angeordnet. Hierbei gibt es rechts- und linksgängige Schrauben, die eine Links- bzw. Rechtsdrehung bewirken. (Beim Rechtsquarz wird die Schwingungsebene im Uhrzeigersinn gedreht, wenn der Beobachter dem Lichtstrahl entgegenblickt.) Der Drehwinkel α ist proportional zur Kristalldicke d:

$$\alpha = [\alpha]\, d\,; \tag{6.134}$$

$[\alpha]$ ist das längenbezogene Drehvermögen. Es hängt stark von der Wellenlänge ab (Rotationsdispersion) und beträgt für Quarz bei λ = 589,3 nm und ϑ = 20 °C $[\alpha]$ = 21,724 °/mm.
Die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht wird auch in verschiedenen Flüssigkeiten gedreht, wie z. B. in wässrigen Lösungen von Rohrzucker, Traubenzucker, Weinsäure und Buttersäure. Auch hier beobachtet man sowohl Rechts- als auch Linksdrehung. Die Drehung wird verursacht durch asymmetrisch aufgebaute Moleküle. Am häufigsten tritt die optische Aktivität auf bei organischen Verbindungen mit asymmetrischen Kohlenstoffatomen. Dies sind Kohlenstoffatome, deren vier Valenzen durch vier verschiedene Atome oder Atomgruppen abgesättigt sind. Bei Lösungen optisch aktiver Substanzen in inaktiven Lösungsmitteln (z. B. Wasser) ist der Drehwinkel proportional *zur Konzentration* der Lösung. Über den gemessenen Drehwinkel kann man demnach die Konzentration einer Lösung

bestimmen. So wird mit einem *Saccharimeter* beispielsweise die Zuckerkonzentration im Harn bestimmt. Auch der Zuckergehalt des Traubenmostes (Öchslegrade) wird über die Drehung der Polarisationsebene gemessen.
Bringt man durchsichtige isotrope Körper in ein Magnetfeld und durchstrahlt sie in Richtung der Feldlinien, dann wird auch in diesem Fall die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht gedreht. Diese *Magnetorotation* ist als *Faraday-Effekt* bekannt und wurde 1846 von M. Faraday (1791 bis 1867) entdeckt. Der Drehwinkel α hängt außer von der Dicke d der Substanz auch von der Magnetfeldstärke H und einer Materialkonstanten V ab:

$$\alpha = V\,d\,H\,. \qquad (6.135)$$

V nennt man die *Verdet'sche Konstante*. Auch mithilfe des Faraday-Effekts lässt sich Licht schnell modulieren. Es gibt Modulatoren für Frequenzen von mehr als 200 MHz. Als aktive Materialien verwendet man ferromagnetische Granate seltener Erden, beispielsweise Ga-dotiertes Yttrium-Eisen-Granat (YIG). Der Drehwinkel hängt nicht linear vom Magnetfeld ab, sondern zeigt wie die Magnetisierung selbst eine starke Feldabhängigkeit mit Sättigungsverhalten. Im Bereich der Sättigung ist der Drehwinkel typisch 100 °/cm bis 200 °/cm; er zeigt starke Dispersion. YIG ist im sichtbaren Spektralbereich undurchsichtig, jedoch zwischen $\lambda = 1{,}2\,\mu\text{m}$ und $\lambda = 5\,\mu\text{m}$ völlig transparent.

Zur Übung

Ü 6.4-23 Natürliches Licht fällt mit der Intensität I_0 auf einen Polarisator. Wie groß ist die Intensität I des linear polarisierten Lichtes hinter dem Polarisator, wenn Absorptionsverluste vernachlässigt werden?

Ü 6.4-24 Natürliches Licht fällt mit der Intensität I_0 auf drei hintereinander stehende Polarisatoren, die jeweils um 30° gegeneinander verdreht sind. Wie groß ist das Verhältnis $I_3{:}I_0$, wenn I_3 die Intensität hinter dem dritten Polarisator ist?

Ü 6.4-25 Welche elektrische Feldstärke ist erforderlich, damit in einer mit Nitrobenzol gefüllten $l = 4$ cm langen Kerr-Zelle die zwei Teilstrahlen einen Gangunterschied von $\Delta = \lambda/2$ erhalten?

Ü 6.4-26 Zeigen Sie, dass bei einer longitudinalen Pockels-Zelle die Halbwellenspannung unabhängig ist von der Länge der Zelle. Wie groß ist sie für $\lambda = 589{,}3$ nm, wenn KD*P verwendet wird?

Ü 6.4-27 Das längenbezogene Drehvermögen $[\alpha]$ von Quarz hängt von der Wellenlänge ab. Folgende Messwerte liegen vor:

$\lambda = 656{,}3$ nm: $[\alpha] = 17{,}314\,°/\text{mm}$,
$\lambda = 486{,}1$ nm: $[\alpha] = 32{,}766\,°/\text{mm}$.

Nach *Biot* lässt sich die Rotationsdispersion durch die Gleichung $[\alpha] = \text{A}/\lambda^2 + \text{B}/\lambda^4$ beschreiben. Bestimmen Sie die Konstanten A und B. Wie groß ist das Drehvermögen für $\lambda = 589{,}3$ nm?

6.5 Quantenoptik

6.5.1 Lichtquanten

6.5.1.1 Lichtelektrischer Effekt

Beleuchtet man eine negativ geladene Metallplatte mit kurzwelligem Licht, so entlädt sie sich. Dieser *lichtelektrische Effekt* oder äußere *Fotoeffekt* wurde 1887 erstmals von W. Hallwachs (1859 bis 1922) studiert. Genauere Untersuchungen von P. Lenard (1862 bis 1947) zeigten, dass infolge der Bestrahlung *Elektronen* aus dem Metall herausgeschlagen werden. Die kinetische Energie der wegfliegenden Elektronen kann mit einer Vorrichtung gemäß Abb. 6.127a gemessen werden. In einer Vakuumfotozelle befindet sich eine Fotokathode K gegenüber einer Anode A. Die vom Licht ausgelösten Fotoelektronen werden von der Anode abgesaugt, wenn diese auf positivem Potential gegenüber der Kathode

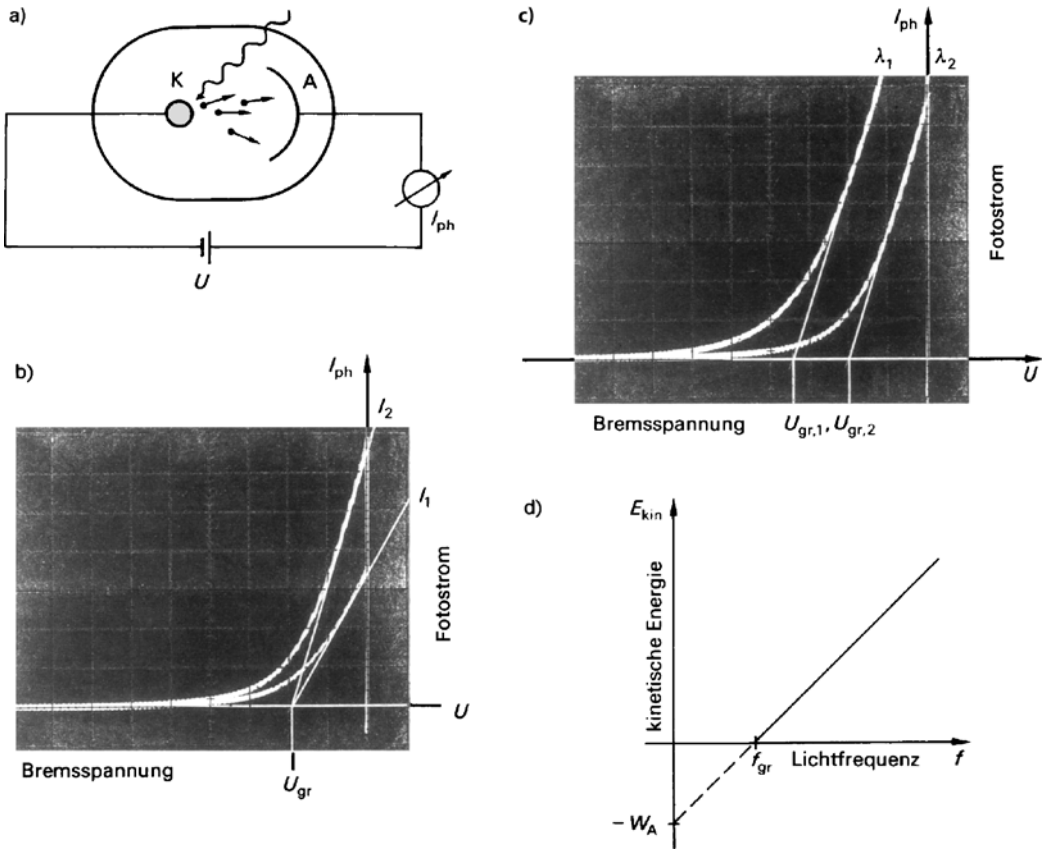


Abb. 6.127 Lichtelektrischer Effekt, **a**) Vakuumfotozelle, **b**) Fotostrom in Abhängigkeit von der Bremsspannung für monochromatisches Licht verschiedener Intensität ($I_2 > I_1$), **c**) Fotostrom in Abhängigkeit von der Bremsspannung für verschiedene Wellenlängen ($\lambda_2 > \lambda_1$) und **d**) kinetische Energie E_{kin} der Fotoelektronen in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz f

liegt. Der Fotostrom kann am Amperemeter abgelesen werden. Er verringert sich, wenn die Spannung umgepolt wird, d. h., wenn eine Bremsspannung zwischen Anode und Kathode anliegt. Abbildung 6.127b und c zeigen den Zusammenhang zwischen Fotostrom und Bremsspannung. Der Fotostrom verschwindet, wenn die Bremsspannung den Grenzwert U_{gr} erreicht hat, der mit der kinetischen Energie der Elektronen gemäß

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = eU_{gr}$$

zusammenhängt. Hierbei ist m die Masse und v die Geschwindigkeit der Elektronen sowie e die Elementarladung. Die kinetische Energie der emittierten Fotoelektronen ist also proportional zur Grenzspannung U_{gr}.
Abbildung 6.127b bis d sagen aus:

- Die kinetische Energie der Fotoelektronen hängt nicht von der Intensität, sondern nur von der Frequenz des eingestrahlten Lichtes ab (Abb. 6.127d). Die Fotoemission kommt zum Erliegen, wenn die Frequenz einen unteren Grenzwert f_{gr} erreicht.

– Erhöht man die Intensität des Lichtes, dann nimmt auch der Strom der emittierten Fotoelektronen zu, nicht aber deren kinetische Energie.

Diese Ergebnisse stehen im Widerspruch zu den Erwartungen, die man aufgrund der Wellentheorie des Lichtes an ein solches Experiment stellt. In Anwesenheit eines oszillierenden elektrischen Feldes der Form $E = \hat{E} \cos \omega t$ erwartet man, dass die Elektronen des Metalls zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, und zwar mit der Amplitude

$$\hat{y} = \frac{e\hat{E}}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} .$$

Elektronen, die an der Metalloberfläche sitzen, sollten daher das Metall verlassen, wenn ihre Amplitude $\hat{y}$ einen bestimmten kritischen Wert überschreitet. Daraus folgt:

– Die kinetische Energie der Elektronen sollte mit steigender Lichtintensität ($\sim \hat{E}^2$) anwachsen.
– Die Fotoemission sollte bei jeder Frequenz stattfinden, vorausgesetzt, die Lichtintensität ist ausreichend.

Die Schwierigkeiten bei der Interpretation des lichtelektrischen Effekts wurden durch A. Einstein (1879 bis 1955) überwunden, der 1905 seine revolutionäre *Lichtquantenhypothese* formulierte. Nach *Einstein* wird die Energie einer Lichtquelle in einzelnen Paketen *(Lichtquanten* oder *Photonen)* transportiert. Jedes emittierte Elektron wird durch ein Photon ausgelöst, das seine Energie dabei an das Elektron abgibt. Die Energie eines Lichtquants kann aus Abb. 6.127d abgelesen werden. Die Abhängigkeit der kinetischen Energie der Fotoelektronen von der Lichtfrequenz hat die mathematische Form einer Geradengleichung:

$$E_{\text{kin}} = hf - W_{\text{A}} ;$$

h ist die Geradensteigung, $-W_{\text{A}}$ die Nullpunktverschiebung. Physikalisch können die Glieder auf der rechten Seite mithilfe des Energiesatzes interpretiert werden: Die Energie des Photons beträgt

$$E_{\text{ph}} = hf . \tag{6.136}$$

Um ein Elektron vom Metall abzulösen, ist eine *Austrittsarbeit* W_{A} aufzubringen, sodass für das Elektron als kinetische Energie die Differenz von Photonenenergie und Austrittsarbeit zur Verfügung steht:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ph}} - W_{\text{A}} .$$

Damit ist auch die Existenz einer Grenzfrequenz f_{gr} verständlich. Der Auslöseprozess kann überhaupt nur ablaufen, wenn die Photonenenergie größer ist als die erforderliche Austrittsarbeit. Im Grenzfall gilt $hf_{\text{gr}} = W_{\text{A}}$.
Die Konstante h ist das bereits von *Planck* im Jahr 1900 eingeführte und nach ihm benannte *Planck'sche Wirkungsquantum. Planck* nahm bei der Ableitung des Strahlungsgesetzes der Wärmestrahler (6.88) an, dass die Strahlung von einzelnen Oszillatoren ausgeht, deren Energie gemäß $E_n = nhf$ von der Frequenz abhängt. Die Planck'sche Konstante beträgt

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 4{,}136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} .$$

Sie kann als Geradensteigung aus Abb. 6.117d experimentell bestimmt werden. Dies gelang *Millikan* im Jahr 1916.
Da die Photonenenergie E_{ph} der Frequenz f des Lichtes proportional ist, muss sie der Wellenlänge λ umgekehrt proportional sein:

$$E_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda} . \tag{6.137}$$

Für den praktischen Gebrauch kann man die beiden Naturkonstanten h und c sofort in diese Gleichung einsetzen und erhält damit

$$E_{\mathrm{ph}} = \frac{h'}{\lambda} \qquad (6.138)$$

mit $h' = hc = 1{,}24\ \mathrm{eV}\,\mu\mathrm{m}$.

Beispiel

6.5-1 Bei der Untersuchung des lichtelektrischen Effekts an Natrium stellt man fest, dass für Wellenlängen $\lambda > \lambda_{\mathrm{gr}} = 451$ nm keine Fotoelektronen ausgelöst werden. Wie groß ist die Austrittsarbeit von Natrium?

Lösung

Fotoelektronen werden emittiert, wenn die Photonenenergie größer ist als die Austrittsarbeit. Im Grenzfall gilt $W_{\mathrm{A}} = E_{\mathrm{ph,\,gr}}$. Mit (6.138) ergibt sich

$$W_{\mathrm{A}} = \frac{1{,}24\ \mu\mathrm{m\,eV}}{\lambda_{\mathrm{gr}}} = \frac{1{,}24\ \mu\mathrm{m\,eV}}{0{,}451\ \mu\mathrm{m}} = 2{,}75\ \mathrm{eV}\ .$$

Die Werte für die Austrittsarbeit der Elektronen in Metallen betragen einige Elektronenvolt. Besonders niedrige Werte haben die Alkalimetalle, bei denen das Valenzelektron offenbar verhältnismäßig schwach gebunden ist.

6.5.1.2 Compton-Effekt

Eine besondere Unterstützung der *Einstein*'schen *Lichtquantenhypothese* wurde von A. H. Compton (1892 bis 1962) geliefert, der 1923 die Streuung von Röntgenstrahlen an freien und schwach gebundenen Elektronen untersuchte. *Compton* ließ nach Abb. 6.128a einen Röntgenstrahl der Wellenlänge λ auf einen Grafitblock S fallen. Mithilfe eines Röntgendetektors D maß er die Intensität und Wellenlänge λ' der gestreuten Röntgenstrahlung in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ. Die Ergebnisse sind in Abb. 6.128b qualitativ dargestellt. *Compton* beobachtete, dass die gestreute Röntgenstrahlung zusätzlich zur primären Wellenlänge λ eine spektral

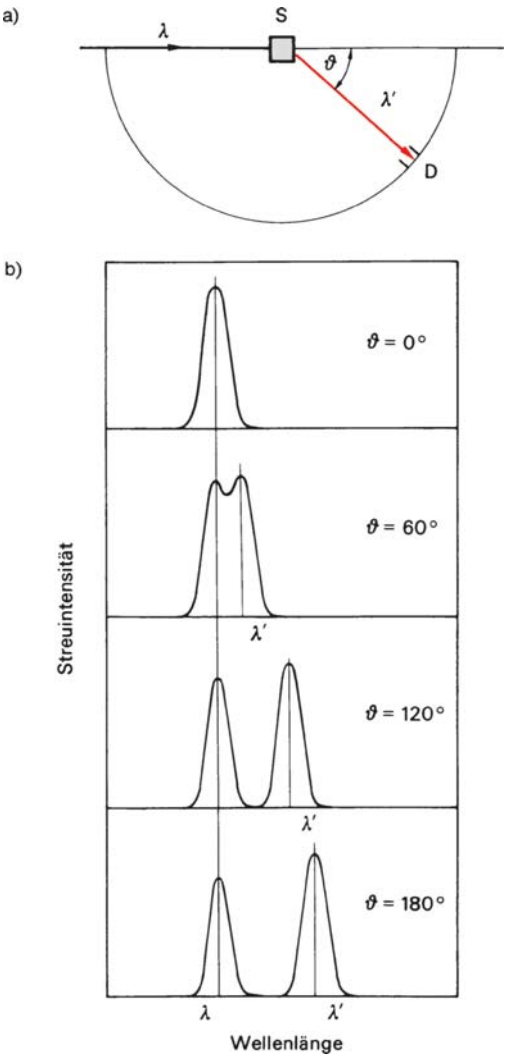


Abb. 6.128 Compton-Streuung: **a**) Messanordnung, **b**) Intensität der gestreuten Röntgenstrahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge für verschiedene Streuwinkel ϑ

verschobene Komponente enthält, deren Wellenlänge λ' vom Winkel ϑ abhängt.

Im Rahmen der Wellenlehre ist *Comptons* Ergebnis nicht interpretierbar, denn man erwartet, dass die Elektronen des Streukörpers von der elektromagnetischen Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Die schwingenden Elektronen können dann ihrer-

seits elektromagnetische Wellen aussenden, die aber dieselbe Frequenz haben wie die einfallende Welle. Eine Frequenz- bzw. Wellenlängenverschiebung ist nicht möglich.
Compton und unabhängig von ihm *Debye* erklärten den Streuvorgang als elastischen Stoß eines Photons mit einem ruhenden Elektron entsprechend Abb. 6.129.
Der Energieerhaltungssatz lautet für diesen Vorgang

$$hf + m_0c^2 = hf' + m\,c^2\ . \qquad (1)$$

f ist die Lichtfrequenz vor, f' die nach dem Stoß; $m_0\,c^2$ ist die Ruheenergie des Elektrons (Kapitel 10) und $m\,c^2$ ist die Energie des bewegten Elektrons. Es gilt hierbei

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ .$$

Der Impuls eines Photons ist das Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit des Photons ist die Lichtgeschwindigkeit c. Ein Photon hat keine Ruhemasse (es gibt kein ruhendes Photon), man kann ihm aber nach Einsteins Äquivalenzprinzip von Masse und Energie ($E = m\,c^2$) eine Masse zuordnen, nämlich

$$m_{\mathrm{ph}} = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}\ .$$

Damit ist der Impuls eines Photons $p = m_{\mathrm{ph}}c$ oder

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}\ . \qquad (6.139)$$

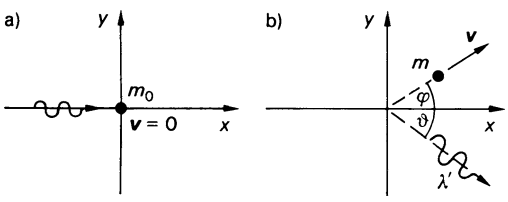


Abb. 6.129 Compton-Streuung eines Photons an einem Elektron **a**) vor und **b**) nach dem Stoß

Der Gesamtimpuls muss beim Stoß erhalten bleiben. Es gelten in x-Richtung

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c}\cos\vartheta + mv\cos\varphi\ . \qquad (2)$$

und in y-Richtung

$$0 = \frac{hf'}{c}\sin\vartheta - mv\sin\varphi\ . \qquad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt für die Verschiebung der Wellenlänge

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0\,c}(1 - \cos\vartheta)\ . \quad (6.140)$$

$\lambda_{\mathrm{c}} = h/(m_0c)$ nennt man die *Compton-Wellenlänge*; sie beträgt $\lambda_{\mathrm{c}} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m. In bester Übereinstimmung mit dem Experiment hängt die Wellenlängenverschiebung $\Delta\lambda$ nicht vom Streumaterial und der Primärwellenlänge λ ab.

6.5.2 Dualismus Teilchen–Welle

Die in Abschn. 6.4 beschriebenen Interferenz- und Beugungsexperimente zeigen, dass Licht *Welleneigenschaften* hat. Den lichtelektrischen Effekt und den Compton-Effekt kann man dagegen nur verstehen, wenn man annimmt, dass Licht mit Materie seine Energie in ganzen Quanten des Betrags $E_{\mathrm{ph}} = h\,f$ austauscht und dass diese *Lichtquanten* den Impuls $p = h/\lambda$ haben. Licht hat demnach sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften. Je nach Experiment kommt der Wellen- oder Teilchencharakter zum Vorschein (Abb. 6.130). Eine Theorie, die beide Aspekte vereinigt, ist die *Quantenelektrodynamik*, die in diesem Buch nicht beschrieben werden soll.
Zur Klärung des Zusammenhangs zwischen Wellen- und Teilchenbild sei das in Abb. 6.130 skizzierte Experiment betrachtet: Paralleles

Licht fällt von unten auf einen Doppelspalt. Ist jeweils entweder nur der rechte oder der linke Spalt geöffnet, so ergeben sich die nicht unterbrochenen schwarzen Intensitätsverteilungen (Abb. 6.130a). Sind beide Spalte geöffnet, dann erwartet man – falls sich die Photonen wie klassische Teilchen (z. B. Schrot aus einer Schrotflinte) verhalten – als resultierende Beugungsfigur die rote Kurve. Dabei wird argumentiert, dass ein Teilchen entweder durch den einen oder durch den anderen Spalt fliegt. Die gesamte Verteilungsfunktion muss daher die Summe der Einzelverteilungen sein. Tatsächlich beobachtet man aber bei Licht die in Abb. 6.130b gezeigte Lichtintensität. Daraus folgt, dass die Photonen nicht wie makroskopische Teilchen anzusehen sind.

Eine Untersuchung bei schwachen Lichtströmen zeigt, dass eine hinter dem Doppelspalt angebrachte Fotoplatte (Abb. 6.130c) an einzelnen lokalisierbaren Stellen von den auftreffenden Photonen geschwärzt wird. Es wurden solche Versuche auch mit Fotomultipliern gemacht, die in der Lage sind, einzelne Photonen nachzuweisen. Dabei hat sich gezeigt, dass jedes hinter dem Doppelspalt registrierte Photon als Ganzes ankommt, also die Energie $E_{\mathrm{ph}} = hf$ hat.

Das Experiment verläuft mithin nicht so, dass sich ein Photon vor den Spalten teilt und mit sich selbst interferiert (*Prinzip der Unteilbarkeit*).

Die zunächst widersprüchlichen Aussagen von Wellen- und Teilchenbild lassen sich durch eine *statistische* Betrachtungsweise vereinen: Bei Experimenten, wie z. B. bei der Beugung am Doppelspalt, werden nach Abb. 6.130c die Photonen an diskreten Stellen des Raumes nachgewiesen. Der Ort, an dem ein bestimmtes Photon ankommt, kann nicht vorhergesagt werden. Es lässt sich lediglich eine Auftreffwahrscheinlichkeit angeben. Hierbei ist die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* identisch mit dem Quadrat der Wellenamplitude, die der wellentheoretischen Betrachtung entspricht, also der klassisch berechneten Beugungsfunktion. Hat man es mit großen Photonenströmen zu tun, so beschreibt die wellentheoretische Beugungsfunktion praktisch exakt die tatsächlich vorliegende Photonendichte.

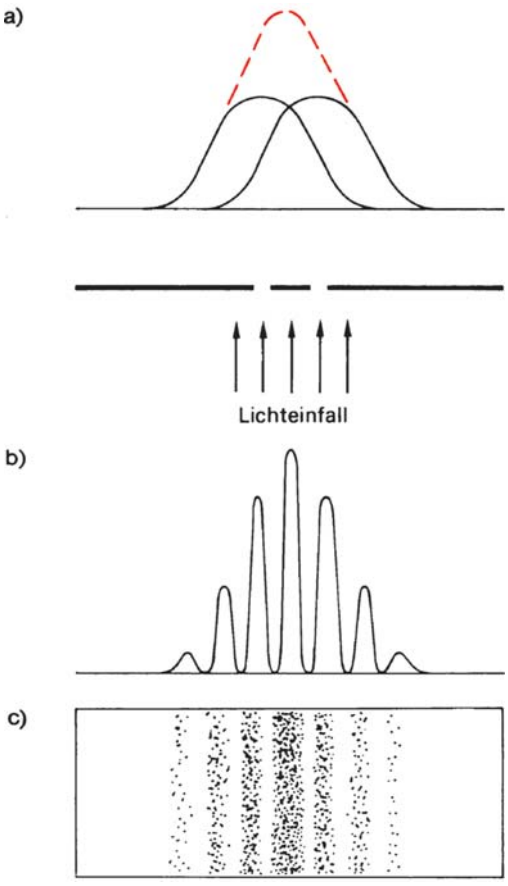


Abb. 6.130 Beugung am Doppelspalt: **a**) Beugungsfiguren der Einzelspalte, **b**) Beugungsfigur des Doppelspalts, **c**) Photonendichte auf einer Fotoplatte

6.5.3 Wärmestrahlung

Die Berechnung der spektralen Strahlungsdichte eines schwarzen Strahlers nach (6.88)

gelang *Planck* im Jahr 1900 mithilfe der klassischen Elektrodynamik unter der einschränkenden Voraussetzung, dass schwingende Oszillatoren nur Energien vom Betrag $E_n = n\,h\,f$ annehmen können. *Einstein* leitete 1917 die Planck'sche Strahlungsgleichung aus der Lichtquantenhypothese ab.

Wie in Abschn. 8.1 beschrieben, nehmen Elektronen in Atomen diskrete Energiestufen ein. Abbildung 6.131 zeigt einen Ausschnitt aus einer solchen Energieleiter mit nur zwei möglichen Energiezuständen E_1 und E_2. Nach Einstein existieren drei mögliche Wechselwirkungsmechanismen zwischen dem Atom und der elektromagnetischen Strahlung:

- *Absorption*: Ein Photon wird absorbiert (es verschwindet aus dem Strahlungsfeld) und hebt ein Elektron vom Energiezustand E_1 auf E_2, wenn seine Energie der Bedingung $E_{\mathrm{ph}} = hf = E_2 - E_1$ genügt.
- *Spontane Emission*: Nach einer mittleren Lebensdauer τ im oberen Energieniveau E_2 geht ein Elektron in das untere Energieniveau E_1 über; hierbei wird ein Photon der Energie $E_{\mathrm{ph}} = hf = E_2 - E_1$ ausgesandt.
- *Induzierte Emission*: Ein Photon der Energie $E_{\mathrm{ph}} = hf = E_2 - E_1$ stimuliert ein Elektron zu einem Übergang von E_2 nach E_1. Das dabei emittierte Photon verstärkt das primäre.

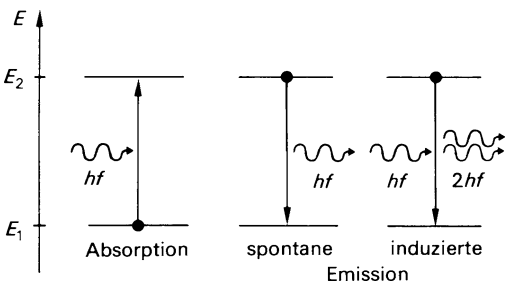


Abb. 6.131 Wechselwirkungen zwischen Photonen und Elektronen in einem Atom

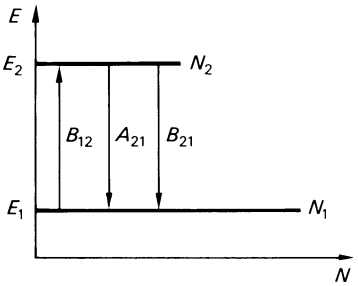


Abb. 6.132 Besetzungszahlen von zwei Energieniveaus

Bei einem System von N Atomen befinden sich nach Abb. 6.132 N_1 Atome im unteren, N_2 im oberen Energiezustand. Die Besetzungszahlen ändern sich bei Wechselwirkung mit Photonen und durch die spontane Emission. Die Absorptionsrate, d. h. die Anzahl der Übergänge je Zeiteinheit von E_1 nach E_2 ist proportional zur Anzahl N_1 der Atome im tiefen Energiezustand und zur Energiedichte $u_f(f)$ (Energie je Volumeneinheit und Frequenzintervall) des Strahlungsfeldes:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Abs.}} = B_{12}u_f(f)N_1 \ .$$

Die Proportionalitätskonstante B_{12} heißt *Einstein-Koeffizient* und ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Absorptionsaktes. Die Rate der spontanen Emission ist proportional zur Anzahl N_2 der Atome im angeregten Energieniveau E_2:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{sp.\,Em.}} = A_{21}N_2 \ .$$

Der Einstein-Koeffizient A_{21} ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines spontanen Übergangs eines Elektrons vom Energieniveau E_2 zum Energieniveau E_1. Die induzierte Emission hängt sowohl von der Besetzungszahl N_2 als auch von der spektralen Energiedichte $u_f(f)$ des Strahlungsfeldes ab:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ind.\,Em.}} = B_{21}u_{\mathrm{f}}(f)N_2 \ .$$

Der Einstein-Koeffizient B_{21} ist analog zu B_{12} definiert. Im thermodynamischen Gleichgewicht müssen die Übergangsraten in beiden Richtungen gleich sein:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{Abs.}} = \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{sp. Em.}} + \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{ind. Em.}}$$

Diese Bedingung liefert für die Besetzungszahlen

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}u_f(f)}{A_{21} + B_{21}u_f(f)} .$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht kann das Verhältnis der Besetzungszahlen aber auch aus der *Boltzmann-Verteilung* berechnet werden ((3.31) in Abschn. 3.2.3):

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-\frac{E_2-E_1}{k\,T}} . \tag{6.141}$$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K ist die Boltzmann-Konstante. Ein Vergleich liefert mit $hf = E_2 - E_1$

$$u_f(f) = \frac{A_{21}}{B_{12}\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - B_{21}} .$$

Die Einstein-Koeffizienten können durch folgende Betrachtung bestimmt werden: Im Grenzfall $T \to \infty$ muss die spektrale Energiedichte $u_f(f)$ ebenfalls gegen unendlich gehen. Diese Bedingung wird nur erfüllt, wenn $B_{12} = B_{21}$ ist. Somit beträgt die spektrale Energiedichte des Strahlungsfelds

$$u_f(f) = \frac{A_{21}}{B_{12}\left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1\right)} .$$

Für den Grenzfall kleiner Frequenzen $hf \ll kT$ gilt das experimentell gut gesicherte Gesetz von *Rayleigh-Jeans*:

$$u_f(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3} k\,T . \tag{6.142}$$

Mit der Reihenentwicklung $\mathrm{e}^{hf/kT} = 1 + hf/kT + \cdots$ gilt nach *Einstein* für $hf \ll kT$

$$u_f(f) = \frac{A_{21}kT}{B_{12}hf} .$$

Ein Vergleich mit (6.142) führt zu

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} . \tag{6.143}$$

Demnach beträgt die spektrale Energiedichte des Strahlungsfelds

$$u_f(f,T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1} . \tag{6.144}$$

Aus der spektralen Energiedichte $u_f(f,T)$ lässt sich die spektrale Strahldichte $L_{\mathrm{e},f}(f,T)$ eines Hohlraumstrahlers berechnen:

$$L_{\mathrm{e,\,f}} = \frac{c}{4\pi} u_f \frac{1}{\Omega_0} .$$

Damit ergibt sich die Planck'sche Strahlungsgleichung

$$L_{\mathrm{e},f}(f,T)\,\mathrm{d}f = \frac{2\,hf^3}{c^2\Omega_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1}\,\mathrm{d}f \tag{6.145}$$

oder, wenn man die Frequenz f durch die Wellenlänge λ ersetzt, die bereits aus Abschn. 6.3.1 bekannte Form

$$L_{\mathrm{e},\lambda}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{2\,hc^2}{\lambda^5\Omega_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}\,\mathrm{d}\lambda . \tag{6.146}$$

Abbildung 6.133 zeigt *Strahlungsisothermen* der *Planck'schen Strahlungsformel* (s. dazu

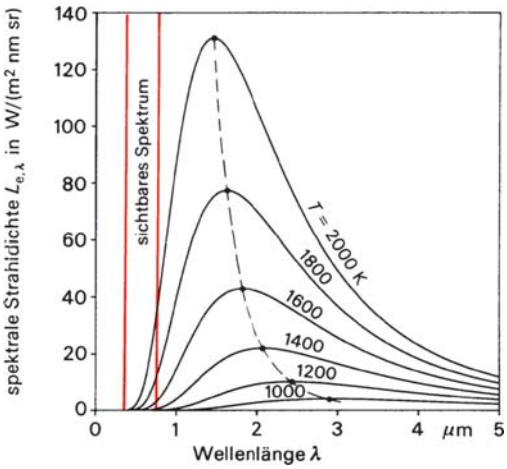


Abb. 6.133 Spektrale Strahldichte $L_{e,\lambda}$ eines schwarzen Strahlers für verschiedene Temperaturen T

auch Abb. 6.70). Die gestrichelte Kurve gibt das Wien'sche Verschiebungsgesetz (6.89) wieder.

6.5.4 Laser

Der Laser ist eine neuzeitliche Lichtquelle mit faszinierenden Eigenschaften. Das Wort LASER ist eine Abkürzung für **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation und bedeutet etwa: Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung. Bei dieser Lichtart spielt die von *Einstein* 1917 postulierte *induzierte* oder *stimulierte* Emission von Licht eine wesentliche Rolle. Wie Abb. 6.131 zeigt, kann ein Lichtquant der Energie $E_{\mathrm{ph}} = E_2 - E_1$ ein Elektron zu einem Übergang von einem hohen Energieniveau E_2 auf ein tieferes Energieniveau E_1 stimulieren. Die Übergangsrate ist nach den Erläuterungen im vorhergehenden Abschnitt durch

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{ind. Em.}} = B_{21}u_f(f)N_2$$

gegeben. Ein Photon der betreffenden Energie kann aber auch absorbiert werden und damit ein Elektron vom tieferen Energiezustand E_1 auf den höheren E_2 heben (Abb. 6.131). Diese Übergangsrate ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{Abs.}} = B_{12}u_f(f)N_1 = B_{21}u_f(f)N_1 \ .$$

Da im thermodynamischen Gleichgewicht nach (6.141) stets $N_1 > N_2$ ist, überwiegt die Absorptionsrate stets die stimulierte Emissionsrate. Um eine kräftige stimulierte Emission zu erhalten, muss eine *Besetzungsinversion*, d. h. $N_2 > N_1$ vorliegen. Ein solcher Zustand ist in der Natur nirgends verwirklicht, sondern muss künstlich herbeigeführt werden.

Bei den *Festkörperlasern* (Rubin, Nd-YAG) wird die Besetzungsinversion durch *optisches Pumpen,* d. h. mithilfe einer starken Lampe erzwungen. (Der Rubin-Laser war übrigens der erste funktionierende Laser; er wurde 1960 von *T. H. Maiman* gebaut.) Bei *Gaslasern* läuft der Pumpmechanismus über *Stöße* in einer Gasentladungsröhre. Obwohl der eigentliche Prozess der stimulierten Emission nur zwischen zwei Energieniveaus abläuft, sind am ganzen Laserprozess mindestens drei oder besser vier Energieniveaus beteiligt. Abbildung 6.134 zeigt die Übergänge in einem Drei- bzw. Vier-Niveau-System. Damit sich eine Besetzungsinversion aufbauen kann, müssen die Lebensdauern τ der Elektronen in den einzelnen Niveaus die angegebenen

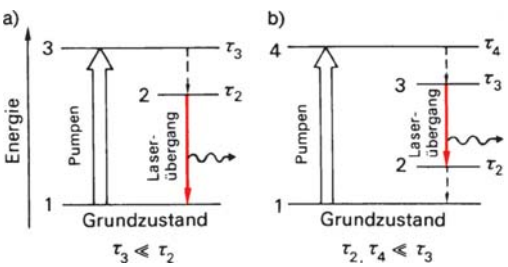


Abb. 6.134 Beteiligung verschiedener Energieniveaus am Laserprozess, **a**) Drei-Niveau-System (z. B. Rubin-Laser), **b**) Vier-Niveau-System (z. B. Nd-YAG-Laser, Gaslaser)

Ungleichungen erfüllen. Die gestrichelten Bereiche bezeichnen Übergänge, die meist strahlungslos sind.

Die Funktion des Lasers beruht auf folgendem Prinzip: Hat man beispielsweise durch einen Lichtblitz im aktiven Material eine Besetzungsinversion erreicht, dann werden zunächst durch spontane Emission Photonen der Energie $hf = E_2 - E_1$ erzeugt. Durch Wechselwirkung eines Photons mit einem angeregten Atom kann dessen Elektron zu einem Übergang stimuliert werden. Das dabei ausgesandte Photon verstärkt dabei die primäre Welle phasengerecht. Die verstärkte Welle stimuliert weitere Elektronen zu Übergängen, sodass sich eine Photonenlawine ausbildet. Diese Lawine kommt zum Erliegen, wenn die Besetzungsinversion abgebaut ist. Wird durch den Pumpvorgang ständig Energie nachgeliefert, kann sich ein stationärer Zustand einstellen. Im Gegensatz zum Glühlicht, bei dem die Photonen bzw. die einzelnen Wellenzüge völlig unkorreliert ausgestrahlt werden, hat man es beim Laser mit einem *kollektiven Phänomen* zu tun: Alle Photonen koppeln phasengerecht an die vorhandene Welle an, sodass eine Lichtwelle mit sehr großer Kohärenzlänge entsteht (Abschn. 6.4.1.1 und Tabelle 6.9).

Nach Abb. 6.135 wird das aktive Material in einen Resonator, bestehend aus den Spiegeln S_1 und S_2, eingesetzt. Zwischen den Spiegeln baut sich eine stehende Welle auf. In der Teilchenvorstellung: Photonen, die sich in longitudinaler Richtung bewegen, durchqueren immer wieder das aktive Material und werden verstärkt, während solche, die den Weg schräg zur Längsachse nehmen, sehr schnell das aktive Material verlassen und nicht weiter verstärkt werden. Der Spiegel S_1 hat eine Reflexion von 100%, während der Auskoppelspiegel S_2 eine geringe Transmission aufweist. Dadurch wird ständig ein Bruchteil der nach rechts laufenden Photonen ausgekoppelt.

Es gibt Laser, z. B. Rubin, die praktisch nur im Pulsbetrieb arbeiten, um die große Wärmeleistung abführen zu können. Viele Laser lassen sich auch fortdauernd betreiben. Für viele praktische Anwendungen muss das Laserlicht gepulst werden. Dies wird durch das *Q-switching* bewirkt, erläutert in Abb. 6.136: Während des Pumpvorgangs wird die Resonatorgüte Q künstlich niedrig gehalten, sodass der Laser nicht anschwingt und eine hohe Besetzungsinversion aufgebaut wird. Erhöht man nun zu einem bestimmten Zeitpunkt die Güte, so entlädt sich die ganze im Resonator gespeicherte Energie in einem kurzen, leistungsstarken Lichtpuls. Mit *Güteschaltern* lassen sich Pulsdauern von etwa 1 ns und Leistungen von 10^{10} W erzielen. Als Q-switch

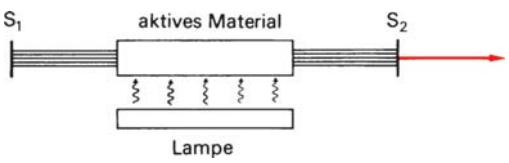


Abb. 6.135 Aufbau eines optisch gepumpten Lasers

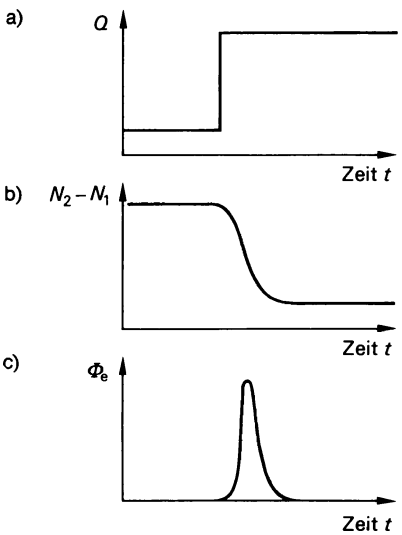


Abb. 6.136 Wirkungsweise des Güteschalters: **a**) Güte, **b**) Besetzungsinversion, **c**) Ausgangsleistung

Tabelle 6.14 Anwendungen des Lasers

Optische Messtechnik	Materialbearbeitung	Nachrichtentechnik	Medizin und Biologie
Interferometrie, Holografie, Spektroskopie, Entfernungsmessung über Laufzeit von Laserpulsen, Laser-Radar, Leitstrahl beim Tunnel-, Straßen- und Brückenbau.	Bohren, Schweißen, Schneiden, Aufdampfen; Auswuchten und Abgleichen von rotierenden und schwingenden Teilen; Trimmen von Widerständen.	optische Nachrichtenübertragung durch modulierte Lichtpulse. Signale von Halbleiterlasern werden in Glasfasern geführt. – Optische Datenspeicherung und -wiedergabe, Beispiel: Tonwiedergabe von digitaler Schallplatte, Compact-Disc.	Anheften der Netzhaut bei Ablösung; Durchbohren verschlossener Blutgefäße; Zerstörung von Krebszellen; Schneiden von Gewebe; Zahnbehandlung.

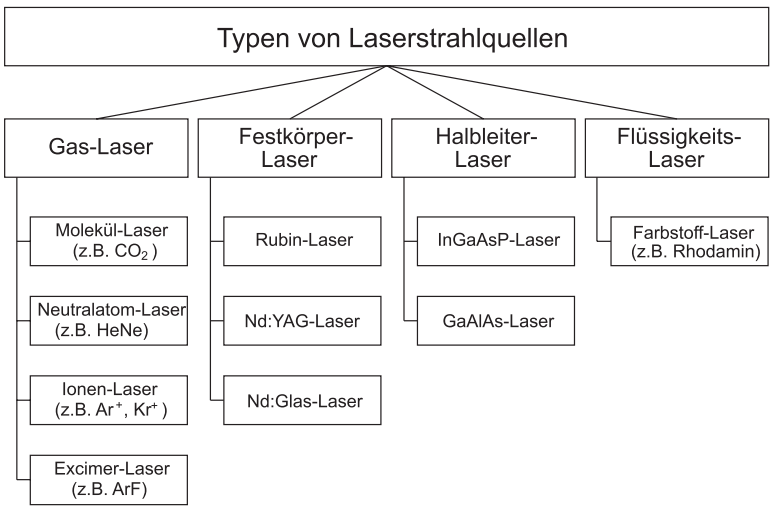


Abb. 6.137 Übersicht über verschiedene Typen von Laserstrahlquellen

können beispielsweise die in Abschn. 6.4.2.3 und 6.4.2.4 beschriebenen elektro- und magnetooptischen Zellen in den Resonator eingebaut werden.

Die hervorstechendsten Eigenschaften des Laserlichts sind die *hohe Monochromasie* und die damit zusammenhängende *räumliche und zeitliche Kohärenz*. Von der Vielzahl der Anwendungen des Lasers zeigt Tabelle 6.14 eine Auswahl.

Jeder Laser benötigt ein *aktives Medium*, in dem, wie bereits beschrieben, eine *Besetzungsinversion* herbei geführt werden muss. Je nach Art dieses Mediums werden verschiedene *Lasertypen* unterschieden (Abb. 6.137). Diese werden im Folgenden beschrieben.

Gaslaser

Je nach verwendeter Art des Gases unterscheidet man zwischen folgenden Lasertypen:

- *Molekül-Laser*: Der CO_2-Laser wird in der Fertigungstechnik am häufigsten eingesetzt. Dem Gas CO_2 sind noch N_2 und He zugesetzt. Die Laserenergie bei CO_2 sind

bestimmend. N_2-Molekule übertragen die Energie durch Stöße auf die CO_2-Moleküle. Die Gastemperatur von CO_2 darf dabei 150 °C nicht überschreiten, weil sonst der Lasereffekt nicht mehr eintreten kann. Helium hat eine gute Wärmeleitfähigkeit und transportiert die frei werdende Wärme nach außen. Die Wellenlänge liegt bei 10,6 µm (fernes Infrarot). Die Haupteinsatzgebiete liegen bei der *Materialbearbeitung*.

- *Neutralatom-Laser*: Der wichtigste Laser ist der HeNe-Laser. Das Lasermedium ist ein Gasgemisch aus Helium (5 bis 10 mal mehr) und Neon. Elektrisch angeregt wird zunächst das Helium, das seine Energie nahezu vollständig an das Neon abgibt. Die Wellenlänge liegt bei 633 nm (rot). Die Einsatzgebiete sind im Wesentlichen die Messtechnik.
- *Ionen-Laser*: Am häufigsten wird der Ar^+-Laser eingesetzt. Im grünen bis ultravioletten Spektralbereich werden Ausgangsleistungen bis zu 10 W erreicht.
- *Excimer-Laser*: Der wichtigste Vertreter ist der ArF-Laser. Er hat eine Wellenlänge von 175 nm bis 483 nm (ultraviolett). Eingesetzt wird er in der Materialbearbeitung von Kunststoff, Glas, Keramik und im menschlichen Auge zur Korrektur von Fehlsichtigkeit, ferner in der Messtechnik und in der Fotochemie.

Festkörperlaser

Festkörperlaser bestehen aus Kristallen oder Gläsern, die mit optisch aktiven Ionen dotiert sind. Sie werden optisch, mit Anregungslampen oder mit einem Diodenlaser gepumpt.

- *Rubin-Laser*: dieser Laser wurde als erster entwickelt. Er hat eine Wellenlänge von 694 nm.
- *Nd:YAG-Laser*: Dies ist der am meisten verbreitete Festkörperlaser. Das laseraktive Medium besteht aus einem Yttrium-Aluminium-Granat-Kristall, in dem Neodym-Ionen eingebettet sind. Die Wellenlänge liegt bei 1,064 µm bis 1,3 µm. Es sind Leistungen bis zu 1,8 kW möglich. Durch nachgeschaltete Verstärkerstufen kann die Ausgangsleistung weiter erhöht werden. Die Hauptanwendungsfelder sind die Materialbearbeitung.
- *Nd:Glas-Laser*: Die Wellenlänge liegt bei 1,06 µm (nahes Infrarot).

Halbleiterlaser (Diodenlaser)

Der Laser besteht aus einem Halbleitermaterial, das elektrisch angeregt wird. Der Aufbau ist ähnlich dem einer LED. Der Laser-Effekt kommt durch die Rekombination von Ladungsträgern in der Sperrschicht zustande (Abschn. 9.4.1.2). Im Unterschied zu einer LED kann die Laserdiode mit einer höheren Stromdichte betrieben werden. Die Kristall-Endflächen dienen als Spiegel des optischen Resonators. Typische Vertreter sind *InGaAsP-Laser* (570 nm bis 1,6 µm) und *GaAlAs-Laser* (780 nm bis 880 nm). Die Halbleiterlaser ermöglichen kleine Abmessungen. Deshalb werden sie häufig als Lichtquellen in CD-Spielern, bei optischen Plattenspeichern, bei Laserprintern und in der Nachrichtentechnik eingesetzt. Bei höheren Leistungen ab 2,5 kW können sie auch in der Materialbearbeitung Verwendung finden.

Flüssigkeitslaser

Sie bestehen aus organischen Farbstoffen in stark verdünnter Lösung und werden optisch mit Blitzlampen oder Lasern gepumpt. Sie finden Einsatz in der Spektroskopie, weil sie von 300 nm bis 1,2 µm einstellbar sind.

Ein nahezu paralleler Laserstrahl lässt sich mit einer Sammellinse ideal fokussieren und kann so der Materialbearbeitung dienen. Aufgrund der Beugung an der Linse erzeugt man allerdings keinen punktförmigen Fokus, sondern der Strahl mit dem Durchmesser D schnürt

sich zu einem minimalen Durchmesser d ein und wird dann wieder breiter. Für einen Strahl mit gaußförmiger Intensitätsverteilung gilt für den Taillendurchmesser in guter Näherung

$$d = \frac{4\lambda f'}{\pi D} . \qquad (6.147)$$

Bei guter Fokussierung und großer Strahlungsleistung wird die Bestrahlungsstärke so groß, dass alle absorbierenden Materialien verdampfen und auf diese Weise abgetragen werden.

Beispiel

6.5-2 Wie groß ist die Bestrahlungsstärke in der Taille eines CO_2-Lasers mit einem Strahldurchmesser von $D = 5\,\text{mm}$, der mit einer Linse der Brennweite $f' = 5\,\text{mm}$ fokussiert wird? Der Laser emittiert die Strahlungsleistung $\Phi_e = 1\,\text{kW}$ bei der Wellenlänge $\lambda = 10{,}59\,\mu\text{m}$.

Lösung

Der Taillendurchmesser ist nach (6.147)

$$d = \frac{4 \cdot 10{,}59 \cdot 10^{-6}\,\text{m}\,5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1{,}35 \cdot 10^{-5}\,\text{m} .$$

Damit ist die Fläche der Taille $A = 1{,}43 \cdot 10^{-10}\,\text{m}^2$ und die Bestrahlungsstärke

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A} = 7 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 7 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{W}}{\text{cm}^2} .$$

Bestrahlungsstärken dieser Intensität sind weit größer, als man sie mit konventionellen Lichtquellen erzeugen kann (Ü 6.3-3). Bei *Riesenimpulslasern* (Festkörperlaser oder CO_2-Laser mit Q-switch) lassen sich im Puls Leistungen von 100 MW und Bestrahlungsstärken von $10^{13}\,\text{W/cm}^2$ erzielen. Bei kontinuierlich arbeitenden CO_2-Lasern erreicht man Leistungen von über 10 kW und Bestrahlungsstärken von mehr als $5\,\text{GW/cm}^2$.

6.5.5 Materiewellen

6.5.5.1 De-Broglie-Beziehung

Stimuliert durch die Erfolge der Einstein'schen Lichtquantenhypothese, in der den klassischen elektromagnetischen Wellen Teilcheneigenschaften zugeschrieben wurde, postulierte 1924 der französische Physiker L. de Broglie (1892 bis 1987), dass die bisher als Teilchen interpretierten Elektronen auch Welleneigenschaften aufweisen sollten. Die Wellenlänge λ dieser *Materiewellen* sollte nach *de Broglie* mit dem Impuls p der Teilchen nach (6.139) zusammenhängen:

$$\lambda = \frac{h}{p} . \qquad (6.148)$$

Schnelle Elektronen mit großem Impuls haben demnach eine kleine Wellenlänge. Beschleunigt man ein Elektron in einem elektrischen Feld mit der Beschleunigungsspannung U, dann lässt sich seine Endgeschwindigkeit aus der Zunahme der kinetischen Energie berechnen:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U, \quad v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} .$$

Der Impuls des Elektrons beträgt $p = mv = \sqrt{2 e U m}$. Somit ist die Materiewellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2e U m}} . \qquad (6.149)$$

Diese „klassische" Rechnung muss bei großen Beschleunigungsspannungen durch eine „relativistische" ersetzt werden, die dem Massenzuwachs bei großen Geschwindigkeiten Rechnung trägt (Abschn. 4.3.5.1, Abb. 4.57, und Kapitel 10). Dabei ergibt sich

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c \sqrt{\left(\frac{eU}{m_0 c^2} + 1\right)^2 - 1}} . \qquad (6.150)$$

Beschleunigungsspannungen um 1 kV rufen Wellenlängen hervor, die in der Größenord-

nung von Röntgenwellenlängen liegen. Falls die Elektronen wirklich Welleneigenschaften haben, sollte daher ein Elektronenstrahl, der auf ein Kristallgitter gerichtet ist, dieselben Beugungserscheinungen zeigen wie ein Röntgenstrahl.

Der erste Nachweis der *Elektronenbeugung* gelang 1927 C. Davisson und L. Germer an Nickel-Einkristallen. Mittlerweile wurden sämtliche mit Licht bzw. Röntgenstrahlung möglichen Beugungsexperiment (z. B. Beugung am Doppelspalt, an einer Kante und am Fresnel'schen Biprisma) auch mit Elektronenstrahlen nachvollzogen. Abbildung 6.138 zeigt Beugungserscheinungen, die mit Elektronenstrahlen aufgenommen wurden.

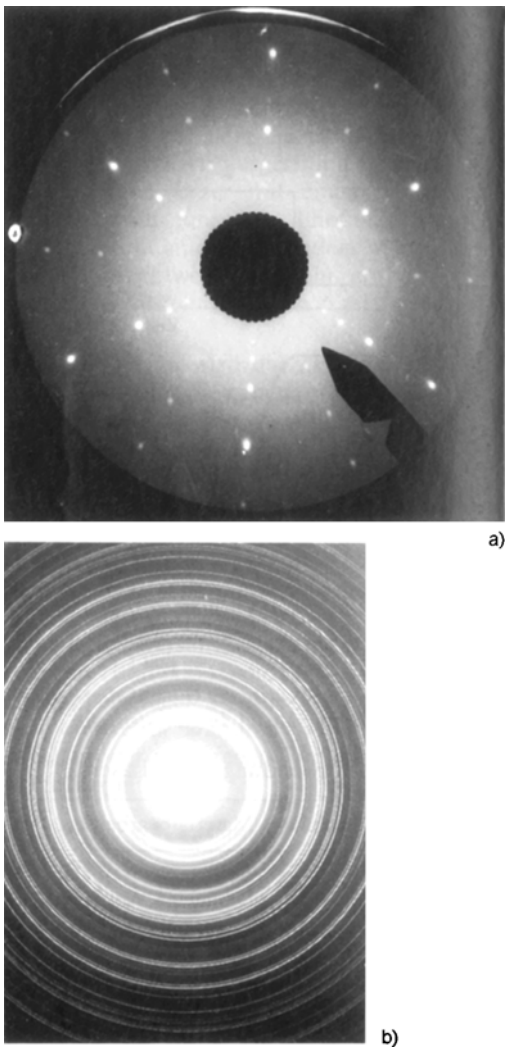


Abb. 6.138 Elektronenbeugung. **a**) Feinbereichsbeugung an einkristallinem Zirkonoxid ZrO_2 (Foto: Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart) **b**) Beugung an einer polykristallinen Zn-Cd-Schicht

Nicht nur mit Elektronen, sondern auch mit Protonen und Neutronen, sogar mit ganzen Atomen und großen Molekülen (z. B. C_{60}) können Beugungsexperimente durchgeführt werden. Daraus folgt:

> Alle Mikroteilchen tragen sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter in sich.

Die Interpretation des Wellencharakters schließt sich eng an die Erläuterungen in Abschn. 6.5.2 über Photonen an. Bei der Beugung am Doppelspalt nach Abb. 6.130 werden die einzelnen Teilchen als Ganzes an diskreten Orten nachgewiesen. Die klassisch berechnete Intensitätsverteilung gibt lediglich die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen an einem bestimmten Ort anzutreffen.

Die Materiewellen werden durch eine Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ mit einer Wellenlänge λ beschrieben, die durch die De-Broglie-Beziehung (6.148) gegeben ist. Nach M. Born (1882 bis 1970) ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort (x, y, z) anzutreffen, gegeben durch $|\Psi(x, y, z)|^2$.

Die Wellennatur der Elektronen wird besonders eindrucksvoll beim *Elektronenmikroskop* demonstriert (Abschn. 6.6).

6.5.5.2 Heisenberg'sche Unschärferelation

Bei der in Abschn. 6.4.1.4 beschriebenen Beugung des Lichtes am Spalt wurde gezeigt, dass die Beugungsfigur eines Spaltes umso breiter wird, je enger der Spalt ist. Dieser gegenläufige Effekt ist von grundlegender Bedeutung

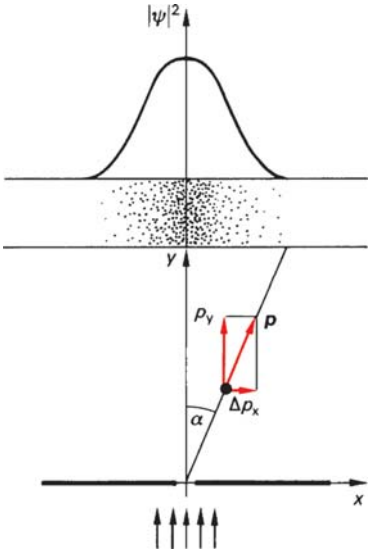


Abb. 6.139 Zur Ableitung der Heisenberg'schen Unschärferelation: Beugung von Elektronen an einem Spalt

für die Quantenmechanik; er sei anhand der in Abb. 6.139 skizzierten Beugung eines Elektronenstrahls an einem Spalt erläutert.
Schickt man einen parallelen Elektronenstrahl durch einen Spalt, so entsteht auf einem Schirm eine Verteilung der gebeugten Elektronen, die durch das Punktmuster angedeutet ist. Die Auftreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ der Elektronen entspricht der klassischen Beugungsfunktion (6.113). Ein Teilchen, das unter dem Winkel α zur primären Strahlrichtung austritt, muss zusätzlich zu seinem Impuls in Strahlrichtung auch eine Impulskomponente Δp_x senkrecht dazu haben. Diese seitliche Impulskomponente muss das Teilchen beim Beugungsvorgang am Spalt erhalten haben. Da bei enger werdendem Spalt immer größere Winkel α auftreten, sind damit auch immer größere Impulse Δp_x in x-Richtung verknüpft. Alle Elektronen, die am Beugungsvorgang beteiligt sind müssen durch den Spalt hindurchgetreten sein. Die Spaltbreite Δx gibt also die Genauigkeit an, mit der der Ort der Elektronen in der Spaltebene angegeben werden kann.
Beschränkt man sich auf die erste Beugungsordnung, dann ist der maximal mögliche Winkel α, unter dem die Elektronen auftreten, nach (6.114) $\sin\alpha = \lambda/\Delta x$. Andererseits ist nach Abb. 6.139 $\sin\alpha = \Delta p_x/p$ und damit $\Delta p_x/p = \lambda/\Delta x$.
Die Elektronen haben eine Materiewellenlänge λ, die nach der De-Broglie-Beziehung (6.148) mit dem Impuls p verknüpft ist: $\lambda = h/p$. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{p\,\Delta x} \quad \text{oder} \quad \Delta x\,\Delta p_x = h\,.$$

Da für die höheren Beugungsordnungen noch größere Winkel α und damit größere Impulskomponenten Δp_x auftreten, gilt allgemein

$$\Delta x \Delta p_x \geqq h\,. \qquad (6.151)$$

Dies ist die *Heisenberg'sche Unschärferelation,* die von W. Heisenberg 1927 gefunden wurde. Sie verknüpft die Messfehler von Orts- und Impulsbestimmung miteinander (Abschn. 8.2.3):

> Je genauer der Ort eines Teilchens festgelegt wird, umso ungenauer lässt sich sein Impuls bestimmen und umgekehrt.

In der makroskopischen Physik tritt die Unschärferelation nicht in Erscheinung, weil der Zahlenwert der Planck'schen Konstanten h sehr klein ist.

Zur Übung

Ü 6.5-1 UV-Licht einer Quecksilberdampf-Lampe mit der Wellenlänge $\lambda = 253{,}7$ nm fällt auf eine Cäsium-Oberfläche ($W_A = 2{,}14$ eV). a) Welche kinetische Energie haben die emittierten Fotoelektronen? b) Wie groß ist ihre Geschwindigkeit?

Ü 6.5-2 Ein Laserstrahl mit der Wellenlänge $\lambda = 647\,\text{nm}$ hat die Strahlungsleistung $\Phi_e = 100\,\text{mW}$. Wie viel Photonen $\dot{N}$ je Sekunde werden transportiert?

Ü 6.5-3 Röntgenstrahlen mit der Wellenlänge $\lambda = 70{,}94 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$ werden an Elektronen gestreut. Wie groß ist der maximale Energieverlust der Röntgenquanten?

Ü 6.5-4 Sichtbares Licht hat die Wellenlängen $380\,\text{nm} \leqq \lambda \leqq 780\,\text{nm}$. In welchem Bereich liegen die Energien der sichtbaren Photonen?

Ü 6.5-5 Die Nachweisgrenze des menschlichen Auges liegt für gelbes Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 590\,\text{nm}$ bei der Strahlungsleistung $\Phi_e = 1{,}7 \cdot 10^{-18}\,\text{W}$. Wie viele Lichtquanten $\dot{N}$ müssen demnach je Sekunde auf die Netzhaut fallen, damit ein Nervenreiz ausgelöst wird?

Ü 6.5-6 Ein He-Ne-Laser mit der Wellenlänge $\lambda = 633\,\text{nm}$ und dem Strahldurchmesser $D = 2\,\text{mm}$ wird mit einer Linse mit der Brennweite $f' = 150\,\text{mm}$ fokussiert. Berechnen Sie die Bestrahlungsstärke E_e in der Taille, wenn die Laserleistung $\Phi_e = 0{,}6\,\text{mW}$ ist.

Ü 6.5-7 Ein Geschoss mit der Masse $m = 40\,\text{g}$ fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 1000\,\text{m/s}$. Wie groß ist die zugehörige Materiewellenlänge? Wieso beobachtet man keine Beugungseffekte?

Ü 6.5-8 Thermische Neutronen haben die Energie $E = 25\,\text{meV}$. Wie groß ist die De-Broglie-Wellenlänge? Die Neutronenmasse ist $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit typischen Gitterkonstanten von Kristallen.

6.6 Abbildung mikroskopischer Objekte

6.6.1 Beugungsbegrenzte Abbildung

Instrumente, die zur Vergrößerung kleinster Objekte gebaut werden, stoßen irgendwann an die Grenzen ihre Auflösungsvermögens (Abschn. 6.4.1.5). Dies kommt daher, dass die geometrische Optik versagt, wenn die Dimensionen der Gegenstände in die Größenordnung der Lichtwellenlänge kommen. Infolge der Beugung an Linsenfassungen, Aperturblenden und an den zu untersuchenden Objekten selbst, ist das Auflösungsvermögen begrenzt.

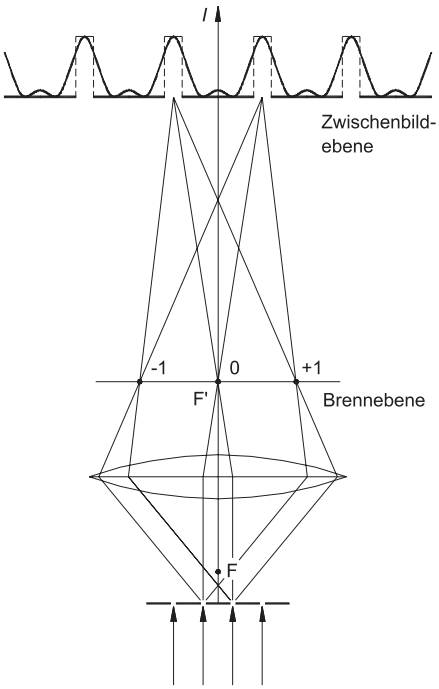


Abb. 6.140 Bildentstehung im Mikroskop nach Abbe

Die Abbe'sche Theorie der Bildentstehung in einem Mikroskop geht davon aus, dass ein Objekt mit feiner Strukturierung durchstrahlt wird (Abb. 6.140). Denkt man sich als Objekt ein Strichgitter mit dem Strichabstand g, so wird das Licht an den Spalten gebeugt und tritt dann ins Objektiv des Mikroskops ein. In Abb. 6.140 sind der Übersichtlichkeit halber nur die Beugungsordnungen $m = 0$ und ± 1, ausgehend von zwei Spalten, gezeichnet. Die parallelen Strahlen werden in der Brennebene des Objektivs vereinigt und erzeugen dort das *primäre Bild* (hier die drei Punkte mit $m =$

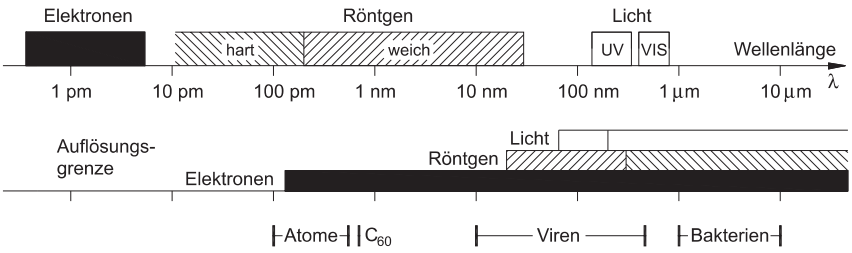


Abb. 6.141 Verwendete Wellenlängen und Auflösungsgrenzen beugungsbegrenzter Mikroskope

−1, 0, +1). In der Zwischenbildebene (s. auch Abb. 6.54) entsteht dann als *sekundäres Bild* das vergrößerte Abbild des Objektes. Die Intensitätsverteilung in der Bildebene kommt durch die Interferenz der drei von den Beugungspunkten ausgesandten Wellen zustande. Sie entspricht also hier der Gitterfunktion eines Dreifachspaltes ((6.120), Abb. 6.93).

Die in Abb 6.140 gezeigte Intensitätsverteilung am Ort des Zwischenbilds hat nur eine sehr grobe Ähnlichkeit mit dem Objekt. Das Bild wird dem Objekt immer ähnlicher, je mehr Beugungspunkte in der Brennebene entstehen, also je mehr höhere Beugungsordnungen ins Objektiv eintreten und an der Abbildung mitwirken (Vielstrahlinterferenz, Abb. 6.93). Im Idealfall ergibt sich schließlich die gestrichelte Intensitätsverteilung. Blendet man andererseits alle Beugungsordnungen $|m| \geq 1$ aus, sodass nur noch die nullte Ordnung an der Abbildung teilnimmt, dann ergibt sich ein gleichmäßig hell ausgeleuchtetes Gesichtsfeld, das keinerlei Informationen mehr über das abzubildende Objekt enthält. Die Voraussetzung dafür, dass überhaupt eine Struktur mit einer gewissen Ähnlichkeit zum Objekt in der Bildebene entsteht, ist, dass außer der nullten wenigstens eine erste Beugungsordnung ins Objektiv eintritt.

Für den in Abb. 6.140 dargestellten Fall gilt, dass das Objektiv so groß ist, dass die Ordnungen $m = \pm 1$ mitwirken. Nach (6.121) treten die Hauptmaxima erster Ordnung auf unter dem Winkel $\sin \alpha_1 = \lambda/g$. Ist der maximale Öffnungswinkel α ebenso groß, dann ist der kleinste aufzulösende Abstand in der Objektebene

$$y_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} .$$

Enthält der Raum zwischen Objekt und Objektiv eine *Immersionsflüssigkeit* mit Brechungsindex n, dann wird die Wellenlänge um n reduziert und es gilt

$$y_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} .$$

Das Produkt aus Brechzahl und Sinus des Öffnungswinkels wird als *numerische Apertur* bezeichnet (6.15):

$$A_N = n \sin \alpha .$$

Damit gilt für den kleinsten aufzulösenden Objektabstand

$$y_{\min} = \frac{\lambda}{A_N} . \qquad (6.152)$$

Werden bei schiefer Durchleuchtung des Objekts zur Abbildung lediglich die Beugungsordnungen $m = 0$ und +1 verwendet, dann wird die Auflösungsgrenze noch ungefähr um den Faktor 2 reduziert.

Trockensysteme haben eine numerische Apertur von $A_N < 0{,}95$. Mit Immersionsflüssigkeit kommt man auf Werte von $A_N < 1{,}6$ (Abb. 6.55, $A_N = 1{,}4$).

Grob gesprochen ist nach (6.152) das Auflösungsvermögen eines Mikroskops begrenzt auf Objektdetails von der Größe der Wellenlänge. Durch Verwendung von kürzeren Wellenlängen bei UV-, Röntgen- und Elektronenmikroskopen konnte die Auflösungsgrenze bis in atomare Dimensionen vorangetrieben werden (Abb. 6.141).

Das *Lichtmikroskop* arbeitet mit sichtbarem Licht (VIS), das mittels Glaslinsen die Abbildung und Vergrößerung des Gegenstandes bewirkt (Abschn. 6.2.7.3). Für eine Bildentstehung sind gefärbte oder geätzte Präparate erforderlich, die das Licht amplitudenmodulieren. Optische Kontrastierungsverfahren erlauben auch Untersuchungen an unveränderten Präparaten. Durchlichtpräparate müssen dünn geschnitten, Auflichtpräparate geschliffen und poliert sein. Das Lichtmikroskop erreicht die theoretische Auflösung nach (6.152). In der Praxis wird eine minimale Auflösung von etwa 200 nm erreicht.

Das *UV-Mikroskop* arbeitet mit UV-Strahlung im Bereich von 340 nm bis 193 nm. Zur Abbildung sind Quarzlinsen erforderlich. Die Präparate müssen UV-Strahlung absorbieren, reflektieren oder in längerwelliges Lumineszenzlicht umwandeln. Auch beim UV-Mikroskop wird die theoretische Auflösungsgrenze nach (6.152) erreicht. In der Halbleiter-Fotolithografie mit $\lambda = 193\,\text{nm}$ (ArF-Excimerlaser) werden standardmäßig Strukturen mit 65 nm Abstand hergestellt, die im Labor bereits auf 30 nm reduziert wurden.

Lange Zeit galt es unmöglich, ein *Röntgenmikroskop* zu bauen, weil der Brechungsindex von Gläsern für Röntgenstrahlen nahe bei 1 liegt ($n = 1 - \delta$, mit $\delta \approx 10^{-3}$), Röntgenstrahlen also praktisch nicht gebrochen werden. Möglich ist eine Reflexion an Kristallgittern bei streifendem Einfall (Abschn. 6.4.1.8, Abb. 6.105). Heute können Röntgenlinsen aus Fresnel'schen Zonenplatten (Abb. 6.108) hergestellt werden. Beim Transmissions-Röntgenmikroskop (TXM) wird monochromatische Strahlung einer starken Röntgenquelle (z. B. Synchrotronstrahlung) mithilfe einer Zonenplatte (Kondensor) auf das Objekt fokussiert. Die durchgehenden Strahlen erzeugen dann mittels einer weiteren Zonenplatte (Objektiv) ein stark vergrößertes Bild, das mit einer CCD-Kamera aufgenommen wird. Die numerische Apertur ist typischerweise $A_\text{N} \approx 0{,}05$, sodass nach (6.152) eine Auflösung vom Zwanzigfachen der Wellenlänge erwartet wird. Die tatsächliche Auflösung entspricht etwa der Breite des äußersten Rings der Zonenplatte. Praktisch erreicht man mit weicher Röntgenstrahlung eine Auflösung von etwa 20 nm. Besonders interessant sind die Wellenlängen zwischen 2,4 nm und 4,4 nm, dem so genannten „Wasserfenster". Dort absorbieren organische Substanzen wesentlich stärker als Wasser, sodass ein guter Kontrast entsteht. Es lassen sich somit biologische Präparate in wässriger Lösung untersuchen. Harte Röntgenstrahlung ($E_\text{ph} > 10\,\text{keV}$) lässt sich mit brechenden konkaven Metall-Linsen (Al) fokussieren. Damit wurden Auflösungen von etwa 300 nm erzielt.

Das *Elektronenmikroskop*, hier das Transmissions-Elektronenmikroskop (TEM) arbeitet mit Elektronen, die beschleunigt werden mit Spannungen zwischen 50 kV und 3 MV. Nach (6.150) ergeben sich dadurch Materiewellenlängen von 5,4 pm bis 360 fm. Die Elektronenstrahlen werden mit elektrostatischen bzw. elektromagnetischen Linsen fokussiert. Der Aufbau entspricht dem klassischen Lichtmikroskop. Wegen der großen Öffnungsfehler der Elektronenlinsen muss die Apertur sehr klein gemacht werden ($A_\text{N} \approx 0{,}04$). Dadurch ist die Auflösungsgrenze deutlich größer als

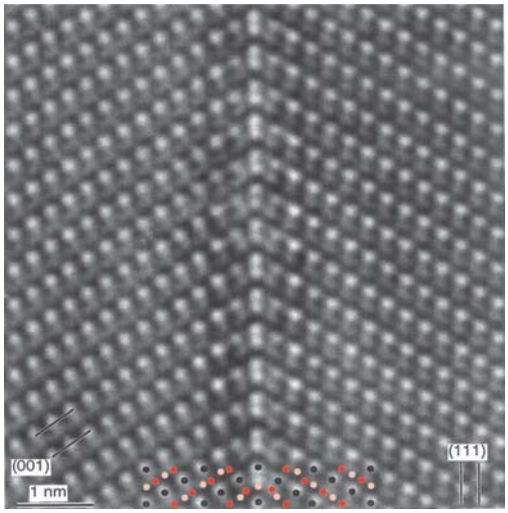


Abb. 6.142 Hochauflösende TEM-Aufnahme einer $\Sigma 3$ (111)-Korngrenze in Strontiumtitanat. Das eingesetzte Strukturmodell zeigt die Positionen von Atomsäulen in der Korngrenze, die mittels quantitativer Bildauswertung bestimmt wurden. Aufnahme: O.Kienzle, MPI für Metallforschung, Stuttgart

die Wellenlänge. Praktisch erreicht ein 500 kV-Mikroskop eine Auflösung von etwa 100 pm. Man kann damit also Atome in Kristallgittern abbilden (Abb. 6.142). Weil Elektronen in Materie stark absorbiert werden, können nur ultradünn geschnittene, vakuumbeständige Präparate untersucht werden.

6.6.2 Überwindung der Beugungsbegrenzung

Die Beugungsbegrenzung der Auflösung lässt sich umgehen, wenn nicht das gesamte Objekt simultan abgebildet, sondern mithilfe einer Sonde abgerastert wird und die erhaltenen Informationen anschließend zu einem Bild zusammengesetzt werden. Die Auflösung der *Rastersondenmikroskopie* ist im Wesentlichen durch den Durchmesser der verwendeten Sonde sowie die Reichweite der Wechselwirkung zwischen ihr und der Probe bestimmt.

Rastertunnelmikroskop

Beim *Rastertunnelmikroskop* (Scanning Tunneling Microscope, STM), das 1981 von G. Binnig (geb. 1943) und H. Rohrer (geb. 1933) entwickelt wurde (Nobelpreis 1986), dient als Sonde eine extrem dünn ausgezogene Wolframnadel, deren Spitze im Idealfall durch ein Atom gebildet wird. Befindet sich die Spitze in einem Abstand von ungefähr 1 nm von der zu untersuchenden Oberfläche, dann überlappen sich die elektronischen Wellenfunktionen und es fließt zwischen Spitze und Probe ein *Tunnelstrom*, der extrem empfindlich (exponentiell) vom Abstand zwischen Probe und Spitze abhängt (Abschn. 8.2.6).

Um eine Abbildung der Probenoberfläche zu erhalten, wird die Spitze mittels Piezo-Stellgliedern zeilenförmig über die Probe bewegt (Abb. 6.143). Wird die Spitze in z-Richtung so gesteuert, dass der Tunnelstrom konstant bleibt, dann folgt die Spitze allen Erhebungen und Vertiefungen der abgerasterten Oberfläche. Die Spannung U_z am Piezokristall, der die z-Bewegung bewirkt, beinhaltet somit sämtliche Informationen über die Topographie der Probenoberfläche, so dass damit auf elektronischem Weg ein Rasterbild der Oberfläche erzeugt werden kann.

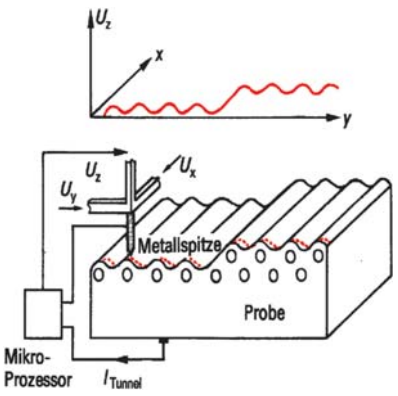


Abb. 6.143 Rastertunnelmikroskop, Messprinzip. Werkbild IBM, Zürich

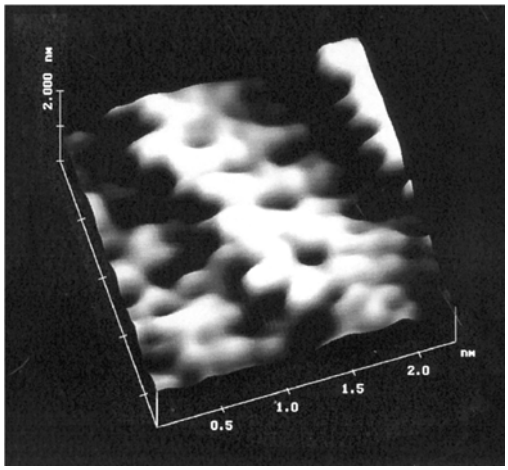


Abb. 6.144 Rastertunnelmikroskop: Cu-Phthalocyanin-Moleküle eines auf einer (111)-Si-Oberfläche aufgedampften 50 nm dicken Films. Aufnahme: Renate Hiesgen, Hochschule Esslingen, Dieter Meissner, Fachhochschule Wels, Österreich

Die Auflösung des Tunnelmikroskops beträgt in lateraler Richtung etwa 200 pm und ist in vertikaler Richtung kleiner als 10 pm. Man kann damit also einzelne Atome abbilden (Abb. 6.144). Damit ein Tunnelstrom fließen kann, müssen die zu untersuchenden Präparate elektrische leitfähig sein.

Rasterkraftmikroskop

Proben, die nicht elektrisch leitend sind, können mit dem *Rasterkraftmikroskop* (Atomic Force Microscope, AFM) untersucht werden. Dieses ist eine Weiterentwicklung des Rastertunnelmikroskops durch *G. Binnig*, *C. Quate* und *C. Gerber* im Jahr 1986. Dabei wird wieder mithilfe von Piezo-Stellgliedern mit einer sehr feinen Spitze (z. B. Si, SiN, Krümmungsradius 0,1 nm bis 10 nm) über die zu untersuchende Probe gerastert. Die Spitze befindet sich am Ende eines Biegebalkens (cantilever), der infolge der Wechselwirkungskraft zwischen Spitze und Probe verbogen wird. Diese Durchbiegung und damit die Stärke der

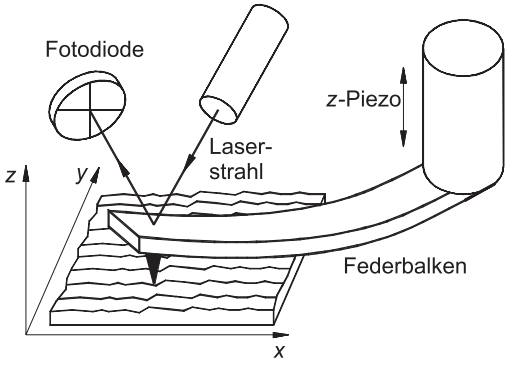


Abb. 6.145 Prinzip des Rasterkraftmikroskops

Kraft kann optisch detektiert werden über die Ablenkung eines reflektierten Laserstrahls auf einer positionsempfindlichen Fotodiode (Abb. 6.145). Regelt man die Höhe mithilfe des z-Piezos so, dass die Kraft konstant bleibt, so liefert die Spannung U_z wieder eine Information über die Topographie der Oberfläche und erlaubt die elektronische Erstellung eines dreidimensionalen Abbilds. Bei harten Proben ist eine laterale Auflösung von 100 pm erreichbar (Abb. 6.146).

Jenseits der einfachen Abbildung einer Oberfläche können mit dem Kraftmikroskop weitere Informationen über die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Probe gewonnen werden. Beispielsweise wird beim *Reibungsmikroskop* (Friction Force Microscope,

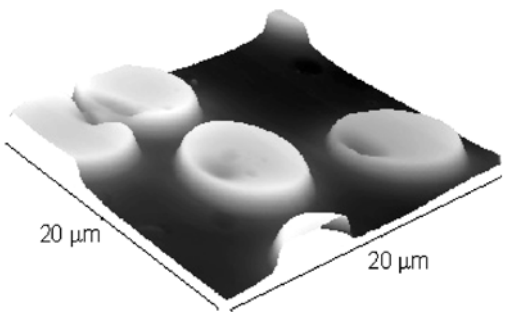


Abb. 6.146 AFM-Aufnahme von roten Blutkörperchen. Durchmesser ca. 8 µm, Höhe ca. 300 nm. Aufnahme: Jürgen Haiber, Physiklabor, Hochschule Esslingen

FFM) der Federbalken in lateraler Richtung (y-Richtung in Abb. 6.145) über die Probe bewegt. Durch das seitliche Verdrehen des Federbalkens kann die Reibungskraft in Abhängigkeit von der Normalkraft auf einer Nanometerskala untersucht werden.
Bilder der Oberfläche ergeben sich auch, wenn die Spitze die Oberfläche nicht berührt. Dazu wird der Federbalken zu vertikalen Schwingungen erregt (tapping mode). Die dicht über der Probenoberfläche schwingende Spitze wird durch van-der-Waals-Wechselwirkung mit den Atomen der Probe gedämpft und liefert so beispielsweise Informationen zur Adhäsion und Nano-Härte. Verwendet man Messsonden, die mit spezifischen chemischen Substanzen belegt sind, dann lässt sich eine Aussage machen über die chemische Zusammensetzung der Probenoberfläche (Chemical Force Microscope, CFM). Beschichtet man die Spitze mit einem ferromagnetischen Stoff, dann liefert die Wechselwirkung mit verschiedenen magnetischen Strukturen ein Bild der magnetischen Eigenschaften der Probe (Magnetic Force Microscope, MFM). Man kann damit beispielsweise magnetische Datenbits auf Computerfestplatten sichtbar machen.

Rasterelektronenmikroskop

Beim *Rasterelektronenmikroskop* (REM, engl. Scanning Electron Microscope, SEM) wird als Sonde ein mithilfe von magnetischen Linsen

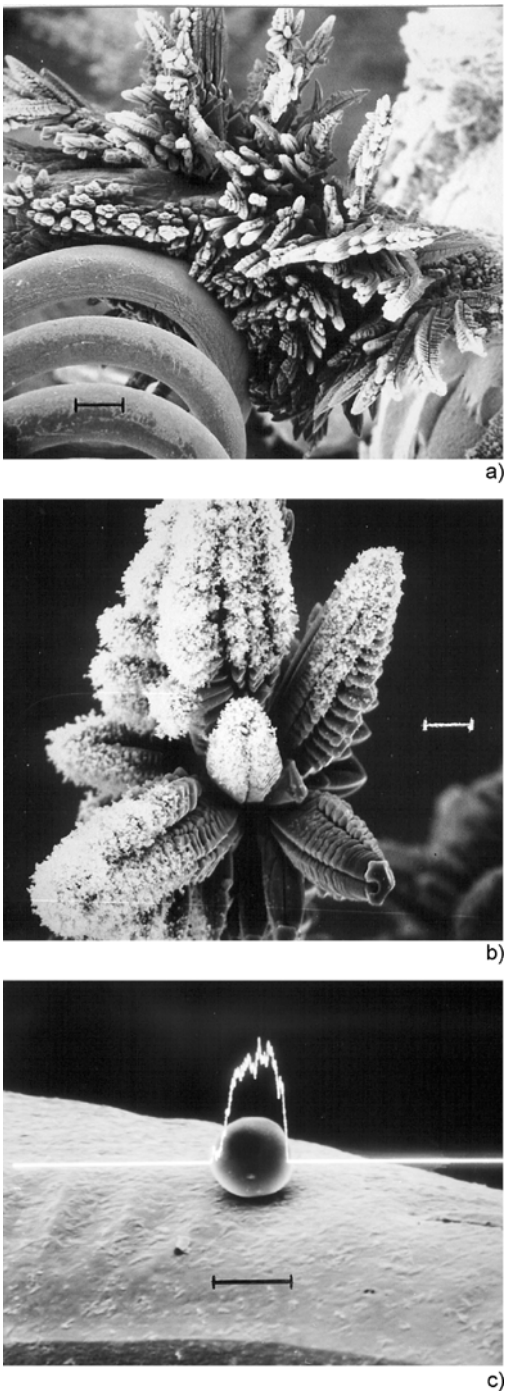


Abb. 6.147 REM-Aufnahmen einer durchgebrannten Lampenwendel. **a)** Wendel mit Wolframoxid, ▬ 100 µm, **b)** Ausschnittsvergrößerung vom oberen Bildrand des Teilbilds **a)**, ▬ 10 µm, **c)** aufgeschmolzenes Glaskügelchen mit Elementanalyse, ▬ 10 µm

erzeugter schlanker Elektronenstrahl scharf auf die Probe fokussiert. Rastert dieser die Probenoberfläche zeilenförmig ab, so werden teils die primären Elektronen zurück gestreut, teils aus der Probe Sekundärelektronen ausgelöst und mit einem Kollektor gesammelt. Mit dem daraus gewonnenen elektronischen Signal wird die Helligkeit eines parallel dazu laufenden Fernsehmonitors gesteuert, so dass auf dem Monitor ein vergrößertes Abbild der Oberfläche entsteht (Abb. 6.147).

Die Bedeutung der REM-Bilder liegt nicht so sehr in der erzielbaren Vergrößerung (Auflösungsgrenze etwa 10 nm), als vielmehr in der enormen Schärfentiefe und Plastizität der Bilder. Abbildung 6.147a zeigt die Wendel der Lampe eines Kfz-Scheinwerfers. Der Glaskolben wurde bei einem Unfall zerstört, so dass die Wendel durchbrannte und das entstehende Wolframoxid sich auf den kälteren Bereichen niederschlug. Die große Schärfentiefe zeigt sich auch in der Ausschnittsvergrößerung von Abb. 6.147b.

Der Elektronenstrahl löst beim Rastern nicht nur Elektronen aus der Oberfläche aus, sondern auch charakteristische Röntgenstrahlung (Abschn. 8.5). Mithilfe der *Röntgenfluoreszenzanalyse* (RFA) kann somit eine Materialbestimmung des untersuchten Objekts durchgeführt werden. Abbildung 6.147c zeigt ein auf der heißen Glühwendel aufgeschmolzenes Glaskügelchen sowie die Konzentration von Silicium längs der horizontalen Linie.

Die im REM untersuchten Präparate müssen vakuumfest und elektrisch leitend sein. Nichtleitende Substanzen werden mit einer dünnen Goldschicht besputtert und dadurch leitend.

Optisches Nahfeldmikroskop

Dass auch bei einer optischen Abbildung die Beugungsbegrenzung überwunden werden kann, wenn im Nahfeld anstatt im Fernfeld gemessen wird, hat der Ire *E. Synge* bereits 1928

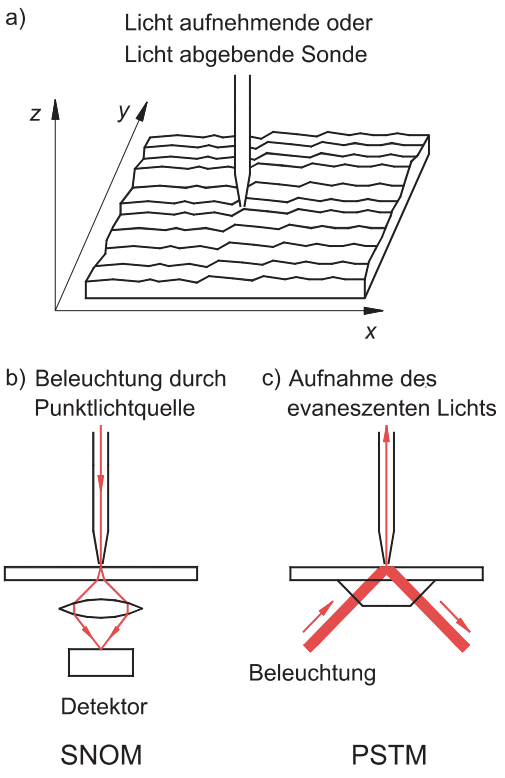


Abb. 6.148 Optische Nahfeldmikroskopie, **a**) Messprinzip, **b**) SNOM, **c**) PSTM

erkannt. Die technischen Probleme konnten aber erst Mitte der 1980er Jahre gemeistert werden. Bei der *optischen Nahfeldmikroskopie* wird wie beim Rastertunnel- oder Rasterkraftmikroskop die Probenoberfläche abgerastert. Die Sonde, meist eine angespitzte Glasfaser mit einem Krümmungsradius von einigen Nanometern, wird mittels Piezo-Stellgliedern in einem Abstand von wenigen Nanometern über die Probe bewegt (Abb. 6.148a. Dabei kann die Sonde entweder das Objekt beleuchten oder vom Objekt abgegebenes Licht weiterleiten oder beides. Die zwei wichtigsten Modifikationen sind in Abb. 6.148b und c dargestellt.

Beim Scanning Near-Field Optical Microscope (SNOM) dient die Spitze zur Beleuchtung. Um

das Licht möglichst punktförmig auf die Probe zu bringen, wird eine dünn ausgezogene oder geätzte Glasfaser metallisiert (z. B. durch Bedampfen mit Aluminium), sodass am unteren Ende nur eine winzige Öffnung (Apertur) bleibt, durch die das Licht austritt. Da Licht in Al ca. 6 nm tief eindringt, ist der kleinstmögliche Aperturdurchmesser 12 nm. Das von der Probe transmittierte (oder reflektierte) Licht wird von einem Fotodetektor nachgewiesen.

Beim Photon Scanning Tunneling Microscope (PSTM) wird das Objekt so beleuchtet, dass Totalreflexion auftritt. Dabei erstreckt sich das elektromagnetische Feld geringfügig über die Probenoberfläche hinaus mit exponentiell abnehmender Feldstärke. Dieses so genannte evaneszente Feld kann von einer Spitze „angezapft" werden. Es tunneln also quasi Photonen von der Probe zur Glasfaser, die in diesem Fall nicht metallisiert sein muss und das Licht zu einem Detektor weiter leitet.

Je feiner die Spitze und je kleiner der Abstand zur Probenoberfläche ist, umso besser ist das Auflösungsvermögen und zwar unabhängig von der Wellenlänge. Eine typische Auflösungsgrenze ist etwa 20 nm, die aber mit speziellen Spitzen und Methoden auf etwa 1 nm verbessert werden kann. Die schwierige Aufgabe der Abstandsregelung zwischen Spitze und Probe wird mit den Methoden, die bereits vom AFM her bekannt sind (tapping mode) realisiert.

Mit dem optischen Nahfeldmikroskop können nicht nur materielle Objekte abgebildet, sondern auch das Lichtfeld selbst vermessen werden. Abbildung 6.149 zeigt einen durch ein Gitter von Bohrungen gebildeten photonischen Kristall, in dem Licht einer bestimmten Wellenlänge gefangen ist. Mittels einer unbeschichteten Faserspitze wurde das evaneszente Feld (Abb. 6.148c) an der Oberfläche des photonischen Kristalls abgetastet und damit die Feldverteilung der eingeschlossenen Lichtwelle sichtbar gemacht.

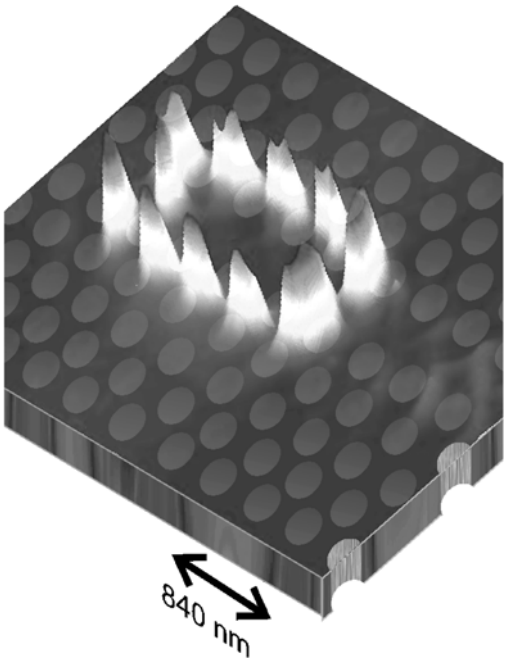


Abb. 6.149 PSTM-Bild der Moden des Lichtfeldes, das in einem photonischen Kristall lokalisiert ist. Wellenlänge 1,56 µm, Auflösung 250 nm. Aufnahme: Sushil Mujumdar, Nano-Optics Group, ETH Zürich

Kapitel 7
Akustik

7

7

7 Akustik

7.1 Einführung 613
7.2 Schallwellen 614
7.2.1 Schallausbreitung 614
7.2.2 Schallwandler 619
7.2.3 Schallwellen an Grenzflächen 624
7.3 Schallempfindung 630
7.3.1 Physiologische Akustik 630
7.3.2 Musikalische Akustik 634
7.4 Technische Akustik 638
7.4.1 Raumakustik 638
7.4.2 Luftschalldämmung 641
7.4.3 Körperschalldämmung 642
7.4.4 Strömungsgeräusche 645
7.4.5 Ultraschall 647
7.4.6 Schalleinsatz 649

7 Akustik

7.1 Einführung

Die Akustik beschäftigt sich mit der Ausbreitung von *Longitudinalwellen* in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern. Abbildung 7.1 zeigt eine Übersicht über das Fachgebiet Akustik. Von besonderer Bedeutung sind die Ausbreitung von Schall in Luft und die beim Menschen ausgelöste Schallempfindung. Je nach Frequenzverlauf und Amplitude wird Schall in *Ton* (eine Schallfrequenz, sinusförmiger Amplitudenverlauf), *Geräusch* (breitbandiges Frequenzspektrum, stark schwankender Amplitudenverlauf) oder *Knall* (sehr breitbandiges Frequenzspektrum mit nahezu konstantem Amplitudenverlauf) eingeteilt.

Bei der *Schallausbreitung* unterscheidet man die *geometrische Akustik* mit geradlinigen Schallwegen im Raum und den Schallreflexionen an den raumumschließenden Flächen, die *Schallabsorption*, die die Raumakustik und den empfangenen Schallpegel bestimmt, sowie die *Schalldämmung* als Schallschutz zwischen benachbarten Räumen.

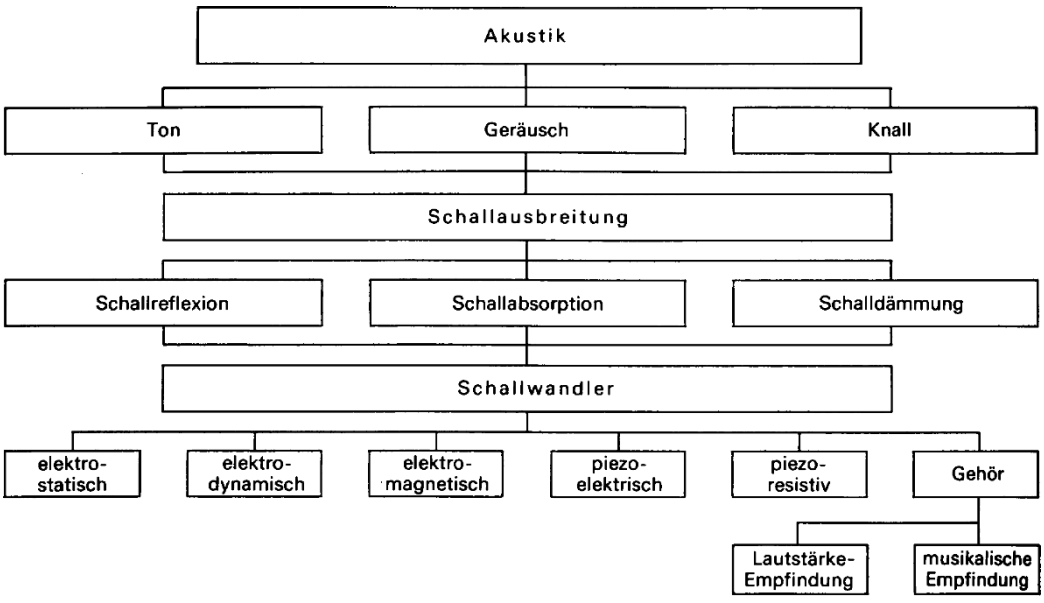


Abb. 7.1 Strukturbild Akustik

Die Schallwechseldrücke erstrecken sich über mehr als sechs, die Schallfrequenzen über mehr als zehn Zehnerpotenzen. Je nach Schalldruckbelastung, Schallfrequenzbereich und Wirkungsgrad werden *elektroakustische Wandler* nach dem elektrostatischen, elektrodynamischen, elektromagnetischen, piezoelektrischen oder piezoresistiven Prinzip verwendet. Von besonderer Bedeutung ist als *biologischer akustischer Wandler* das *menschliche Gehör* sowie dessen Lautstärke- und Schallfrequenzempfindung.

7.2 Schallwellen

7.2.1 Schallausbreitung

Schall ist die Ausbreitung lokaler Druckschwankungen in Medien. Der Zusammenhang zwischen den räumlichen und zeitlichen Druckzuständen bei der Schallausbreitung wird im Folgenden für den mathematisch einfacheren Fall der Ausbreitung einer eindimensionalen ebenen Kompressionsstörung wiedergegeben. In dem in Abb. 7.2 dargestellten säulenförmigen Volumenelement ΔV mit der Querschnittsfläche S ändert sich räumlich der Druck in Ausbreitungsrichtung x längs der Säulenachse. Das Zusammenschieben der Moleküle mit der Auslenkungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, der *Schnelle*, bewirkt eine *rücktreibende Kraft* $\boldsymbol{F}_{\text{rück}}$ die vom Druckunterschied an den Begrenzungsflächen des Volumenelements herrührt:

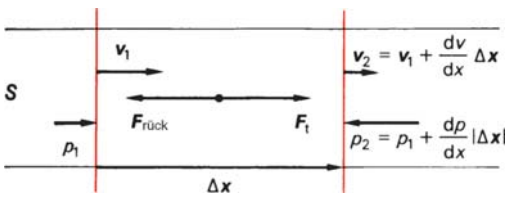


Abb. 7.2 Ausbreitung einer ebenen Schallwelle

$$\boldsymbol{F}_{\text{rück}} = -(p_2 - p_1)S\frac{\Delta \boldsymbol{x}}{|\Delta \boldsymbol{x}|} = -S\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\Delta \boldsymbol{x}\,. \tag{7.1}$$

Wegen der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ infolge der Druckstörung erfährt bei einer Dichte ϱ im Volumen V die Masse $m = \varrho V$ die *Trägheitskraft*

$$\boldsymbol{F}_{\text{t}} = -m\boldsymbol{a} = -\varrho V\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.2}$$

Aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht $\boldsymbol{F}_{\text{t}} + \boldsymbol{F}_{\text{rück}} = 0$ folgt der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ eines Volumens $V = S\Delta x$ und dem Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ einer räumlichen Druckstörung, das *hydrodynamische Grundgesetz:*

$$-S\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\Delta \boldsymbol{x} - \varrho\, V\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,. \tag{7.3}$$

Gleichung (7.3) geht aus den zeitabhängigen Navier-Stokes'schen Gleichungen der Hydromechanik (3.165) hervor, wenn man in diesen Differentialgleichungen die nichtlinearen Glieder vernachlässigt. Bei der Schallausbreitung sind die Geschwindigkeiten und Dichteänderungen so klein, dass diese Näherung zulässig ist.

Die Druckstörung verursacht im Volumen $V = S\Delta x$ einen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}x$ und damit verbunden eine zeitliche Volumenänderung $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$. Mit der Kontinuitätsbedingung folgt aus Abb. 7.2

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{V[t_1 + \mathrm{d}t] - V[t_1]}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{S\,[\Delta x + (v_2 - v_1)\,\mathrm{d}t] - S\Delta x}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{S\Delta x + S\left(v_1 + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Delta x - v_1\right)\mathrm{d}t - S\Delta x}{\mathrm{d}t}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{7.4}$$

Die Volumenänderung eines komprimierbaren Mediums ist über den Kompressionsmodul K mit der Druckänderung im Medium verknüpft; nach (2.158) und Abb. 2.80 gilt für ein Volumen V

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -\frac{V}{K} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{K}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.5}$$

Durch Gleichsetzung von (7.4) und (7.5) erhält man für den Zusammenhang zwischen einem räumlichen Geschwindigkeitsgefälle und der dadurch hervorgerufenen zeitlichen Druckänderung

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.6}$$

Durch Differentiation von (7.3) nach x und (7.6) nach t lassen sich die beiden Beziehungen verknüpfen:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x} = -\frac{1}{K}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\varrho} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,. \tag{7.7}$$

Gleichung (7.7) hat die Form der *d'Alembert'schen Wellengleichung* (5.194) (Abschn. 5.2.2.3). Wie dort gezeigt, erfüllen alle Druckfunktionen der Form $p(x,t) = p(x \pm c\,t)$ diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, c ist dabei die konstante Phasengeschwindigkeit, mit der sich die Störung im kompressiblen Medium ausbreitet. Im Fall der Ausbreitung von Druckstörungen wird die Phasengeschwindigkeit c als *Schallgeschwindigkeit* bezeichnet. Der Vergleich von (7.7) mit (5.194) ergibt, dass die Schallgeschwindigkeit c durch die Dichte ϱ und den Kompressionsmodul K bestimmt ist:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}\,. \tag{7.8}$$

Werden – wie bei Stoßwellenexperimenten – sehr große Dichtegradienten und Geschwindigkeitsänderungen erzeugt, sind die Näherungen des hydrodynamischen Grundgesetzes nicht mehr erfüllt. Die Druckausbreitung wird dann nicht durch die Differentialgleichung (7.7) beschrieben; insbesondere ist die Schallgeschwindigkeit nicht mehr konstant.
Sind die Querabmessungen bei *Festkörpern* klein gegen die Wellenlänge (z. B. dünner Stab), so tritt auch eine Querdehnung oder Kontraktion des Körpers ein. Dann muss anstelle des Kompressionsmoduls K der Elastizitätsmodul E gesetzt werden, sodass gilt:

$$c_{\text{dünner Stab}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,. \tag{7.9}$$

Die Druckänderung bei der Schallausbreitung in Gasen erfolgt im Vergleich zur Wärmeleitung so schnell, dass die Zustandsänderung isentrop ohne Wärmeübertragung verläuft.

Durch Differentiation folgt aus (3.66) $pV^{\varkappa} =$ konstant für isentrope Zustandsänderungen

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -\frac{V}{\varkappa p}$$

und durch Vergleich mit (7.5) für den isentropen Kompressionsmodul K idealer Gase

$$K = \varkappa p = \frac{c_\mathrm{p}\, p}{c_\mathrm{V}} \,. \tag{7.10}$$

$\varkappa$ ist der Isentropenexponent nach (3.60) (Abschn. 3.3.3), der vom Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten der Gase abhängt. Wird (7.10) mit Hilfe der Zustandsgleichung idealer Gase $p = \varrho R_\mathrm{i}\, T$ umgeformt und in (7.8) eingesetzt, so ergibt sich die *Schallgeschwindigkeit in Gasen* zu

$$c_\mathrm{Gas} = \sqrt{\varkappa R_\mathrm{i}\, T} = \sqrt{\frac{c_\mathrm{p}\, R_\mathrm{i}}{c_\mathrm{V}}\, T} \,. \tag{7.11}$$

Hierin sind c_p und c_V die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen und R_i die spezifische (massebezogene) Gaskonstante.

Beispiel

7.2-1 Es soll eine Näherungsgleichung für die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c_L in Luft abgeleitet werden.

Lösung

Werden die Werte $c_\mathrm{p} = 1{,}005\ \mathrm{J/(g\,K)}$, $c_\mathrm{V} = 0{,}717\ \mathrm{J/(g\,K)}$ und $R_\mathrm{i} = 287\ \mathrm{J/(kg\,K)}$ von Luft in (7.11) eingesetzt, so ergibt sich

$$c_\mathrm{L} = 331{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273{,}15\,^\circ\mathrm{C}}} \,.$$

Im metereologischen Temperaturbereich von etwa $-20\,^\circ\mathrm{C} < \vartheta < +40\,^\circ\mathrm{C}$ ist $\vartheta/273{,}15\,^\circ\mathrm{C} \ll 1$, sodass die Wurzel durch eine Reihenentwicklung genähert werden kann:

$$c_\mathrm{L} \approx 331{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta}{273{,}15\,^\circ\mathrm{C}}\right)$$
$$= \left(331{,}5 + 0{,}6\,\frac{\vartheta}{^\circ\mathrm{C}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \,.$$

Die Abweichungen der Werte der Näherungsgleichung sind im obigen Temperaturbereich kleiner als 0,2%.

Die Schallgeschwindigkeit einiger Festkörper, Flüssigkeiten und Gase enthält Tabelle 7.1.

Die Lösungsfunktion der Wellengleichung (7.7) hängt entscheidend von den Rand- und Anfangsbedingungen ab. Im einfachsten Fall der sinusförmigen Erregung durch einen eindimensionalen harmonischen Schallgeber mit der Erregerfrequenz f lautet die Lösung der Wellengleichung

$$p(x,t) = p_0 + p_\mathrm{w}$$
$$= p_0 + \hat{p}\cos\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \,. \tag{7.12}$$

Hierin ist p_0 der statische Gasdruck und $\hat{p}$ die Amplitude des Schallwechseldrucks p_w. Die Schnelleverteilung der Schallausbreitung ergibt sich aus der Differentiation von (7.12) nach x und Integration von (7.3) nach t zu

$$v(x,t) = \frac{1}{\varrho c}\hat{p}\cos\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \,. \tag{7.13}$$

Die *Schnelleamplitude* $\hat{v}$ beträgt also

$$\hat{v} = \frac{1}{\varrho c}\,\hat{p} \,. \tag{7.14}$$

Die Schallschnelle $v(x,t)$ ist über den *Wellenwiderstand* oder die *Schallkennimpedanz*

Tabelle 7.1 Dichte, Schallgeschwindigkeit und Schallkennimpedanz einiger Stoffe beim Normdruck $p_n = 1\,013$ hPa

	Dichte ϱ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Schallgeschwindigkeit c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallkennimpedanz Z_0 in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\,\text{s}}$
Luft −20 °C trocken	1,396	319	445
Luft 0 °C trocken	1,293	331	427
Luft 20 °C trocken	1,21	344	416
Luft 100 °C trocken	0,947	387	366
Wasserstoff 0 °C	0,090	1260	113
Wasserdampf 130 °C	0,54	450	243
Wasser 0 °C	1000	1400	$1{,}40 \cdot 10^6$
20 °C	998	1480	$1{,}48 \cdot 10^6$
Glyzerin	1260	1950	$2{,}46 \cdot 10^6$
Eis	920	3200	$2{,}94 \cdot 10^6$
Holz	600	4500	$2{,}70 \cdot 10^6$
Glas	2500	5300	$13{,}0 \cdot 10^6$
Beton	2100	4000	$8{,}4 \cdot 10^6$
Stahl	7700	5050	$39 \cdot 10^6$

$$Z = \varrho\, c \tag{7.15}$$

eindeutig mit dem Schallwechseldruck $p_w(x, t)$ verknüpft. Z ist über die Dichte und die Schallgeschwindigkeit von dem statischen Druck p_0 und der Temperatur T des Gases abhängig. Anhand einer Schnellemessung kann also der Schallwechseldruckverlauf analysiert werden. Werte für die Schallkennimpedanz einiger Stoffe sind in Tabelle 7.1 aufgeführt. Durch Integration oder Differentiation von (7.13) ergeben sich die *Elongation* y und die *Beschleunigung* a der von der Schallwelle verursachten *longitudinalen Molekülschwingung*:

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi f}\,\frac{1}{\varrho c}\hat{p}\,\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \tag{7.16}$$

und

$$a(x, t) = -2\pi f \cdot \cdot \frac{1}{\varrho\, c}\hat{p}\,\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\}. \tag{7.17}$$

Schallaufnehmer zeigen den über die Integrationszeit τ gebildeten Effektivwert p_{eff} des Schallwechseldrucks an:

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} p_w^2(x, t)\,\mathrm{d}t}\,. \tag{7.18}$$

Für sinusförmige Schallwellen gilt analog den Effektivwerten elektrischer Wechselströme

$$p_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}\,. \tag{7.19}$$

Solange die Schallwechselamplituden im Vergleich zum statischen Gasdruck klein sind (Schalldruckpegel $L < 130$ dB, Ab-

schn. 7.2.2), überlagern sich an einem Ort des Schallfeldes die Schalldrücke additiv (Superpositionsprinzip):

$$p(x_0, t) = p_1(x_0, t) + p_2(x_0, t) + \cdots$$

Der am Ort x_0 gemessene resultierende Effektivwert ist dann

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (p_1 + p_2)^2 \,\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau p_1^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau p_2^2 \,\mathrm{d}t + \frac{2}{\tau}\int_0^\tau p_1\, p_2 \,\mathrm{d}t}\,.$$

Für *nichtkohärente Schallwellen* verschwindet im zeitlichen Mittel das Produkt der Schallwechselamplituden und in diesem häufigen Fall gilt

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{p_{1,\text{eff}}^2 + p_{2,\text{eff}}^2 + \cdots}\,. \tag{7.20}$$

Mit den Beziehungen (7.14) und (7.16) ist die *Energiedichte* $w = \mathrm{d}E/\mathrm{d}V$ einer Schallwelle

$$w = \frac{1}{2}\varrho(2\pi f)^2\hat{y}^2 = \frac{1}{2}\varrho\hat{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{\varrho c^2}\,. \tag{7.21}$$

Nach (5.176) ist die *Schallintensität*

$$I = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = w\,c = \frac{1}{2}\varrho\, c\,\hat{v}^2 \qquad \text{oder}$$

$$I = \frac{1}{2}\hat{v}\,\hat{p} = v_{\text{eff}}\, p_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z}\,. \tag{7.22}$$

Die *Schallleistung* P einer Schallquelle ergibt sich, wenn die Schallintensität auf einer Oberfläche um die Schallquelle, z. B. einer Kugeloberfläche, aufsummiert wird, aus

$$P = \int_S I \,\mathrm{d}S\,. \tag{7.23}$$

Die geometrische Form einer Schallquelle bestimmt die Lösung der Wellengleichung (7.7), die räumliche Ausbreitung des Schallwechseldrucks und damit die Schallintensität an jedem Ort im Schallfeld der Schallquelle. Eindimensionale Schallfelder, wie sie (7.12) beschreibt, und die nach (7.22) eine konstante Schallintensität haben, gibt es näherungsweise nur im Nahfeld ausgedehnter ebener Schallquellen oder in vergleichsweise kleinen Schallfeldbereichen weit entfernt von lokalisierten Schallquellen. Bei punkt- oder kugelförmigen Schallquellen ist die Schallintensität räumlich nicht konstant; bei Verdopplung des Abstands zum Kugelmittelpunkt sinkt die Schallintensität auf ein Viertel.

In Abb. 7.3 sind die Beziehungen für die drei Grundgeometrien der ebenen, linien- und punktförmigen Schallquellen zusammengestellt.

Erfolgt die Schallwellenausbreitung über größere Entfernungen, beispielsweise in Luft über mehr als 100 m, dann machen sich Schallenergieverluste durch *Schallabsorption* bemerkbar. Die Schallenergie wird dabei zum einen durch innere Reibung und durch nicht vollständige isentrope Kompression direkt in Wärme umgewandelt (*Dissipation*); zum anderen regt die Schallwelle translatorische, rotatorische und andere Freiheitsgrade der Moleküle des Schallübertragungsmediums an (*Relaxation*), sodass die der Schallwelle entzogene Anregungsenergie nach einer charakteristischen Zeitkonstante (*Relaxationszeit*) ebenfalls der inneren Energie des Mediums zugeführt wird. Diese *Schallausbreitungsdämpfung* führt zu

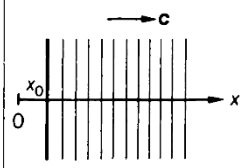
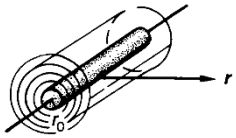
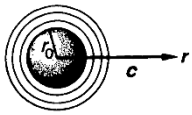
	ebene Schallquelle	linienförmige Schallquelle	punktförmige, kugelförmige Schallquelle
Geometrie			
Schallwechseldruck-amplitude	$\hat{p} = \hat{p}_0$	$\hat{p} = \hat{p}(r_0)\sqrt{\frac{r_0}{r}}$	$\hat{p} = \hat{p}(r_0) \cdot \frac{r_0}{r}$
spezifische Schallleistung	P_A in $\frac{W}{m^2}$	P_l in $\frac{W}{m}$	P in W
Schallintensität	$I = P_A$	$I = \frac{P_l}{2\pi r}$ (7·24)	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$ (7·25)
Schallpegeldifferenz	$L_1 - L_2 = 0$	$L_1 - L_2 = 10 \lg \frac{r_2}{r_1}$ (7·26)	$L_1 - L_2 = 20 \lg \frac{r_2}{r_1}$ (7·27)
Schallpegeldifferenz für $r_2 = 2r_1$	$\Delta L = 0$	$\Delta L = 3$ dB	$\Delta L = 6$ dB

Abb. 7.3 Schallquellengeometrien

einer exponentiellen Abnahme der Schallintensität. Zusätzlich zu einer eventuell durch die Schallquellengeometrie verursachten Intensitätsabnahme bewirkt diese *Absorptionsdämpfung* einen Schallintensitätsabfall an einem Ort r, bezogen auf die Intensität an einem Ort r_0, von

$$I(r) = I(r_0)\mathrm{e}^{-\alpha(r-r_0)} \,. \qquad (7.28)$$

Der *Dämpfungskoeffizient* α (Maßeinheit m^{-1}) ist abhängig von der Schallfrequenz und von den Schallabsorptionseigenschaften des Mediums. Der *Luftdämpfungskoeffizient* hängt beispielsweise von der Luftfeuchtigkeit ab; bei normalen klimatischen Verhältnissen ist die Luftabsorption bei tiefen Schallfrequenzen gering, erst oberhalb $f = 1\,000$ Hz beträgt der Luftdämpfungskoeffizient $\alpha_L > 10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1}$ entsprechend einer Intensitätsabnahme von etwa 4 dB/km.

Einen besonders hohen Dämpfungskoeffizienten weisen Schallabsorbermaterialien auf. Die große innere Reibungsfläche der faserartigen oder porösen Stoffe, wie z. B. Mineralfasern, Steinwolle und Filze, erhöht die Dissipation.

7.2.2 Schallwandler

Die Wechseldrücke von Schallwellen überspannen in der Technik einen Wertebereich von mehr als sechs Zehnerpotenzen. *Schallwandler* müssen also in diesem großen Bereich den Schallwechseldruck oder die nach (7.3) damit verknüpfte Schallschnelle über ein mechanisches Schwingungssystem (*Membran*) in eine elektrische Spannung

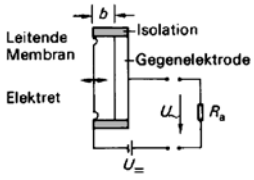
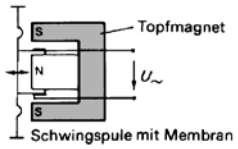
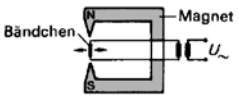
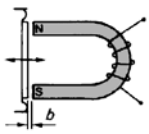
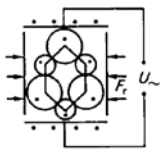
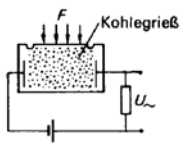
Elektroakustische Wandler	technische Ausführungen	Anwendungsbereich
elektrostatisch 	Kondensatormikrofon (mit äußerer Polarisationsspannung an der Mikrofonkapsel) Elektretmikrofon (permanente elektrische Polarisation an der Mikrofonmembran) Speziallautsprecher	Schallpegelmesser Studiomikrofon Ansteckmikrofon Tieftonmikrofon Handmikrofon Umhängemikrofon extrem breitbandige Kopfhörer extrem breitbandige Kopfhörer
elektrodynamisch (Schwingspule) 	Tauchspulenmikrofon Lautsprecher	Studiorichtmikrofon Handmikrofon Umhängemikrofon Normschallquellen Beschallungsanlagen Kopfhörer
elektrodynamisch (Bändchen) 	Bändchenmikrofon	Studiomikrofon für höchste Lautstärkepegel Vokalmikrofon Blechbläsermikrofon
elektromagnetisch 	Lautsprecher	Telefonhörer Hörgeräte
piezoelektrisch 	Kristallmikrofon Keramikmikrofon Piezopolymer-Mikrofon	Körperschallmikrofon Wasserschallmikrofon Beschleunigungsaufnehmer
piezoresistiv 	Kohlemikrofon	Fernsprechapparat

Abb. 7.4 Elektroakustischen Wandler

umwandeln können. Schallempfänger oder *Mikrofone* wandeln den Schalldruck in elektrische Spannung, Schallgeber oder *Lautsprecher* elektrische Leistung in Schallleistung.

Die verschiedenen *elektroakustischen Wandler* unterscheiden sich im Absolutwert und in der Frequenzabhängigkeit des Wandlerwirkungsgrades, aber auch in ihrer mechanischen Empfindlichkeit und ihrer Schalldruckbelastbarkeit.

In Abb. 7.4 sind die gebräuchlichen elektroakustischen Wandlerprinzipien einander gegenübergestellt:

- Beim *elektrostatischen Wandler* bildet die Schallwandlermembran zusammen mit

Tabelle 7.2 Schallpegel

Schallpegel	Definition	Bezugsgröße	Beziehungen
Schalldruckpegel	$L_\mathrm{p} = 20\,\lg\frac{p_\mathrm{eff}}{p_{\mathrm{eff},0}}\,\mathrm{dB}$	$p_{\mathrm{eff},0} = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa}$	$p_\mathrm{eff} = Z\,v_\mathrm{eff}$
Schallschnellepegel	$L_\mathrm{v} = 20\,\lg\frac{v_\mathrm{eff}}{v_{\mathrm{eff},0}}\,\mathrm{dB}$	$v_{\mathrm{eff},0} = 5\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$I = \frac{p_\mathrm{eff}^2}{Z}$
Schallintensitätspegel	$L_\mathrm{I} = 10\,\lg\frac{I}{I_0}\,\mathrm{dB}$	$I_0 = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	$p = S\,\frac{p_\mathrm{eff}^2}{Z}$
Schallleistungspegel	$L_\mathrm{w} = 10\,\lg\frac{p}{p_0}\,\mathrm{dB}$	$p_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$	

einer Gegenelektrode einen Kondensator, dessen Kapazität und damit elektrische Spannung sich mit der Membranauslenkung ändert.

- Beim *elektrodynamischen Wandler* bewegt die Membran eine Spule in einem Topfmagneten, sodass zur Schallschnelle proportionale elektrische Spannungen in der Schwingspule induziert werden.
- Beim *elektromagnetischen Wandler* verändert die Bewegung der magnetischen Membran den Luftspalt eines Magneten; hierdurch wird der magnetische Fluss im Magnetjoch moduliert und in einer Wicklung eine elektrische Spannung induziert.
- Beim *piezoelektrischen Wandler* bewirkt die Deformation des Kristalls durch den Schalldruck eine Verschiebung der Ladungsstruktur und piezoelektrisch, erzeugte Oberflächenladungen, deren elektrische Spannung zum Schalldruck proportional ist.
- Beim *piezoresistiven Wandler* werden durch den Schalldruck die Körner von Kohlegrieß unterschiedlich gepresst, sodass sich der elektrische Widerstand des Kohlegrießes ändert und der dadurch modulierte elektrische Strom an einem Lastwiderstand eine in erster Näherung zum Schalldruck proportionale Spannung erzeugt.

Schalldruckmessgeräte bilden über Gleichrichter die Effektivwerte der Ausgangsspannungen elektroakustischer Wandler und korrigieren durch spezielle Verstärkerkennlinien den Frequenzgang des Übertragungsmaßes. Die Messanzeige muss mit *Eichschallquellen* kalibriert werden.

Handliche Zahlenwerte für die Schallwechseldruck-Effektivwerte ergeben sich, wenn diese in einem relativen logarithmischen Maßstab, dem *Schalldruckpegel* L_p, angegeben werden:

$$L_\mathrm{p} = 10\,\lg\left(\frac{p_\mathrm{eff}^2}{p_{\mathrm{eff},0}^2}\right)\mathrm{dB} = 20\,\lg\left(\frac{p_\mathrm{eff}}{p_{\mathrm{eff},0}}\right)\mathrm{dB}\,. \tag{7.29}$$

Der *Bezugsschalldruck* $p_{\mathrm{eff},0}$ liegt an der unteren Hörgrenze und ist nach DIN 45 630 auf $p_{\mathrm{eff},0} = 2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ festgelegt. Wie in der Elektrotechnik wird das Zehnfache des logarithmischen Relativmaßes des Schallpegels mit der Einheit Dezibel gekennzeichnet.

Außer dem Schalldruckpegel gibt es weitere Schallpegel; sie sind in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Nur bei einer Schallkennimpedanz $Z = 400\,\mathrm{kg/(m^2\,s)}$ des Ausbreitungsme-

Tabelle 7.3 Schallpegel-Additionstabelle (ΔL Pegeldifferenz, L_z Pegelzuschlag)

$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$	$\frac{L_z}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$	$\frac{L_z}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$	$\frac{L_z}{\text{dB}}$
0,0	3,0	4,0	1,5	8,0	0,6
0,5	2,8	4,5	1,3	9,0	0,5
1,0	2,5	5,0	1,2	10,0	0,4
1,5	2,3	5,5	1,1	12,0	0,3
2,0	2,1	6,0	1,0	14,0	0,2
2,5	1,9	6,5	0,9	16,0	0,1
3,0	1,8	7,0	0,8	$\geqq 20$	0,0
3,5	1,6	7,5	0,7		

diums, wie sie etwa Luft bei $\vartheta = 20\,^\circ\text{C}$ aufweist, und bei gleichen Bezugsflächen $S = S_0$ für den Schallleistungspegel ergeben sich gleiche Pegelwerte. Die Addition von Schallpegeln ist nicht algebraisch; so ist beispielsweise $0\,\text{dB} + 0\,\text{dB} = 3\,\text{dB}$. Addiert werden können nur die Schallintensitäten oder entsprechend (7.22) die Quadrate der Schalldruckeffektivwerte. Die Summe relativer Schallintensitäten

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} + \ldots = 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}} + 10^{\frac{L_2}{10\,\text{dB}}} + \cdots = \sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{L_i}{10\,\text{dB}}}$$

ergibt den *Gesamtschallpegel*

$$L_{\text{ges}} = 10\lg\frac{I}{I_0}\,\text{dB} = 10\lg\left(\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{L_i}{10\,\text{dB}}}\right)\text{dB}\,. \qquad (7.30)$$

In der Praxis führt man die Pegeladdition sukzessive für jeweils zwei Pegel aus, indem man die Schallpegel-Additionstabelle 7.3 benutzt. Zum größeren Pegel L_1 addiert man einen *Pegelzuschlag* L_z, der entsprechend der *Pegeldifferenz* $\Delta L = L_1 - L_2$ Tabelle 7.3 entnommen wird.

Beispiel

7.2-2 Wie groß ist der Gesamtschallpegel von drei Schallquellen mit den Schallpegeln $L_1 = 70\,\text{dB}$, $L_2 = 73\,\text{dB}$, $L_3 = 74\,\text{dB}$?

Lösung

Nach (7.30) ermittelt man

$$L_{\text{ges}} = 10\lg(10^{0{,}1\cdot 70} + 10^{0{,}1\cdot 73} + 10^{0{,}1\cdot 74})\,\text{dB} = 10\lg(5{,}507\cdot 10^7)\,\text{dB} = 77{,}4\,\text{dB}\,.$$

Dieser Wert ergibt sich auch anhand von Tabelle 7.3:

$\Delta L_{32} = L_3 - L_2 = 1\,\text{dB}$, $L_{z,32} = 2{,}5\,\text{dB}$;
$L_4 = L_3 + L_{z,32} = 76{,}5\,\text{dB}$;
$\Delta L_{41} = L_4 - L_1 = 6{,}5\,\text{dB}$, $L_{z,41} = 0{,}9\,\text{dB}$;
$L_{\text{ges}} = L_4 + L_{z,41} = 77{,}4\,\text{dB}$.

Zur Charakterisierung von Schallgebern, zur Analyse von Schallquellen und zur Messung des Koinzidenzeffekts bei Trennwänden (Abschn. 7.2.3) ist die Bestimmung der Frequenzabhängigkeit des Schallpegels erforderlich, das *Schallfrequenzspektrum*. Dazu wird das Spannungssignal des elektroakustischen Schallwandlers durch Bandfilter, im einfachsten Fall durch elektrische Resonanzkreise entsprechend Abschn. 4.5.2.4 mit variabler Resonanzfrequenz, nur in einem Frequenzintervall verstärkt und damit der Schallpegel in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz des Bandfilters gemessen. Akustische Bandfilter werden durch das Verhältnis f_o/f_u der oberen zur unteren Grenzfrequenz sowie der Bandmittenfrequenz $f_m = \sqrt{f_o f_u}$ charakterisiert. Je schmaler das Frequenzintervall $f_o - f_u$ ist, desto höher ist die Auflösung des Schallfrequenzspektrums. Für Schall- und Lärmschutzanalysen ist das Grenzfrequenzverhältnis $f_o/f_u = \sqrt[3]{2}$ des *Terzfilters* ausreichend; es entspricht etwa der Auflösung des menschlichen Ohres.
Für Grobanalysen werden Oktavfilter mit dem Grenzfrequenzverhältnis $f_o/f_u = 2$ eingesetzt.

Tabelle 7.4 Terz und Oktavfilter (f_u,f_o untere bzw. obere Frequenzgrenze, Δ_A^* Schallpegelabschwächung bei A-Bewertung)

Oktave				Terz			
f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A^* dB	f_u Hz	f_o Hz	f_m Hz	Δ_A^* dB
11	22	16	−56,7	14,1	17,8	16	−56,7
				17,8	22,4	20	−50,5
				22,4	28,2	25	−44,7
22	44	31,5	−39,4	28,2	35,5	31,5	−39,4
				35,5	44,7	40	−34,6
				44,7	56,2	50	−30,2
44	88	63	−26,2	56,2	70,7	63	−26,2
				70,7	89,1	80	−22,5
				89,1	112	100	−19,1
88	177	125	−16,1	112	141	125	−16,1
				141	178	160	−13,4
				178	224	200	−10,9
177	355	250	−8,6	224	282	250	−8,6
				282	355	315	−6,6
				355	447	400	−4,8
355	710	500	−3,2	447	562	500	−3,2
				562	708	630	−1,9
				708	891	800	−0,8
710	1 420	1 000	0	891	1 122	1 000	0
				1 122	1 413	1 250	+0,6
				1 413	1 778	1 600	+1,0
1 420	2 840	2 000	+1,2	1 778	2 239	2 000	+1,2
				2 239	2 818	2 500	+1,3
				2 818	3 548	3 150	+1,2
2 840	5 680	4 000	+1,0	3 548	4 467	4 000	+1,0
				4 467	5 623	5 000	+0,5
				5 623	7 079	6 300	−0,1
5 680	11 360	8 000	−1,1	7 079	8 913	8 000	−1,1
				8 913	11 220	10 000	−2,5
				11 220	14 130	12 500	−4,3
11 360	22 720	16 000	−6,6	14 130	17 780	16 000	−6,6
				17 780	22 390	20 000	−9,3

In Tabelle 7.4 sind die Bandmittenfrequenzen und Grenzfrequenzen der Terz- und Oktavfilter zusammengestellt.

Beispiel

7.2-3 Wie groß ist der Oktavpegel, wenn bei den Mittenfrequenzen f_m folgende Terzpegel L_T gemessen werden:

f_m	L_T
400 Hz	55 dB
500 Hz	59 dB
630 Hz	58 dB .

Lösung

Nach (7.30) ist

$$L_{Oktav} = 10\,\lg(10^{0,1\,L_{400}} + 10^{0,1\,L_{500}} + 10^{0,1\,L_{630}})\,\text{dB}$$
$$= 62{,}4\,\text{dB}\,.$$

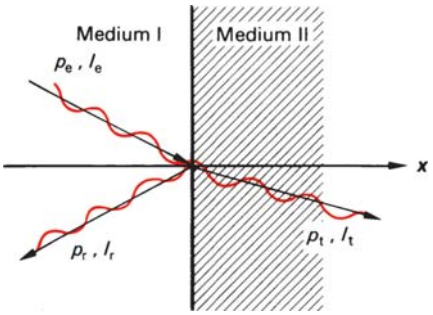


Abb. 7.5 Schall an einer Grenzfläche

7.2.3 Schallwellen an Grenzflächen

An der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlicher Schallkennimpedanz $Z = \varrho c$ wird die Schallwelle teilweise reflektiert, wie Abb. 7.5 zeigt. Bei senkrechtem Einfall ist nach dem Energieerhaltungssatz die Summe der reflektierten Schallintensität I_r und der transmittierten Schallintensität I_t gleich der einfallenden Schallintensität I_e.
Damit gilt für den Zusammenhang zwischen dem *Schall-Reflexionsgrad* $\varrho_S = I_r/I_e$ und dem *Schall-Transmissionsgrad* $\tau_S = I_t/I_e$ einer Grenzfläche ($x = 0$)

$$\varrho_S + \tau_S = 1 \,. \tag{7.31}$$

Wird im Medium II die transmittierte Schallenergie absorbiert und in Wärme umgewandelt (Dissipation), dann ist der *Schallabsorptionsgrad* $\alpha_S = I_a/I_e$ des absorbierenden Mediums nach (7.31)

$$\alpha_S = 1 - \varrho_S \,. \tag{7.32}$$

Der Energieerhaltungssatz $I_e = I_r + I_t$ für senkrechten Einfall lautet mit Hilfe von (7.22)

$$\frac{1}{2}\frac{\hat{p}_e^2(0)}{Z_1} = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}_r^2(0)}{Z_1} + \frac{1}{2}\frac{\hat{p}_t^2(0)}{Z_2} \,. \tag{7.33}$$

Diese Gleichung lässt sich umschreiben in

$$Z_2\,\left(\hat{p}_e^2(0) - \hat{p}_r^2(0)\right) = Z_1\,\hat{p}_t^2(0) \quad \text{und}$$
$$Z_2\,\left(\hat{p}_e(0) - \hat{p}_r(0)\right)\left(\hat{p}_e(0) + \hat{p}_r(0)\right) = Z_1\,\hat{p}_t^2(0) \,.$$

Nun gilt als Folge des Kräftegleichgewichts für die Amplituden der Schallwechseldrücke

$$\hat{p}_e(0) + \hat{p}_r(0) = \hat{p}_t(0) \,. \tag{7.34}$$

Dividiert man die vorige Gleichung durch (7.34), so entsteht

$$Z_2\,\left(\hat{p}_e(0) - \hat{p}_r(0)\right) = Z_1\,\hat{p}_t(0)$$
$$= Z_1\,\left(\hat{p}_e(0) + \hat{p}_r(0)\right) \,.$$

Hieraus folgt für den *Reflexionsfaktor r* einer Grenzfläche

$$r = \frac{\hat{p}_r(0)}{\hat{p}_e(0)} = \frac{p_{\mathrm{eff,\,r}}(0)}{p_{\mathrm{eff,\,e}}(0)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \,. \tag{7.35}$$

Für den *Schall-Reflexionsgrad* gilt

$$\varrho_S = \frac{I_r(0)}{I_e(0)} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 \,. \tag{7.36}$$

Schließlich ergibt sich nach (7.32) für den *Schall-Absorptionsgrad* einer Grenzfläche

$$a_S = 1 - \varrho_S = \frac{4\,Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \,. \tag{7.37}$$

An *schallharten Grenzflächen* $Z_2 \gg Z_1$, beispielsweise beim Übergang von Luft in Wasser oder Beton, wird die Schallwelle nahezu total reflektiert. Eine ebenfalls sehr große Schallreflexion tritt bei *schallweichen Grenzflächen* $Z_2 \ll Z_1$ auf. In beiden Fällen kommt es durch die Überlagerung von einfallender und

reflektierter Schallwelle zu *Schallinterferenzen* (Abschn. 5.2.4) und zu stehenden Schallwellen mit *Intensitätsknoten und -bäuchen* gemäß Abb. 7.6. Im *Kundt'schen Rohr* (Abb. 5.59) wird über stehende Wellen die Schallwellenlänge λ bestimmt. – In realen Schallfeldern ist die räumliche Verteilung der Schallinterferenzen kompliziert. Im Nahfeld vor Wänden erhöht sich beispielsweise der Schallpegel durch die Reflexion um $\Delta L = 3$ dB, in Ecken durch dreidimensionale Reflexionen sogar um $\Delta L = 6$ dB.

Schallreflexionen an Grenzflächen von Medien mit unterschiedlicher Schallkennimpedanz werden in der *Ultraschalldiagnostik* (Abschn. 7.4.5) zur Lokalisierung von Materialfehlern benutzt sowie bei der *Körperschallisolierung* (Abschn. 7.4.3) zur Verhinderung der Schalleinleitung angewandt.

Schallabsorber erreichen nur dann einen hohen Schallabsorptionsgrad α_s, wenn die Schallkennimpedanz des Absorbermaterials in etwa derjenigen von Luft entspricht und somit die Schallwelle eindringen kann. Wird die Schallenergie nur in einem schmalen Schallfrequenzbereich absorbiert, so handelt es sich um Resonanzabsorber nach dem Prinzip der erzwungenen Schwingung eines Feder-Masse-Systems (Abschn. 5.1.3). Im Bereich der Resonanzfrequenz f_o nehmen diese Systeme große Schallenergien auf und wandeln diese als Strömungs- und Reibungsverlust in Wärme um.

Poröse Schallabsorber wirken schallabsorbierend, wenn die Schallwellenlänge $\lambda_S = c/f$ kürzer als die vierfache Absorberdicke ist. Werden poröse Absorber vor schallharten Grenzflächen befestigt, so ist der Schallabsorptionsgrad α_S maximal, wenn der Abstand einem Viertel der Wellenlänge der stehenden Schallwelle entspricht, die nach Abb. 7.6 durch die Interferenz zwischen der einlaufenden und reflektierten Schallwelle zustande kommt.

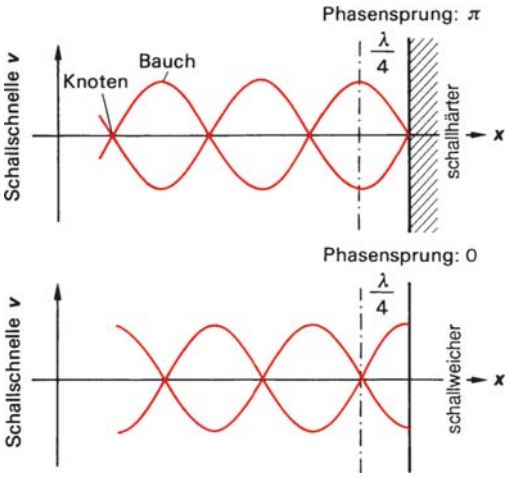


Abb. 7.6 Schallreflexion

Einen Überblick über Aufbau und Eigenschaften technischer Schallabsorber gibt Abb. 7.7.

Die Schalltransmission durch Trennwände lässt sich berechnen, wenn folgende Näherungen gemacht werden:

- Die *Grenzfläche* ist *biegeweich,* die Schallschnelle v_2 und der Schallwechseldruck p_2 der auf der Wandrückseite abgestrahlten Schallwelle sind so groß wie die Schallschnelle v_t und der Schalldruck p_t der durch die vordere Grenzfläche durchgehenden Schallwelle.
- Die *Schallenergieverluste* in der Trennwand durch Dissipation sind *vernachlässigbar*, es gilt also $\tau_S = 1 - \varrho_S$.
- Nur die *Massenträgheit* der *Trennwand* bestimmt das Resonanzverhalten; der Einfluss der Elastizität und anderer nichtlinearer oder frequenzabhängiger Effekte wird nicht berücksichtigt.

Bei sehr biegeweichen Stoffen, wie z. B. bei Gummi- oder Bleimatten, sind diese Näherungen erfüllt, bei Wänden und Decken dagegen nur bei sehr tiefen Anregungsfrequenzen (Abschn. 7.4.2).

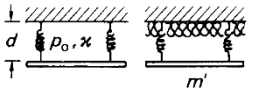
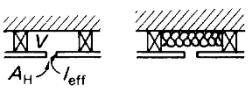
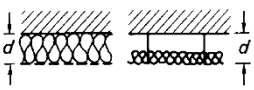
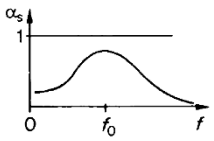
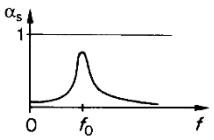
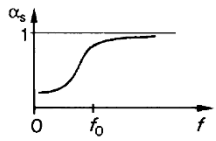
	Plattenschwinger	Helmholtz-Resonator	poröser Schallabsorber
Prinzip des Masse-Feder-Systems 	 ohne mit Zusatzdämpfung	 ohne mit Zusatzdämpfung	 selbst- tragendes abgehängtes Dämpfungsmaterial
Richtgröße der „Feder“	Befestigung + Luftschicht d	Hohlraumvolumen V	Luftschicht d + Abhängung
schwingende „Masse“	Flächenmasse m'	Halsvolumen $A_H l_{eff} \rho_L$	Abdeckung (vernachlässigbar)
Dissipation der Schallenergie	innere Reibung in Platte und Luftschicht, äußere Reibung an Befestigung, viskose Strömungsverluste in Zusatzdämpfungsmaterial	nicht adiabatische Kompression des Hohlraumvolumens, Reibungsverluste im Resonatorhals, viskose Strömungsverluste in Zusatzdämpfungsmaterial	viskose Strömungsverluste durch äußere Reibung an Dämpfungsmaterial, Energieverlust durch innere Reibung bei Faserdeformation
Resonatorcharakteristik	schmalbandiger Resonanzabsorber 	besonders schmalbandiger Resonanzabsorber 	breitbandiger Absorber 
charakteristische Absorberfrequenz	$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa p_0}{d m'}}$ (7.38)	$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A_H}{V l_{eff}}}$ (7.39)	$f_0 \approx \frac{c}{4d}$ (7.40)
Einsatzbereiche	Tiefenschlucker in Raumakustik, Luftschalldämmung (leichte Vorsatzschale)	selektive Schallabsorption (Maschinenlärm, Raumakustik), Schalldämmung von Fugen (Tür, Fenster)	Schallpegelminderung, Änderung der Nachhallzeit

Abb. 7.7 Schallabsorber

Trifft, wie in Abb. 7.8 skizziert, auf die Grenzfläche unter dem Einfallswinkel δ eine einfallende Schallwelle mit dem Schallwechseldruck p_e und der Schallschnelle v_e auf, dann gilt für den Druck p_1 auf der Einfallsebene x_1 mit (7.34) für $Z_1 = Z_2$

$$p_1(x_1) = p_e(x_1) + p_r(x_1) = 2\,p_e(x_1) - p_t(x_1) \qquad (7.41)$$

und für die Schallwechseldruckdifferenz über dem Wandquerschnitt, vernachlässigbare Schallabsorption in der Wand und damit $p_t(x_2) = p_t(x_1)$ vorausgesetzt.

$$p_1(x_1) - p_2(x_2) = (2\,p_e(x_1) - p_t(x_1)) - p_t(x_2) = 2(p_e(x_1) - p_t(x_1))\,. \qquad (7.42)$$

Diese Druckdifferenz $p_1 - p_2$ bewirkt nach der hydrodynamischen Grundgleichung (7.3) eine Beschleunigung der Trennwand in x-Richtung:

$$\varrho\frac{dv_x}{dt} = -\frac{p_1(x_1) - p_2(x_2)}{x_1 - x_2}$$

oder mit der Wanddicke $s = x_2 - x_1$ und der flächenbezogenen Masse $m' = \varrho s$

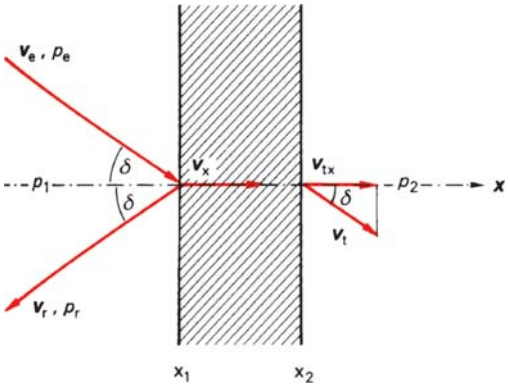


Abb. 7.8 Schalldurchgang durch eine dünne Wand

$$m' \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = p_1 - p_2 \,. \tag{7.43}$$

Die Beschleunigung wird durch die zeitliche Änderung der Schnelle v_t der transmittierten Welle bewirkt. Deren x-Komponente ist bei einem Ausfallwinkel δ

$$v_x(x_1) = v_{tx}(x_1) = v_t(x_1)\cos\delta \,. \tag{7.44}$$

In komplexer Schreibweise gelten für die Schallwellen an der Grenzfläche $x = x_1$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$

$$p_e(x_1) = \hat{p}_e \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{und} \quad v_1(x_1) = \hat{v}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

sowie

$$p_t(x_1) = \hat{p}_t \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{und} \quad v_t(x_1) = \hat{v}_t \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \,.$$

Damit ergibt sich aus (7.43), wenn (7.44) und (7.42) eingesetzt werden,

$$\begin{aligned} m' \cos\delta \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} &= m' \cos\delta (\mathrm{j}\omega)\hat{v}_t \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ &= 2(\hat{p}_e - \hat{p}_t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \,. \end{aligned}$$

Wird die Schnelle $\hat{v}_t$ nach (7.14) mit Hilfe der Schallkennimpedanz $Z = \varrho c$ der Luft in den Wechseldruck $\hat{p}_t$ umgewandelt, ergibt sich

$$\mathrm{j}\omega m' \cos\delta \frac{\hat{p}_t}{Z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 2(\hat{p}_e - \hat{p}_t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

oder

$$\frac{p_t(x_1)}{p_e(x_1)} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{m'\omega\cos\delta}{2Z}} \,. \tag{7.45}$$

Der Transmissionsgrad $\tau_S(\delta)$ hat dann die Winkelabhängigkeit

$$\begin{aligned} \tau_S(\delta) &= \frac{I_t}{I_e} = \left|\frac{p_t(x_1)}{p_e(x_1)}\right|^2 \\ &= \frac{1}{1 + \left(\dfrac{m'\pi f\cos\delta}{Z}\right)^2} \,. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Für *senkrechten Schalleinfall* $\delta = 0$ ergibt sich

$$\tau_S(0°) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\pi m' f}{Z}\right)^2} \,. \tag{7.47}$$

In diesem Fall ist also der Transmissionsgrad einer Trennwand umso größer, je kleiner die flächenbezogene Masse und je niedriger die Schallfrequenz ist. Für Schallschutztrennwände gilt meistens $\pi m' f/Z \gg 1$, sodass für $\delta < 90°$ (7.46) in

$$\tau_S(\delta) \approx \left(\frac{Z}{\pi m' f\cos\delta}\right)^2 \tag{7.48}$$

übergeht. Vielfachreflexionen bewirken in Räumen, dass die Schalleinstrahlung gleichmäßig über alle Einfallswinkel δ, d. h. *diffus* verteilt ist. Wegen $\overline{\cos^2\delta} = 0{,}5$ ist daher der Transmissionsgrad $\overline{\tau_S(\delta)}$ einer Trennwand im *diffusen Schallfeld*

$$\overline{\tau_S(\delta)} = \left(\frac{\sqrt{2}\,Z}{\pi m' f}\right)^2 = 2\,\tau_S(0°)\,. \qquad (7.49)$$

Als *Schalldämmmaß* R der Trennwand wird

$$R = 10\,\lg\frac{1}{\overline{\tau_S(\delta)}}\,\mathrm{dB} \qquad (7.50)$$

definiert. Für ein diffuses Schallfeld ist also das Schalldämmmaß einer biegeweichen Trennwand

$$R = 20\,\lg\frac{\pi f\, m'}{Z}\,\mathrm{dB} - 3\,\mathrm{dB}\,. \qquad (7.51)$$

Dies ist das *Massengesetz* für das theoretische Schalldämmmaß einer Wand. – In der Praxis findet man bei Platten und Wänden mehr oder weniger große Abweichungen der gemessenen Schalldämmmaße gegenüber (7.51), wie Abb. 7.9 zeigt. Bei schrägem Schalleinfall gemäß Abb. 7.10 kommt es wegen der bei der Herleitung von (7.51) vernachlässigten Biegesteifigkeit des Wandmaterials zu transversalen *Biegewellen*, die die Platte passieren, auf der Plattenrückseite Schall abstrahlen und somit die Schalldämmung vermindern.

Biegewellen auf Platten haben eine *anomale Dispersion* (Abschn. 5.2.4.4). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_B ist frequenzabhängig und wird vom Quotienten aus Biegesteifigkeit B und flächenbezogener Masse m' bestimmt:

$$c_B = \sqrt{2\pi f}\,\sqrt[4]{\frac{B}{m'}}\,. \qquad (7.52)$$

Die Biegewellen werden von einer auftreffenden Schallwelle der Wellenlänge λ_L resonant erregt, wenn die Wellenlängenkomponente der Schallwelle parallel zur Plattenebene, also deren *Spurwellenlänge* $\lambda_S = \lambda_L/\sin\delta$ mit der Wellenlänge $\lambda_B = c_B/f$ der Biege-

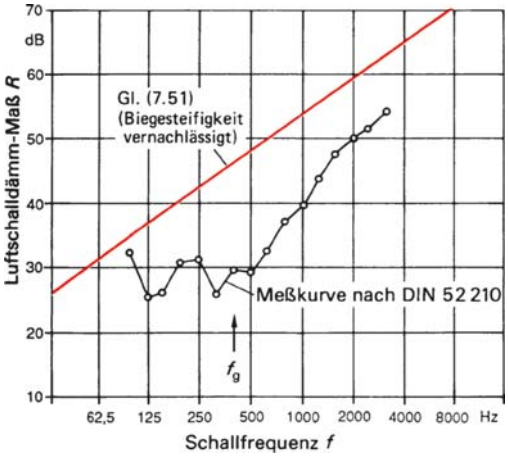


Abb. 7.9 Luftschalldämmmaß R einer 70 mm dicken Gipsplattenwand, beidseitig verspachtelt ($m' = 80\,\mathrm{kg/m^2}$, $E = 6 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}$, f_g = Grenzfrequenz der Spuranpassung nach (7.57))

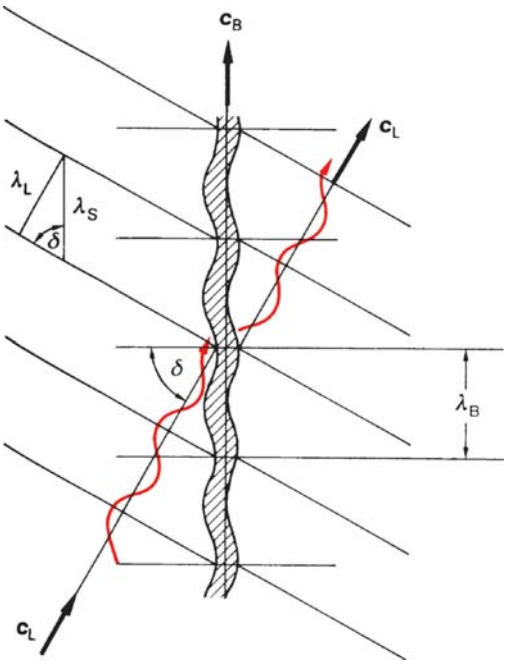


Abb. 7.10 Biegewellen durch Spuranpassung

welle übereinstimmt (*Koinzidenzeffekt* oder *Spuranpassung*):

$$\lambda_S = \lambda_B = \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \,. \tag{7.53}$$

Bei einem Einfallswinkel δ tritt also Spuranpassung bei folgender Schallfrequenz $f = c_L/\lambda_L$ ein:

$$f = \frac{c_L}{\lambda_S \sin\delta} = \frac{c_L^2}{2\pi \sin^2\delta} \sqrt{\frac{m'}{B}} \,. \tag{7.54}$$

Nach (7.54) ergibt sich die tiefste Schallfrequenz, bei der noch eine Biegewelle erregt wird, bei streifendem Schalleinfall $\delta = 90°$. Die *untere Grenzfrequenz f_g der Spuranpassung* beträgt also

$$f_g = \frac{c_L^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m'}{B}} \,. \tag{7.55}$$

Im diffusen Schallfeld $0° \leqq \delta \leqq 90°$ setzt bei Schallfrequenzen $f > f_g$ die erhöhte, durch den Koinzidenzeffekt verursachte Schalltransmission ein und das Schalldämmmaß weicht vom theoretischen Massengesetz nach (7.51) ab (Abb. 7.9).

Homogene Platten mit der Dichte ϱ und der Dicke s sowie dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktions- oder Poissonzahl μ haben die Biegesteifigkeit $B = E\,s^3/[12(1-\mu^2)]$. Die *Grenzfrequenz $f_{g,\,hom}$ homogener Platten* ist demnach

$$f_{g,\,hom} = \frac{c_L^2}{2\pi} \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\varrho}{E}} \frac{1}{s} \,. \tag{7.56}$$

Wird der Einfluss von $\mu (0 \leqq \mu \leqq 0{,}5)$ vernachlässigt, so beträgt bei Luftschall ($c_L = 340$ m/s) die Luftschall-Grenzfrequenz $f_{g\,L}$ homogener Platten

$$f_{g\,L,\,hom} = 6{,}4 \cdot 10^4 \left(\frac{m}{s}\right)^2 \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \,. \tag{7.57}$$

Trennwände wirken schalldämmend, wenn ihre flächenbezogene Masse m' groß ist und ihre Grenzfrequenz f_g oberhalb des Frequenzbereiches liegt, in dem die Trennwand als Schallschutz wirken soll. Bei üblichen homogenen Trennwandmaterialien sind flächenbezogene Masse und Biegesteifigkeit bzw. Dicke, Dichte und Elastizitätsmodul so verknüpft, dass man eine materialunabhängige Kurve für den Zusammenhang zwischen Schalldämmmaß R und flächenbezogener Masse m' angeben kann (Abschn. 7.4.2).

Zur Übung

Ü 7.2-1 Ein quaderförmiger Raum mit allseitig schallharten Oberflächen hat die Länge $L = 10$ m, die Breite $B = 8$ m und die Höhe $H = 6$ m. a) Berechnen Sie für jede der drei Raumachsen die Frequenzen der ersten fünf Raumresonanzen bei einer Schallausbreitung in Luft mit der Schallgeschwindigkeit 340 m/s. b) Geben Sie die ermittelten Resonanzen innerhalb des Oktavbandes mit der Bandmittenfrequenz $f_m = 63$ Hz an. c) Wie ändert sich die Schallausbreitung und die Frequenz der ersten Raumresonanz in jede der drei Raumachsen, wenn im Rahmen einer Modelluntersuchung Helium anstatt Luft am Normzustand ($\vartheta_n = 0\,°C$, $p_n = 1{,}013$ bar) verwendet wird?

Ü 7.2-2 Gegeben ist ein Klang, der sich aus 10 Teiltönen mit den Frequenzen $f_n = n \cdot f_1$ zusammensetzt; es gelte $f_1 = 200$ Hz und $n = 1, 2, 3, \ldots 10$. Der Pegel des ersten Teiltones beträgt $L_1 = 90$ dB. Die Pegel der nachfolgenden Teiltöne nehmen von Teilton zu Teilton jeweils um 2,5 dB ab. a) Wie groß ist der Gesamtschallpegel des Klangs? b) Für den Klang wird eine Frequenzanalyse mit Oktavfiltern durchgeführt (Oktavmittenfrequenzen $f_m = 125$ Hz, 250 Hz, 500 Hz, 1 000 Hz und 2 000 Hz). Welche Teiltöne befinden sich

im jeweiligen Oktavband und wie groß sind die daraus in den einzelnen Oktavbändern ermittelten Oktavpegel? c) Zum oben beschriebenen Klang wird zusätzlich ein weiteres Geräusch dazugeschaltet, sodass sich für beide Signale gemeinsam ein Gesamtpegel von 95 dB ergibt. Wie groß ist der Pegel des zweiten Geräusches?

Ü 7.2-3 Ein Lautsprecher mit kugelförmiger Abstrahlung befindet sich frei im Raum und wird mit einer elektrischen Leistung von $P = 100\,\text{W}$ gespeist. Der akustische Wirkungsgrad des Lautsprechers betrage $\eta = 5\%$. a) Wie groß sind die Schallintensität und der Schallpegel in 10 m Entfernung vom Lautsprecher? b) Wie groß ist die Intensität in 10 m Entfernung vom Lautsprecher, wenn sich derselbe unmittelbar vor einer schallharten Wand befindet? c) In welcher Entfernung vom Lautsprecher beträgt die Intensität ein Viertel des Wertes, der sich in 10 m Entfernung vom Lautsprecher ergibt? Wie hoch ist der Schallpegel?

Ü 7.2-4 Bei einer ebenen, sinusförmigen Schallwelle wird in Luft bei 20 °C und Normdruck eine Schalldruckamplitude von 0,2 Pa gemessen. a) Wie groß ist die maximale Schallschnelle? b) Welchen Effektivwert hat die Schallschnelle? c) Wie groß sind Schallintensität sowie Schallpegel der Welle? d) Wie ändern sich Schallintensität und Schallpegel beim Übergang von Luft in Argon bei 20 °C und Normdruck? Die beiden Gase sind voneinander getrennt durch eine dünne vernachlässigbare Membran. Argon hat am Normzustand die Dichte $\varrho_\text{n} = 1{,}784\,\text{kg/m}^3$ und die Schallgeschwindigkeit 308 m/s (Tabelle 3.6).

Ü 7.2-5 Auf einem Betriebsgelände befinden sich drei Schallquellen, die als Punktquellen betrachtet werden können. Neben dem Betriebsgelände steht ein Wohngebäude; für dieses soll die Wirkung der Schallimmission bestimmt werden. In jeweils 2 m Abstand von den Quellen werden folgende Schallpegel gemessen: $L_{1,2\,\text{m}} = 93\,\text{dB}$, $L_{2,2\,\text{m}} = 97\,\text{dB}$ und $L_{3,2\,\text{m}} = 98\,\text{dB}$. Die Abstände zum Wohnhaus sind $r_1 = 160\,\text{m}$, $r_2 = 100\,\text{m}$ und $r_3 = 252\,\text{m}$. a) Wie groß ist der Schallpegel jeder einzelnen Quelle am Wohngebäude? b) Wie groß ist der resultierende Gesamt-Schallpegel am Wohngebäude, wenn alle drei Quellen gleichzeitig einwirken? c) An welcher der drei Schallquellen ist eine Lärmminderungsmaßnahme am sinnvollsten, um den Gesamtpegel am Wohngebäude zu senken? Um wie viel muss der Pegel mindestens gemindert werden, dass der Gesamtpegel am Gebäude höchstens 60 dB beträgt?

Ü 7.2-6 Eine $s = 10\,\text{mm}$ dicke einscheibige Glaswand (Dichte $\varrho = 2\,500\,\text{kg/m}^3$; Querdehnungszahl $\mu = 0{,}17$; Elastizitätsmodul $E = 76\,\text{GN/m}^2$) ist schalltechnisch zu analysieren. a) Welches Luftschalldämmmaß hat die Glaswand bei 250 Hz und 1 000 Hz? b) Wo liegt die Grenzfrequenz dieser Glaswand? c) Welche Auswirkung hat der Koinzidenzeffekt auf das Luftschalldämmmaß der Glaswand? (Schätzwert für R bei 250 Hz und 1 000 Hz).

7.3 Schallempfindung

7.3.1 Physiologische Akustik

Das *menschliche Ohr* ist nach statistischen Reihenuntersuchungen erst dann in der Lage, Schallwellen zu registrieren und eine Schallempfindung im Bewusstsein auszulösen, wenn die Schallfrequenz im Bereich $f = 16\,\text{Hz}$ bis 20 kHz und der Effektivwert des Schallwechseldrucks über ca. $p_\text{eff} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$ liegt. Die obere Frequenzgrenze des Hörbereichs verringert sich mit zunehmendem Alter erheblich. Bei Schalldrücken oberhalb $p = 20\,\text{Pa}$ oder Schallpegeln höher als $L = 120\,\text{dB}$ registriert der Mensch nahezu keine Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit des Schalls mehr, sondern er empfindet nur noch Schmerz (*akustische Schmerzgrenze*). Einen Überblick über die Abgrenzung des Hörbereichs von den übrigen Schallfrequenzbereichen gibt Tabelle 7.5.

Das menschliche Gehörorgan besteht, wie Abb. 7.11 schematisch wiedergibt, aus drei Bereichen, dem *äußeren Ohr*, dem *Mittelohr* und dem *Innenohr*. Der äußere Gehörgang wirkt als offene Pfeife (Abschn. 5.2.4.2), die Eigenfrequenz der Luftsäule bewirkt im Bereich $2\,\text{kHz} < f < 4\,\text{kHz}$ eine Resonanzverstärkung der Schallamplituden. *Hammer, Amboss* und *Steigbügel* wirken als mechanische Über-

Tabelle 7.5 Schallbereiche

Schallbereich Frequenzbereich	Infraschall 0 Hz bis 15 Hz	Hörbereich 16 Hz bis 20 kHz	Ultraschall 20 kHz bis 10 GHz	Hyperschall 10 GHz bis 10 THz
Schallgeber	mechanische Rüttler (Shaker)	mechanisch: Pfeifen, Sirenen, Musikinstrumente; elektroakustisch: elektrodynamische und elektromagnetische Lautsprecher	mechanisch: Pfeifen, Sirenen, Pneumatik; elektroakustisch: elektrostriktive, piezoelektrische, elektrostatische Lautsprecher	Josephson-Kontakte, piezoelektrisch gekoppelte Mikrowellen-Resonatoren
Schallaufnehmer	piezoelektrische Aufnehmer, Dehnungsmessstreifen	Kondensatormikrofon, elektrodynamische, piezoelektrische, piezoresistive Mikrofone	Kondensatormikrofon, piezoelektrische Mikrofone	Josephson-Kontakte, piezoelektrisch gekoppelte Mikrowellen-Resonatoren
Anwendungspraxis	Lagerschwingungen, Körperschall, Bauwerksschwingungsanalyse, Erdbebenwellen	Fonotechnik, Schall- und Lärmschutz, Raumakustik, Schwingungsisolierung	Reinigung, Entgasen, Dispergieren, Emulgieren, Polymerisationssteuerung, Ultraschallbearbeitung (Bohren, Schneiden), Werkstoffprüfung, Ultraschalldiagnostik, Modellakustik	Grundlagenphysik, Phononenspektroskopie, Molekularkinetik

setzung; sie übertragen und verstärken die Auslenkungen des *Trommelfells* auf das *ovale Fenster*.

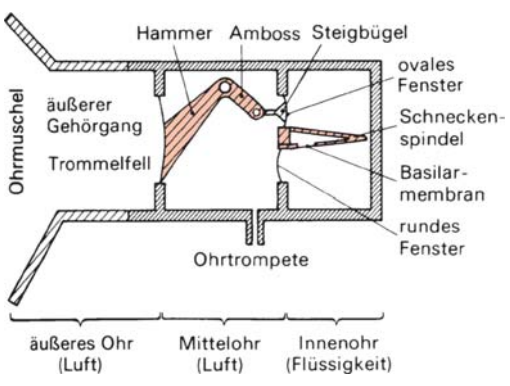


Abb. 7.11 Menschliches Gehörorgan, schematisch

Das Innenohr ist sehr kompliziert aufgebaut. Grob vereinfachend besteht es aus zwei miteinander verbundenen Räumen (*Skale vestibuli* und *tympani*) und ist mit einer natriumionenreichen Flüssigkeit (*Perilymphe*) gefüllt. Beim ovalen und runden Fenster ist das Flüssigkeitsvolumen jeweils durch bewegliche Membranen abgeschlossen, sodass die vom Schall verursachte Steigbügelfußbewegung in eine Schwingung der inkompressiblen Perilymphflüssigkeit umgewandelt wird. Diese Flüssigkeitsschwingung erzeugt mechanische Deformationen der *Basilarmembran* der *Schneckenspindel*, die die beiden Perilymphteilräume trennt. Die Schneckenspindel ist mit kaliumionenreicher Flüssigkeit (*En-*

dolymphe) gefüllt, zwischen Endo- und Perilymphe besteht also ein elektrisches Gleichspannungspotential. Die *Haarzellen* des *Cortischen Organs* auf der Basilarmembran erleiden durch die Basilarmembranbewegung elektrische Potentialänderungen und die dadurch im *Hörnerv* erzeugten *Reizströme* lösen im *Gehirn* die *Schallempfindung* aus.

Gleiche Schallpegel unterschiedlicher Frequenz führen zu einer unterschiedlichen Schallempfindung. In Abb. 7.12 ist als untere Grenzkurve in Abhängigkeit von der Schallfrequenz der Schalldruckpegel L_P eingezeichnet, der eben noch einen Höreindruck hervorruft, die *Hörschwelle*.

Der Maßstab für das Lautheitsempfinden des Gehörorgans ist die *Lautstärke* L_S. Er ist so gewählt, dass bei einer Schallfrequenz $f = 1\,000$ Hz der Wert der Lautstärke gleich dem Wert des Schalldruckpegels ist:

$$\frac{L_S(1\,\text{kHz})}{\text{phon}} = \frac{L_P(1\,\text{kHz})}{\text{dB}} \qquad (7.58)$$

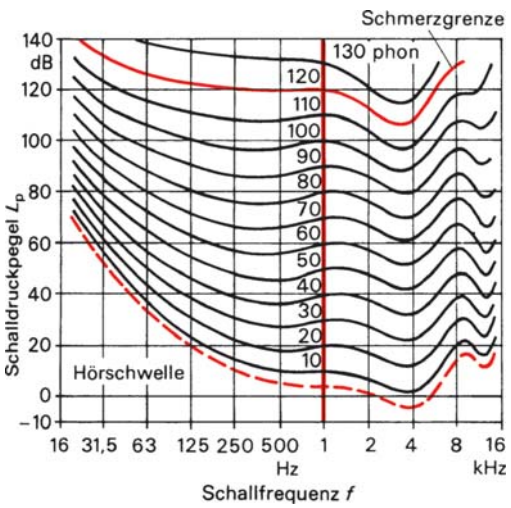


Abb. 7.12 Kurven gleicher Lautstärke L_S

Die Lautstärke wird in der Maßeinheit *phon* gemessen. Der Verlauf der Lautstärkepegel in Abb. 7.12 gibt an, welcher Schalldruckpegel $L_p(f)$ einer Schallwelle die gleiche Schallempfindung auslöst wie der Schalldruckpegel L_p (1 000 Hz) einer 1 kHz-Schallwelle. Anhand von Abb. 7.12 kann für Schall mit einem schmalbandigen Frequenzspektrum von maximal Terzbreite durch eine Schallpegel- und Mittenfrequenzmessung die Lautstärke bestimmt werden. Das menschliche Gehör nimmt Lautstärkeunterschiede von $\Delta L_S = 1$ phon gerade noch wahr. Bei $L_S = 120$ phon liegt die Schmerzgrenze des Gehörs.

Die Hörschwelle entspricht nicht dem Lautstärkepegel von $L_S = 0$ phon, sondern dem von $L_S = 4$ phon. Der Grund dafür ist, dass international als Bezugsschalldruck der runde Wert $P_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa vereinbart ist, die tatsächliche Hörschwelle aber bei einem etwas höherem Schalldruck liegt.

Bei der Angabe als Lautstärke L_S entspricht eine Verdopplung der Schallempfindung einer Zunahme der Lautstärke um 10 phon. Ein proportional zur Schallempfindung steigendes Maß ist die *Lautheit*

$$S = 2^{0{,}1\left(\frac{L_S}{\text{phon}} - 40\right)}\,\text{sone}\,. \qquad (7.59)$$

Die Zahlenwerte der Lautheit S werden durch den Zusatz *sone* gekennzeichnet. Nach (7.59) entspricht die Lautstärke $L_S = 40$ phon der Lautheit $S = 1$ sone.

Außer den wegen der Resonanzeigenschaften des Gehörorgans komplizierten Lautstärkekurven in Abb. 7.12 weist die Schallempfindung einen *Verdeckungseffekt* auf. Treffen gleichzeitig zwei frequenzbenachbarte Schallspektren auf das Gehör, so wird durch das Übersprechen benachbarter Sensoren im Cortischen Organ das Schallspektrum mit

dem niedrigeren Schallpegel verdeckt und im Wesentlichen ruft nur der höhere Schallpegel eine Schallempfindung hervor. In der Schallmesspraxis wird dieser komplexe Zusammenhang zwischen der Schallempfindung und dem messbaren Schallpegelspektrum durch *Bewertungskurven* berücksichtigt, die sich in den Schallpegelmessern durch eine elektronisch einfache frequenzabhängige Verstärkung verwirklichen lassen. Von den in der *DIN EN 60 651* festgelegten oder vorgeschlagenen *Bewertungskurven A, B, C* wird in der Messpraxis die A-Bewertung am weitaus häufigsten benutzt; sie nähert den Verlauf der Schallempfindung für Lautstärken unter $L_S = 90$ phon. Die Schallpegel von gehörschädigendem Lärm über $L_S = 100$ phon wird mit der C-Kurve bewertet. Die zwischen der A- und C-Kurve liegende B-Bewertung benutzt man nicht mehr in der Praxis.

Die bewerteten Schallpegel werden berechnet, indem zu den terz- oder oktavweise gemessenen Schallpegeln L_i ein *frequenzabhängiger Bewertungsfaktor* Δ_i^* addiert wird. So ist der *A-bewertete Schallpegel* L_A eines Schallspektrums

$$L_A = 10\,\lg\left\{\sum_{i=1}^{n} 10^{\frac{L_i+\Delta_i^*}{10\ \mathrm{dB}}}\right\}\ \mathrm{dB(A)}\,. \quad (7.60)$$

Die Bewertungsfaktoren kann man Abb. 7.13 entnehmen; die Zahlenwerte der A-Bewertungsfaktoren Δ_A^* sind in der Tabelle 7.4 aufgeführt. Die bewerteten Schallpegel werden in dB(A), dB(B) oder dB(C) angegeben.

Mit zunehmendem Lebensalter wird durch die Schallbelastung und Gefäßveränderung im Innenohr der Stoffwechsel der Hörzellen vermindert. Die Frequenzabhängigkeit und der Absolutwert der Hörschwelle verändern sich; es stellt sich die *Altersschwerhörigkeit* ein.

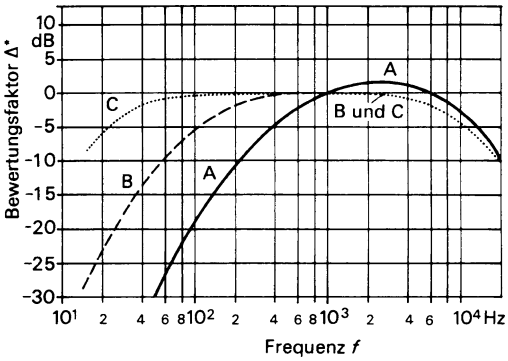


Abb. 7.13 Bewertungskurven A, B, C nach DIN EN 60 651

Hohe Schalldruckamplituden führen nur in Extremfällen, beispielsweise bei Stoßwellen von Explosionen, zur Schädigung des Trommelfells; sie führen in der Regel zu einer sofortigen *Vertäubung*, bei der durch Stoffwechselstörungen die Haarzellenempfindlichkeit vermindert wird. Diese Anhebung der Hörschwelle bildet sich wieder vollkommen zurück, wenn die hohe Schallexposition durch Erholungspausen unterbrochen wird und nur kurzfristig ist. Jahrelange Schallbelastung verursacht eine beschleunigte Degeneration der Haarzellen und einen irreversiblen Hörverlust, die *Lärmschwerhörigkeit*.

Der *äquivalente Dauerschallpegel* (*Mittelungspegel*) ist ein Maß für die Schallbelastung des Gehörs. Er wird durch Aufsummieren der Abwerteten Schallpegel $L_{A,i}$ den n Zeitintervallen t_i des Bezugszeitraums t_B, beispielsweise $t_B = 8$ h, gebildet:

$$L_m = 10\,\lg\left\{\frac{1}{t_B}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i \cdot 10^{\frac{L_{A,i}}{10\ \mathrm{dB}}}\right)\right\}\ \mathrm{dB(A)}\,. \quad (7.61)$$

Nach der VDI-Richtlinie 2058 liegt der Grenzwert der Gehörbelastbarkeit bei einem äquivalenten Dauerschallpegel von $L_m = 85$ dB (A),

bezogen auf einen achtstündigen Arbeitstag; er führt bei 5% der Betroffenen nach zehn Jahren zu einer Lärmschwerhörigkeit.
Wird der auf einen achtstündigen Arbeitstag bezogene, äquivalente Dauerschallpegel von $L_m = 90\,dB\,(A)$ überschritten, dann sind *Gehörschutzmittel* (Stöpselgehörschützer, Kapselgehörschützer, Gehörschutzkappen) zu tragen.
Die berufsbedingte Schwerhörigkeit beginnt meistens mit einer Anhebung der Hörschwelle im Frequenzbereich von $f = 2\,kHz$ bis $f = 6\,kHz$, weil dort viele Lärmquellen das Schallpegelmaximum haben. Die über die Schallempfindung vegetativ gesteuerte Innenohr-Stoffwechseländerung kann auch auf andere Körperfunktionen übergreifen und zu Kreislauf-, Herz- und Gleichgewichtsstörungen führen.

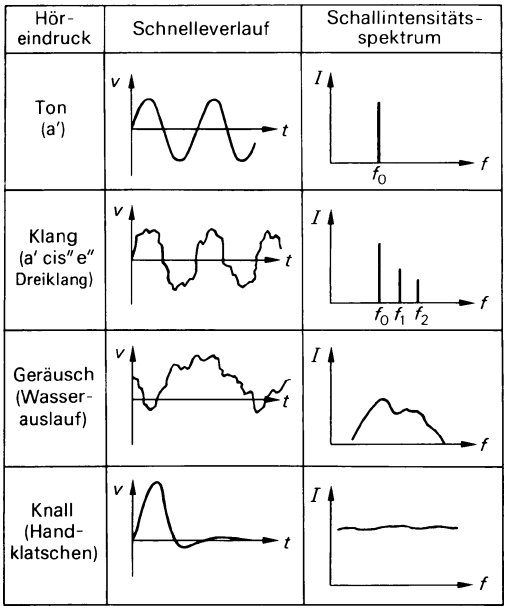


Abb. 7.14 Höreindruck, charakteristische Spektren und Schallschnelleverlauf (v Schallschnelle, t Zeit, I Intensität, f Frequenz)

7.3.2 Musikalische Akustik

Die *Schallempfindung* des Menschen unterscheidet den hörbaren Schall nicht nur nach dessen Lautheit, sondern auch nach dem *Höreindruck* des Schallereignisses. Die Unterscheidung des Höreindrucks in *Ton, Klang, Geräusch* und *Knall* wird durch den Verlauf des Intensitätsspektrums des Schalls bestimmt.
Die Schallwelle eines Tons ist rein sinusförmig und monofrequent. Klänge sind eine Überlagerung mehrerer Schallwellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz, wobei die Frequenzen in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen. Lässt sich das Frequenzverhältnis durch ganze Zahlen nicht größer als acht ausdrücken, so ist die abendländische Schallempfindung ein Wohlklang (*Konsonanz*), im anderen Fall ein Missklang (*Dissonanz*). Das Intensitätsspektrum eines Geräusches ist nicht mehr linienförmig, sondern breitbandig und hat einen stark schwankenden Amplitudenverlauf. Bei einem Knall schließlich ist der Intensitätsverlauf über einen großen Frequenzbereich nahezu konstant.
In Abb. 7.14 sind die charakteristischen Schallspektren der verschiedenen Höreindrücke und der jeweilige zeitliche Verlauf der Schnelle, den die zu diesen Höreindrücken führenden Schallwellen an Mikrofonmembranen oder dem Trommelfell des Gehörorgans hervorrufen, einander gegenübergestellt. Abbildung 7.15 gibt diese Schallspektren als graphische Aufzeichnungen am Bildschirm wieder.
Der Schnelleverlauf einer Schallwelle ist mit deren Intensitätsspektrum eindeutig verknüpft. Durch eine Fouriertransformation (Abschn. 5.1.4.3) ergibt sich aus dem Intensitätsspektrum der Zeitverlauf der Schnelle und umgekehrt. *Fast-Fourier-Transform-Analysatoren* errechnen aus der zeitlichen Änderung der elektrischen Spannung der elektro-

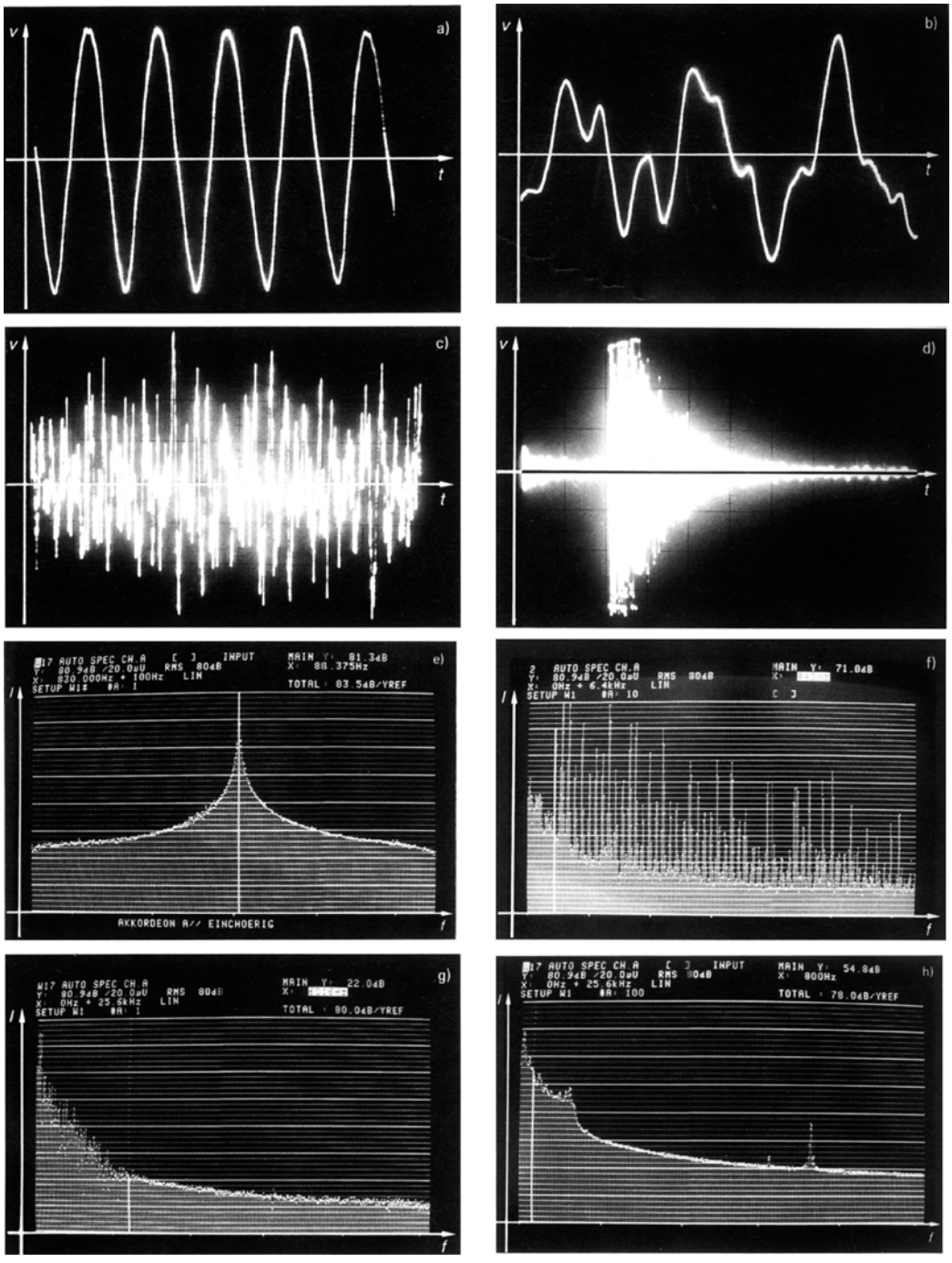


Abb. 7.15 Charakteristische Schallspektren: Schnelleverlauf (Abszisse: t, Ordinate: v): **a**) Ton a′, **b**) Klang a′-cis″-e″, **c**) Geräusch (Wasserauslauf), **d**) Knall (Handklatschen). Frequenzspektrum (Abszisse: f, Ordinate: I): **e**) Ton a″, **f**) Dreiklang a′-cis″-e″, **g**) Geräusch (Wassereinlauf in Becken), **h**) Knall (Handklatschen)

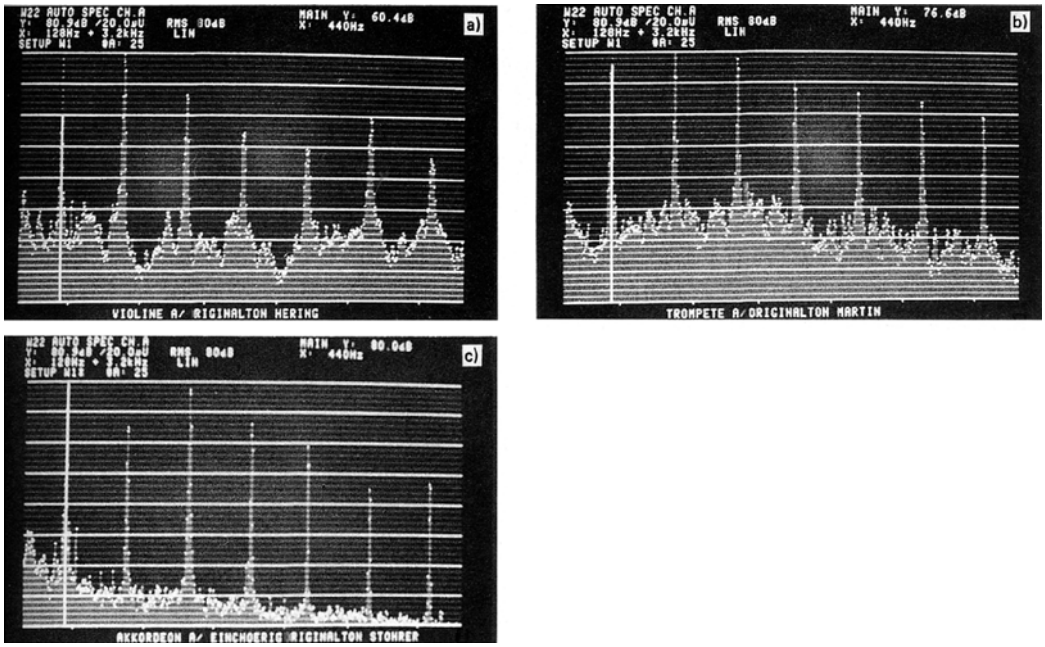


Abb. 7.16 Lautstärkespektren von Musikinstrumenten im Vergleich, Kammerton $a' = 440$ Hz (Aufnahme mit Fast-Fourier-Transform-Analysator): **a**) Violine (Originalton Hering), **b**) Trompete (Originalton Martin), **c**) Akkordeon (Originalton Stohrer)

akustischen Wandler das Frequenzspektrum; *Echtzeitanalysatoren* geben das Spannungssignal gleichzeitig auf eine Reihe schmalbandiger Filter und messen parallel die Spannungsamplituden der einzelnen Bandfilter. Die niedrigste Frequenz im Schallspektrum bestimmt die *Tonhöhe des Grundtons*.

Klangerzeugende Instrumente unterscheiden sich durch das Verhältnis der Amplituden der höherfrequenten Schwingungen, der *Obertöne*, zur Grundschwingung, dem Grundton. Für einige Musikinstrumente unterschiedlicher Klangfarbe sind in Abb. 7.16 die gemessenen Frequenzspektren dargestellt.

Die Einstufung der Tonhöhen durch das Gehör ist weitgehend proportional zur Schallfrequenz. Nur für Töne mit Schallpegeln über $L = 60$ dB treten im Gehörorgan nichtlineare Übertragungseffekte auf; Töne unter $f = 500$ Hz werden höher und Töne über $f = 4$ kHz tiefer empfunden. Die Wahrnehmbarkeitsschwelle von relativen Tonhöhenschwankungen ist frequenz- und intensitätsabhängig; sie beträgt bei mittleren Schallpegeln etwa 0,3% der Tonfrequenz.

Zur Skalierung der Tonhöhenempfindung wird der Frequenzbereich der Schallempfindung logarithmisch in *Oktaven* unterteilt; die Verdopplung der Tonfrequenz ergibt einen Oktavschritt. Abbildung 7.17 gibt die Einteilung in Oktaven wieder. Zur Orientierung sind der Tonumfang einiger Musikinstrumente und die Gesangs-Stimmlagen aufgeführt.

Die Oktave wird in zwölf Tonintervalle mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen unterteilt; der Tonhöhenunterschied benachbarter Tonintervalle beträgt einen *Halbtonschritt*. Die Tonintervalle sind in Tabelle 7.6 zusammengestellt und durch ihre Klangempfindung charakterisiert.

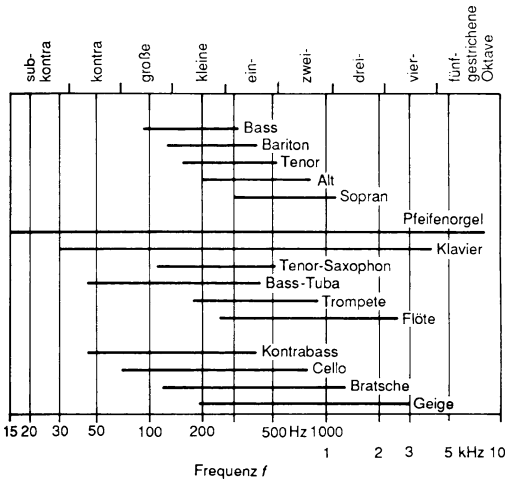


Abb. 7.17 Frequenzbereiche der Oktaven, der Stimmlagen und der Grundtöne einiger Musikinstrumente

Tabelle 7.7 Tonleitern

diatonisch rein			chromatisch wohltemperiert		
Ton	$f:f_{c'}$	f in Hz	Ton	$f:f_{c'}$	f in Hz
c′	1	264	c′	$2^{0/12}$	261,6
			cis′ = des′	$2^{1/12}$	277,2
d′	9/8	297	d′	$2^{2/12}$	293,7
			dis′ = es′	$2^{3/12}$	311,1
e′	5/4	330	e′	$2^{4/12}$	329,6
f′	4/3	352	f′	$2^{5/12}$	349,2
			fis′ = ges′	$2^{6/12}$	370,0
g′	3/2	396	g′	$2^{7/12}$	392,0
			gis′ = as′	$2^{8/12}$	415,3
a′	5/3	440	a′	$2^{9/12}$	440,0
			ais′ = b′	$2^{10/12}$	466,2
h′	15/8	495	h′	$2^{11/12}$	493,9
c″	2	528	c″	$2^{12/12}$	523,3

Die stufenweise Anordnung der Töne innerhalb der Oktave ergibt die *Tonleiter*. Basis der abendländischen Musik ist die *diatonische C-Dur Tonleiter* mit der Grundtonbezeichnung c. Die Frequenzverhältnisse $f:f_{c'}$ der sieben Töne zum Grundton sind in Tabelle 7.7 aufgeführt; für die internationale Stimmung des *Normstimmtons* a′ (*Kammerton*) auf $f_{a'} = 440\,\text{Hz}$ sind die Frequenzen der Töne der eingestrichenen Oktave angegeben.

Die diatonische Tonleiter, die mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen gebildet wird, ist in sich nicht widerspruchsfrei, wie folgendes Beispiel zeigt: Ausgehend von der Frequenz $f_{c'}$ des Tons c′ kommt man durch einen großen Sext- und einen Quartschritt auf den Ton d″ mit der Frequenz $f_{d''} = f_{c'}\frac{5}{3}\frac{4}{3} = f_{c'}\frac{20}{9}$. Geht man von d″ wieder zwei Quinten zurück, so sollte wieder der Ton c′ entstehen. Tatsächlich aber weicht die sich dann ergebende Frequenz $f = f_{c'}\frac{20}{9}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = f_{c'}\frac{80}{81}$ von der Tonfrequenz $f_{c'}$ um den Faktor 80/81 ab. Beim Spielen einer Melodie mit den reinen Intervallsprüngen gemäß Tabelle 7.6 bewegt man sich zwangsläufig immer weiter von einer festen Tonleiter weg. Diese diatonischen Unstimmigkeiten wirken sich besonders beim Übergang auf die anderen Tonleitern der Dur- und Moll-Tonarten aus, wenn durch chromatische Erhöhung oder Erniedrigung die benötigten Halbtonintervalle festgelegt werden.

Tabelle 7.6 Tonintervalle

Intervall	Frequenz-Verhältnis	Halbtonumfang	Klangempfindung
Prime	1:1	0	Konsonanz
kleine Sekunde	16:15	1	Dissonanz
große Sekunde	9:8; 10:9	2	Dissonanz
kleine Terz	6:5	3	Konsonanz
große Terz	5:4	4	Konsonanz
Quarte	4:3	5	Konsonanz
Quinte	3:2	7	Konsonanz
kleine Sexte	8:5	8	Konsonanz
große Sexte	5:3	9	Konsonanz
kleine Septime	9:5, 16:9	10	Dissonanz
große Septime	15:8	11	Dissonanz
Oktave	2:1	12	Konsonanz

Zur Zeit J. S. Bachs wurde die *chromatisch wohltemperierte Stimmung* eingeführt, bei der die Oktave in zwölf gleiche Halbtonschritte unterteilt ist (Tabelle 7.7). Das Frequenzverhältnis zweier aufeinander folgender Halbtöne beträgt dabei $\sqrt[12]{2}$. Mit dieser chromatischen Tonleiter wurden die diatonischen Probleme gelöst, nach ihr sind die Instrumente mit fester Stimmung (z. B. Klavier) gestimmt.

Zur Übung

Ü 7.3-1 An einem Arbeitsplatz werden folgende Oktavpegel gemessen:

f_m/Hz	16	31,5	63	125	250	500	1 000	2 000
L/dB	43	48	49	60	52	53	50	38

a) Welcher Gesamt-Schallpegel wird gemessen? b) Welchen A-bewerteten Schallpegel hat das gemessene Frequenzspektrum? c) Wie hoch ist der äquivalente Dauerschallpegel an diesem Arbeitsplatz, wenn wegen eines zusätzlichen Maschinengeräusches während eines 10-stündigen Arbeitstages zwei Stunden lang der Oktavpegel bei 250 Hz auf 80 dB ansteigt?

Ü 7.3-2 Einem Menschen wird ein Sinuston niedriger Frequenz vorgespielt. Der Ton erzeugt beim Hörer einen Schalldruckpegel von 92 dB. Der Hörer empfindet den Ton als gleich laut wie einen Sinuston der Frequenz 1 kHz mit einem Schalldruckpegel von 70 dB. a) Was war die Frequenz des tiefen Tones? b) Wie groß ist die Lautstärke des Tones? c) Welche Lautheit besitzt der Ton? d) Wie groß müsste die Lautstärke sein, damit der Ton vom Hörer doppelt so laut empfunden würde?

7.4 Technische Akustik

7.4.1 Raumakustik

Bei der Schallausbreitung in Räumen, beispielsweise in Wohnräumen, Büros, Veranstaltungssälen und Hallen wird die Schallempfindung und die Hörsamkeit im Raum von den Intensität- und Laufzeitverhältnissen zwischen dem gradlinig einfallenden Schall, dem *Direktschall*, und dem über Reflexionen an den Wänden und Flächen im Raum an den Empfangsort gestreuten Schall, *dem indirekten Schall*, bestimmt. Ist die Laufzeitdifferenz zwischen dem direkten und dem indirekten Schall, besonders dem Anteil mit nur einem einzigen Rückwurf, kleiner als die absolute Wahrnehmbarkeitsschwelle von etwa 0,05 s, dann sind die Reflexionen unschädlich für die Hörsamkeit und wirken sich vorteilhaft auf die Verständlichkeit und die Klangfärbung, besonders bei Musik, aus.

Die nützlichen Rückwürfe kompensieren die geometrisch bedingte Schallpegelabnahme des Direktschalls bei wachsendem Abstand zwischen Schallgeber und -empfänger. Größere Laufzeitunterschiede sind schädlich, besonders wenn periodische Rückwurffolgen, sogenannte *Flatterechos*, auftreten. Diese entstehen durch Schallrückwürfe zwischen parallelen, gut reflektierenden Raumumschließungsflächen. Sie lassen sich durch konstruktive Maßnahmen wie schiefwinklige Flächenanordnungen, im Extremfall in einer Fünfeckgeometrie, oder durch schallabsorbierende Wand- und Deckenverkleidungen unterdrücken.

Häufige Reflexionen bewirken, dass der indirekte Schall am Empfangsort gleichmäßig aus allen Ausbreitungsrichtungen einfällt und die Schallenergiedichte w überall im Raum gleich groß ist. Ein solches Schallfeld wird als *diffuses Schallfeld* bezeichnet.

Eine Wandfläche S_i mit dem Schallabsorptionsgrad α_i – schematisch in Abb. 7.18 wiedergegeben – absorbiert unter dem Einfallswinkel δ aus einem Raumwinkelbereich $d\Omega$ die Schallleistung

$$dP_\delta = \alpha_i I_\delta (S_i \cos\delta)\, d\Omega \,. \qquad (7.62)$$

I_δ ist die Schallintensität der unter dem Winkel δ einfallenden Schallwelle. Im diffusen

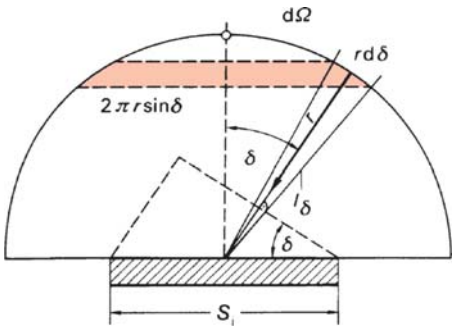


Abb. 7.18 Schalleinfall auf eine Schallabsorptionsfläche

Schallfeld ist diese unabhängig vom Einfallswinkel und $I_\delta = I_{\text{diffus}}$. Mit dem Raumwinkelbereich

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{(2\pi r \sin\delta)(r\,\mathrm{d}\delta)}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\sin\delta\,\mathrm{d}\delta$$

ergibt sich die gesamte von der Fläche S_i absorbierte Schallleistung

$$P_i = \frac{1}{2} I_{\text{diffus}} S_i \int_0^{\pi/2} \alpha_i \cos\delta \sin\delta\ \mathrm{d}\delta\ . \tag{7.63}$$

Im Allgemeinen hängt der Schallabsorptionsgrad α_i einer schallabsorbierenden Fläche vom Schalleinfallswinkel δ ab; deshalb definiert man einen *mittleren Absorptionsgrad*

$$\overline{\alpha}_i = \frac{\int_0^{\pi/2} \alpha_i \cos\delta \sin\delta\ \mathrm{d}\delta}{\int_0^{\pi/2} \cos\delta \sin\delta\ \mathrm{d}\delta} = 2\int_0^{\pi/2} \alpha_i \cos\delta \sin\delta\ \mathrm{d}\delta\ . \tag{7.64}$$

Durch Summation der von allen Raumflächen S_i absorbierten Schallleistung P_i ergibt sich die gesamte Schallabsorptionsleistung

$$P_{\text{ges}} = \sum_i P_i = \frac{1}{4} I_{\text{diffus}} \sum_i S_i \overline{\alpha}_i = \frac{1}{4} I_{\text{diffus}} A\ . \tag{7.65}$$

Für die Absorptionseigenschaften eines Raumes charakteristisch ist die *äquivalente Absorptionsfläche*

$$A = \sum_i S_i\, \overline{\alpha}_i\ . \tag{7.66}$$

Wird (7.65) durch den Schallleistungsgrenzwert $P_0 = I_0 S_0$ der Hörschwelle dividiert, so ergibt sich mit den Gleichungen in Tabelle 7.2 der *Schallleistungspegel des diffusen Schallfelds*:

$$L_{\text{diffus}} = L_{\text{w}} - 10\,\lg\frac{A}{4S_0}\,\mathrm{dB}\ . \tag{7.67}$$

L_{w} ist der Schallleistungspegel der Schallquelle, $S_0 = 1\,\mathrm{m}^2$ die Bezugsfläche. Die äquivalente Absorptionsfläche A eines Raumes bestimmt also den Schallpegel des diffusen Schallfeldes und darüber hinaus den akustischen Raumeindruck. Ist A groß, hat der Raum eine geringe Halligkeit, seine Akustik wird als trockene Akustik gekennzeichnet. Sehr hallige Räume dagegen haben eine geringe äquivalente Absorptionsfläche.

Diese für den raumakustischen Eindruck charakteristische Größe A kann messtechnisch einfach durch eine *Nachhallmessung* bestimmt werden. Dazu wird entsprechend Abb. 7.19 der zeitliche Abfall des Schallpegels L_{diffus} im diffusen Schallfeld untersucht, wenn die Schall-

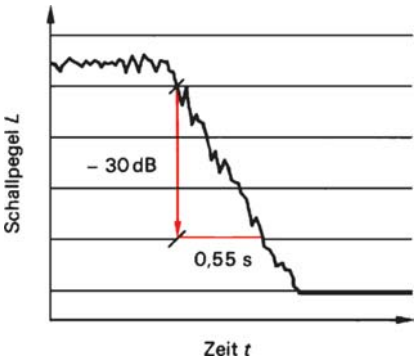


Abb. 7.19 Bestimmung der Nachhallzeit aus dem Schallpegelabfall eines diffusen Schallfeldes. Nachhallzeit $T/2 = 0{,}55$ s oder $T = 1{,}1$ s

quelle abgeschaltet wird. Die im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ dem Raumvolumen V durch Absorption verloren gehende Schallenergie – $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ ist gleich der absorbierten Schallleistung P_{ges} nach (7.65). Die Schallintensität des diffusen Schallfeldes ist $I_{\mathrm{diffus}} = wc$ und hängt damit von der Schallenergiedichte $w = E/V$ ab; es gilt die Bestimmungsgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P_{\mathrm{ges}} = \frac{1}{4}E\frac{cA}{V} \,. \tag{7.68}$$

Die Integration von (7.68) ergibt, dass die Schallenergie in einem Raum exponentiell abnimmt, wenn die Schallquelle ausgeschaltet wird:

$$E(t) = E(0)\mathrm{e}^{-cAt/(4V)} \,. \tag{7.69}$$

Als charakteristische Zeitkonstante für den Abfall der Schallenergie ist die *Nachhallzeit* T festgelegt. Es ist die Zeitspanne, in der die Schallenergie auf $E(T) = 10^{-6}E(0)$ oder der Schallpegel L_{diffus} des diffusen Schallfelds um $\Delta L = 60$ dB abgenommen hat. Aus (7.69) ergibt sich

$$T = \frac{24\ln 10}{c}\frac{V}{A} \,. \tag{7.70}$$

Für Luftschall mit einer mittleren Schallgeschwindigkeit von $c_{\mathrm{L}} = 340$ m/s geht (7.70) über in die *Sabine'sche Formel*:

$$T = \frac{0{,}163}{\mathrm{m/s}}\frac{V}{A} \,. \tag{7.71}$$

Die Nachhallzeit T hängt vom Raumvolumen und – über den Zusammenhang mit der äquivalenten Absorptionsfläche A – wie der Schallabsorptionsgrad α_{S} (Abb. 7.7) von der Schallfrequenz ab. Um eine optimale Hörsamkeit in Vortragsräumen, einen vollen Klangeindruck in Musiksälen oder eine ausreichende Schallpegelreduktion in Sporthallen zu erreichen, sind frequenz- und raumvolumenabhängige Anforderungen an die Nachhallzeit festgelegt. So sollen nach DIN 18 032 in Sporthallen die Nachhallzeiten möglichst kurz oder oberhalb $f = 500$ Hz im unbesetzten Zustand nicht größer als $T = 1{,}8$ s sein. Eine optimale Sprachverständlichkeit wird nach DIN 18 041 erreicht, wenn im Frequenzbereich $500\ \mathrm{Hz} < f < 1\,000$ Hz die Nachhallzeit $T = 1{,}0$ s bis $T = 1{,}2$ s beträgt.

Eine raumakustische Optimierung erstreckt sich nicht nur auf die Anpassung der äquivalenten Absorptionsfläche an die zur Nutzung erforderlichen Nachhallzeiten. Ein weiterer wesentlicher Planungsteil befasst sich mit der geometrischen Ausbreitung des Direktschalls und der nützlichen ersten Schallrückwürfe. Mit Reflektoren, speziellen Deckenformen, ausgeklügelten Schallabsorberanordnungen sowie akustisch wirksamen Verkleidungen von Wänden und Decke wird im konkreten Fall der Raum nach den akustischen Erfordernissen optimiert.

7.4.2 Luftschalldämmung

Trifft der durch Sprechen, Musik oder Arbeitstätigkeit erzeugte Luftschall (Schallpegel L_1) auf die Wände und Decken eines Raumes, so werden diese zu *erzwungenen Biegeschwingungen* angeregt. Die periodisch auftretenden Über- und Unterdrücke der Schallwellen an der Trennwand oder Trenndecke lenken die Bauteile senkrecht zur Wandfläche aus, wie in Abb. 7.20 dargestellt. Diese Biegeschwingungen erregen die Luftteilchen im Nachbarraum, die sich vor der Trennwand S befinden, zu Schwingungen und erzeugen dadurch im Nachbarraum Schallwellen (Schallpegel L_2). Bei erzwungenen Schwingungen (Abschn. 5.1.3) ist die Schwingungsamplitude – und damit die in den Nachbarraum abgestrahlte Schallleistung – abhängig von der Lage der Anregungsfrequenzen bezüglich der Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen der Trennwand und von deren Dämpfung. Wegen der Einspannbedingungen ist die Luftschalltransmission kompliziert und muss messtechnisch erfasst werden.

Die Luftschalldämmung wird durch ein logarithmisches Maß für den Luftschalltransmissionsgrad τ_S, das *Schalldämmmaß* R, gekennzeichnet (7.50):

$$R = 10\,\lg\frac{1}{\tau_S(\delta)}\,\mathrm{dB} = 10\,\lg\frac{P_1}{P_2}\,\mathrm{dB}\,. \qquad (7.72)$$

Die Größe P_1 ist die auf die Trennwand auftreffende, P_2 die auf die Rückseite in den Empfangsraum abgestrahlte Schallleistung. Die gesamte, auf die Trennwandfläche S auftreffende Schallleistung ist nach (7.63) für $\alpha_i = 1$

$$P_1 = \frac{I_{\mathrm{diffus},1}S}{4}\,. \qquad (7.73)$$

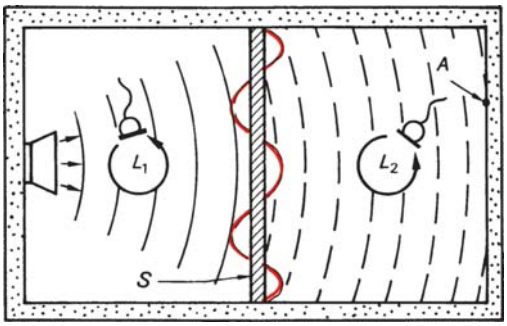


Abb. 7.20 Luftschallanregung und -abstrahlung einer Trennwand (S schallabstrahlende Oberfläche im Empfangsraum mit der äquivalenten Schallabsorptionsfläche A)

Die transmittierte Schallleistung $P_2 = \tau_s P_1$ wird im Empfangsraum von der äquivalenten Absorptionsfläche A absorbiert und führt zu einem diffusen Schallfeld im Empfangsraum, dessen Schallintensität nach (7.65)

$$I_{\mathrm{diffus},2} = \frac{4P_2}{A} = \frac{I_{\mathrm{diffus},1}S}{A}\tau_S \qquad (7.74)$$

ist. Werden die Schallleistungen der diffusen Schallfelder im Sende- und Empfangsraum auf die *Bezugsintensität* $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ bezogen und wird (7.74) logarithmiert, so ergibt sich für die Schallpegeldifferenz zwischen Sende- und Empfangsraum

$$L_1 - L_2 = R - 10\,\lg\frac{S}{A}\,\mathrm{dB}\,. \qquad (7.75)$$

Außer vom Schalldämmmaß R hängt also die von den Bewohnern empfundene Schalldämmung $L_1 - L_2$ vom Verhältnis der Trennwandfläche S zur äquivalenten Absorptionsfläche A des Empfangsraums ab.

Gleichung (7.75) wird in der Praxis dazu verwendet, das Schalldämmmaß einer Konstruktion zu bestimmen:

$$R = L_1 - L_2 + 10\,\lg\frac{S}{A}\,\mathrm{dB}\,. \qquad (7.76)$$

Zu diesem Zweck werden der diffuse Schallpegel L_1 der Lautsprecher im Senderaum, der diffuse Schallpegel L_2 im Empfangsraum und die Trennwandfläche S gemessen sowie nach (7.71) über eine Nachhallzeitanalyse im Empfangsraum die äquivalente Absorptionsfläche A ermittelt.
R ist von der Schallfrequenz abhängig und muss nach DIN 52 210 terzweise im Bereich $100\,\mathrm{Hz} < f < 3\,200\,\mathrm{Hz}$ bestimmt werden.
Der Schallschutz hängt nicht nur von der Schalldämmung der Trennfläche S zwischen den Räumen ab, sondern in hohem Maß auch von der *Schalllängsleitung* entlang der flankierenden Bauteile. Die Luftschalldämmung der Trennwand oder Trenndecke wird durch diese Schalllängsleitung begrenzt.

7.4.3 Körperschalldämmung

Körperschall ist die Ausbreitung von Schall in einem festen Medium oder an der Oberfläche eines Festkörpers mit Schallfrequenzen im Hörbereich oberhalb $f = 15\,\mathrm{Hz}$. Schallwellen mit kleineren Frequenzen werden als *Schwingungen* oder *Erschütterungen* bezeichnet. Die Erregung von Körperschall in festen Bauteilen durch direkt einwirkende mechanische Kräfte ist viel wirksamer als die Luftschallanregung. Besonders wirksam sind stoßartige Körperschallerregungen. Das Frequenzspektrum dieser *Schlaggeräusche* ist so breit, dass eine Vielzahl der möglichen Körperschallwellenformen, wie beispielsweise *Longitudinal-*, *Transversal-* oder *Rayleigh-Oberflächenwellen*, angeregt werden.
Ziel der Körperschalldämmung ist es, die Einleitung von Körperschall in ein Bauteil sowie die Ausbreitung und die Abstrahlung als Luftschall möglichst niedrig zu halten. Die Möglichkeiten hierzu sind

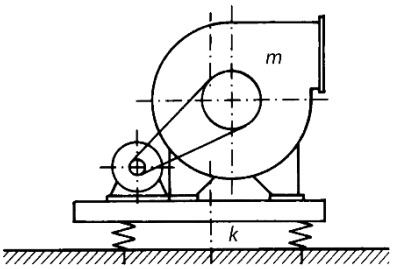


Abb. 7.21 Körperschalldämmende elastische Maschinenlagerung

- die Körperschalldämmung durch *Reflexion des Körperschalls* an Grenzflächen mit hohen Schallkennimpedanzunterschieden (Luftzwischenschichten in zweischaligen Trennwänden, Sperrmassen) oder abgestimmter elastischer Zwischenschichten (Federelemente, Gummiplatten);
- die *geometrische Körperschalldämmung* durch Verminderung der Körperschalldichte, indem die Entfernung von der Quelle vergrößert wird und die abstrahlenden Flächen verkleinert werden;
- die Körperschalldämmung durch *Dissipation der Körperschallenergie* in zwischengeschalteten Materialien mit hoher innerer Reibung (Hochpolymere, Sand, Entdröhnmaterialien) und über Reibungsverluste an Kontaktflächen (Nagelverbindungen, Stoßstellen-Dämmung an Bauteilübergängen);
- die *Verminderung des Abstrahlgrads* der körperschallabstrahlenden Fläche, indem durch konstruktive Maßnahmen (kleinflächige Unterteilung, Aussteifungen, Lochungen) die Abstrahlfläche möglichst klein gemacht (charakteristische Durchmesser kleiner als die Luftschallwellenlänge) und in nebeneinanderliegende Gebiete mit entgegengesetzter Phasenlage (Schallinterferenz-Auslöschung) zerlegt wird.

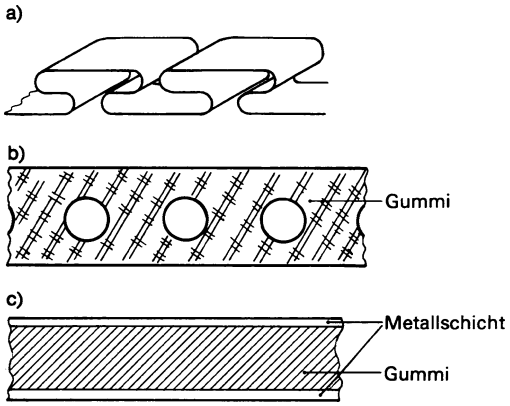


Abb. 7.22 Elastische Lagerungen: **a**) Stahlfederband, **b**) gelochte Gummiplatte, **c**) Gummimetallelement

In der Praxis werden die verschiedenen Möglichkeiten miteinander kombiniert. Eine besonders wirkungsvolle Körperschallisolation ist die *elastische Lagerung* des Schallgebers, wie in Abb. 7.21 dargestellt. Hierbei steht der Erreger mit seiner Fundamentplatte auf einer federnden Zwischenschicht gemäß Abb. 7.22 (z. B. Metall- oder Gummifederkörper, weiche Gummi-, Kork- oder Schaumstoffplatten, Fasermatten) und bildet so ein schwingungsfähiges Masse-Feder-System.
Liegt die erregende Körperschallfrequenz f weit oberhalb der *Resonanz- oder Abstimmfrequenz* des Masse-Feder-Systems

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.77}$$

mit m als der schwingenden Masse und k als der Federkonstante der Federschicht, dann ist nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen (Abschn. 5.1.3) die Schwingungsamplitude des Bauteils, in das der Körperschall eingeleitet wird, kleiner als die Erregeramplitude. Die Einleitung des Körperschalls, beispielsweise eines Ventilators in die Rohdecke, wird dadurch vermindert. Auch die

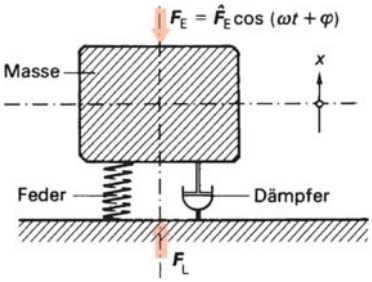


Abb. 7.23 Visko-elastisches Einmassensystem

Körperschallisolierung hochempfindlicher Empfangsräume, beispielsweise von Aufnahmestudios, kann man über die elastische Lagerung des Raumes auf Federisolatoren erreichen.
Die Verminderung der Krafteinleitung und damit der Körperschallanregung wird durch den *Isolierwirkungsgrad* η beschrieben:

$$\eta = 1 - \frac{\hat{F}_L}{\hat{F}_E}\,. \tag{7.78}$$

Die Größe $\hat{F}_L$ ist die Amplitude der eingeleiteten, $\hat{F}_E$ der erregenden Kraft. – Häufig dominiert die Kraftkomponente der Erregung senkrecht zum Fundament; diese eindimensionale Schwingung kann mit Hilfe der Lösungen für die gedämpfte erzwungene Schwingung in Abschn. 5.1.3 beschrieben werden.
Die eingeleitete Kraft in Abb. 7.23, die *Lagerkraft* F_L, ist $F_L = kx + d\dot{x}$. Ihre Amplitude $\hat{F}_L$ ist

$$\hat{F}_L = \frac{\hat{F}_E\sqrt{1 + 4\vartheta^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\vartheta^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}\,. \tag{7.79}$$

$\Omega = 2\pi f$ ist die Erreger-Kreisfrequenz, $\omega_0 = 2\pi f_0$ die Eigenfrequenz des Schwingungssys-

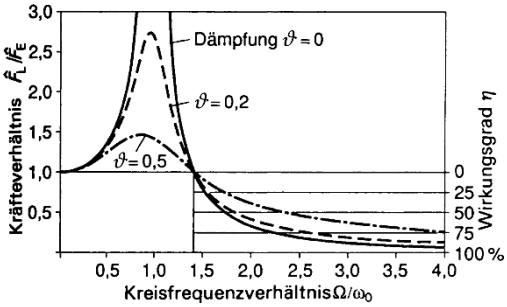


Abb. 7.24 Resonanzkurve eines Einmassensystems mit Verlauf des Isolierwirkungsgrads η

tems mit der Masse m und der Richtgröße k und ϑ der Dämpfungsgrad. Im Fall eines Einmassensystems ist der Isolierwirkungsgrad η der elastischen Lagerung demnach

$$\eta = 1 - \frac{\sqrt{1+4\vartheta^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\vartheta^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{7.80}$$

Ist die Dämpfung vernachlässigbar, also $\vartheta \approx 0$, dann folgt aus (7.80)

$$\eta = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 2}{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}. \tag{7.81}$$

In Abb. 7.24 ist der Verlauf des Verhältnisses aus übertragener zu erregender Kraft in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen Erreger- und Eigenfrequenz für verschiedene Dämpfungskonstanten aufgetragen und der sich nach (7.80) ergebende Isolierungswirkungsgrad η eingezeichnet. Eine schalldämmende Wirkung wird erst erreicht, wenn die Erregerfrequenz oberhalb des $\sqrt{2}$-fachen der Eigenfrequenz liegt. Isolierwirkungsgrade von $\eta > 93\%$ werden bei $\vartheta = 0$ nur erreicht, wenn das Erreger- zu Eigenfrequenzverhältnis den Wert $\Omega/\omega_0 = 4$ übersteigt.

Beim Einmassensystem fällt die Amplitude der eingeleiteten Kraft F_L nach (7.79) für $\Omega \gg \omega_0$ proportional zu $1/\Omega^2$. Einen steileren Abfall ($\sim 1/\Omega^4$) und damit einen höheren Isolierwirkungsgrad erreicht eine elastische Lagerung nach dem Prinzip eines *schwingungsgekoppelten Zweimassensystems*, verdeutlicht in Abb. 7.25. Durch eine *doppeltelastische Maschinenaufstellung* kann man mit verhältnismäßig einfachen Mitteln bereits einen Isolierwirkungsgrad erreichen, der in der Praxis durch ein Einmassensystem nicht realisierbar ist.

Der *Trittschall* ist ein bauphysikalischer Sonderfall der Körperschallanregung. Er wird durch das Begehen und das um etwa $\Delta L = 20$ dB(A) stärkere Geräusch des Hüpfens und des Stühleverrückens auf harten Gehbelägen verursacht und über die Decke direkt in den darunterliegenden Raum übertragen. Über Stoßstellen der Decke an flankierende Bauteile breitet sich das Trittschallgeräusch in umliegende Räume aus. Die Trittschallübertragung wird nach DIN 52 210 gemessen, indem nach Abb. 7.26 ein *Norm-Hammerwerk* mit einer Schlagfrequenz von 10 Schlägen je Sekunde auf die Decke aufgestellt und im Empfangsraum der Trittschallpegel L_{gem} terzweise aufgenommen wird.

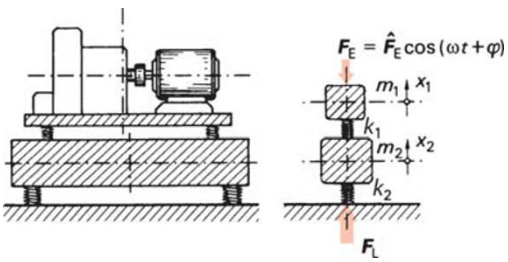


Abb. 7.25 Doppeltelastische Maschinenaufstellung (F_E, F_L Erreger- bzw. Lagerkraft, m Masse, k Federkonstante)

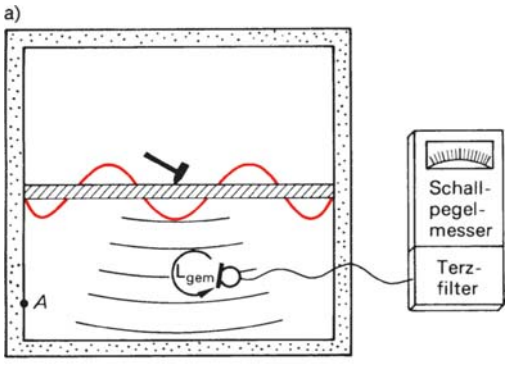


Abb. 7.26 Norm-Messung des Trittschallschutzes von Decken: **a**) Messanordnung, schematisch, **b**) Norm-Hammerwerk

Der Einfluss der Schallabsorption des Empfangsraumes auf den gemessenen diffusen Schallpegel wird durch ein Korrekturglied berücksichtigt, das vom logarithmischen Verhältnis der äquivalenten Schallabsorptionsfläche A_E des Empfangsraumes zu einer Normabsorptionsfläche $A_0 = 10\,\mathrm{m}^2$ abhängt. Der *Norm-Trittschallpegel* L_n *der Deckenkonstruktion ist* also

$$L_n = L_{gem} + 10\,\lg\frac{A_E}{A_0}\,\mathrm{dB}\,. \qquad (7.82)$$

A_E wird durch eine Nachhallzeitmessung nach (7.71) bestimmt.
Bei massiven, einschaligen Rohdecken bestimmt die flächenbezogene Masse $m' = m/A$

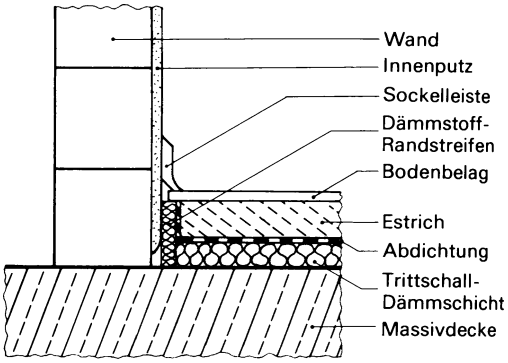


Abb. 7.27 Schwimmender Estrich

der Decke, wie niedrig der Norm-Trittschallpegel ist. Jedoch lassen sich selbst mit sehr schweren Decken von $m' \approx 600\,\mathrm{kg/m}^2$ keine solch niedrigen Trittschallpegel erreichen, dass der Mindest-Trittschallschutz nach DIN 4109 Schallschutz im Hochbau erfüllt ist. Der Trittschallschutz wird verbessert, wenn durch weichfedernde Gehbeläge die Körperschalleinleitung vermindert oder der Fußboden durch eine weichfedernde Dämmschicht von der Rohdecke abgekoppelt wird. Dieser als schwimmender Estrich bezeichnete Bodenaufbau besteht aus einer lastverteilenden Platte aus Zementmörtel (Zementestrich), Asphalt (Gussasphaltestrich) oder Spanplatten (Trockenestrich) auf einer weichen, 6 mm bis 30 mm dicken Trennschicht. Abbildung 7.27 zeigt einen solchen Aufbau. Eine gute Trittschalldämmung lässt sich allerdings nur erreichen, wenn die Estrichplatte keine Schallbrücken aufweist, also keine Mörtelbrücken oder feste Verbindungen über ungenügend abgedeckte Versorgungsleitungen zur Rohdecke oder zur Wand hat.

7.4.4 Strömungsgeräusche

Strömungsgeräusche entstehen, wenn in Maschinen und Geräten Strömungsenergie in Schallenergie im Hörfrequenzbereich umgewandelt wird. Zu zeitlichen Schwankungen

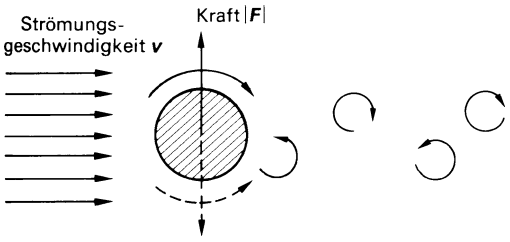


Abb. 7.28 Erzeugung einer Wechselkraft durch wechselseitige Wirbelablösung an einem angeströmten Zylinder

der Gas- oder Flüssigkeitsströmung kommt es vor allem beim Umströmen von Hindernissen sowie an Strömungskrümmungen und Ausströmöffnungen. Beispielsweise werden beim Umströmen eines Zylinders mit abströmseitiger Wirbelbildung gemäß Abb. 7.28 Kraft- und Druckschwankungen erzeugt, die ein breitbandiges Strömungsrauschen verursachen. Ist die Wirbelablösung an den umströmten Körpern asymmetrisch, oder wird – wie bei Propellern – der Wirbelbildung eine Periodizität aufgeprägt, so entstehen schmalbandige Strömungsgeräusche, die *Hiebtöne*. Über die Rohr- oder Behälterwandungen werden die Druckschwankungen des Fluids in Luftschall umgewandelt.

Wechselkräfte durch Wirbelablösung entstehen auch durch Reibungsvorgänge in der Mischzone zwischen dem hochbeschleunigten Freistrahl von Düsenöffnungen und dem ruhenden Gas, in das der Freistrahl einströmt, wie Abb. 7.29 zeigt. Das *Freistrahlgeräusch* hat eine ausgeprägte *Richtcharakteristik in Ausströmrichtung*, sein Schallfrequenzspektrum ist sehr breitbandig.

Wenn an Regelventildurchlässen die Schallgeschwindigkeit des gasförmigen Strömungsmediums überschritten wird und sich dadurch *Stoßwellen* ausbilden, kommt es ebenfalls zu hörbaren Strömungsgeräuschen. Aber auch *Resonanzschwingungen* von Ventilkegel und Ventilspindel können zu Armaturengeräuschen führen.

Tritt in strömenden Flüssigkeiten *Kavitation* auf, dann entsteht noch ein weiteres Strömungsgeräusch. Die Kavitation wird dadurch verursacht, dass die Strömungsgeschwindigkeit v an umströmten Profilen oder Strömungskanten sehr hoch wird. Nach der Bernoulli-Gleichung (Abschn. 2.12.2.2) vermindert sich der statische Druck $p = p_{ges} - \varrho/2v^2$; er kann niedriger als der Sättigungsdampfdruck p_S der Flüssigkeit sein. An kleinen Luftbläschen als Keimen entstehen dann dampfgefüllte Hohlräume, wie in Abb. 7.30 skizziert. Diese Dampfblasen kondensieren schlagartig mit Schallgeschwindigkeit, wenn der statische Druck wieder über den Sättigungsdampfdruck ansteigt. Bei dieser Implosion entstehen sehr hohe Druckspitzen bis zu $p = 10^5$ bar, die zu Materialschäden (*Ka-*

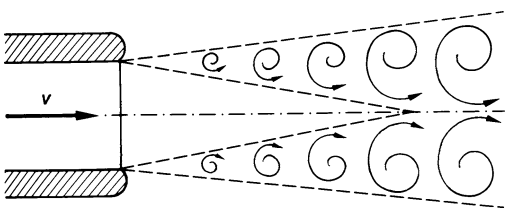


Abb. 7.29 Wechseldruck erzeugende Wirbel um turbulenten Freistrahl einer Düse

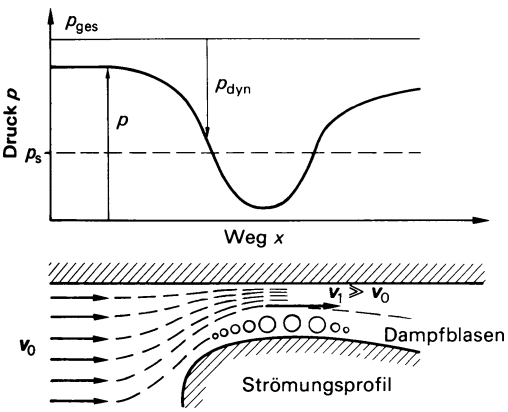


Abb. 7.30 Entstehung und Implosion von Kavitationsblasen (v Strömungsgeschwindigkeit)

vitationskorrosion, Abschn. 2.12.2.4) führen und ein prasselndes, breitbandiges Geräusch (*Kavitationsgeräusch*) verursachen.

Kavitation und Wirbelablösung in Armaturen mit großen Querschnittsverengungen bewirken die Geräusche bei der Wasserentnahme und beim Abwasserabfluss. Über die Rohrleitungen und die Wassersäule werden diese Druckschwankungen weitergeleitet und als Luftschall abgestrahlt.

Durch *Wasserschalldämpfer* (Querschnittserweiterungen mit Gummikörper) in den Leitungen, eine *Ummantelung* der Steigrohre mit losem Sand oder eine *Unterbrechung der Leitung* durch zwischengeschaltete, körperschalldämmende Gummielemente kann man die Weiterleitung von Installationsgeräuschen unterdrücken. Besonders wirkungsvoll wird das Armaturengeräusch vermindert, wenn die Strömungsgeschwindigkeit durch zwei hintereinander geschaltete Lochbleche am Ausfluss (*Luftsprudler*) vermindert und die Wirbelablösung durch weite, kantenfreie Ventilsitze verhindert wird. Mit diesen Maßnahmen erreicht man einen Armaturengeräuschpegel $L_{AG} \leqq 20\,\mathrm{dB(A)}$.

7.4.5 Ultraschall

Schall mit Frequenzen oberhalb des Hörbereichs von etwa $f = 20\,\mathrm{kHz}$ bis 10 GHz bezeichnet man als *Ultraschall*. Mechanische Ultraschallgeber, wie z. B. Pfeifen (*Galton*-Pfeife) und Sirenen, erzeugen Ultraschallfrequenzen bis etwa $f = 200\,\mathrm{kHz}$. Höhere Schallfrequenzen und größere Ultraschallleistungen erreichen elektroakustische Schallgeber. Im mittleren Ultraschall-Frequenzbereich wird die Magnetostriktion, also die Längenänderung eines ferromagnetischen Stabes aus Nickel oder Weicheisen im Magnetfeld einer Hochfrequenzspule, zur Ultraschallerzeugung verwendet (Abschn. 4.4.4.2). Höhere Frequenzbereiche und besonders hohe Ultraschallintensitäten von über $I = 100\,\mathrm{W/cm^2}$ lassen sich durch die Elektrostriktion, also den umgekehrten piezoelektrischen Effekt, von Quarz- oder Bariumtitanatplatten erreichen (Abschn. 9.3.3).

Die Wellenlänge des Ultraschalls ist kurz; in Luft ist sie kleiner als etwa $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Beugungen sind deshalb bei üblichen Dimensionen vernachlässigbar, sodass die Ultraschallausbreitung mit den Gesetzen der geometrischen Optik beschrieben werden kann. Ultraschall kann zu Ultraschall-Richtstrahlen gebündelt werden, deren Reflexion man z. B. zur Ortung von Unstetigkeiten verwendet.

Reflexionen treten an Grenzschichten mit sprunghafter Änderung der Schallkennimpedanz auf, beispielsweise beim Schall-Übergang von Festkörpern auf Luftschichten in Rissen von Schmiedeteilen, Lunkern von Gusseisen oder an Aufdopplungen von Blechen. Aus dem Zeitunterschied zwischen dem Aussenden und dem Empfang des reflektierten Ultraschalls, dem *Ultraschallecho*, lässt sich bei bekannter Schallgeschwindigkeit der Abstand der Reflexionsstelle berechnen (*Echolotverfahren*). Diskontinuitäten kann man bei der *Ultraschall-Werkstoffprüfung* zerstörungsfrei bis auf 0,1 mm genau lokalisieren.

Zu den ältesten Anwendungen des Ultraschalls gehören die Verfahren zur Ortung von Unterseebooten nach dem Sonar-Prinzip (sound navigation and ranging), zur Tiefenbestimmung mit dem Echolot und zur Kommunikation unter Wasser.

Eine weitere Anwendung des Ultraschalls ist die bildgebende Ultraschalldiagnostik in der Medizin. An der Trennfläche von Muskelgewebe und Gewebeflüssigkeit wird etwa 0,1% der Ultraschallenergie reflektiert. Um einerseits eine hohe räumliche Auflösung durch kurze Wellenlängen zu erlangen, andererseits aber trotz der Ultraschalldämpfung ausrei-

Tabelle 7.8 Schallanwendungen

Schallart	Luftschall	Flüssigkeitsschall	Körperschall
Infraschall $f < 20$ Hz	Geräusch von Windböen, Brandung (1 Hz bis 16 Hz)		Erschütterungsanalyse (1 Hz bis 16 Hz); Erdbebenmessung (5 mHz bis 20 mHz); Überwachung von Kernwaffentests; Analyse innerer Organschwingungen; Schallermüdung
Hörakustik $f = 16$ Hz bis 20 kHz Physiologische Akustik: Beschreibung des Hörvorgangs; Auswirkung von Schall auf den menschlichen Organismus Psychologische Akustik: Menschliche Wahrnehmung und Empfindung von Schallwellen (musikalische Akustik) Technische Akustik: Schallmesstechnik, Schallabstrahlung, Schallabsorption und Schalldämpfung (medizinische Akustik)	Raumakustik; Schall- und Lärmschutz; Bauakustik; Schalldämmung; Schalldämpfung und Schallabsorption; Hiebtonanalyse; Gehörschutz	Strömungsgeräusch- und Armaturengeräuschminderung; Kavitationsgeräusche; Hiebtonminderung	Maschinen- und Getriebegeräuschminderung; Schienenverkehr-Körperschallschutz
Ultraschall $f = 20$ kHz bis 1 GHz	Informationsübertragung (Fernbedienung); Signalübertragung (Pfeifen); Näherungsschalter; Echolot-Ortung	Sonar-Tiefenmessung; Doppler-Strömungsgeschwindigkeitsmessung; Emulsions-Dispergieren; Nanopartikel-Disagglomerieren; Homogenisieren; Ultraschallreinigung; Abwasseraufbereitung	Ultraschall-Werkstoffprüfung; Ultraschalldiagnostik; Polymer-Reibungsschweißen; Ultraschallermüdung (sonic fatigue); Stoßwellen-Nierensteinzertrümmerung
Hyperschall $f > 1$ GHz			Festkörper-Oberflächenanalyse; Mikroskopie durch Phononstreuung

chend tief ins Körperinnere eindringen zu können, verwendet man Ultraschallfrequenzen im Bereich von 3 MHz bis 15 MHz. Mittels Ultraschalldiagnostik kann der Mediziner ohne Strahlenbelastung Organveränderungen analysieren und Schwangerschaftsentwicklungen verfolgen.

Bei Ultraschallfrequenzen von etwa $f = 20\,\text{kHz}$ bis $f = 40\,\text{kHz}$ lassen sich so hohe Schallintensitäten und Schallschnellen erreichen, dass an festen Grenzflächen Kavitation auftritt. Durch die Implosion der Kavitationsblasen können z. B. Emulsionsvorgänge eingeleitet, Metallschmelzen und Flüssigkeiten entgast sowie Schmutzteilchen von Oberflächen losgerissen werden (*Ultraschall-Reinigung*).

Die große Ultraschallenergie wird auch zum Ultraschallbohren eingesetzt. In harten und spröden Materialien, wie z. B. Glas und Quarz, lassen sich bei geeigneter Schleifmittelzugabe durch resonantes mechanisches Absprengen feinste Profilformen herstellen.

7.4.6 Schalleinsatz

Als *Luftschall* wird die Schallausbreitung in Luft und Gasen bezeichnet; als *Flüssigkeitsschall* das Schallfeld in Wasser und anderen Fluiden. Die Ausbreitung wird in beiden Fällen durch das hydrodynamische Grundgesetz nach (7.3) beschrieben, die daraus folgende Wellenausbreitung als longitudinale Kompressionswelle bestimmt die Anwendung. Die Schallausbreitung in Festkörpern wird *Körperschall* genannt und führt wegen der möglichen Schubspannungen und Schubdeformation zu komplexen, von der Isotropie des elastischen Kontinuums abhängigen Schallfeldern aus Longitudinal- und Transversalwellen; an der Oberfläche der Festkörper kommt es zu Oberflächenwellen, die Biegewelle auf plattenförmigen Bauteilen (Abb. 7.10) ist ein Beispiel dafür. Im hörakustischen Frequenzbereich der Schallwellen findet sich der Großteil der Schallanwendungen. Sprach- und Musikübertragungen, aber auch Schall- und Lärmschutz sind die Hauptanwendungsgebiete. Der Schallfrequenzbereich unterhalb der Tiefton-Hörschwelle wird als *Infraschall* bezeichnet. Der Schallfrequenzbereich oberhalb der Hörakustikfrequenzen wird in *Ultraschall* und *Hyperschall* unterteilt. Während es im Ultraschallbereich viele interessante technische Schallanwendungen in allen Aggregatzuständen gibt, ist die Hyperschallausbreitung ausschließlich ein Festkörperphänomen. Tabelle 7.8 weist, aufgeschlüsselt nach den verschiedenen Schallarten, die Einsatzbereiche und Anwendungsgebiete von Schall aus.

Zur Übung

Ü 7.4-1 Eine Werkhalle (Länge 25 m, Breite 15 m, Höhe 7 m) soll für kulturelle Veranstaltungen als Saal für Musik- und Sprechdarbietungen genutzt werden. Bei den Veranstaltungen wird von einer durchschnittlichen Zuhörerzahl von 300 Personen (äquivalente Schallabsorptionsfläche pro Person $A = 0{,}5\,\text{m}^2$) ausgegangen. Die Schallabsorptionsgrade der Raumoberflächen im mittleren Frequenzbereich von 500 Hz betragen für die Wände $\alpha_\text{W} = 0{,}02$, für den Boden $\alpha_\text{B} = 0{,}04$ und für die Decke $\alpha_\text{D} = 0{,}15$. a) Wie groß ist im vorgefundenen Raumzustand die Nachhallzeit bei 500 Hz mit und ohne Publikum? b) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung von Publikum die erforderliche raumakustische Maßnahme an der Decke, wenn für die vorgesehene Nutzung bei 500 Hz die optimale Nachhallzeit 1,3 s beträgt. Welche Fläche S_Abs der Decke muss mit Absorbermaterial abgedeckt werden, wenn $\alpha_\text{Abs} = 0{,}8$ beträgt?

Ü 7.4-2 Die Schalldämmung eines Fensters soll unter folgenden Voraussetzungen abgeschätzt werden: Fensterfläche $2{,}2\,\text{m}^2$, Raumvolumen $45\,\text{m}^3$, Nachhallzeit des Raumes 0,4 s. Der diffuse Schallpegel außerhalb des Fensters wird gemessen zu $L_1 = 75\,\text{dB}$. Im Innern ergibt sich ein Pegel von $L_2 = 38\,\text{dB}$. a) Das Schalldämmaß R des Fensters ist zu berechnen unter der Annahme, dass die Schallübertragung durch die Mauern vernachlässigbar ist. b) Wie groß wird der diffuse Pegel im Raum, wenn das Fenster halb bzw. ganz geöffnet wird?

Kapitel 8
Atom- und Kernphysik

8

8

8 Atom- und Kernphysik

8.1 Bohr'sches Atommodell 654
8.1.1 Optisches Spektrum des Wasserstoffatoms 654
8.1.2 Bohr'sche Postulate 657
8.1.3 Quantenbedingungen nach Bohr/Sommerfeld 659
8.2 Quantentheorie 659
8.2.1 Hamilton-Operator 662
8.2.2 Schrödinger-Gleichung 664
8.2.3 Unschärferelation 669
8.2.4 Quantenmechanik des Wasserstoffatoms 673
8.2.5 Quanten-Hall-Effekt 677
8.2.6 Tunneleffekt 684
8.3 Bahn- und Spinmagnetismus 686
8.3.1 Zeeman- und Stark-Effekt 690
8.3.2 Elektronen- und Kernspinresonanz 690
8.4 Systematik des Atombaus 692
8.4.1 Periodensystem der Elemente 692
8.4.2 Aufbau der Elektronenhülle 693
8.5 Röntgenstrahlung 694
8.5.1 Bremsstrahlung und charakteristische Strahlung 694
8.5.2 Absorption von Röntgenstrahlung, Computertomographie 695
8.6 Molekülspektren 698
8.6.1 Potentialkurve 698
8.6.2 Rotations-Schwingungs-Spektrum 700
8.6.3 Raman-Effekt 703
8.7 Aufbau der Atomkerne 703
8.7.1 Größe und Ladungsverteilung 703
8.7.2 Kernmodelle 706
8.8 Kernumwandlung 714
8.8.1 Radioaktiver Zerfall 715
8.8.2 Kernreaktionen 730
8.8.3 Kernspaltung und Kernreaktoren 733
8.8.4 Kernfusion 741
8.9 Elementarteilchen 746
8.9.1 Einteilung 748
8.9.2 Erhaltungssätze 752
8.9.3 Fundamentale Wechselwirkungen 754
8.10 Strahlenschutz 756
8.10.1 Wechselwirkung der Strahlung mit Materie 757
8.10.2 Dosisgrößen 765
8.10.3 Biologische Wirkung der Strahlung 770
8.10.4 Dosismessung 773
8.10.5 Strahlenschutzmaßnahmen 776

8 Atom- und Kernphysik

Aus der Übersicht Abb. 8.1 geht hervor, dass die *Quantentheorie* die Grundlage der quantitativen Beschreibung der Eigenschaften der Materie vom Festkörper bis zum Quark ist. Bis zum atomaren Bereich ist die *Schrödinger-Gleichung* (Abschn. 8.2.2), für den subatomaren Bereich die *Dirac-Gleichung* (Abschn. 8.9) gültig. Wie Abb. 8.1 außerdem zeigt, sind Informationen über den Aufbau von Molekülen, Atomen und subatomaren Bausteinen nur über die Wechselwirkungsprozesse zwischen Teilchen (bzw. Wellen) und dem zu untersuchenden Objekt zu erhalten.

Solche Wechselwirkungen sind die *Absorption* oder *Emission* von *elektromagnetischer Strahlung* oder die *Streuung von Teilchen* (z. B. von Elektronen am Atomkern zur Ermittlung der Ladungsverteilung). Um die Strukturen des Messobjekts zu erkennen, muss die Wellenlänge der Strahlung kleiner als die aufzulösende Struktur sein. Abbildung 8.1 zeigt die Größenbereiche von Festkörper, Molekül, Atom, Kern und Elementarteilchen mit den für sie typischen Energiediagrammen. Durch die genannten Wechselwirkungsprozesse finden Übergänge zwischen den einzelnen Energieniveaus (Energiezuständen) statt, deren Energiedifferenzen in Wellenlängen umgerechnet ($E = h\,c/\lambda$) in der Größenordnung des untersuchten Objekts liegen. Dies hat zur Folge, dass mit kleiner werdenden Strukturen immer höhere Energien erforderlich sind. Wie

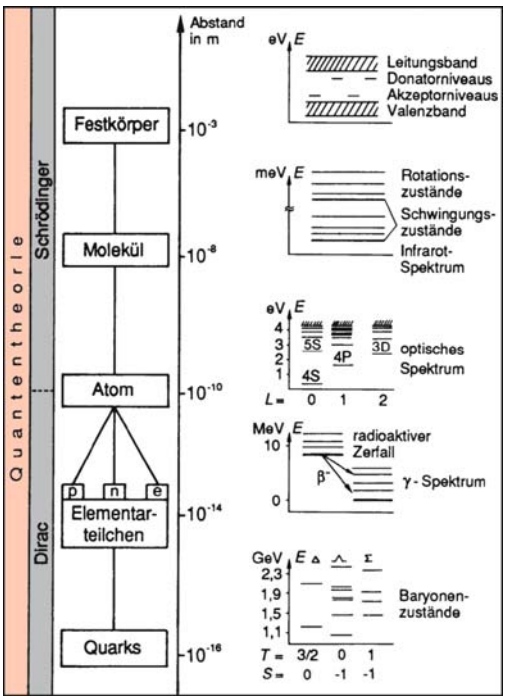


Abb. 8.1 Atombau und Spektren

aus Abb. 8.1 hervorgeht, reicht bei Molekülen für Übergänge zwischen Schwingungszuständen Infrarotstrahlung aus, während für Kernübergänge γ-Strahlung benötigt wird.

Das Wort *Atom* kommt aus dem Griechischen und bedeutet das *Unzerschneidbare*. Es wurde im fünften und vierten Jahrhundert v. Chr. von den Naturphilosophen Demokrit (460 bis 370), Platon (429 bis 348) und Aristo-

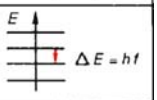
Atomistik der Materie		Atomistik der Elektrizität	Atomistik der Energie
Prout, Dalton (1801, 1807)	Gay - Lussac (1808)	Faraday (1833)	Planck (1900)
2·14g Stickstoff + 16g Sauerstoff → 44g N_2O 14g Stickstoff + 16g Sauerstoff → 30g NO 14g Stickstoff + 2·16g Sauerstoff → 46g NO_2 Atommassen N : O = 14 : 16	2 Vol. N_2 + 1 Vol. O_2 → 2 Vol. N_2O 1 Vol. N_2 + 1 Vol. O_2 → 2 Vol. NO 1 Vol. N_2 + 2 Vol. O_2 → 2 Vol. NO_2	1 F scheidet 107,9 g Ag ab 2 F scheiden 2·107,9 g Ag ab 1 F scheidet 31,75 g Cu ab 1 F = 96487,0 C/mol	
Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen	Avogadro (1811): Gleiche Volumina verschiedener Gase enthalten gleich viele Atome bzw. Moleküle (p, T konstant).	Die elektrolytisch abgeschiedene Substanzmenge ist der Ladungsmenge proportional.	Strahlungsgesetz für die Hohlraumstrahlung, Austausch der Energie in Portionen (Quanten)

Abb. 8.2 Atomistik

TELES (384 bis 322) zur Erklärung von Stoffeigenschaften eingeführt. Der moderne Atombegriff bezeichnet den kleinsten Bestandteil eines chemischen Elements, der noch die Eigenschaften des Elements hat. Eine Zerlegung des Atoms in seine Bestandteile Protonen, Neutronen und Elektronen hat den Verlust der Elementeigenschaften (z. B. Spektrum) zur Folge. Der atomare Aufbau der Materie (Abb. 8.2) zeigt sich u. a. darin, dass es bestimmte ganzzahlige Massenverhältnisse gibt, in denen die Elemente chemische Reaktionen eingehen (*Dalton'sches Gesetz*). Für Gase stellte *Gay-Lussac* fest, dass sie nur in bestimmten ganzzahligen Volumenverhältnissen miteinander reagieren. *Avogadro* zog daraus den Schluss, dass gleiche Volumina gleich viele Teilchen enthalten (Avogadro-Konstante $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$, Abschn. 3.1.5). Die Atomistik der Elektrizität zeigen die *Faraday'schen Gesetze* (Abschn. 4.2.1.2), da die abgeschiedene Stoffmenge proportional zur Ladungsmenge ist. Das Auftreten von Energie in unteilbaren Portionen (*Quanten*) wurde von *Planck* zur Erklärung des Energieaustausches zwischen Materie und Strahlung (*Planck'sches Strahlungsgesetz*, Abschn. 6.5.3) eingeführt. Dies ist der Ausgangspunkt der Quantentheorie, ohne die eine quantitative Beschreibung molekularer, atomarer und subatomarer Vorgänge nicht möglich wäre.

8.1 Bohr'sches Atommodell

J. J. THOMSON (1856 bis 1940) entwickelte 1904 folgende Atomvorstellung: Die Elektronen befinden sich in einer homogen positiv geladenen Kugel mit einem Durchmesser der Größenordnung von 10^{-10} m. Führen die Elektronen in der homogenen positiven Ladungsverteilung Schwingungen aus, so findet eine Emission von elektromagnetischer Strahlung statt (*Hertz'scher Dipol*). Die nach diesem Modell errechneten Schwingungsfrequenzen konnten experimentell nicht bestätigt werden. Streuexperimente von E. RUTHERFORD (1871 bis 1937) mit α-Teilchen an Atomen führten zu folgendem Atommodell: Die positive Ladung und fast die gesamte Masse des Atoms ist in einem *Atomkern* (Durchmesser etwa 10^{-14} m) konzentriert, der von einer *Elektronenhülle* umgeben ist (Durchmesser etwa 10^{-10} m). Auch mit diesem Atommodell konnten die diskreten Frequenzen der emittierten elektromagnetischen Strahlung nicht berechnet werden.

8.1.1 Optisches Spektrum des Wasserstoffatoms

Unter einem *Spektrum* versteht man in der Optik die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Frequenz bzw. der Wellenlänge der Strahlung. Die Auswertung und die Interpretation von Spektren geschieht in der *Spektro-*

skopie. Zur Messung von Spektren, beispielsweise von Festkörpern, Molekülen und Atomen, werden die in Abb. 8.3 zusammengestellten Spektroskopie-Verfahren eingesetzt.

Bei der *Emissionsspektroskopie* wird die Probe beispielsweise durch Hochfrequenzfelder ionisiert und zur Lichtemission angeregt. Nach der spektralen Zerlegung des Lichts durch einen Monochromator (Prisma, Gitter, s. Abschn. 6.4.1.7) kann man aus den Wellenlängen der Emissionslinien auf das Element und aus der Intensität der Linien auf die Konzentration des Elements in der Probe schließen (Abb. 8.3, Ausschnitt des Spektrums von Eisen). Bei der *Absorptionsspektroskopie* werden beispielsweise die in die Gasphase überführten Atome oder Moleküle mit Licht bestimmter Wellenlänge bestrahlt. Durch Absorption wird die eingestrahlte Intensität proportional der Teilchenkonzentration in der Probe geschwächt (Abb. 8.3, Spektrum von Schwefeldioxid). Bei der *Resonanzspektroskopie* wird im Gegensatz zur Emissions- und Absorptionsspektroskopie die Probe mit einer konstanten Frequenz bestrahlt und eine äußere Größe (z. B. Magnetfeld, Druck oder Temperatur) verändert. Bei bestimmten Werten wird die eingestrahlte Strahlung absorbiert. Zur Messung kann die von der Probe aufgenommene Intensität (durchgezogene Linie in Abb. 8.3) oder die abgestrahlte Intensität (gestrichelte Linie) gemessen werden (Protonenresonanzspektrum von Dichlorbenzol in Abb. 8.3).

Die Spektroskopie ist ein unentbehrliches Hilfsmittel in der analytischen Chemie, beispielsweise zur Bestimmung der Elemente (z. B. Cadmium, Blei, Quecksilber, Selen) in einer Probe (z. B. des Bodens, der Luft, des Wassers oder eines Nahrungsmittels). Mit Spektroskopieverfahren ist es heute möglich,

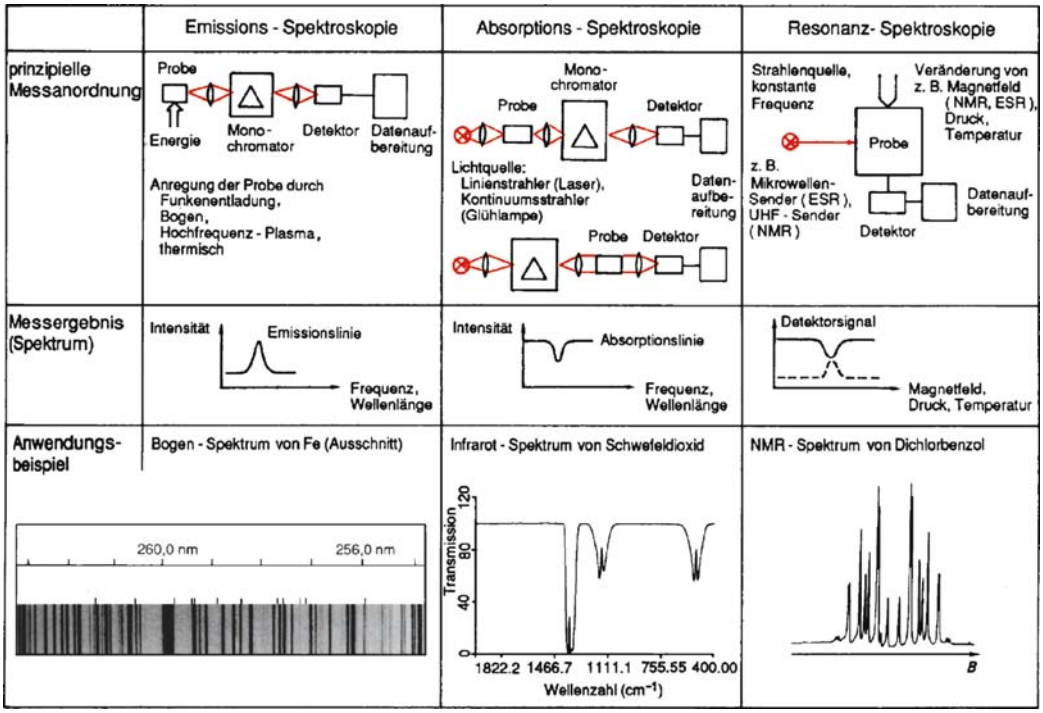


Abb. 8.3 Spektroskopie-Verfahren

Elementmengen in der Größenordnung von 10^{-12} g (1 pg) zu bestimmen. Solche Messmethoden dienen der Kontrolle der Umwelt bezüglich Kontamination durch Schwermetalle.

Im Folgenden wird das optische Emissionsspektrum des einfachsten Atoms, des Wasserstoffs, betrachtet. In Abb. 8.4 ist ein Teil des Emissionsspektrums (4 050 nm bis 50 nm) dargestellt. Da die Wellenlänge umgekehrt proportional zur Strahlungsenergie ist ($E = hf = h\,c/\lambda$), wird meist nicht die Wellenlänge, sondern die der Energie proportionale *Wellenzahl* $\tilde{\nu} = 1/\lambda = E/(h\,c)$ angegeben. Das Spektrum setzt sich aus mehreren Serien von Linien zusammen, deren Abstand bis zur Seriengrenze immer kleiner wird. Die *Balmerserie* (J. J. Balmer, 1825 bis 1898) ist in Abb. 8.4 vergrößert wiedergegeben. Die Serie beginnt im sichtbaren Bereich mit der H_α-Linie ($\lambda = 656{,}460$ nm, $\tilde{\nu} = 15\,233{,}21\ \mathrm{cm}^{-1}$) und endet mit der Seriengrenze H_∞ ($\lambda = 364{,}71$ nm, $\tilde{\nu} = 27\,419{,}4\ \mathrm{cm}^{-1}$). *Balmer* stellte eine empirische Beziehung zur Berechnung der gemessenen Wellenlängen auf:

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}\,G \tag{8.1}$$

Hierin ist G eine Proportionalitätskonstante und n eine ganze Zahl ($n = 3, 4, \ldots$). Diese Beziehung kann auch ausgedrückt werden als

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n' < n$$
$$f = \frac{c}{\lambda} = c\,R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{8.2}$$

Es bedeuten:

n' = 2,
$\tilde{\nu}$ Wellenzahl der Spektrallinie,
f Frequenz der Spektrallinie,

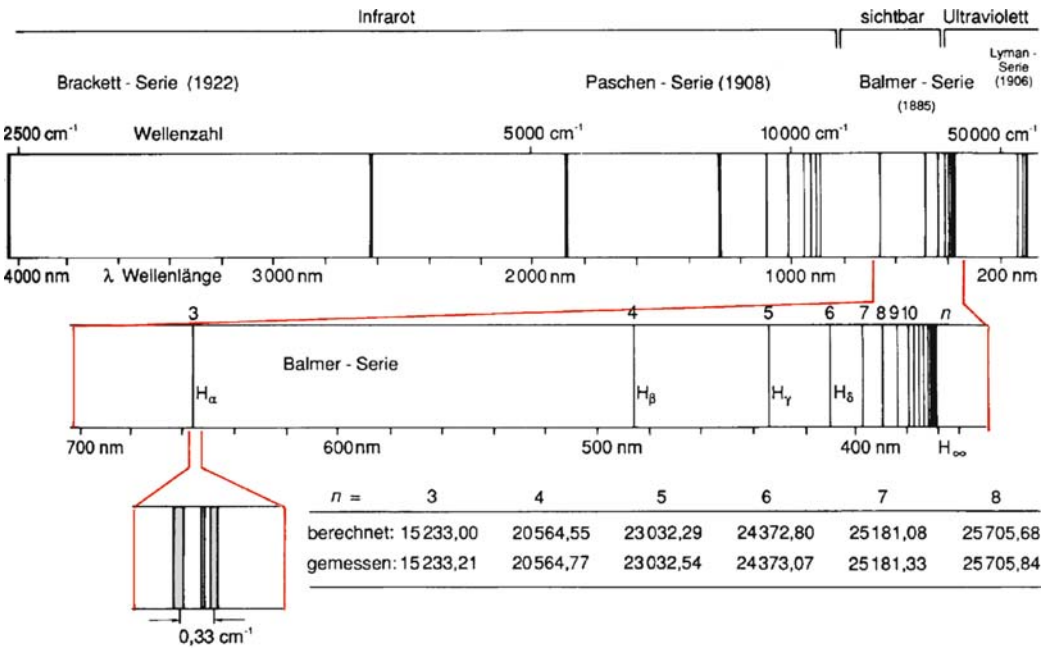


Abb. 8.4 Spektrum des Wasserstoffatoms

R_H Rydberg-Konstante
($R_H = 4/G = 109\,737{,}3157\ \mathrm{cm}^{-1}$,
$c\,R_H = 3{,}28984196 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$).

Die nach dieser Gleichung berechneten Wellenlängen sind in Abb. 8.4 den gemessenen Werten gegenübergestellt und ergeben eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Die weiteren Serien des Emissionsspektrums des Wasserstoffatoms können ebenfalls durch (8.2) beschrieben werden: $n' = 1$ (*Lyman*), $n' = 2$ (*Balmer*), $n' = 3$ (*Paschen*), $n' = 4$ (*Brackett*), $n' = 5$ (*Pfund*).
Die Untersuchung der Spektrallinien bei größerer Auflösung ergibt, dass diese aus mehreren Linien, den *Multipletts*, bestehen. Abbildung 8.4 zeigt die H_α-Linie der Balmerserie bei größerer Auflösung.

8.1.2 Bohr'sche Postulate

Das vorstehend beschriebene Spektrum des Wasserstoffatoms konnte mit dem Rutherford'schen Atommodell nicht erklärt werden. Dieses steht aus folgenden Gründen im Widerspruch mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik:

- Die Bewegung der Elektronen um den Atomkern kann klassisch in unendlich vielen Bahnen ablaufen (Kreise, Ellipsen). Dann müssten die Atome einer Atomsorte unterschiedlich in ihrer räumlichen Ausdehnung sein; dies widerspricht allen experimentellen Ergebnissen.
- Die um den Atomkern umlaufenden Elektronen stellen eine beschleunigte Ladung dar, die nach der Elektrodynamik elektromagnetische Energie abstrahlen müsste (Hertz'scher Dipol). Durch diesen ständigen Energieverlust würde sich das Elektron spiralförmig dem Kern nähern, bis es in den Kern stürzen würde. Nach der klassischen Theorie wären Atome deshalb instabil.

Zur Aufhebung dieser Widersprüche stellte 1913 N. Bohr (1885 bis 1962) drei *Postulate* auf. Abbildung 8.5 zeigt die Bohr'schen Postulate, ihre mathematische Formulierung und die sich daraus ergebenden Konsequenzen. Demnach sind von der Vielzahl der klassisch möglichen Bahnen nur solche Bahnen erlaubt, für die der *Bahndrehimpuls* ein *ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Wirkungsgröße* ist ($\hbar = h/2\pi$; h: *Planck'sches Wirkungsquantum*). Die Quantisierungsvorschrift des Drehimpulses nach Bohr ist in seinen Konsequenzen vergleichbar mit der Quantisierung der Energie nach *Planck*. Die Bohr'schen Postulate führen ebenfalls zu *diskreten Zuständen* (Bahnen) mit der Energie E_n. Der Energieabstand zwischen den Zuständen wird bis zur *Ionisationsgrenze des Atoms* immer geringer (Abb. 8.5). Nach (8.3) und (8.5) in Abb. 8.5 ergibt sich für das Wasserstoffatom ($Z = 1$) die Energie $E_1 = -13{,}59$ eV (entspricht der Ionisierungsenergie) und der Radius $r_1 = 52{,}9$ pm (Bohr'scher Radius a_0). Für $n = 100$ ergibt sich der Radius des Wasserstoffatoms zu $r_{100} = 5 \cdot 10^{-7}$ m; dies entspricht der Größe eines Virus. Derartige Riesenatome werden als *Rydberg-Atome* bezeichnet und haben eine Lebensdauer in der Größenordnung von Millisekunden.
Die *Absorption* von Licht erfolgt durch den Übergang des Elektrons von einem Zustand niedriger Energie in einen Zustand höherer Energie (z. B. $n = 1$ nach $n' = 2$). Die Energie $E = hf$ der absorbierten Strahlung muss der Energiedifferenz der Zustände entsprechen. Bei der *Emission* findet der umgekehrte Vorgang statt. Die Wellenzahl der dabei emittierten Strahlung berechnet sich nach (8.4) in Abb. 8.5. Sie ist identisch mit der Balmer-Formel (8.2). Die Rydberg-Konstante ist damit auf die elementaren Größen Elektronenladung e, Ruhemasse des Elektrons m_0 und das Planck'sche Wirkungsquantum h zurückgeführt. Der Vergleich von R_∞ aus (8.4) mit R_H aus (8.2)

Bohr'sche Postulate	mathematische Formulierung und Konsequenzen
klassische Bewegungsgleichung gültig: Zentrifugalkraft = Coulomb-Kraft; nur diskrete Bahnen mit E_n, r_n, ω_n erlaubt. E_n: Energie; r_n: Bahnradius; ω_n: Kreisfrequenz	Coulomb-Kraft = Zentrifugalkraft $\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = m_0 r_n \omega_n^2$ Z: Ladung des Kerns m_0: Ruhemasse des Elektrons
Festlegung dieser diskreten Bahnen durch Quantelung des Bahn-Drehimpulses des Elektrons.	klassischer Bahn-Drehimpuls $\mathfrak{L}_n = r_n \times p_n$ $\lvert\mathfrak{L}_n\rvert = n\hbar = m_0 r_n^2 \omega_n$ $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}, \text{Planck'sches Wirkungsquantum}\right)$
Bewegung auf den Bahnen erfolgt strahlungslos. Emission und Absorption von Licht erfolgt durch Übergänge der Elektronen zwischen diesen Bahnen.	$E_n = E_{pot} + E_{kin}$ $h f = E_n - E_{n'}$, Coulomb-Potential: $E_{pot} = \int_\infty^r \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v_n^2 = \frac{1}{2} m_0 r_n^2 \omega_n^2$
Erweiterung durch Sommerfeld	
Einführung von Ellipsenbahnen, Aufhebung der Entartung.	n: Hauptquantenzahl bestimmt große Achse a_n der Ellipse. k: Nebenquantenzahl bestimmt kleine Achse $b_{n,k}$ der Ellipse, $k \leq n$. Entartung

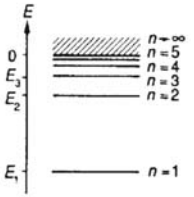
$$\tilde{\nu} = Z^2 R_\infty \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (8.4)$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Z e^2 m_0} \quad (8.5)$$

$$\Delta E_{n',n} = \frac{Z^2 e^4 m_0}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\omega_n = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_0}{h^3 n^3}$$

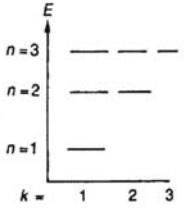
$$E_n = \frac{Z^2 e^4 m_0}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (8.3)$$



Aufhebung der Entartung durch relativistische Masseänderung des Elektrons

$$E_{n,k} = -R h c \frac{Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right) + \ldots\right] \quad (8.6)$$

$$\left(\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} = \frac{1}{137}\right)$$



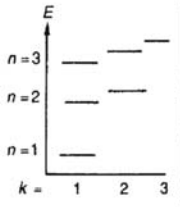


Abb. 8.5 Bohr'sche Postulate und Erweiterung durch Sommerfeld

ergibt einen Unterschied von etwa $60\,\mathrm{cm}^{-1}$. Dieser Unterschied ist auf die Mitbewegung des Kerns zurückzuführen, dessen Masse bisher unendlich groß angenommen wurde.
Die Bohr'schen Postulate gestatten die Berechnung des Wasserstoffspektrums und der wasserstoffähnlichen Spektren (Systeme mit einem Z-fach geladenen Kern und einem einzigen Hüllenelektron, z. B. He^+, Li^{2+}). Mit höher auflösenden Spektralapparaten wird eine Aufspaltung der Spektrallinien beobachtet. So erscheint beispielsweise die H_α-Linie als Dublett (Aufspaltung in zwei Linien) mit einem Wellenzahlabstand von $0{,}33\,\mathrm{cm}^{-1}$. Da diese Aufspaltung durch die Bohr'schen Postulate nicht erklärbar ist, mussten sie korrigiert werden. Dies gelang A. Sommerfeld (1868 bis 1951).

8.1.3 Quantenbedingungen nach Bohr/Sommerfeld

Abbildung 8.5 zeigt die Erweiterung durch Sommerfeld. In Analogie zu den Planetenbahnen (Abschn. 2.10) sind außer den Bohr'schen Kreisbahnen auch *Ellipsenbahnen mit gleicher Energie* möglich. Die *große Halbachse* der Ellipse a_n bestimmt die Energie und wird durch die *Hauptquantenzahl* n beschrieben. Zur Charakterisierung der *kleinen Halbachse* $b_{n,k}$ wird analog zu n eine neue Quantenzahl, die *Nebenquantenzahl* k, eingeführt. Für sie gilt $1 \leqq k \leqq n$. Das Verhältnis der beiden Halbachsen wird durch $b_{n,k}/a_n = k/n$ bestimmt. Dies bedeutet, dass zu einer Energie E_n n Energiezustände gleicher Energie gehören (*n-fache Entartung*), die sich durch die Nebenquantenzahl ($k = 1$ bis n) unterscheiden (Abb. 8.5). So ist beispielsweise der Energiezustand für $n = 3$ dreifach entartet, d. h., es handelt sich um drei Energiezustände gleicher Energie mit $k = 1, 2, 3$.
Bei einer klassischen Betrachtungsweise der Bewegung des Elektrons auf einer Ellipsenbahn muss sich infolge des Drehimpulserhaltungssatzes (Flächensatz, Abschn. 2.10) das Elektron in Kernnähe schneller bewegen als in großer Entfernung. Nach der *Relativitätstheorie* nimmt die Masse des Elektrons mit zunehmender Geschwindigkeit zu (Abschn. 10.2), sodass das Elektron in Kernnähe schwerer ist. Wegen $E_n \sim m_0$ kommt es zu einer Energieabsenkung des Zustandes, die umso größer ist, je kleiner die Halbachse $b_{n,k}$ und damit die Nebenquantenzahl k ist. Das rechnerische Ergebnis von Sommerfeld ist in Abb. 8.5 angegeben (8.6). Die relativistische Energieänderung ist abhängig von dem Quadrat einer Konstanten α, die *Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante* genannt wird:

$$\alpha = \frac{\text{Geschwindigkeit des Elektrons auf der 1. Bohr-Bahn}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}}$$

und beträgt

$$\alpha = \mu_0 c_0 e^2/2h = 7{,}297352568 \cdot 10^{-3} \approx 1/137.$$

Eine genaue Bestimmung von α kann durch den von K. von Klitzing (geb. 1943) entdeckten *Quanten-Hall-Effekt* vorgenommen werden (Abschn. 8.2.5). Infolge der relativistischen Massenänderung des Elektrons wird die Entartung aufgehoben und führt zu einer Aufspaltung der Spektrallinien (Abb. 8.5).
Trotz dieser großen Erfolge der Bohr-Sommerfeld'schen Theorie zur Deutung der Spektren von Einelektronensystemen ergaben sich unüberwindliche Schwierigkeiten bei der Berechnung der Spektren von Mehrelektronensystemen.

8.2 Quantentheorie

Die klassische Physik umfasst die Mechanik (Newton) und die Elektrodynamik (Maxwell). Eine Konsequenz der Maxwellgleichungen ist das Auftreten elektromagnetischer Wellen. Das klassische Weltbild umfasst somit

- *Materie:* punktförmige Teilchen mit der Masse m und der Ladung Q,

– *Strahlung:* elektromagnetische Wellen,
– *Kräfte:* Gravitationskraft und Lorentz-Kraft.

(Die Lorentz-Kraft ist das Kopplungsglied zwischen Mechanik und Elektrodynamik.)

Mit der klassischen Physik konnten aber nicht alle experimentellen Befunde erklärt und berechnet werden. In Abb. 8.6 sind einige grundlegende Experimente zusammengestellt, deren Ergebnisse einen Widerspruch zur klassischen Physik darstellen.

Plancks Einführung der Quantenhypothese zur Beschreibung der *schwarzen Strahlung* (*Hohlraumstrahlung*, Abschn. 6.5.3) führte zu einer völligen Revision des physikalischen Weltbildes. Hierbei geht es um die Beschreibung des Energieaustausches zwischen Materie und Strahlung, die nach der klassischen Theorie kontinuierlich erfolgt, sodass die Energie im Lauf der Zeit vollständig aus der Materie in die Strahlung übergeht. Dies ist dann nicht mehr möglich, wenn die Energie in bestimmten Portionen (Quanten) beieinander bleibt. Die Strahlung ist somit ein Teilchenstrom aus Energie-Quanten (*Photonen*) mit der Energie $E = hf = \hbar\omega$ (Planck'sches Wirkungsquantum h, $\omega = 2\pi f$) und dem Impuls $p = h/\lambda = \hbar k$ (Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$). Dieser Teilchencharakter der Strahlung zeigt sich deutlich bei der Beschreibung des *lichtelektrischen Effekts* und der *Compton-Streuung* (Abb. 8.6, s. Abschn. 6.5.1.1 und Abschn. 6.5.1.2).

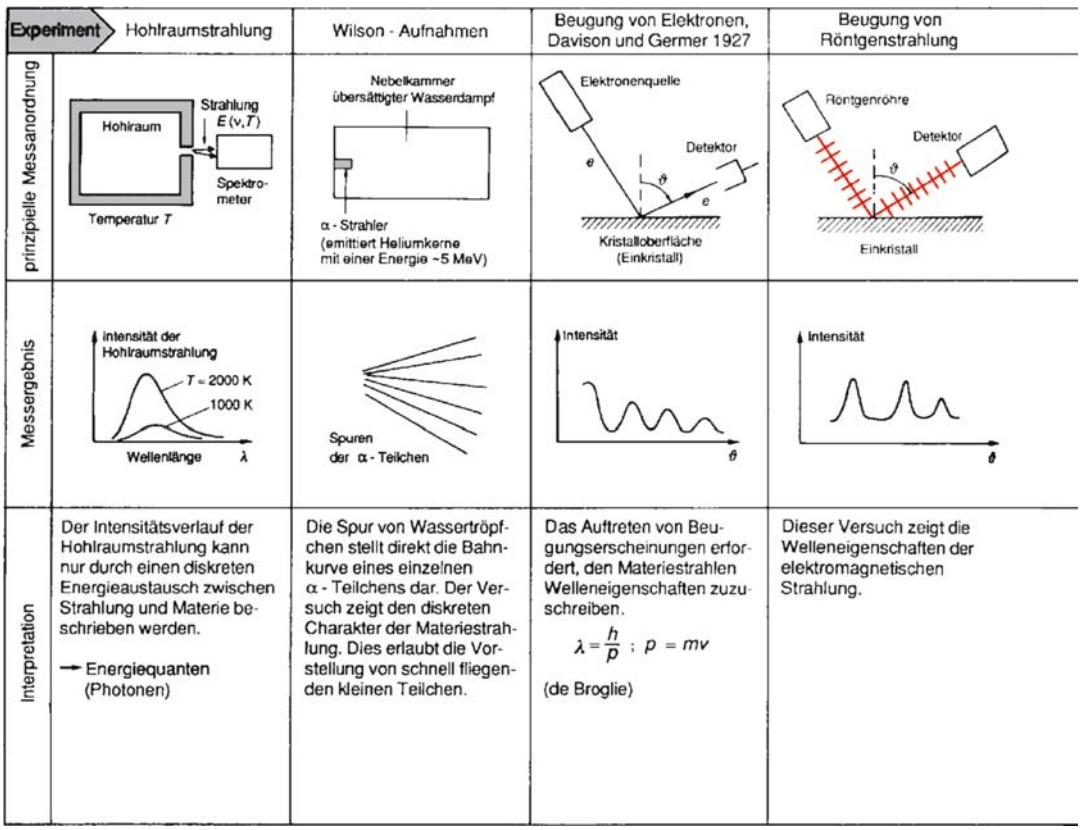


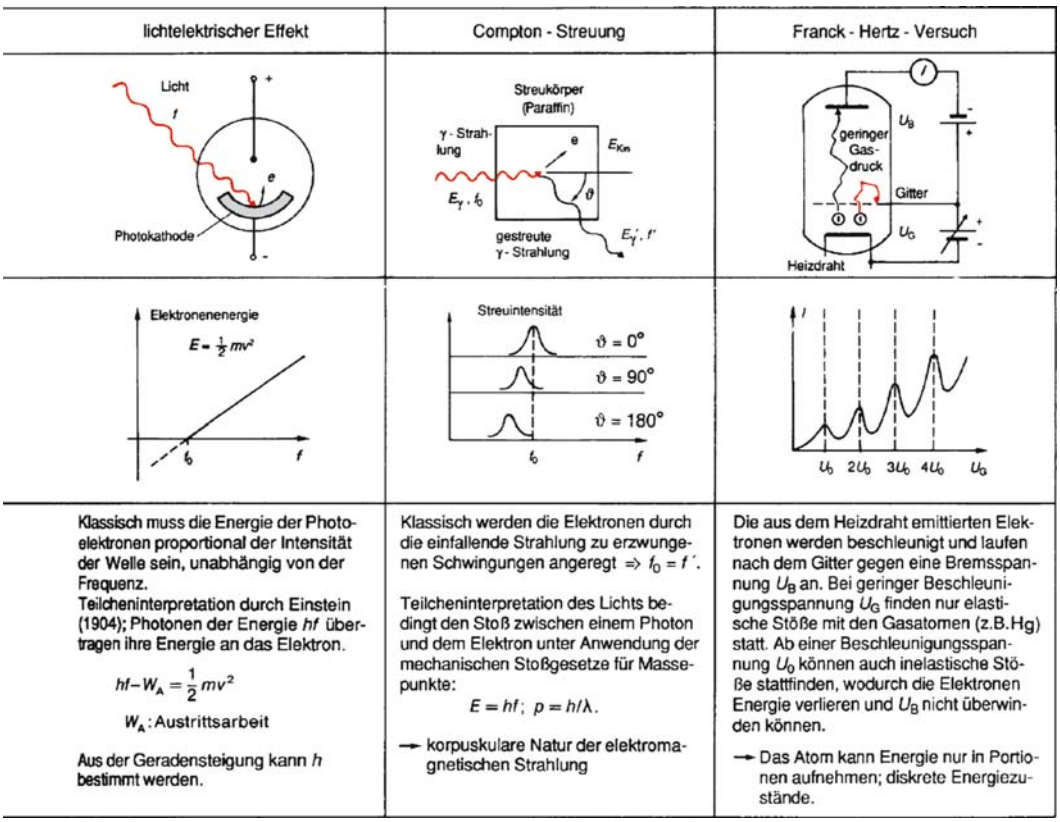
Abb. 8.6 Grundlegende Experimente zur Quantentheorie

De Broglie stellte 1925 die Hypothese auf, dass jedem freien Teilchen eine Welle zugeordnet werden kann, dessen Wellenlänge durch

$$\lambda = h/p\,; \qquad (8.7)$$
$$p = m\,v \text{ (Impuls des Teilchens)}$$

gegeben ist (Abschn. 6.5.5). Diese Umkehrung der Planck'schen Vorstellung, dass die Teilchen ebenso Wellencharakter haben, wurde 1927 eindrucksvoll durch die Experimente von C. J. Davisson (1881 bis 1958) und L. H. Germer (1896 bis 1971) bestätigt. Die aus dem Interferenzmuster der Beugung von Elektronen an einer Kristalloberfläche ermittelte Wellenlänge der Elektronen entspricht der De-Broglie-Wellenlänge (8.7).

Anhand der in Abb. 8.6 zusammengestellten Experimente wird deutlich, dass Materie und Strahlung eine Doppelnatur aufweisen, indem sie sich je nach Experiment einmal als Welle, ein anderes Mal als Teilchen verhalten (*Dualismus Welle–Teilchen*). Es ist offensichtlich, dass Materie nicht gleichzeitig aus Wellen und Partikeln bestehen kann. Dieser Dualismus ist somit nichts anderes als der Ausdruck unserer Unzulänglichkeit, das Verhalten der uns umgebenden Objekte widerspruchsfrei zu beschreiben. Die Beschreibung von Vorgängen und die Begriffsbildung stammen aus unserer Erfahrung des täglichen



Lebens. Begriffe wie Ort, Impuls oder Energie verbinden wir mit Körpern, die sich für uns sichtbar bewegen; die Begriffe Wellenlänge und Frequenz bringen wir in Zusammenhang mit Wasserwellen oder der Farbe des Lichts. Objekte unserer Anschauung bestehen aus vielen Teilchen (Moleküle, Atome). Betrachten wir dagegen einzelne Atome oder atomare Prozesse, so sind diese unserer Anschauung nicht direkt zugänglich, sodass eine Beschreibung mit makroskopisch gewonnenen Begriffen widersprüchlich sein muss. Durch die mathematische Beschreibung in der Quantentheorie wird der Widerspruch beseitigt, und der Dualismus tritt nicht auf, da man sich von der Anschauung löst. Die Grenze der Anwendbarkeit des Partikel- oder Wellenbildes ergibt sich aus der Unschärferelation und damit durch die Größe des Planck'schen Wirkungsquantums (vgl. Abb. 1.2 in Abschn. 1.2).

8.2.1 Hamilton-Operator

Extremalprinzipien (d. h., bestimmte physikalische Größen werden zu Extremwerten) spielen in der Physik eine bedeutende Rolle zur Erklärung von Zustandsänderungen bzw. Bewegungsabläufen. In der Thermodynamik laufen beispielsweise Prozesse so ab, dass die Gesamtentropie ein Maximum annimmt. In der Optik muss nach dem *Fermat'schen Prinzip* (Abschn. 6.1) der optische Weg (Produkt aus Brechungsindex und geometrischem Weg) einen Extremwert annehmen (i. Allg. ein Minimum). Für Bewegungen der Mechanik existiert ebenfalls ein Extremalprinzip, das *Hamilton'sche Prinzip* (W. R. Hamilton, 1805 bis 1865), nach dem die *Wirkung* (Energie mal Zeit) *extremal* wird.

Ein mechanisches System wird durch den zeitlichen Verlauf der Ortskoordinaten der Systembestandteile (Bewegungsgleichung) beschrieben. Für die Bewegung eines Teilchens kann dies beispielsweise durch die Bewegungsgleichungen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ erfolgen. In vielen Fällen sind die Bewegungsmöglichkeiten der Systembestandteile durch Zwangsbedingungen oder Bindungen eingeschränkt. Wenn beispielsweise die Bewegung eines Teilchens nur in einer Ebene stattfindet, ist z konstant, sodass $z(t)$ entfällt. Durch derartige Bindungen wird die Anzahl der *Freiheitsgrade* des Systems verringert. Für ein System aus n Teilchen ergibt sich die Anzahl der Freiheitsgrade zu $f = 3\,n - r$ mit r als der Anzahl der Bindungen.

Für jedes dieser n Teilchen gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung, beispielsweise für das i-te Teilchen in x-Richtung $F_{x_i} = m_i \ddot{x}_i$. Die r Bindungen verknüpfen die Koordinaten der n Teilchen untereinander. Deshalb sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen der einzelnen Teilchen voneinander abhängig (gekoppelt). Die Lösungen solcher *gekoppelter Bewegungsgleichungen* sind, wenn überhaupt, nur mit sehr großem mathematischem Aufwand zu finden. Um dieses Problem generell und einfacher zu lösen, werden für ein System mit f Freiheitsgraden f voneinander unabhängige (generalisierte) Koordinaten $q_k = q_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, f)$ gesucht. Solche *generalisierte Koordinaten* müssen nicht nur Raumkoordinaten, sondern können auch zusammengesetzte Größen sein.

Zur Beschreibung des Zustands eines Teilchensystems genügt nicht allein die Kenntnis der Lagen $\boldsymbol{x}_i$ der Teilchen, sondern es müssen auch deren Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ bekannt sein. Dies ergibt sich aus der Newton'schen Formulierung der Mechanik ($\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$). Ist die Kraft $\boldsymbol{F}$ als Funktion der Zeit bekannt, so kann die Zukunft des Systems (Entwicklung) nur berechnet werden, wenn die zur Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung notwendigen zwei Integrationskonstanten $(\dot{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_i)$ zu ei-

nem bestimmten Zeitpunkt t bekannt sind. Für eine Beschreibung des Systems durch *generalisierte Koordinaten* muss entsprechend q_k und $\dot{q}_k = \mathrm{d}q_k/\mathrm{d}t$ $(k = 1, 2, \ldots, f)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt sein.
Für ein System mit einem Freiheitsgrad $(f = 1)$ kann der Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt t als Punkt in einem Koordinatensystem mit den Koordinaten q und $\dot{q}$ dargestellt werden (*Phasenraum*). In Abb. 8.7 sind die Zustände des Systems zum Zeitpunkt $t_1(q_1, \dot{q}_1)$ und $t_2(q_2, \dot{q}_2)$ dargestellt. Die zeitliche Entwicklung des Systems von t_1 nach t_2 kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Aus der Vielzahl möglicher Wege bestimmt das Hamilton'sche Prinzip den Weg, für den gilt:

Die Wirkung W (Einheit: Energie mal Zeit) entlang des Wegs im Phasenraum muss einen Extremwert annehmen.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)\,\mathrm{d}t \rightarrow \text{Extremwert} . \qquad (8.8)$$

Die Funktion $L = E_{\mathrm{kin}} - V$ wird als *Lagrange-Funktion* bezeichnet. Sie hat die Dimension einer Energie. V ist die potentielle und E_{kin} die kinetische Energie. Eine andere Formulierung von (8.8) mit Hilfe der Variationsrechnung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 ; \quad k = 1, 2, \ldots, f . \qquad (8.9)$$

Durch Einführung des *generalisierten Impulses*

$$p_k = \frac{\partial L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)}{\partial \dot{q}_k} ; \quad k = 1, 2, \ldots, f \qquad (8.10)$$

ergibt sich aus der Lagrange-Funktion (8.8) eine neue Funktion, die *Hamilton-Funktion* $H(p_k, g_k, t)$. Sie stellt i. Allg. die *Gesamtenergie* des Systems dar:

$$H = E_{\mathrm{kin}} + V . \qquad (8.11)$$

Für ein Teilchen in einem Potential $V(x)$ ergibt sich die Hamilton-Funktion für den eindimensionalen Fall zu

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) = E_{\mathrm{gesamt}} . \qquad (8.12)$$

Durch Ableitung der Hamilton-Funktion nach den generalisierten Impulsen p_k und den generalisierten Koordinaten q_k ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k ; \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k ; \quad k = 1, 2, \ldots, f . \qquad (8.13)$$

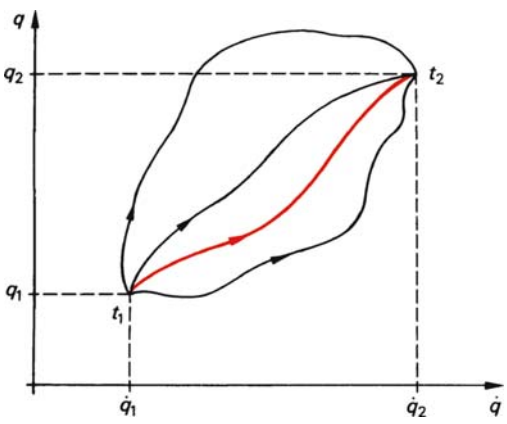


Abb. 8.7 Phasenraum

Beispiel

8.2-1 Man bestimme die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels (Abschn. 5.1.2.3, Abb. 5.7) mit Hilfe des Hamilton'schen Prinzips.

Lösung

Die Anzahl der Freiheitsgrade einer Punktmasse m ist 3. Bindungen: Bewegung nur in der Ebene ($z = 0$), Abstand der Masse m zum Aufhängepunkt ist konstant:

$$f = 3 - r = 3 - 2 = 1 \,.$$

Das System hat einen Freiheitsgrad und kann durch eine generalisierte Koordinate $q = \beta(t)$ beschrieben werden. Für die Lagrange-Funktion ergibt sich

$$L = E_{\text{kin}} - V = \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy \,.$$

Mit den Bindungen $z = 0, x = l\sin\beta, y = l(1 - \cos\beta)$ lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\beta}^2 - mgl(1 - \cos\beta) \,.$$

Nach (8.10) berechnet sich der zu β gehörige Impuls p_β zu $p_\beta = \partial L/\partial\dot{\beta} = ml^2\dot{\beta}$.
Damit ergibt sich die Hamilton-Funktion zu

$$H(q_k, p_k) = E_{\text{kin}} + V = \sum_k p_k\dot{q}_k - L = H(\beta, p_\beta);$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_\beta^2}{m\,l^2} + mgl(1 - \cos\beta) \,.$$

Für die Bewegungsgleichung ergibt sich nach (8.13)

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{\beta} = \frac{p_\beta}{m\,l^2} \,; \quad \frac{\partial H}{\partial \beta} = -\dot{p}_\beta = mgl\sin\beta \,.$$

Daraus ergibt sich

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\sin\beta = 0 \,.$$

8.2.2 Schrödinger-Gleichung

Nach *de Broglie* kann dem Teilchen eine Welle Ψ mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar$ und der Kreisfrequenz ω zugeordnet werden:

$$\Psi(x,t) = a\mathrm{e}^{(\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}\omega t)} = a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p_x x - E t)}$$
$$(E = \hbar\omega \,; \quad p_x = \hbar k_x \,; \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}) \,. \tag{8.14}$$

Die Bestrahlung eines Spalts beispielsweise mit Elektronen führt zu einem Beugungsbild, das zum einen im Wellenbild und zum andern im Teilchenbild erklärt werden kann, wie Abb. 8.8 und 6.130 verdeutlicht. Im Wellenbild ergibt sich für die *Intensitätsverteilung* $I(x) = |\Psi(x,t)|^2$ (Abschn. 6.4.1.4). Im Teilchenbild ist die Intensitätsverteilung durch die Häufigkeitsverteilung $h(x)$ (Anzahl der Elektronen je Wegelement) gegeben. Da beide Bilder ein und dasselbe Experiment beschreiben, muss gelten

$$I(x) \sim \underset{\text{Wellenbild}}{|\Psi(x,\,t)|^2} \sim \underset{\text{Teilchenbild}}{h(x)} \,. \tag{8.15}$$

Die Häufigkeit $h(x)$ dividiert durch die Gesamtanzahl der gemessenen Teilchen (z. B. Anzahl der Elektronen) ergibt die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron am Ort x anzutreffen. Wie aus (8.15) hervorgeht, kann $|\Psi(x,t)|^2$ somit als *Wahrscheinlichkeit* (genauer als *Wahrscheinlichkeitsdichte*) interpretiert werden. Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit w eines Elektrons in einem Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ gilt

$$w = |\Psi(x,\,y,\,z,\,t)|^2\,\mathrm{d}V. \tag{8.16}$$

Damit ist ein wichtiger Unterschied zur klassischen Physik aufgezeigt. In der klassischen Physik wird das Teilchen durch seine Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ beschrieben, in der Quantentheorie dagegen nur durch seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi|^2\,\mathrm{d}V$.
Die Fundamentalgleichung der Quantentheorie, die die Bestimmung von Ψ ermöglicht, ist die *Schrödinger-Gleichung* (E. Schrödinger, 1887 bis 1961). Sie ist vergleichbar mit der Newton'schen Bewegungsgleichung, aus der die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ bestimmt wird. Die *zeitabhängige Schrödingergleichung* lautet

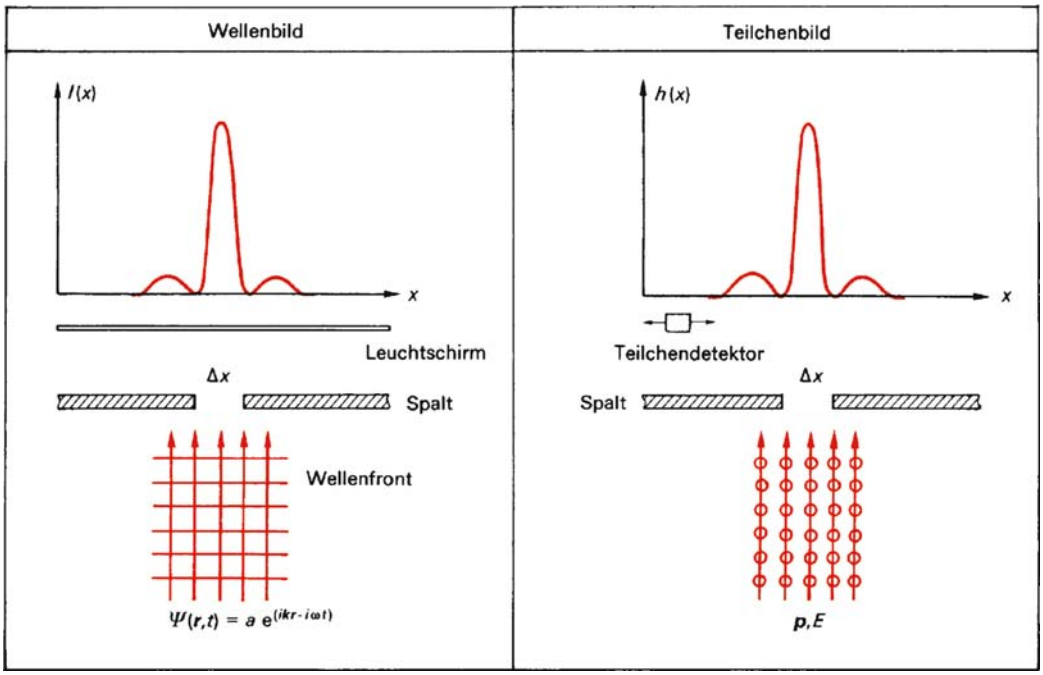


Abb. 8.8 Beugung am Spalt

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\right)\Psi(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{8.17}$$

mit den Größen

m Masse des Teilchens,
$V(\boldsymbol{r})$ Potentielle Energie; $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$,
Δ Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \nabla^2 .$$

Die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ kann in einen orts- und zeitabhängigen Anteil getrennt werden: $\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\psi(\boldsymbol{r})$. Durch Einsetzen in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (8.17) ergibt sich die *zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung*:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\right)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) . \tag{8.18}$$

Wird in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung die ebene Welle $\Psi(\boldsymbol{r}, t) = a\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)}$ für ein freies Teilchen ($V(\boldsymbol{r}) = 0$) eingesetzt, so erhält man (unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{r} = p_x x + p_y y + p_z z$) als Lösung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left(a\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)}\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(a\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{pr}-Et)}\right),$$
$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = E . \tag{8.19}$$

Dies ist die kinetische Energie eines freien Teilchens in der klassischen Physik.
Wird die Operation $-\hbar^2\Delta = -\hbar^2\nabla^2$ auf die Wellenfunktion eines freien Teilchens ange-

wandt, so erhält man mit $2mE$ (8.19) das Quadrat des Teilchenimpulses. Zieht man die Quadratwurzel aus der Operation $-\hbar^2\nabla^2$, so ergibt sich $\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Die Anwendung dieser Operation auf die Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r})$ liefert den Impuls $\boldsymbol{p}$ des Teilchens:

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\right) = \boldsymbol{p}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\,. \tag{8.20}$$

Aus (8.19) und (8.20) ergibt sich, dass der klassische Impuls $\boldsymbol{p}$ in der Quantentheorie durch den *Impulsoperator* $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hbar/\mathrm{i})\nabla$ ersetzt wird. Tabelle 8.1 zeigt eine Gegenüberstellung der klassischen und quantenmechanischen Beschreibung von Systemen. Daraus ist ersichtlich, dass die mathematische Abbildung des Systems im *klassischen Fall* durch *Skalare* und *Vektoren* geschieht, die in der *Quantenmechanik* durch *Operatoren* ersetzt werden. Operatoren sind Rechenvorschriften (z. B. Differentiation, Multiplikation), die auf eine Wellenfunktion ψ anzuwenden sind. Zur Unterscheidung zwischen klassischer Größe und Operator versieht man die physikalische Größe mit dem Zeichen $\hat{}$. Aus dem Quadrat des Impulses $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ergibt sich für den entsprechenden Operator

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\Delta\,. \tag{8.21}$$

Wird dieser Ausdruck in die Schrödinger-Gleichung (8.18) eingesetzt, so ergibt sich

$$\underbrace{\left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m} + V(\hat{x}\,\hat{y},\hat{z})\right)}_{\hat{H}}\psi(x,\,y,\,z) = E\,\psi(x,\,y,\,z)\,. \tag{8.22}$$

Tabelle 8.1 Klassisches und quantenmechanisches System

	Klassische Beschreibung		quantenmechanische Beschreibung	
	Vektoren und Skalare		Operatoren	
Messgröße (Observable)	Ortsvektor:	$\boldsymbol{r}$	Ortsoperator:	$\hat{\boldsymbol{r}}$
		x, y, z		$\hat{x} = x; \hat{y} = y; \hat{z} = z$
	Impulsvektor:	$\boldsymbol{p}$	Impulsoperator:	$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla\left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
		p_x, p_y, p_z		$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z}$
	Energie:	$E = E_{\mathrm{kin}} + V(\boldsymbol{r})$	Energie:	$V(\hat{\boldsymbol{r}}); E_{\mathrm{kin}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}; \hat{E} = \mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
	Drehimpulsvektor:	$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	Drehimpulsoperator:	$\hat{\boldsymbol{l}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}(\hat{\boldsymbol{r}} \times \nabla)$
				$\hat{l}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$
		$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$		$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$
	Zeit:	t	Zeit:	t

Tabelle 8.1 (Fortsetzung)

	Klassische Beschreibung	quantenmechanische Beschreibung
mathematische Abbildung des physikalischen Systems	Vektorrechnung – Vektoranalysis	Operatorenalgebra
Gesamtenergie des Systems (Hamilton-Funktion)	$H(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t)) = E_{\text{kin}}(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{p}(t)) + V(\boldsymbol{r}(t))$	$\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = E_{\text{kin}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
Beschreibung der zeitlichen und räumlichen Entwicklung des Systems	$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}_x$; $\frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{p}_y$; $\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{p}_z$ $\frac{\partial H}{\partial p_x} = \dot{x}$; $\frac{\partial H}{\partial p_y} = \dot{y}$; $\frac{\partial H}{\partial p_z} = \dot{z}$ Lösung dieser Gleichungen liefert die Bahnkurve des Teilchens (Bewegungsgleichung): $\Rightarrow \boldsymbol{r}(t)$	$\hat{H}\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ zeitabhängige Schrödinger-Gleichung Lösung der Schrödinger-Gleichung liefert die Wellenfunktion $\Rightarrow \Psi(\boldsymbol{r}, t)$ Skalar Es gibt keine Bahnkurve eines Teilchens, sondern nur seine Wahrscheinlichkeit $\Psi(\boldsymbol{r}, t)\Psi^*(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V$, es in dem Volumen $\mathrm{d}V$ anzutreffen: $\underbrace{\Psi(\boldsymbol{r}, t)\Psi^*(\boldsymbol{r}, t)}_{\substack{\text{Wahrscheinlich-}\\ \text{keitsdichte}}} = \lvert\Psi(\boldsymbol{r}, t)\rvert^2 \geqq 0$ (* konjugiert komplex) $\int \Psi\Psi^* \mathrm{d}V = 1$ Ψ enthält alle verfügbaren Informationen über das System.
Messprozess	Die Observablen können zu jedem Zeitpunkt unabhängig voneinander genau gemessen werden, beispielsweise Ort und Impuls. – Das System wird durch den Messvorgang nicht verändert.	Der Messprozess verändert das System, sodass beispielsweise Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf messbar sind. Unschärferelation $\Delta x \Delta p_x \geqq \frac{\hbar}{2}$
Korrespondenzprinzip	Die Definitionsgleichungen der klassischen Mechanik, die keine Ableitungen enthalten, gelten auch für die entsprechenden Operatoren der Quantenmechanik. – Wenn das quantenmechanische System „genügend groß“ wird, muss die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergehen.	

Der Operator $\hat{H}$ ist die quantenmechanische Übersetzung der Hamilton-Funktion $H = p^2/(2m) + V(x, y, z) = E_{\text{gesamt}}$, in der die klassischen Größen durch die Operatoren ersetzt worden sind (*Korrespondenz-Prinzip*). In Tabelle 8.1 ist die räumliche und zeitliche Entwicklung des Systems im klassischen und quantenmechanischen Fall beschrieben. Die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems erfolgt durch eine Wellenfunktion, die alle verfügbaren Informationen über das System enthält. Die Messgrößen werden dabei durch Operatoren dargestellt. Die möglichen Messwerte des Operators $\hat{A}$ sind die *Eigenwerte* a des Operators. Man erhält diese durch Anwendung des Operators auf die zu diesem Eigenwert gehörige Wellenfunktion, die *Eigenfunktion* genannt wird. Es ergibt sich die *Eigenwertgleichung*

$$\underset{\text{Operator}}{\hat{A}} \cdot \underset{\text{Eigenfunktion}}{\psi_n(\boldsymbol{r})} = \underset{\text{Eigenwert}}{a} \cdot \underset{\text{Eigenfunktion}}{\psi_n(\boldsymbol{r})}\,. \tag{8.23}$$

Diese reellen Eigenwerte a können diskret $(a_n, n = 1, 2, 3, \ldots, k)$ oder kontinuierlich sein. Befindet sich das quantenmechanische System nicht in einem Eigenzustand ψ_n sondern in einem allgemeinen Zustand, so ergibt sich für den Operator $\hat{A}$ ein schwankender Messwert mit Mittelwert $\overline{a}$ (*Erwartungswert*):

$$\overline{a} = \int \psi^*(\boldsymbol{r}) \hat{A} \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V\,. \tag{8.24}$$

ψ^* ist die konjugiert komplexe Funktion zu $\psi(\boldsymbol{r})$. Ein solcher allgemeiner Zustand $\psi(\boldsymbol{r})$ ergibt sich durch lineare Überlagerung (*Superposition*) der Eigenzustände $\psi_n(\boldsymbol{r})$ entsprechend

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_n c_n \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{8.25}$$

mit Faktoren c_n, die komplex sein können. Voraussetzung ist stets, dass die Wellenfunktion normiert ist, sodass gilt

$$\int \psi^*(\boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V = 1\,. \tag{8.26}$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eins ist, das Teilchen irgendwo im Raum anzutreffen. Deshalb muss die Wellenfunktion für $r \to \pm\infty$ schnell gegen null gehen oder periodisch sein.

Im Folgenden soll die Lösung der Schrödinger-Gleichung für einige konkrete Probleme, den *Potentialtopf*, den *harmonischen Oszillator* und die *Potentialschwelle* genauer betrachtet werden. In Abb. 8.9 ist die Schrödinger-Gleichung für diese Potentiale mit den Randbedingungen und den Lösungen angegeben. Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass zur Lösung der Differentialgleichung bei den vorgegebenen Randbedingungen ein erheblicher mathematischer Aufwand erforderlich ist.

Betrachtet man das quantenmechanische Ergebnis des *Rechteckpotentials* und des harmonischen Oszillators, so zeigt sich als fundamentaler Unterschied zum klassischen Ergebnis, dass nur diskrete Energiezustände E_n erlaubt sind. Die Aufeinanderfolge der Energieniveaus wird durch eine ganze Zahl n bestimmt, die als Quantenzahl bezeichnet wird. Beim Rechteckpotential ($E_n \sim n^2$) nimmt der Abstand ΔE zwischen benachbarten Energieniveaus mit der Quantenzahl n zu ($\Delta E \sim n$). Beim harmonischen Oszillator ist $E_n \sim n$, d. h., der Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus ist konstant. Ein weiterer Unterschied zum klassischen Ergebnis besteht

darin, dass der quantenmechanisch niedrigste Energiezustand von null verschieden ist, sodass dem Teilchen auch am absoluten Nullpunkt eine Energie (*Nullpunktsenergie*) zukommt. Weil das Planck'sche Wirkungsquantum h sehr klein ist ($h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ J s), wird die Energiequantelung erst bei atomaren Dimensionen und Teilchen geringer Masse (z. B. Elektronen) erkennbar. Für makroskopische Systeme liegt die Energiequantelung weit unterhalb jeder Messgenauigkeit

Für einen *Potentialtopf* mit der Länge $l = 1$ cm und ein Teilchen mit der Masse $m = 1$ g ergibt sich für die Energieniveaus

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\, m\, l^2} n^2 = 3{,}4 \cdot 10^{-44} n^2 \text{ eV} .$$

Für den harmonischen Oszillator mit der Energie E (klassisch z. B. eine an einer Feder schwingende Masse m) bewegt sich klassisch das Teilchen zwischen den Umkehrpunkten x_0, wie Abb. 8.9 zeigt. Das quantenmechanische Ergebnis zeigt, dass sich $\psi_n(x)$ über diese Umkehrpunkte hinaus erstreckt. Da $|\psi_n(x)|^2\, \mathrm{d}V$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt, bedeutet dies, dass sich das Teilchen auch *außerhalb der klassischen Umkehrpunkte* aufhalten kann.

Der Widerspruch zum klassischen Verhalten eines Teilchens wird noch deutlicher beim Anlaufen eines Teilchens gegen eine Potentialschwelle. Bei einer Energie E des Teilchens kleiner als die Potentialschwelle kann das Teilchen klassisch die Schwelle nicht überwinden, sodass es vollständig reflektiert wird (Abb. 8.9). In der Quantenmechanik besteht dagegen eine Wahrscheinlichkeit, das Teilchen hinter der Potentialschwelle anzutreffen. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch den *Transmissionskoeffizienten* T ausgedrückt. Je dünner die Potentialschwelle ist, umso größer wird T. Dieses Durchdringen einer Potentialschwelle, obwohl es klassisch nicht möglich wäre, wird *Tunneleffekt* genannt und spielt beispielsweise beim *α-Zerfall* (Abschn. 8.8.1.2) und dem *Tunnelmikroskop* (Abschn. 8.2.6) eine entscheidende Rolle.

8.2.3 Unschärferelation

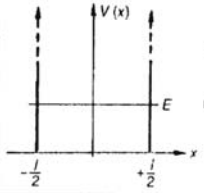
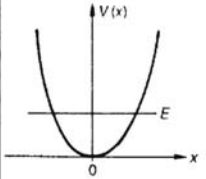
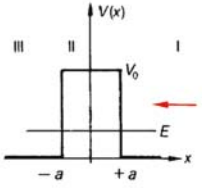
Wie in Abschn. 8.2.2 ausgeführt, ist es ein Grundpostulat der Quantentheorie, dass die Eigenwerte der Messgröße (dargestellt durch ihren Operator) identisch mit den Messwerten sind. Wendet man dieses Postulat auf ein freies Teilchen an, das durch eine ebene Welle beschrieben wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\hat{p}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} = p_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} , \\ &\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} = \hbar\, k_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} ; \quad \hbar k_x = p_x . \end{aligned} \tag{8.27}$$

Der Ausdruck $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}$ ist die Eigenfunktion zum Impulsoperator $\hat{p}_x$ (analog y und z). Ein entsprechendes Experiment würde als Resultat einer Impulsmessung p_n ergeben. Befindet sich das Teilchen in einem allgemeinen Zustand, so kann dieser durch die Superposition von ebenen Wellen (8.28) innerhalb eines Bereichs Δk *um* k_0 (*Wellenpaket*) dargestellt werden (Abb. 8.10):

$$\psi(x) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} c(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} \mathrm{d}k . \tag{8.28}$$

Führt man eine Impulsmessung an einem Teilchen, dargestellt durch ein Wellenpaket, durch, so erhält man einen beliebigen Messwert $p_n/\hbar$ im Bereich $k_0 - \Delta k < p_n/\hbar < k_0 + \Delta k$. Die Wiederholung der Impulsmessung in einem neupräparierten Wellenpaket $\psi(x)$ liefert einen anderen Messwert für p_n. Eine mehrmalige

	Rechteckpotential	harmonischer Oszillator	Potentialschwelle (Tunneleffekt)
Potential	 $V(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$ unendlich hoher Potentialtopf	 $V(x) = \frac{1}{2} D x^2$ $\omega^2 = \frac{D}{m}$ $\quad V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ parabelförmiges Potential (vgl. Federpendel; D Federkonstante)	 $V(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < -a \\ V_0 \text{ für } -a < x < a \\ 0 \text{ für } x > a \end{cases}$ einlaufende Welle
	$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion	$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\Delta} + V(x)$ Hamilton-Operator	$\hat{H}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$ zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung
Schrödinger-Gleichung	Innenbereich: $V(x) = 0; \quad -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}; \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\,\psi(x)$ $\psi(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$ Außenbereich: $V(x) \to \infty$ Da $V(x)$ außerhalb überall unendlich ist, muss die Wellenfunktion verschwinden: $\psi(x) = 0$. Wenn dies nicht der Fall wäre, würde sich ein unendlich großer Beitrag zur Energie ergeben.	$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} D x^2\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \left(\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{m^2}{\hbar^2}\omega^2 x^2\right)\psi(x) = 0$ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + (k^2 - \lambda^2 x^2)\,\psi(x) = 0$ $\lambda^2 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}$ Lösung der Differentialgleichung durch Lösungsansatz $\psi(x) = A\,e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$	Bereich I, III $\quad V(x) = 0$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\,\psi(x); \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + k^2\psi(x) = 0$ $\psi_I(x) = A_I\,e^{ikx} + B_I\,e^{-ikx}; \quad \psi_{III}(x) = A_{III}\,e^{ikx} + B_{III}\,e^{-ikx}$ Bereich II $\quad V(x) = V_0 > 0$ $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \;\overline{x}\; \kappa^2\psi(x) = 0; \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ $\left.\begin{matrix}\kappa^2 < 0 \\ \kappa^2 > 0\end{matrix}\right\} \psi_{II}(x) = A_{II}\,e^{\kappa x} + B_{II}\,e^{-\kappa x} \begin{cases} E > V_0 \text{ sinusförmig} \\ E < V_0 \text{ exponentiell} \end{cases}$
Randbedingungen	$\psi\left(-\frac{l}{2}\right) = \psi\left(+\frac{l}{2}\right) = 0$ $A\,e^{ik(l/2)} + B\,e^{-ik(l/2)} = 0 \Rightarrow B = -A\,e^{ikl}$ $A\,e^{-ik(l/2)} + B\,e^{ik(l/2)} = 0 \Rightarrow B = -A\,e^{-ikl}$ Da beide Bedingungen erfüllt sein müssen, gilt $e^{2ikl} = 1 \Rightarrow 2kl = n\,2\pi; \quad n = 1, 2, 3 \ldots$ Eigenwertbedingung	Die Potenzreihe muss endlich sein, damit die Wellenfunktion normierbar bleibt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = 1$ Eigenwertbedingung: $k^2 = \lambda(2n - 1); \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$	stetig differenzierbar $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)\right.$ an den Grenzen endlich$\left.\right)$ $\psi_I(+a) = \psi_{II}(+a); \qquad \psi_{II}(-a) = \psi_{III}(-a)$ $\frac{\partial}{\partial x}\psi_I(+a) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_{II}(+a); \qquad \frac{\partial}{\partial x}\psi_{II}(-a) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_{III}(-a)$ Im Bereich III kann die Welle nur nach links weiterlaufen: $\Rightarrow A_{III} = 0$ (wenn für Zeitabhängigkeit der Faktor $e^{-i\omega t}$ gesetzt ist).

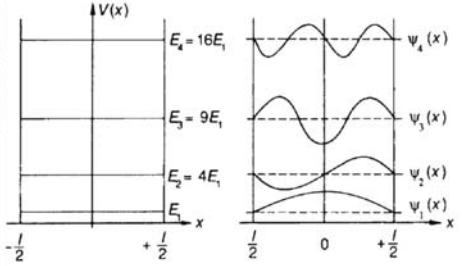
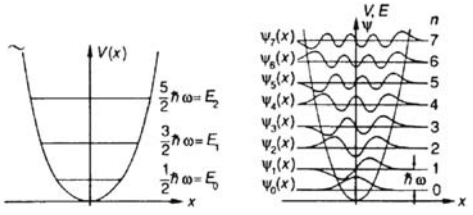
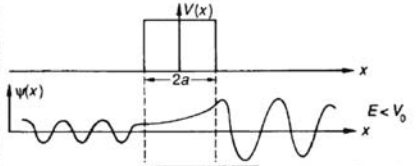
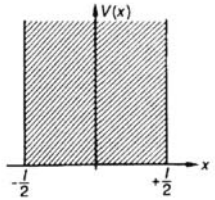
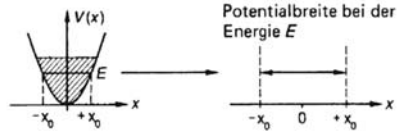
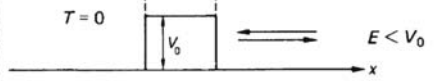
Lösung, Eigenwerte, Eigenfunktionen	Aus der Eigenwertbedingung ergibt sich $k_n = (\pi/l)n \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$ $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2$ $\psi_n(x) = 2A \cos k_n x \quad n = 1, 3, 5 \ldots$ $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}$ $\psi_n(x) = 2iA \sin k_n x \quad n = 2, 4, 6 \ldots$ A wird durch Normierung festgelegt. 	Aus der Eigenwertbedingung ergibt sich $E_n = \frac{\hbar_n^2 k^2}{2m} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ $\psi_0(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}$ $\psi_1(x) = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \cdot x$ $\psi_2(x) = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2)$  allgemeine Gleichung für $\psi_n(x)$: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \cdot \left[(-1)^n e^{\eta^2} \frac{d^n e^{-\eta^2}}{d\eta^n}\right]$ $\eta = \sqrt{\lambda}\, x$ $\qquad$ $H_n(\eta)$: Hermitesche Polynome	einlaufende Welle $\psi_I(x) = B_I e^{-ikx}$ $\qquad$ auslaufende Welle $\psi_{III}(x) = B_{III} e^{-ikx}$ Transmissionskoeffizient $T = \frac{\lvert B_{III}\rvert^2}{\lvert B_I\rvert^2}$ $T = \left[1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \sinh^2 \kappa 2a\right]^{-1} \qquad E < V_0$ $T = \left[1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \sin k 2a\right]^{-1} \qquad E > V_0$  $T \approx \exp[-(2/\hbar)\sqrt{2m(V_0 - E)} \cdot 2a] \qquad \kappa 2a \gg 1$
klassisches Ergebnis	Das Teilchen mit der Masse m kann in dem Potentialtopf jede Energie, auch die Energie null, einnehmen. 	 Jede Energie kann das Teilchen mit der Masse m einnehmen. Klassisch bewegt sich das Teilchen nur innerhalb der Umkehrpunkte x_0.	$T = 0$  Einlaufendes Teilchen mit der Energie $E < V_0$ wird unabhängig von der Breite der Potentialschwelle vollständig ($T = 0$) reflektiert. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen hinter dem Potentialwall zu finden, ist im Gegensatz zur Quantentheorie null.

Abb. 8.9 Lösung der Schrödinger-Gleichung für einige Potentiale

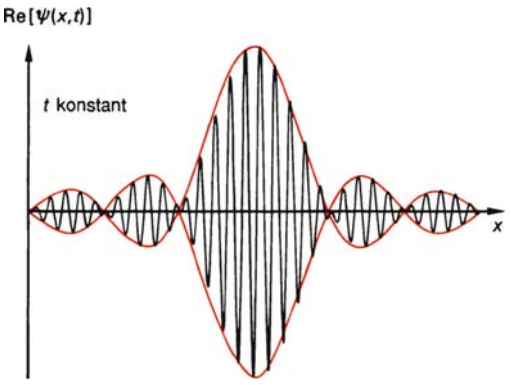


Abb. 8.10 Wellenpaket

Wiederholung der Messung an jeweils neupräparierten Wellenpaketen ergibt eine Verteilung der Messwerte mit dem Erwartungswert $\overline{p}$ als Mittelwert (8.24). Der erhaltene Messwert p_n ist der *Eigenwert* der *Eigenfunktion* $e^{ik_n x}$, $k_n = p_n/\hbar$; hierdurch befindet sich das Teilchen nach der Messung im Eigenzustand zum entsprechenden Messwert. Die Messung verändert damit den Zustand ψ des Systems:

$$\underset{\substack{\text{allgemeiner}\\ \text{Zustand}\\ \text{des Systems}}}{\psi(x)} \xrightarrow[\substack{\text{Anwendung}\\ \text{von } \hat{A}}]{\text{Messprozess}} \underset{\text{Eigenfunktion}}{\widetilde{\psi}(x) = \psi_n(x)} \Rightarrow \underset{\substack{\text{Messwert}\\ \text{Eigenwert}}}{a_n} \tag{8.29}$$

Befindet sich das System in einem Eigenzustand zum Operator $\hat{A}$, so bleibt dieser Eigenzustand nach einer Messung erhalten:

$$\underset{\text{Eigenzustand}}{\psi_n(x)} \xrightarrow[\substack{\text{Anwendung}\\ \text{von } \hat{A}}]{\text{Messprozess}} \underset{\text{Eigenfunktion}}{\psi_n(x)} \Rightarrow \underset{\substack{\text{Messwert}\\ \text{Eigenwert}}}{a_n} \tag{8.30}$$

Wird nach einer Messung (z. B. Impulsmessung) eine weitere Messung (z. B. Ortsmessung) durchgeführt, so bedeutet dies die Anwendung des entsprechenden Operators auf den Zustand des Systems ψ_n nach der ersten Messung. Dies hat zur Folge, dass für die Messung zweier Messgrößen an einem quantenmechanischen System das jeweilige Messergebnis von der *Reihenfolge der Messungen* abhängen kann. Betrachtet seien die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sowie die zu beiden Operatoren gehörige Eigenfunktion ψ. Wird zuerst die Messung von $\hat{A}$ vorgenommen, so ergibt sich $\hat{A}\,\psi = a\,\psi$ (a ist Eigenwert zu $\hat{A}$). Eine anschließende Messung von $\hat{B}$ liefert $\hat{B}(\hat{A}\psi) = b\,a\,\psi$ (b ist Eigenwert zu $\hat{B}$). Werden beide Messungen umgekehrt durchgeführt, so folgt $\hat{A}(\hat{B}\,\psi) = a\,b\,\psi$. Die Differenz der beiden Gleichungen liefert $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = (a\,b - b\,a)\psi$. Wenn man fordert, dass die Messergebnisse von der Reihenfolge unabhängig sind, so muss $(a\,b - b\,a)\psi = 0$ sein. Dies muss für jede gemeinsame Eigenfunktion von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gelten:

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = 0, \text{kurz}$$
$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}] = 0\,. \tag{8.31}$$

Wenn eine solche Operatorengleichung auftritt, muss man sich stets hinter dem Operator eine Wellenfunktion vorstellen. Der Ausdruck in (8.32) wird als *Vertauschungsrelation* oder *Kommutator* bezeichnet:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\,\hat{C} \begin{cases} = 0 & \text{Messergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Messung} \\ \neq 0 & \text{Messergebnis von der Reihenfolge abhängig} \end{cases} \tag{8.32}$$

Wenn die Messung zweier Messgrößen (Observablen) von der Reihenfolge der Messung ab-

hängig ist, können beide Messgrößen gleichzeitig nicht beliebig genau gemessen werden, da die erste Messung den Zustand des Systems unkontrolliert verändert (es befindet sich nach der Messung in einem beliebigen Eigenzustand). Dies ist genau die Aussage der *Heisenberg'schen Unschärferelation* (Abschn. 6.5.5.2). Durch den Formalismus der Quantentheorie kann die Gültigkeit folgender Relation gezeigt werden:

$$\overline{(\Delta a)^2} \cdot \overline{(\Delta b)^2} \geqq \frac{c^2}{4} \quad \text{allgemeine Heisenberg'sche Unschärferelation}$$

$$\overline{(\Delta a)^2} = \overline{(a - \overline{a})^2} \quad \text{mittleres Schwankungsquadrat (analog b)} \tag{8.33}$$

Mit dem Ort und Impulsoperator ergibt sich für den Kommutator und damit für die Unschärferelation

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -\mathrm{i}\,\hbar\,; \quad [\hat{p}_x, \hat{y}] = 0\,;$$
$$\overline{(\Delta p_x)^2} \cdot \overline{(\Delta x)^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4}\,; \quad \text{analog } y, z\,. \tag{8.34}$$

oder weniger exakt

$$\Delta p_x \Delta x \geqq \frac{\hbar}{2}\,, \quad \text{analog } y, z\,. \tag{8.35}$$

Für den Drehimpulsoperator (Tabelle 8.1) ergeben sich folgende Kommutatoren: $[\hat{\boldsymbol{l}}^2, \hat{l}_z] = 0$, $[\hat{l}_z, \hat{l}_x] = \mathrm{i}\hbar\hat{l}_y$ (x, y, z zyklisch vertauschbar). Es ist $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ mit jeweils nur einer Komponente $\hat{l}_x, \hat{l}_y$ oder $\hat{l}_z$ gleichzeitig messbar.
Die Unschärferelationen beziehen sich auf den Genauigkeitsgrad der gegenwärtigen (gleichzeitigen) Kenntnis der verschiedenen Größen. Diese Relationen beschränken nicht die Genauigkeit beispielsweise einer Ortsmessung allein oder einer Geschwindigkeitsmessung allein, sondern lediglich die Kenntnis beispielsweise der Geschwindigkeit bei einer Ortsmessung.

8.2.4 Quantenmechanik des Wasserstoffatoms

Mit den quantentheoretischen Grundlagen von Abschn. 8.2.1 bis 8.2.3 kann das Wasserstoffatom quantenmechanisch berechnet werden. Weil der mathematische Aufwand erheblich ist, sei darauf verzichtet. Der grundlegende Weg und die Ergebnisse sind in Abb. 8.11 dargestellt. Es ist zweckmäßig, das kugelsymmetrische Problem in Kugelkoordinaten zu rechnen.
Aufgrund der in Abschn. 8.2.3 durchgeführten Überlegungen gilt für den Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{l}}$, dass seine Komponenten $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ nicht gleichzeitig scharf messbar sind, dagegen $\hat{l}_z$ und $\hat{\boldsymbol{l}}^2$. Ferner gilt die gleichzeitige Messbarkeit auch für den Hamilton-Operator $\hat{H}$ und $\hat{l}_z$ bzw. $\hat{\boldsymbol{l}}^2$. Dies ermöglicht eine Trennung der Schrödinger-Gleichung in einen *Radialanteil* $R(r)$, der nur von r abhängig ist, und einen *Drehimpulsanteil* $F(\vartheta, \varphi)$, der nur von den Winkeln ϑ und φ abhängt (Abb. 8.11).
Die Lösung der Drehimpulseigenwertgleichung sind die Kugelflächenfunktionen $F_{l,m}(\vartheta, \varphi)$. Die Eigenwerte zu $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ und $\hat{l}_z$ sind diskret (gequantelt). Durch Einsetzen des Eigenwerts $\hbar^2 l(l+1)$ von $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ in den Radialanteil der Wellenfunktion ergibt sich für die *effektive potentielle Energie* V_{eff} der Ausdruck

$$V_{\mathrm{eff}} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}}_{\text{Coulomb-Energie}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_{\mathrm{red}} r^2}}_{\text{Rotationsenergie}}\,. \tag{8.36}$$

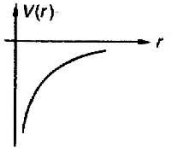
Hamilton-Operator

kartesische Koordinaten

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m_{red}}\,\Delta + V(r)$$

$$V(r) = -\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Z\,e^2}{r}$$

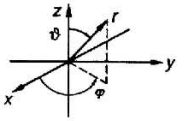
$$m_{red} = \frac{m_{Elektron}\cdot m_{Kern}}{m_{Elektron} + m_{Kern}}$$



Kugelkoordinaten

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m_{red}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2\,m_{red}\,r^2}\,l^2 + V(r)$$

$$l^2 = -\hbar^2\left\{\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$



Auf das Elektron wirkt nur das Coulomb-Potential.

Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}\,\psi(r) = E\,\psi(r) \qquad \psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,F(\vartheta,\varphi)$$

$$F(\vartheta,\varphi)\left[-\frac{\hbar^2}{2\,m_{red}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial r} + V(r)\right]R(r) + \frac{R(r)}{2\,m_{red}\,r^2}\,\hat{l}^2\,F(\vartheta,\varphi) = E\,R(r)\,F(\vartheta,\varphi)$$

Separation

$$[\hat{l}^2,\,\hat{l}_z] = 0 \qquad [\hat{l}^2,\hat{H}] = 0 \qquad [\hat{l}_z,\hat{H}] = 0$$

⇒ gleiche Eigenfunktionen, da gleichzeitig messbar.

$$\hat{l}^2 F(\vartheta,\varphi) = \hbar^2\,\gamma^2\,F(\vartheta,\varphi)$$

$$\hat{l}_z\,F(\vartheta,\varphi) = \hbar\,m\,F(\vartheta,\varphi)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\,m_{red}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + V(r) + \frac{\hbar^2\,\gamma^2}{2\,m_{red}\,r^2}\right]R(r) = E\,R(r)$$

Drehimpuls-Eigenfunktionen

$F_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ (Kugelflächenfunktionen)

$$\hat{l}^2 F_{l,m}(\vartheta,\varphi) = \underbrace{\hbar^2 l(l+1)}\,F_{l,m}(\vartheta,\varphi)$$

Eigenwert des Drehimpulsquadrats

l: Bahndrehimpulsquantenzahl, $l = 0, 1, 2 \ldots$

Radialanteil der Wellenfunktion

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\,m_{red}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + V(r) + \frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2\,m_{red}\,r^2}\right]R(r) = E\,R(r)$$

Lösung der separierten Gleichungen

$\hat{l}_z\, F_{l,m}(\vartheta,\varphi) = \hbar\, m\, F_{l,m}(\vartheta,\varphi)$

m: magnetische Quantenzahl, $-l \leqslant m \leqslant l$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \pm l$

l	m	$F_{l,m}(\vartheta,\varphi)$	
0	0	$F_{0,0} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	s-Funktion
1	0	$F_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\vartheta$	p-Funktionen
1	±1	$F_{1,\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$	p-Funktionen
2	0	$F_{2,0} = \left(\frac{5}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)$	d-Funktionen
2	±1	$F_{2,\pm1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta\cos\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$	d-Funktionen
2	±2	$F_{2,\pm2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\vartheta\, e^{\pm 2i\varphi}$	d-Funktionen

Lösung der Gleichung: $R_{n,l}(\rho)$

n: Hauptquantenzahl $l \leqslant n-1$

$l = 0, 1, 2 \ldots, n-1$

$\rho = \frac{r}{a_o}$ $\quad a_o = \frac{\hbar^2\, 4\pi\,\epsilon_o}{e^2\, m_{\text{Elektron}}}$, Bohr'scher Radius

n	l	$R_{n,l}$	
1	0	$R_{1,0} = 2\, a_o^{-3/2}\, e^{-\rho}$	1 s
2	0	$R_{2,0} = (2\,a_o)^{-3/2}\,(2-\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho}$	2 s
2	1	$R_{2,1} = 3^{-1/2}(2\,a_o)^{-3/2}\,\rho\, e^{-\frac{1}{2}\rho}$	2 p
3	0	$R_{3,0} = 3^{-4}\cdot 3^{-1/2}\, a_o^{-5/2}\,(54 - 36\,\rho - 4\,\rho^2)\, e^{-\frac{1}{3}\rho}$	3 s
3	1	$R_{3,1} = 3^{-4}\cdot 6^{-1/2}\cdot a_o^{-5/2}\, 4\,\rho\,(6-\rho) e^{-\frac{1}{3}\rho}$	3 p
3	2	$R_{3,2} = 3^{-4}\cdot 30^{-1/2}\, a_o^{-5/2}\, 4\,\rho^2\, e^{-\frac{1}{3}\rho}$	3 d

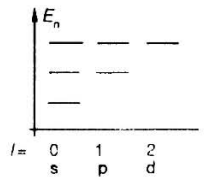
Gesamtlösung

$\psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi) = N\, R_{n,l}(r)\, F_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ $\quad N$: Normierungsfaktor

$n = 1, 2, 3 \ldots$

$l = 0, 1, 2 \ldots, n-1$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \pm l$



$E_n = -\frac{Z^2 e^4\, m_{\text{Elektron}}}{(4\pi\epsilon_o)^2 \cdot 2\hbar^2}\,\frac{1}{n^2}$

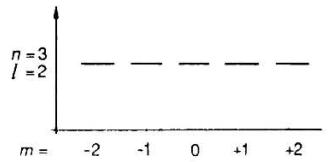


Abb. 8.11 Lösung des Wasserstoffproblems

Der zweite Term von (8.36) ist die Rotationsenergie eines auf der Kreisbahn mit Radius r umlaufenden Teilchens mit der reduzierten Masse m_{red}:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{(J\omega)^2}{2J} = \frac{l^2}{2J} = \frac{l^2}{2m_{\text{red}}r^2} \tag{8.37}$$

mit $J = m_{\text{red}}r^2$ als dem Massenträgheitsmoment und $\boldsymbol{l} = J\boldsymbol{\omega}$ als dem *Bahndrehimpuls*. Durch Vergleich von (8.36) mit (8.37) ergibt sich für den Bahndrehimpuls

$$l^2 = \hbar^2 l(l+1); \quad |\boldsymbol{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \tag{8.38}$$

mit der Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, 2, \ldots$ Für die z-Komponente des Bahndrehimpulses ergeben sich aus der Eigenwertgleichung diskrete Werte $l_z = \hbar m$ (mit der magnetischen Quantenzahl $m = 0, 1, 2, \ldots, l$) (Abb. 8.11). Die Projektion des Bahndrehimpulsvektors $\boldsymbol{l}$ auf die z-Richtung (l_z) kann damit nur ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ sein. Dies wird durch das *Vektordiagramm* in Abb. 8.12 veranschaulicht. Zu jedem l-Wert gibt es $2l + 1$ verschiedene m-Werte, d. h., die dem Bahndrehimpulsvektor $\boldsymbol{l}$ entsprechende Energie ist $(2l + 1)$-fach entartet. Aus dem Vektordiagramm (Abb. 8.12a) wird deutlich, dass sich der Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ quantenmechanisch nie parallel zur z-Richtung einstellen kann. Dies hat folgende Konsequenzen:

- Der Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ hat stets eine Komponente in x- und y-Richtung.
- Die Berechnung der Erwartungswerte $\bar{l}_x$ und $\bar{l}_y$ der Operatoren $\hat{l}_x$ und $\hat{l}_y$ ergibt jeweils null. Im Mittel verschwinden für einen Eigenzustand $F_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ die Drehimpulskomponenten in x- und y-Richtung.

Um diese beiden Aussagen zu erfüllen, muss angenommen werden, dass der Bahndrehimpulsvektor $\boldsymbol{l}$ um die z-Achse präzediert. Dies ist in Abb. 8.12b veranschaulicht.
Der Bahndrehimpulsvektor $\boldsymbol{l}$ verändert zeitlich seine Richtung, obwohl kein äußeres Drehmoment vorhanden ist. Die Präzession ist letz-

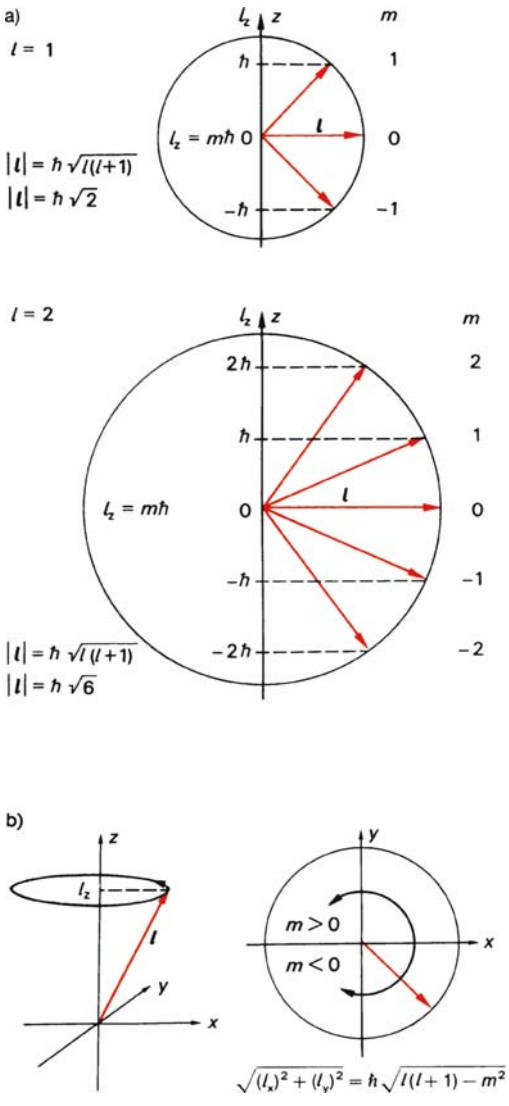


Abb. 8.12 Vektordiagramm des Bahndrehimpulses

ten Endes eine alleinige Folge der Unschärferelation (nicht gleichzeitige Messbarkeit von l_x, l_y, l_z).

Als Lösung des Radialanteils der Wellenfunktion (Abb. 8.11) ergibt sich $R_{n,l}(r)$, der nur von den beiden Quantenzahlen n (Hauptquantenzahl) und l (Bahndrehimpulsquantenzahl, Nebenquantenzahl) abhängig ist. Die gesamten Lösungen der Schrödinger-Gleichung des Wasserstoffproblems werden als *Atomorbitale* bezeichnet. In Abb. 8.13 ist lediglich der Drehimpulsanteil dargestellt.

Für das Wasserstoffatom sind die Energieeigenwerte E_n nur von der Hauptquantenzahl n abhängig (Abb. 8.11). Zu jedem Energiezustand E_n gibt es n^2 Zustände gleicher Energie ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1; -l < m < l$, zu jedem l gehören $2\,l + 1$ Zustände). Die Energie E_n ist somit n^2-fach entartet.

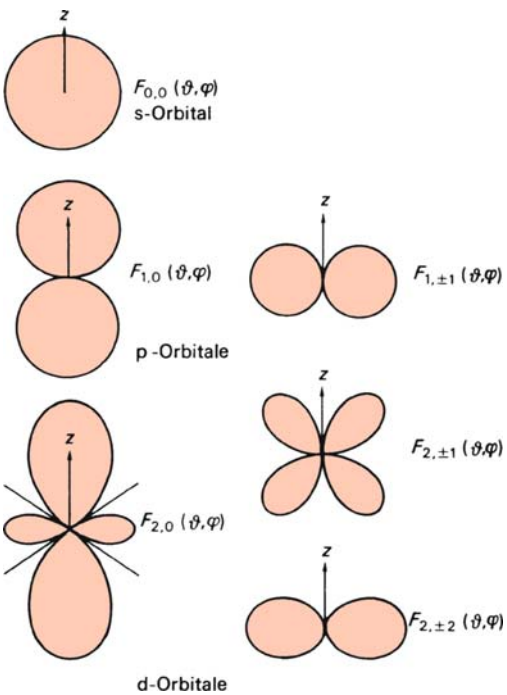


Abb. 8.13 Drehimpulsanteil der Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms

- Die Entartung bezüglich der Nebenquantenzahl l wird aufgehoben (die Energie der Zustände für unterschiedliche l-Werte bei gleichem n-Wert wird verschieden), wenn das Potential kugelsymmetrisch ist, aber nicht mehr proportional zu $1/r$ ist. Dies ist bei allen Mehrelektronensystemen der Fall. Die Entartung bezüglich der Nebenquantenzahl l wird auch bei relativistischer Rechnung aufgehoben (Bohr-Sommerfeld'sche Quantenzahl $k = l + 1$).
- Die Entartung bezüglich m wird aufgehoben, wenn dem Coulomb-Potential eine nicht kugelsymmetrische Störung (z. B. elektrisches oder magnetisches Feld) überlagert wird (Abschn. 8.3).

Zur Ermittlung des Absorptionsspektrums eines Atoms wird dieses mit Licht unterschiedlicher Frequenz bestrahlt. Stimmt die Photonenenergie $\hbar\omega$ mit einer Energiedifferenz von Zuständen ($E_{n,l,m} - E_{n',l',m'}$) überein, so wird dieses Photon absorbiert und ein Elektron geht vom Zustand n, l, m in den Zustand n', l', m' über. Ein derartiger Übergang kann nicht zwischen beliebigen Zuständen erfolgen. Es gibt bestimmte *Auswahlregeln*, nach denen eine Zustandsänderung von n, l, m nach n', l', m' möglich ist. Diese Auswahlregeln ergeben sich durch die Symmetrie der Wellenfunktionen der Zustände, zwischen denen der Elektronenübergang stattfinden soll, und der Wechselwirkung mit der Lichtwelle.

Eine wichtige Auswahlregel für optische Übergänge ist $\Delta l = \pm 1$.

8.2.5 Quanten-Hall-Effekt

8.2.5.1 Freies Elektron im Magnetfeld (quantenmechanisch)

Im Folgenden sei der Einfluss eines Magnetfeldes auf ein freies Elektron quantenmechanisch beschrieben. Zur Vereinfachung des Problems soll sich das Elektron nur in der x, y-Ebene

senkrecht zum magnetischen Feldvektor $\boldsymbol{B}$ bewegen können. Abbildung 8.14 vermittelt eine Übersicht.

Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ ergibt sich durch Ableitung des elektrischen Potentials $\varphi(x, y, z)$ nach den Ortskoordinaten x, y und z:

$$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi, \frac{\partial}{\partial y}\varphi, \frac{\partial}{\partial z}\varphi\right) = -\nabla\varphi\,.$$

Analog kann die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ aus dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ durch Rotationsbildung erhalten werden:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\,,\ \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\,,\ \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right).$$

Damit lautet die *Hamilton-Funktion* $\boldsymbol{H}$ eines Elektrons mit der Ladung $-e$

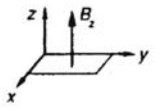
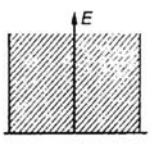
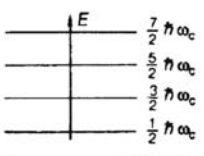
	klassische Beschreibung	quantenmechanische Beschreibung
Vektorpotential Hamilton-Funktion	$\boldsymbol{A} = (0, B_z\,x, 0)$ $\quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (0, 0, B_z)$ $\quad H = \frac{1}{2m}(p + eA)^2$  $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + m\omega_c x)^2);\ \omega_c = \frac{eB_z}{m}$ (für $p_z = 0$)	
Lösung	$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \dot{x} = \frac{p_x}{m}$ $\frac{\partial H}{\partial p_y} = \dot{y} = \frac{1}{m}(p_y + m\omega_c x)$ $-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}_x = -(p_y + m\omega_c x)\omega_c$ $-\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{p}_y = 0;\quad p_y = \text{konst.} = \hbar k_y$ Bewegungsgleichungen: $m\ddot{x} = -m\omega_c^2\left(x + \frac{\hbar}{m\omega_c}k_y\right)$ $m\ddot{y} = m\omega_c\dot{x}$ $x = -\frac{\hbar}{m\omega_c}k_y + a\cos\omega_c t$ $y = y_0 + a\sin\omega_c t;\quad a$: Kreisradius	Substitution: $q = (x - x_0) = x + \frac{\hbar}{m\omega_c}k_y$ $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega_c^2 q^2)$ Hamilton-Operator: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 q^2$ Schrödinger-Gleichung: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 q^2\right)\psi(x, y) = E\psi(x, y)$ $\psi(x, y) = e^{ik_y \cdot y} \cdot \varphi(x - x_0)$ ebene Welle in y-Richtung · Lösung des harmonischen Oszillators
Energie	$H = \frac{1}{2}ma^2\omega_c^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_{kin}$  	$E_\nu = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$ 

Abb. 8.14 Klassische und quantenmechanische Beschreibung des freien Elektrons in einem Magnetfeld

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - (-e)\boldsymbol{A})^2 + (-e)\,\varphi\,. \qquad (8.39)$$

Die Bewegungsgleichung des Elektrons ergibt sich mit den Hamilton'schen Gleichungen $\dot{x} = \partial H/\partial p_x$ und $\dot{p}_x = -\partial H/\partial x$ (analog y; Abschn. 8.2.1) zu

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \underbrace{(-e)\boldsymbol{E}}_{\text{elektrische Kraft}} + \underbrace{(-e)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})}_{\text{Lorentz-Kraft}}\,. \qquad (8.40)$$

Zur Aufstellung der Hamilton-Funktion muss das entsprechende Vektorpotential eingesetzt werden. Für das hier zu lösende Problem soll die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ nur eine z-Komponente B_z aufweisen. Ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}$, das ein Magnetfeld $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A} = (0, 0, B_z)$ erzeugt, ist gegeben durch $\boldsymbol{A} = (0, B_z\,x, 0)$. Mit diesem Vektorpotential ergibt sich die in Abb. 8.14 angegebene Hamilton-Funktion H für die Elektronenbewegung in der x, y-Ebene senkrecht zur Magnetfeldrichtung B_z.

In Abb. 8.14 ist dieses Problem klassisch und quantenmechanisch gelöst. Klassisch ergibt sich als Bahnkurve des Elektrons eine Kreisbahn um den Mittelpunkt $(x_0 = -1/(m\omega_c)\cdot\hbar k_y, y_0)$. Der Impuls des Elektrons in y-Richtung $p_y = \hbar k_y$ ist eine Konstante der Bewegung ($\dot{p}_y = 0$). Die Gesamtenergie H des Systems wird durch das Magnetfeld nicht verändert, da die Lorentz-Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons wirkt. Die quantenmechanische Lösung liefert die Energiewerte des harmonischen Oszillators $E_\nu = (\nu + 1/2)\hbar\omega_c$ mit dem konstanten Energieabstand $\hbar\omega_c$. (ω_c ist die Zyklotronfrequenz.) Die Energiewerte E_ν sind unabhängig von der Wellenzahl k_y (Elektronenspin nicht berücksichtigt). Die Wellenfunktion $\psi(x, y)$ des Elektrons setzt sich aus einer ebenen Welle in y-Richtung und den Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators (Abb. 8.9) um die Ruhelage

$$x_0 = -\frac{\hbar}{m\,\omega_c}k_y = \frac{\hbar}{e\,B_z}k_y$$

zusammen. Im Gegensatz zur klassischen Lösung sind nur diskrete Kreisbahnen erlaubt.

Wird senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ zusätzlich ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ angelegt, so lautet die klassische Bewegungsgleichung (8.40) mit $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$ und $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

$$m\,\ddot{x} = (-e)E_x + (-e)B_z\,\dot{y}\,,$$
$$m\,\ddot{y} = -(-e)\boldsymbol{B}_z\,\dot{x}\,.$$

Eine Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichungen ist

$$x = x_0 + a\,\cos\,\omega_c t\,,$$
$$y = y_0 + a\,\sin\,\omega_c t - \frac{E_x}{B_z}t\,; \quad \omega_c = \frac{eB_z}{m}\,. \qquad (8.41)$$

Sie drückt eine Kreisbewegung aus mit dem Radius a. Ihr Mittelpunkt bewegt sich senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{y} = v_y = -(E_x/B_z)$ in y-Richtung.

Bei der quantenmechanischen Lösung muss zur Hamilton-Funktion H noch die potentielle Energie eEx addiert werden. Infolge der schnellen Kreisbewegung der Elektronen im Magnetfeld (großes B) addiert sich zu E_ν lediglich die potentielle Energie des Kreismittelpunktes x_0 mit

$$eEx = eE_x x_0 = -eE_x\frac{\hbar}{m\,\omega_c}k_y = -\frac{E_x}{B_z}\hbar k_y\,.$$

Damit ergibt sich für die Energie in einem zusätzlichen elektrischen Feld

$$E_\nu = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_c + \left(-\frac{E_x}{B_z}\right)\hbar\,k_y\,. \tag{8.42}$$

Die Geschwindigkeit $v_y = \partial E_\nu/\partial p_y = \partial E_\nu/\partial(\hbar\,k_y)$ errechnet sich somit zu

$$v_y = -(E_x/B_z)\,. \tag{8.43}$$

Dies ist identisch mit dem klassischen Ergebnis.

8.2.5.2 Quanten-Hall-Effekt

Klaus von Klitzing (geb. 1943) entdeckte im Februar 1980 am Hochfeld-Magnetlaboratorium des Max-Planck-Instituts für Festkörperforschung in Grenoble den *Quanten-Hall-Effekt* und wurde dafür 1985 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Der klassische Hall-Effekt ist in Abschn. 4.4.3.2 beschrieben. Durch Anlegen einer Spannung U an den Leiter (dreidimensionales Elektronengas) fließt ein Strom I in x-Richtung, wie Abb. 4.104 zeigt. Durch das Magnetfeld in z-Richtung entsteht senkrecht zu B und I eine Spannung $U_H = R_H I$ (Hall-Spannung). R_H wird (analog zum Ohm'schen Gesetz $U = RI$) als Hall-Widerstand bezeichnet, für den sich klassisch $R_H = B_z/(nde)$ ergibt, d: Dicke des Leiters.

Von *Klitzing* verwendete zur Untersuchung des Hall-Effekts nicht ein dreidimensionales sondern ein *zweidimensionales Elektronengas* (Bewegung der Elektronen im Leitungsband nur in x- und y-Richtung möglich). Ein zweidimensionales Elektronengas (2DEG) kann in einem *MOS-FET* (Silicium-Metalloxid-Oberflächen-Feldeffekttransistor, Abschn. 9.2.3.4) realisiert werden (Abb. 8.15). An der Oberfläche des p-Si-Materials unterhalb der SiO_2-Isolatorschicht bildet sich

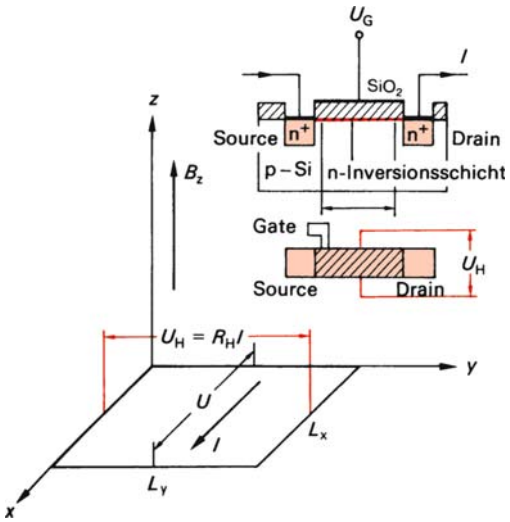


Abb. 8.15 Zweidimensionales Elektronengas in einem MOS-FET

beim Anlegen einer positiven Spannung U_G (Gate-Spannung) eine 5 nm bis 10 nm dicke n-Inversionsschicht. Diese kann in sehr guter Näherung als 2DEG betrachtet werden. Die flächenbezogene Ladungsträgerkonzentration n_s kann durch die Gate-Spannung U_G über mehrere Größenordnungen variiert werden:

$$n_s = \frac{C_0}{e}(U_G - U_E)\,. \tag{8.44}$$

Die Größe C_0 ist die flächenbezogene Kapazität der SiO_2-Schicht und U_E ist die Einsatzspannung zur Ausbildung des 2DEG. Durch Anlegen einer Spannung U zwischen *Quelle* (*Source*) und *Senke* (*Drain*) fließt ein Strom I in der n-Inversionsschicht. Es gilt das Ohm'sche Gesetz $U = RI$, solange I einen kritischen Wert nicht überschreitet.

Für ein 2DEG ist der Widerstand in x-Richtung $R = U/I = \rho(L_x/L_y)$, mit ρ als Resistivität. Die auftretende Hall-Spannung in y-Richtung wird analog zum klassischen Hall-Effekt berechnet (Abschn. 4.4.3.2) und beträgt

$U_H = B_z/(n_s e)I = R_H I$. Der Hall-Widerstand $R_H = \varrho_H = B_z/n_s e$ ist im 2DEG unabhängig von den Abmessungen L_x und L_y der Probe. Die Hall-Spannung wird damit bei konstantem Längsstrom I und Flussdichte B_z umgekehrt proportional zur flächenbezogenen Trägerdichte n_s : $U_H \sim 1/n_s$.

Abbildung 8.16 zeigt Messkurven der Hall-Spannung und der Längsspannung, wie sie v. KLITZING bei tiefer Temperatur und hoher Flussdichte erhielt.

Abbildung 8.17 zeigt ϱ_H und ϱ in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke B. Im Verlauf der Hall-Spannung U_H treten im Gegensatz zum erwarteten Verlauf ($U_H \sim 1/n_s$) Plateaus auf, an denen die Spannung U extrem gering wird (praktisch null). Der spezifische Hall-Widerstand ϱ_H in den Plateaus nimmt einen ganzzahligen Bruchteil von h/e^2 an:

$$R_H = \varrho_H = \frac{h}{e^2 i} \approx \frac{25\,813}{i}\Omega \; (i = 1, 2, \ldots). \tag{8.45}$$

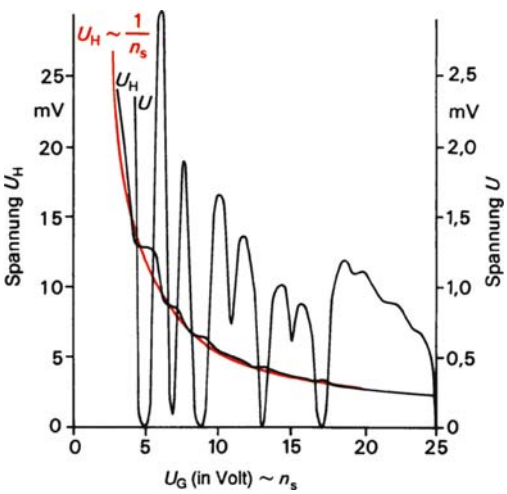


Abb. 8.16 Abhängigkeit der Hall-Spannung U_H und der Längs-Spannung U von der Gatespannung U_G ($B = 18$ T, $I = 1$ µA, $T = 1{,}5$ K)

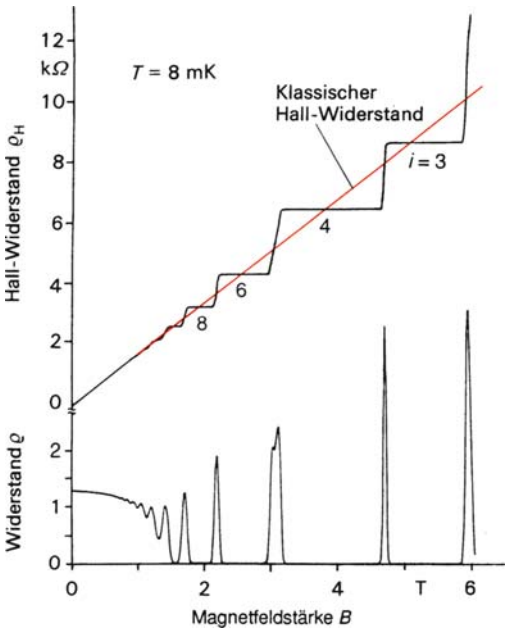


Abb. 8.17 Abhängigkeit der Widerstände ϱ_H und ϱ von der Magnetfeldstärke

Dieses quantenartige Verhalten des Hall-Widerstands wird als *Quanten-Hall-Effekt* (*von-Klitzing-Effekt*) bezeichnet.

Bereits die klassische Betrachtung zeigt, dass ein ideales (reibungsfreies) zweidimensionales Elektronengas in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern außergewöhnliche Eigenschaften besitzt. In Abschn. 8.2.5.1 wurde gezeigt, dass unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes in x-Richtung und eines Magnetfeldes in z-Richtung die Elektronen sich auf Zykloidenbahnen in y-Richtung bewegen mit der Geschwindigkeit $v_y = -E_x/B_z$. Das bedeutet, dass ein Strom in y-Richtung fließt mit der Stromdichte $j_y = -en_s v_y = en_s E_x/B_z$. Für die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ und elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ besteht damit folgender Zusammenhang:

$\boldsymbol{j} = \underline{\sigma}\boldsymbol{E}$, mit dem *Leitfähigkeitstensor*

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_{xy} = \frac{n_s e}{B_z}\,.$$

Umgekehrt ist mit dem *Widerstandstensor*

$$\underline{\varrho} = \begin{pmatrix} 0 & \varrho_{xy} \\ \varrho_{yx} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varrho_{xy} = \frac{B_z}{n_s e} ,$$

$$\boldsymbol{E} = \underline{\boldsymbol{\varrho}}\boldsymbol{j} .$$

Ferner gilt

$$R_H = \frac{B_z}{n_s e} = \varrho_{xy} = \varrho_H . \qquad (8.46)$$

Das bedeutet, dass der spezifische Widerstand ϱ_{xx} in Längsrichtung verschwindet, zugleich mit der Leitfähigkeit σ_{xx}. In realen Systemen sorgt die Streuung der Elektronen am Gitter und an Verunreinigungen dafür, dass ϱ_{xx} und σ_{xx} nicht null werden.

Quantenmechanisch werden die Elektronenwellenfunktionen beschrieben durch eine ebene Welle in y-Richtung und Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators in x-Richtung um den Punkt $x_0 = (\hbar/eB_z)k_y$ (Abschn. 8.2.5.1). Energetisch tritt eine Quantelung der Energieniveaus in die *Landau-Niveaus* ein, deren Energie gegeben ist durch

$$E_\nu = (\nu + 1)\hbar\omega_c \, , \nu = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8.47)$$

Jedes Landau-Niveau kann nur eine begrenzte Zahl von Elektronen aufnehmen. Dieser sog. *Entartungsgrad* kann folgendermaßen bestimmt werden:

Werden für die Wellenfunktionen in y-Richtung periodische Randbedingungen vorausgesetzt, $\psi(x, y + L_y) = \psi(x, y)$ (Abschn. 9.2.2), dann sind mögliche k_y-Werte ganzzahlige Vielfache von $2\pi/L_y$. Die maximale Wellenzahl $k_{y,\max}$ folgt aus der Forderung, dass x_0 maximal so groß sein kann wie L_x. Damit wird $k_{y,\max} = (eB_z/\hbar)L_x$ und die maximale Zahl von Zuständen auf einem Landau-Niveau $N_{\max} = \frac{eB_z}{\hbar} \cdot \frac{L_x L_y}{2\pi}$.

Der Entartungsgrad $D = N_{\max}/L_x L_y$ ist somit

$$D = \frac{eB_z}{h} . \qquad (8.48)$$

Wenn nun die Dichte n_s der Elektronen erhöht wird, dann wird zuerst das tiefste Landau-Niveau mit D Elektronen gefüllt, dann das nächsthöhere und so fort.

In realen Systemen entsteht der Widerstand infolge von Streuung der Elektronen. Dabei muss ein Elektron von seinem Ausgangszustand in einen freien Endzustand gestreut werden. Sind nun alle Landau-Niveaus voll belegt, dann liegt der nächste freie Zustand um $\hbar\omega_c$ höher. Bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern ist diese Energie so groß, dass sie nicht aufgebracht werden kann. Mit anderen Worten: der Streuprozess kann nicht stattfinden. Also führt eine komplette Besetzung der Landau-Niveaus zu einem Verschwinden des Widerstandes ϱ_{xx}.

Für das Verschwinden des Widerstandes ist somit erforderlich, dass die Elektronendichte ein ganzzahliges Vielfaches des Entartungsgrades ist: $n_s = i\,D$. Mit (8.46) ergibt sich damit für den Hall-Widerstand $R_H = B_z/n_s e = B_z/iDe$ und mit (8.48)

$$R_H = \varrho_H = \frac{h}{i\,e^2} , \quad i = 1, 2, 3\ldots \qquad (8.49)$$

Eine weitere Betrachtungsweise ergibt sich, wenn der magnetische Fluss Φ durch die Probe berechnet wird: $\Phi = BA = BL_x L_y$. Der magnetische Fluss ist quantisiert in Vielfachen des Flussquants (Abschn. 9.2.4)

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} . \qquad (8.50)$$

Damit ist die Zahl der Flussquanten, welche die Probe durchdringen $N_\Phi = \Phi/\Phi_0 = B_z L_x L_y e/h$. Die Dichte der Flussquanten ist $n_\Phi = N_\Phi/L_x L_y = eB_z/h$. Das Verhältnis von Elektronendichte n_s zu Flussquantendichte n_Φ wird als *Füllfaktor* i bezeichnet und beträgt

$$i = \frac{n_s}{n_\Phi} = \frac{n_s h}{eB_z} = \frac{n_s}{D} \,. \tag{8.51}$$

Ganzzahlige Füllfaktoren $i = 1, 2, 3\ldots$ bedeuten, dass die Landau-Niveaus $\nu = 0, 1, 2\ldots$ vollständig besetzt sind, was zu den Plateaus im Hallwiderstand und zum Verschwinden des Längswiderstands führt.

Nach der Entdeckung des Quanten-Hall-Effektes durch *K. v. Klitzing* 1980 wurden 1982 von *H. Störmer* und *D. Tsui* an hochreinen AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen zweidimensionale Elektronengase untersucht. Bei tiefer Temperatur (einige mK) und hohen Flussdichten fanden sie Strukturen wie in Abb. 8.17, jedoch zusätzlich solche bei gebrochen rationalen Quantenzahlen $i = 1/3, 2/5, 2/3\ldots$ (Abb. 8.18). Für die Entdeckung dieses *fraktionalen Quanten-Hall-Effekts* wurden H. L. Störmer (geb. 1949) und D. C. Tsui (geb. 1939) zusammen mit R. B. Laughlin (geb. 1950) für die theoretische Interpretation im Jahre 1998 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Nach der Theorie von *Laughlin* wird das Elektronengas bei Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt und hohen Magnetfeldern in eine neue Form von Quantenflüssigkeit gezwungen. Für Elektronen ist wegen des *Pauli-Prinzips* (Abschn. 8.4.2) die Kondensation in einen gemeinsamen Grundzustand verboten. Deshalb bilden die Elektronen mit den Flussquanten zusammengesetzte Teilchen (Abb. 8.19). Diese so entstandenen *Bosonen* können in einen gemeinsamen Grundzustand kondensieren, analog zum Mechanismus der Supraleitung (Abschn. 9.2.4).

Der *Quanten-Hall-Effekt* (*QHE*) hat nicht nur die Theorie der Festkörperphysik befruchtet (Abb. 8.20), sondern hat auch weit reichende Auswirkungen auf dem Gebiet *der Metrologie*. So ist die Genauigkeit der Widerstandsmessung durch den QHE um den Faktor 1 000 gesteigert worden. Seit 1990 wird von der PTB das Widerstandsnormal auf der Grundlage der international festgelegten *von-Klitzing-Konstante* $R_K = 25\,812{,}807\,\Omega$ mit einer relativen Unsicherheit von $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ weitergegeben.

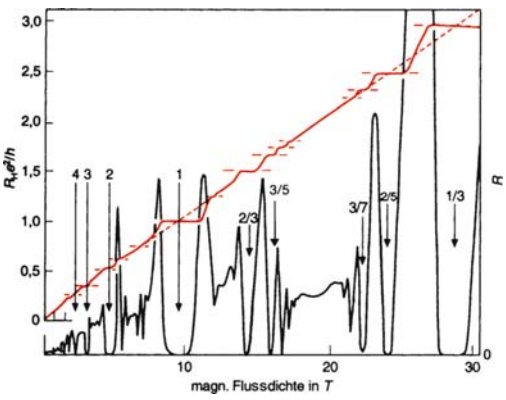


Abb. 8.18 Hall-Effekt mit gebrochenen Quantenzahlen an AlGaAs/GaAs



Abb. 8.19 Zusammengesetzte Teilchen für den Füllfaktor $i = 1/3$, bei dem drei Flussquanten mit einem Elektron verbunden sind

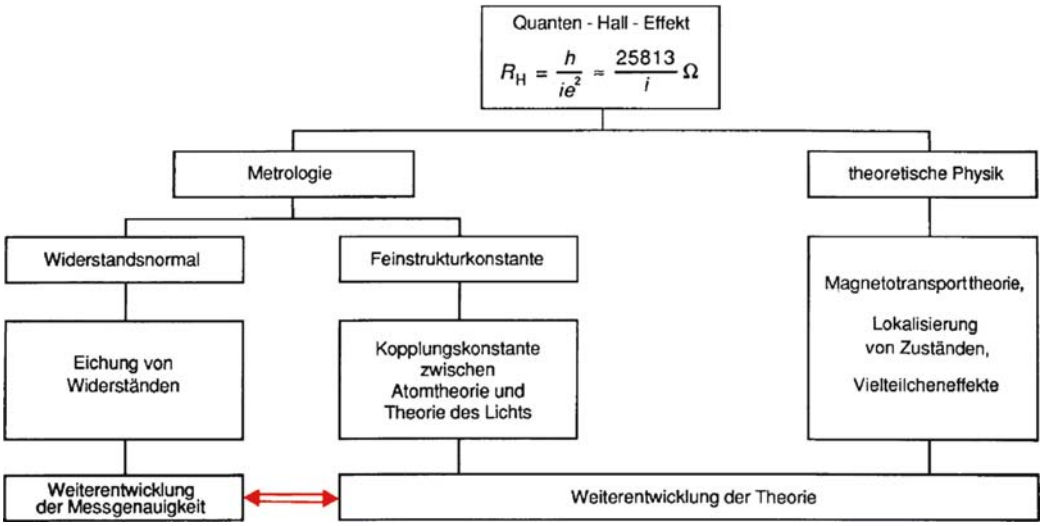


Abb. 8.20 Bedeutung des Quanten-Hall-Effekts

8.2.6 Tunneleffekt

In Abschn. 8.2.2 ist gezeigt, dass Elektronen eine Potentialschwelle V (Abb. 8.9) „überwinden“ können, obwohl klassisch ihre Energie (E_{Elektron}) dafür nicht ausreicht ($E_{\text{Elektron}} < V_0$; *Tunneleffekt*). Der Tunneleffekt ermöglicht, Oberflächen in ihrer atomaren Struktur sichtbar zu machen.

Werden zwei unterschiedliche Metalle nahe genug zusammengebracht (keine Berührung), so ergibt sich das in Abb. 8.21 dargestellte Energiediagramm. Durch den Tunneleffekt können Elektronen vom Metall 1 in das Metall 2 durch die Potentialbarriere durchtunneln. Voraussetzung ist, dass die den Potentialwall durchdringenden Elektronen ein freies (unbesetztes) Energieniveau im Metall 2 antreffen. Deshalb können nur Elektronen aus dem Bereich $E_{\text{F(1)}}$ bis $E_{\text{F(1)}} - eU$ in den Bereich $E_{\text{F(2)}}$ bis $E_{\text{F(2)}} + eU$ durchtunneln. Ohne äußere Beeinflussung würden sich die beiden Fermi-Energieniveaus ausgleichen, sodass kein Elektronenfluss durch die Potentialschwelle stattfindet (Gleichgewichtszustand). Durch Anlegen einer Spannung zwischen den Metallen wird die Differenz der Fermi-Energieniveaus aufrechterhalten. Die Stromdichte j_{Tunnel} des durch die Potentialschwelle fließenden Elektronenstroms (*Tunnelstrom*) kann nach (8.52) berechnet werden:

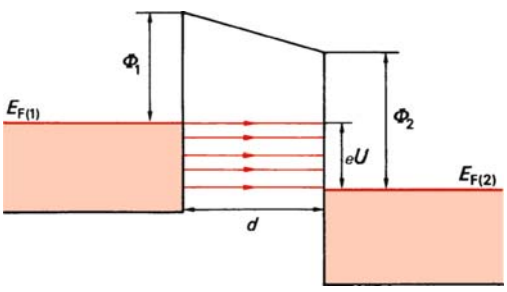


Abb. 8.21 Energiediagramm zweier Metalle mir sehr geringem Abstand d

$$j_{\text{Tunnel}} = \left(\frac{e^2}{\hbar}\right)\frac{\varkappa_0}{\pi^2 d} U\, \mathrm{e}^{-2\varkappa_0 d} \quad (eU \ll \Phi)$$

$$2\varkappa_0 = 10{,}25\sqrt{\Phi(\mathrm{eV})}\,\mathrm{nm}^{-1}\,. \qquad (8.52)$$

Hierin ist d die Dicke der Potentialschwelle in nm, U die angelegte Spannung in V und Φ die

Austrittsarbeit in eV. Es gilt

$$\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2 \,.$$

Josephson Effekt

Brian D. Josephson (geb. 1940) entdeckte 1962 den nach ihm benannten quantenmechanischen Effekt, den *Josephson-Effekt*. Dieser tritt auf, wenn zwei Supraleiter durch eine dünne (wenige nm) Isolierschicht (SIS: Supraleiter – Isolator – Supraleiter) von einander getrennt sind (*SIS-Josephson-Element* nach Abb. 8.22). In einem solchen Josephson-Kontakt können *Cooper-Paare* (Abschn. 9.2.4) über die Isolierschicht von einem Supraleiter zum anderen tunneln; es fließt also ein *Tunnelstrom*. Legt man eine Spannung an eine Josephson-Tunnelstrecke und strahlt gleichzeitig eine elektromagnetische Welle mit Mikrowellenfrequenz (z. B. 70 GHz) ein, dann treten in der Strom-Spannungs-Kennlinie diskrete *Spannungsstufen* U_n (Abb. 8.23 und Abb. 8.24) auf vom Betrag:

$$U_n = n \frac{h}{2e} f \qquad (8.53)$$

Dabei ist $n = 1, 2, 3 \ldots$ die Ordnung der Stufe, h das Planck'sche Wirkungsquantum, e die Elementarladung und f die eingestrahlte Frequenz. Bei einer typischen Mikrowellenfrequenz von 70 GHz beträgt der Abstand der

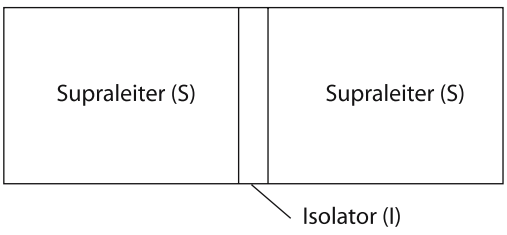


Abb. 8.22 Prinzipieller Aufbau eines SIS-Josephson-Elementes

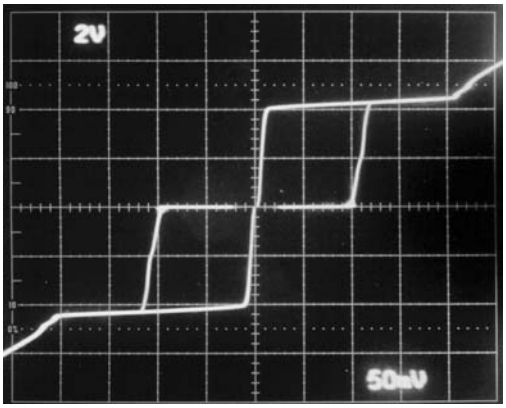


Abb. 8.23 Stromstärke-Spannungs-Kennlinie einer SIS-1V-Schaltung ohne Mikrowelleneinstrahlung

Spannungsstufen etwa 150 µV. Der Faktor $2e/h$ wird als *Josephsonkonstante* K_J bezeichnet. Die Unsicherheiten der Spannungen sind sehr gering ($1{:}10^{10}$, z. B. 1 nV bei 10 V). Die *Josephsonkonstante* K_{J-90} wurde für die Frequenz von 90 GHz weltweit verbindlich festgelegt und beträgt:

$$K_{J-90} = 483\,597{,}9 \text{ GHz/V} \,. \qquad (8.54)$$

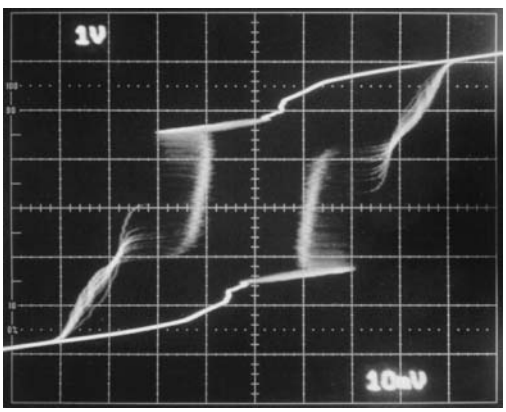


Abb. 8.24 Stromstärke-Spannungs-Kennlinie einer SIS-1V-Schaltung mit Mikrowelleneinstrahlung (70 GHz)

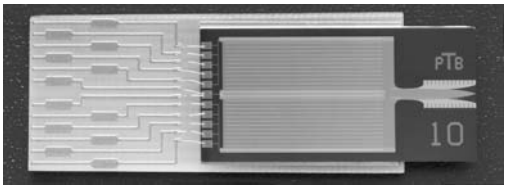


Abb. 8.25 10V-SIS-Josephson-Array

Analog zur *von-Klitzing-Konstanten* (R_K = 25 812,807 Ω) für den *Widerstand* (Abschn. 8.2.5.2) wird die *Josephsonkonstante* als *Spannungsnormal* festgelegt.
Werden viele tausende Josephson-Elemente in Serie geschaltet (*Josephson-Array*), dann sind üblicherweise *Spannungsreferenzen* von −10 V bis +10 V bei einer Toleranz von ±5 nV möglich. Abbildung 8.25 zeigt ein 10 V-SIS-Josephson-Array. Die 14 000 Josephson-Kontakte sind in den Mikrowellenbahnen angeordnet. Zur Messung wird das Array mit Bond-Drähten an einen Probenträger angeschlossen. Abbildung 8.26 zeigt zwei Josephson-Apparaturen der PTB (Physikalisch Technischen Bundesanstalt) in Braunschweig. Eine Apparatur wird zur Reproduzierung der Einheit „Volt" und für Kalibrierungen benutzt. Die zweite Apparatur kann für Forschungszwecke eingesetzt werden. Die Apparaturen haben eine Unsicherheit von besser als 1 nV bei 10 V.



Abb. 8.26 Apparatur zur Reproduzierung der Einheit „Volt". Werkfoto: PTB Braunschweig

8.3 Bahn- und Spinmagnetismus

Ein elektrischer Kreisstrom I erzeugt ein *magnetisches Dipolfeld* (Abschn. 4.4.3). Für das *magnetische Dipolmoment* $\boldsymbol{\mu}$ gilt nach (4.208)

$$\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{A} \tag{8.55}$$

mit $\boldsymbol{A}$ als dem Vektor senkrecht auf der vom Kreisstrom aufgespannten Fläche ($A = |\boldsymbol{A}|$). In einem homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ erfährt der magnetische Dipol nach (4.209) ein Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$. Das Drehmoment ist null, wenn $\boldsymbol{\mu}$ parallel zu $\boldsymbol{B}$ ausgerichtet ist, d. h., wenn der Kreisstrom senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ fließt. Eine Verdrehung des Dipolmoments um den Winkel α gegen $\boldsymbol{B}$ erfordert die Arbeit $W = \int_0^\alpha \mu B \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \mu B(1 - \cos\alpha)$. Damit lässt sich eine (potentielle) magnetische Energie definieren:

$$E_{\mathrm{mag}} = -\mu B \cos\alpha = -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}\,. \tag{8.56}$$

Abbildung 8.27 zeigt die Analogie zwischen *Bahn-*, *Spin-* und *Kernmagnetismus*. Das um den Kern mit der Geschwindigkeit v und dem Radius r kreisende Elektron kann als kreisförmiger elektrischer Strom I betrachtet werden. Die Stromstärke I ergibt sich als Quotient aus der Ladung des Elektrons und der Zeit für einen Umlauf T:

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e}{2\pi}\,\omega\,. \tag{8.57}$$

Für das magnetische Dipolmoment ergibt sich daraus

$$\mu = IA = -\frac{e}{2\pi}\,\omega\,\pi\,r^2 = -\frac{e}{2}\,\omega\,r^2\ . \tag{8.58}$$

Das Minuszeichen gilt für das negativ geladene Elektron, e ist der Betrag der Elementarladung. – Durch Einsetzen des Betrages des Bahndrehimpulses $|\boldsymbol{l}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = mvr = m\omega r^2$ ergibt sich für das magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}_l$ (8.59) in Abb. 8.27. Aufgrund spektroskopischer Daten und der Ergebnisse der Quantentheorie muss dem Elektron unabhängig von seiner Bahnbewegung ein magnetisches Dipolmoment zugeschrieben werden. Analog zum magnetischen Dipolmoment der Bahnbewegung $\boldsymbol{\mu}_l$, das proportional dem Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ ist, kann dieses magnetische Dipolmoment des Elektrons $\boldsymbol{\mu}_s$ proportional zum Eigendrehimpuls (Spin) $\boldsymbol{s}$ angenommen werden ((8.60) in Abb. 8.27). Der Spin des Elektrons ergibt sich aus der Lösung der *relativistischen Schrödinger-Gleichung* (*Dirac-Gleichung*).

Die Quantenmechanik des Bahndrehimpulses ist in Abschn. 8.2.4 (Wasserstoffproblem) beschrieben. Der Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ kann nur diskrete Werte annehmen (Abb. 8.11). Für den Spin (Eigendrehimpuls) des Elektrons gelten analoge Beziehungen wie für den Bahndrehimpuls. Im Gegensatz zur *Bahndrehimpulsquantenzahl* l, die nur ganzzahlig auftritt, kann die *Spinquantenzahl* s des Elektrons nur den Wert 1/2 annehmen. Deshalb sind nur zwei Spineinstellungen bezüglich der z-Richtung möglich (Abb. 8.27).

Aus (8.60) ergibt sich für die erste Bohr'sche Bahn ($|\boldsymbol{l}| = \hbar$) ein magnetisches Moment μ_B (*Bohr'sches Magneton*):

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e}{2m_\mathrm{e}}\hbar = 9{,}2740 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{A\,m^2}\ . \tag{8.63}$$

Es ist zweckmäßig, das magnetische Dipolmoment von Elektronen als Vielfaches (Einheiten) von μ_B anzugeben. – In Abschn. 8.2.4 ist gezeigt, dass der Bahndrehimpuls um die z-Achse *präzediert*. Dies gilt auch für den Spin des Elektrons. Da mit dem Drehimpuls ein magnetisches Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}_l$ bzw. $\boldsymbol{\mu}_s$ verbunden ist, präzediert auch dieses um die z-Achse und ist wie $\boldsymbol{l}$ bzw. $\boldsymbol{s}$ gequantelt. Experimentell kann somit nur die Komponente von $\boldsymbol{\mu}$ in z-Richtung gemessen werden.

Befindet sich das magnetische Dipolmoment in einem Magnetfeld mit der magnetischen Induktion B_z, so ist damit eine Vorzugsrichtung festgelegt. Das magnetische Dipolmoment kann sich zu B_z nur in bestimmten Werten einstellen, die durch $\mu_{l,z}$ bzw. $\mu_{s,z}$ ((8.60) und (8.62) in Abb. 8.27) gegeben sind. Mit (8.56) ergibt sich damit für die Energie des magnetischen Dipolmoments in einem Magnetfeld der magnetischen Induktion B_z

$$E_\mathrm{mag} = -\mu_z B_z = \begin{cases} m_l \mu_\mathrm{B}\, B_z \\ 2{,}0023\, m_s \mu_\mathrm{B} B_z \end{cases}\ . \tag{8.65}$$

Es sind somit nur *diskrete Energiezustände* möglich. Das Verhältnis von magnetischem Dipolmoment μ und dem entsprechenden Drehimpuls l bzw. s wird als *gyromagnetisches Verhältnis* γ bezeichnet und kann makroskopisch gemessen werden. Zwischen magnetischem Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}_l$ bzw. $\boldsymbol{\mu}_s$ und dem Drehimpuls $\boldsymbol{l}$ bzw. $\boldsymbol{s}$ tritt ein Proportionalitätsfaktor (*g-Faktor*) auf. Dieser g-Faktor ist mit dem gyromagnetischen Verhältnis verknüpft (Abb. 8.27). Er beträgt für den Bahnmagnetismus $g_l = 1$ und für den Spinmagnetismus $g_s = 2{,}0023$ (Ermittlung durch quantenmechanische Berechnung).

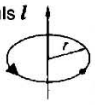
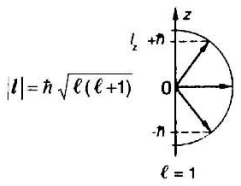
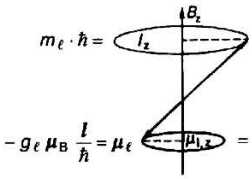
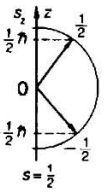
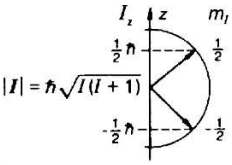
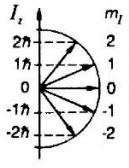
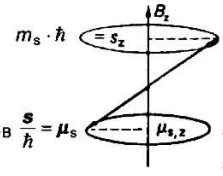
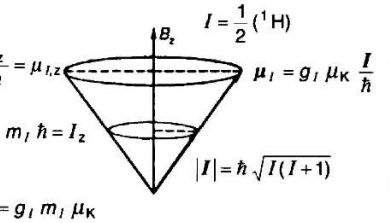
	Bahnmagnetismus
Modellvorstellung	Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$  r Bahnradius Elektron mit der Ladung e
Quantenmechanik des Drehimpulses	 $\lvert\boldsymbol{l}\rvert = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ m_ℓ: 1, 0, −1 ($\ell = 1$); ($2\ell + 1$) Werte $l_z = m_\ell \hbar$ $(l_z)_{max} = \ell\hbar$ $m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\ell$ ℓ Bahndrehimpuls-quantenzahl m_ℓ magnetische Quantenzahl (des Bahndrehimpulses) Nur solche Einstellungen von $\boldsymbol{l}$ sind erlaubt, für die die Projektion in z-Richtung ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ beträgt.
magnetisches Moment μ $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_{oe}}$ Bohr'sches Magneton m_{oe} Ruhemasse des Elektrons	$\boldsymbol{\mu}_\ell = -g_\ell \frac{e}{2m_{oe}} \boldsymbol{l}; \quad g_\ell = 1$ $\boldsymbol{l}$ Bahndrehimpuls g_ℓ g-Faktor $\lvert\boldsymbol{\mu}_\ell\rvert = -g_\ell \frac{e}{2m_{oe}} \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)};$ $\boxed{\lvert\boldsymbol{\mu}_\ell\rvert = -g_\ell \mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)}}$ (8.59)
magnetisches Moment im Magnetfeld B_z	 $m_\ell \cdot \hbar = l_z$; $\lvert\boldsymbol{l}\rvert = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ $-g_\ell \mu_B \frac{\boldsymbol{l}}{\hbar} = \boldsymbol{\mu}_\ell$; $\mu_{l,z}$; $= -g_\ell \mu_B \frac{l_z}{\hbar} = -m_\ell \mu_B$ (mit $g_\ell = 1$) (8.61)
gyromagnetisches Verhältnis γ	$\gamma_\ell = \frac{\lvert\boldsymbol{\mu}_\ell\rvert}{\lvert\boldsymbol{l}\rvert}$ $\frac{\lvert\boldsymbol{\mu}_\ell\rvert}{\lvert\boldsymbol{l}\rvert} = \frac{1}{2}\frac{e}{m_{oe}}; \quad \gamma_\ell = g_\ell \frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{\mu_B}{\hbar}$ (mit $g_\ell = 1$)
Insgesamt	$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$ $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\ell + \boldsymbol{\mu}_s$

Abb. 8.27 Bahn- und Spinmagnetismus des Elektrons; Kernmagnetismus durch Protonen und Neutronen

Spinmagnetismus	Kernmagnetismus
Elektron dreht sich um seine eigene Achse Elektron  Eigendrehimpuls Spindrehimpuls (kurz Spin)	Atomkern dreht sich um seine eigene Achse Atomkern  Eigendrehimpuls Spindrehimpuls (kurz Kernspin)
 $\lvert\boldsymbol{s}\rvert = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ $\lvert\boldsymbol{s}\rvert = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}}$ m_s $(2s+1)$ Werte $s_z = m_s\,\hbar$ $(s_z)_{max} = s\hbar$ $m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ m_s magnetische Quantenzahl (des Spins) s Spinquantenzahl $\boldsymbol{s}$ kann sich nicht parallel zur z-Richtung einstellen und präzediert wie $\boldsymbol{l}$ um die z-Achse.	 $\lvert\boldsymbol{I}\rvert = \hbar\sqrt{I(I+1)}$ m_I $(2I+1)$ Werte $I_z = m_I\,\hbar$ $I_{z\,max} = I\hbar$  $I_p = I_\mu = \frac{1}{2}$ $m_I = -I, -I+1, \ldots +I$ $I = 2$ I Kernspinquantenzahl I kann ganz- und halbzahlige Werte annehmen. m_I magnetische Quantenzahl des Kernspins $\boldsymbol{I}_p = \boldsymbol{l}_p + \boldsymbol{s}_p$; $\boldsymbol{I}_\mu = \boldsymbol{l}_\mu + \boldsymbol{s}_\mu$
$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m_{oe}}\boldsymbol{s}$; $g_s = 2{,}0023$ $\boldsymbol{s}$ Eigendrehimpuls, g_s g-Faktor $\lvert\boldsymbol{\mu}_s\rvert = -g_s \frac{e}{2m_{oe}}\hbar\sqrt{s(s+1)}$; $\boxed{\lvert\boldsymbol{\mu}_s\rvert = -g_s\,\mu_B\sqrt{s(s+1)}}$ (8.60)	$\boldsymbol{\mu}_I = -g_I \frac{e}{2m_{op}}\boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{I}$ Eigendrehimpuls g_I g-Faktor $g_{l,p} = 1$; $g_{l,\mu} = 0$ $g_{I,\mu} = -3{,}83$ $g_{s,p}(^1P) = +5{,}58$ $\lvert\boldsymbol{\mu}_I\rvert = g_I \frac{e}{2m_{op}}\hbar\sqrt{I(I+1)}$; $\lvert\boldsymbol{\mu}_I\rvert = g_I\,\mu_K\sqrt{I(I+1)}$ $\mu_K = \frac{\mu_B}{1836} = \frac{e\hbar}{2m_{op}}$ (Kernmagneton) m_{op} Ruhemasse des Protons
 $m_s \cdot \hbar = s_z$ $\lvert\boldsymbol{s}\rvert = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}}$ $-g_s\,\mu_B\frac{\boldsymbol{s}}{\hbar} = \boldsymbol{\mu}_s$ $\mu_{s,z} = -g_s \cdot \mu_B \cdot \frac{s_z}{\hbar}$ $= -g_s\,m_s\,\mu_B$ $\mu_{s,z} = \pm\frac{1}{2}g_s\,\mu_B$ (8.62)	 $I = \frac{1}{2}$ (^{1}H) $g_I\,\mu_K\frac{I_z}{\hbar} = \mu_{I,z}$ $\mu_I = g_I\,\mu_K\frac{\boldsymbol{I}}{\hbar}$ $m_I\,\hbar = I_z$ $\lvert\boldsymbol{I}\rvert = \hbar\sqrt{I(I+1)}$ $\mu_{I,z} = g_I\,m_I\,\mu_K$
$\gamma_s = \frac{\lvert\boldsymbol{\mu}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert}$ $\gamma_s = 1{,}00116\frac{e}{m_{oe}} = g_s\frac{\mu_B}{\hbar} = 2{,}0023\frac{\mu_B}{\hbar}$	$\gamma_I = \frac{\lvert\boldsymbol{\mu}_I\rvert}{\lvert\boldsymbol{I}\rvert} = \frac{g_I\,\mu_K\sqrt{I(I+1)}}{\hbar\sqrt{I(I+1)}}$ $\gamma_I = g_I\frac{\mu_K}{\hbar} = g_I\frac{e}{2m_{op}}$ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}_p + \boldsymbol{j}_n$ $\boldsymbol{\mu}_I = \boldsymbol{\mu}_p + \boldsymbol{\mu}_n = (\boldsymbol{\mu}_{ep} + \boldsymbol{\mu}_{sp}) + \boldsymbol{\mu}_{sn}$

8.3.1 Zeeman- und Stark-Effekt

Aus Abb. 8.27 geht hervor, dass sich in einem äußeren Magnetfeld B_0 in z-Richtung das magnetische Dipolmoment des Spins $\boldsymbol{\mu}_s$ bzw. das magnetische Dipolmoment der Bahn $\boldsymbol{\mu}_l$ nur diskret einstellen kann: $\mu_{s,z} = -g_s m_s \mu_\mathrm{B}$ bzw. $\mu_{l,z} = -g_l m_l \mu_\mathrm{B}$. ($m$ ist die magnetische Quantenzahl.) Für ein Mehrelektronensystem addieren sich die Drehimpulse $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{s}$ zu einem Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$. Da die magnetischen Dipolmomente mit den entsprechenden Drehimpulsen gekoppelt sind, addieren sich die magnetischen Dipolmomente zu einem Gesamtdipolmoment $\boldsymbol{\mu}_J$. Die Komponente von $\boldsymbol{\mu}_J$ in z-Richtung ($\mu_{J,z}$) kann die Werte $m_J\,\hbar\,(m_J = J, J-1, \ldots, -J)$ annehmen. Die Energie des magnetischen Dipols in einem Magnetfeld B_0 in z-Richtung ergibt sich nach (8.56) zu $E_\mathrm{mag} = -\mu_{J,z} B_0$. Für den Energieunterschied ΔE zweier Zustände ($\Delta m_J = 1$) gilt

$$\Delta E_{m_J, m_{J-1}} = g_J \mu_\mathrm{B} B_0 \,. \tag{8.66}$$

Die Aufspaltung von Energiezuständen im Magnetfeld wird als *Zeeman-Effekt* bezeichnet (P. Zeeman, 1865 bis 1943). Die *Auswahlregel* für optische Übergänge lautet $\Delta m_J = 0, \pm 1$. Übergänge mit $\Delta m_J = 0$ heißen π-*Übergänge*, die mit $\Delta m_J = \pm 1$ heißen σ-*Übergänge*. Die σ- und π-Strahlung ist unterschiedlich polarisiert. Wird das Atom in ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ gebracht, so wird ein elektrisches Dipolmoment $\boldsymbol{p}$ induziert, das proportional zu $\boldsymbol{E}$ ist ($\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}$) (Abschn. 4.3.7). α wird als *Polarisierbarkeit* bezeichnet. Die Energie E_el eines elektrischen Dipols $\boldsymbol{p}$ im elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ beträgt $E_\mathrm{el} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\alpha \boldsymbol{E}^2$. Die Größe des induzierten elektrischen Dipolmoments hängt von der Elektronenverteilung (gegeben durch *n, l, m*) ab. Dadurch erfahren die Atomorbitale im elektrischen Feld unterschiedliche Energieänderungen, die zu einer Aufspaltung der Spektrallinien führen. (*Stark-Effekt*; J. Stark, 1874 bis 1957).

8.3.2 Elektronen- und Kernspinresonanz

In Abb. 8.27 ist dem Bahn- und Spinmagnetismus der Elektronen Kernmagnetismus gegenübergestellt. Der Atomkern hat einen Eigendrehimpuls $\boldsymbol{I}$, der gequantelt ist und deshalb nur diskrete Werte annehmen kann. Die Kernspinquantenzahl I hat je nach Atomkern halb- oder ganzzahlige Werte zwischen 0 und 15/2. Das magnetische Moment des Kerns $\boldsymbol{\mu}_I$ ist über den g_I-Faktor mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{I}$ verknüpft. Analog dem Bohr'schen Magneton (μ_B) der Elektronenhülle führt man das *Kernmagneton* $\mu_\mathrm{K} = \mu_\mathrm{B}/1\,836 = e\hbar/(2m_\mathrm{p})$ ein. Je nach Kern ist der g_I-Faktor größer oder kleiner als null und somit das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}_I$ parallel oder antiparallel dem Eigendrehimpuls $\boldsymbol{I}$. Abbildung 8.28 zeigt die Niveauaufspaltung für ein Elektron und ein Proton in einem äußeren Magnetfeld B_0. Wird senkrecht zum B_0-Feld ein Wechselfeld $B_\perp$ mit der Resonanzfrequenz $f = g_s \mu_\mathrm{B} B_0/h$ bzw. $f = g_l \mu_\mathrm{K} B_0/h$ eingestrahlt, so wird ein Übergang zwischen den Niveaus erfolgen (*Umklappen* des magnetischen Moments). Je nach Feldstärke B_0 sind hierfür bei der Elektronenspinresonanz Mikrowellen (GHz), bei der Protonenkernspinresonanz Radiowellen (60 MHz bis 300 MHz) erforderlich.

Abbildung 8.29 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer *Spinresonanzanordnung*. Zwischen den Polschuhen des Magneten (B_0 muss homogen und sehr konstant sein) befindet sich die Probe (fest oder flüssig). Der Frequenzgenerator erzeugt die erforderliche Resonanzfrequenz. Zur Aufnahme eines Resonanzspektrums wird entweder die Frequenz oder das Magnetfeld variiert. Abbildung 8.30

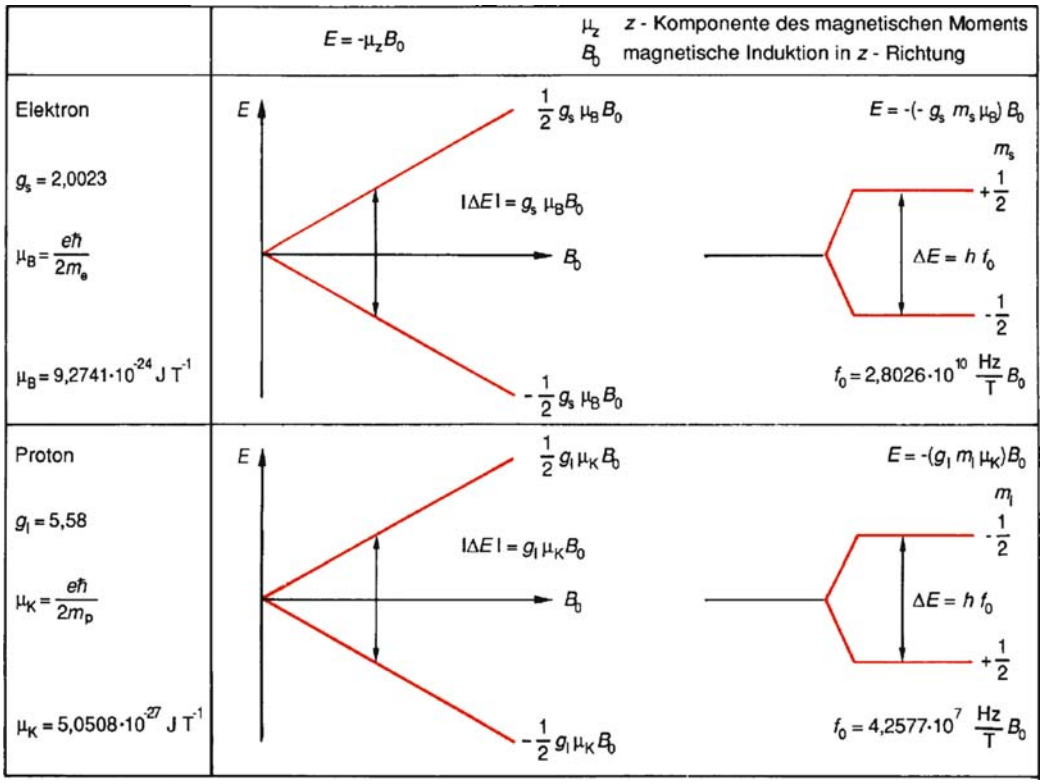


Abb. 8.28 Energieaufspaltung von Elektronen und Protonen im Magnetfeld

zeigt das Protonenresonanzspektrum einer Probe mit Ethanol $CH_3{-}CH_2{-}OH$, Methylenchlorid CH_2Cl_2 und Chloroform $CHCl_3$. Es ist zu erkennen, dass die Lage der Resonanzsignale von der chemischen Umgebung des Protons abhängig ist (Abschirmungseffekte u. a.). Ferner können benachbarte Protonen miteinander wechselwirken, sodass es zu einer typischen Signalaufspaltung kommt (Wechselwirkung von CH_3-Protonen und CH_2-Protonen). Für die Strukturaufklärung organischer Verbindungen ist die Kernspinresonanz-Spektroskopie ein wichtiges Hilfsmittel.

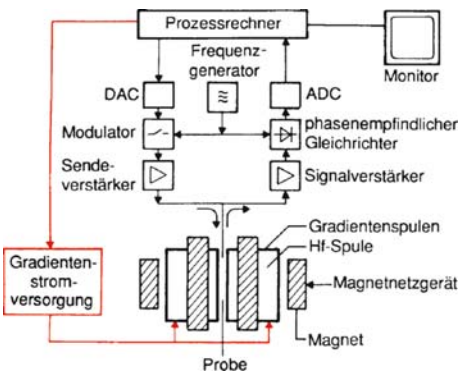


Abb. 8.29 Aufbau eines Resonanzspektrometers (schematisch). Werkbild: Siemens

Die Protonenresonanz wird in abgewandelter Form in der Medizin eingesetzt (*Kernspintomografie*). Dabei befindet sich der Patient in einem homogenen Magnetfeld, das durch ein Gradientenfeld überlagert wird (Abb. 8.29, rote Linien). Dieser Feldgradient ermöglicht eine Zuordnung des Resonanzsignals zum Entstehungsort. Abbildung 8.31 zeigt das Schnittbild eines Kopfes, aufgenommen mit einem Kernspintomografen.

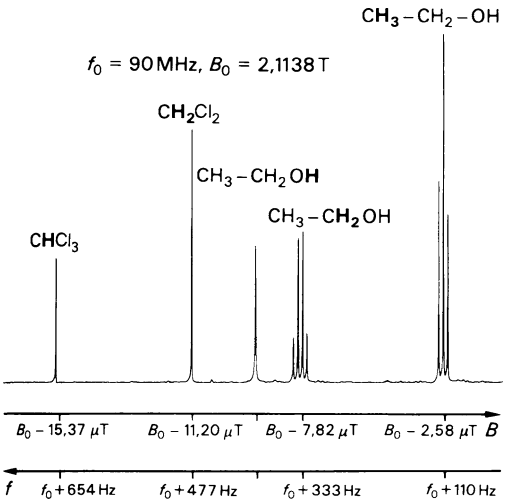


Abb. 8.30 Protonenresonanzspektrum von Chloroform ($CHCl_3$), Methylenchlorid (CH_2Cl_2) und Ethanol (CH_3CH_2OH)

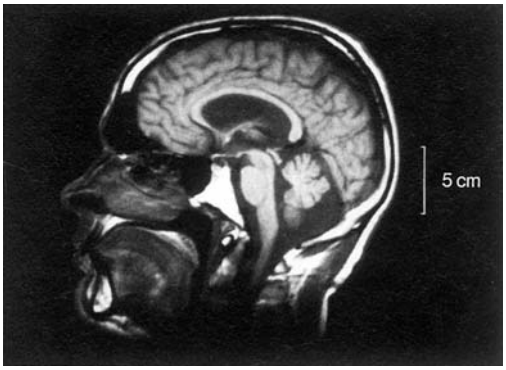


Abb. 8.31 Kernspintomogramm eines menschlichen Schädels. Werkfoto: Siemens

8.4 Systematik des Atombaus

8.4.1 Periodensystem der Elemente

Das *Periodensystem der Elemente* wurde gleichzeitig von J. L. Meyer (1830 bis 1895) und D. Mendelejew (1834 bis 1907) aufgestellt. Sie ordneten die Elemente nach den Atommassen und Elemente gleicher chemischer Eigenschaften untereinander an. Die Anordnung der Elemente erfolgt im Periodensystem in 7 *waagrechten Perioden* und 18 *senkrechten Gruppen*. Die erste Periode enthält nur zwei Elemente (Wasserstoff und Helium). Die zweite und dritte Periode enthalten jeweils acht Elemente, die vierte und fünfte 18 Elemente. Zur Aufrechterhaltung der chemischen Verwandtschaft der Elemente innerhalb einer Gruppe müssen den Perioden sechs und sieben nach Lanthan und Actinium jeweils 14 weitere Elemente eingeordnet werden (Lanthanoiden, Actinoiden).

Die chemische Verwandschaft innerhalb einer Gruppe und das periodische Auftreten bestimmter chemischer Eigenschaften zeigen sich beispielsweise durch das *Säure-Base-Verhalten*. In dem diesem Buch beigefügten Periodensystem (Faltblatt im Anhang) ist basisches Verhalten mit blauer und saures Verhalten mit roter Farbe gekennzeichnet. Innerhalb einer Periode wechselt die Farbe von dunkelblau über hellblau, hellrot nach dunkelrot, während innerhalb einer Gruppe nur graduelle Unterschiede auftreten. Das periodische Verhalten zeigt sich besonders in der ersten Ionisierungsenergie. Dies ist die zur Loslösung des äußersten Elektrons (Valenzelektrons) vom Atom erforderliche Energie. Für die Elemente der ersten Gruppe (Alkalimetalle Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium, Cäsium) ist diese Energie gering, verglichen mit der 18. Gruppe der Edelgase (Helium, Neon, Argon, Krypton, Xenon, Radon). In dem vorliegenden Periodensystem sind zu jedem Element noch weitere physikalische und chemische Daten angegeben.

Die Position des Elements im Periodensystem wird durch die *Ordnungszahl Z* beschrieben. Sie entspricht der Anzahl der Elektronen in der Elektronenhülle bzw. der Kernladungszahl (Anzahl der positiven Ladungen im Atomkern). Da die chemischen und physikalischen Eigenschaften der Elemente durch die Elektro-

nen bestimmt werden (z. B. Ionisierungspotential, Wertigkeit), muss sich die Periodizität in der Elektronenanordnung der Elektronenhülle widerspiegeln.

8.4.2 Aufbau der Elektronenhülle

In Abschn. 8.2.4 ist die quantenmechanische Lösung für das Wasserstoffatom beschrieben. Für Mehrelektronensysteme kann die Lösung der Schrödinger-Gleichung nur noch näherungsweise erfolgen. Die Lösung für das Wasserstoffproblem ergibt für das Elektron drei Quantenzahlen:

- *Hauptquantenzahl n,*
- *Bahndrehimpulsquantenzahl* $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$
- *magnetische Quantenzahl* $m_l = 0, 1, 2, \ldots, l.$

Zu diesen Quantenzahlen muss die *magnetische Quantenzahl des Elektronenspins* hinzugefügt werden: $m_s = \pm 1/2$.
Beim Mehrelektronensystem wird durch die zusätzliche elektrostatische Wechselwirkung zwischen den Elektronen die Entartung der Energiezustände (Abschn. 8.2.4) bezüglich des Bahndrehimpulses $\boldsymbol{l}$ aufgehoben. Es ergibt sich das in Abb. 8.32 dargestellte *Energiediagramm*. Dieses gilt nur, wenn die Zustände mit Elektronen besetzt sind. Die Auffüllung der Energiezustände mit Elektronen erfolgt nach

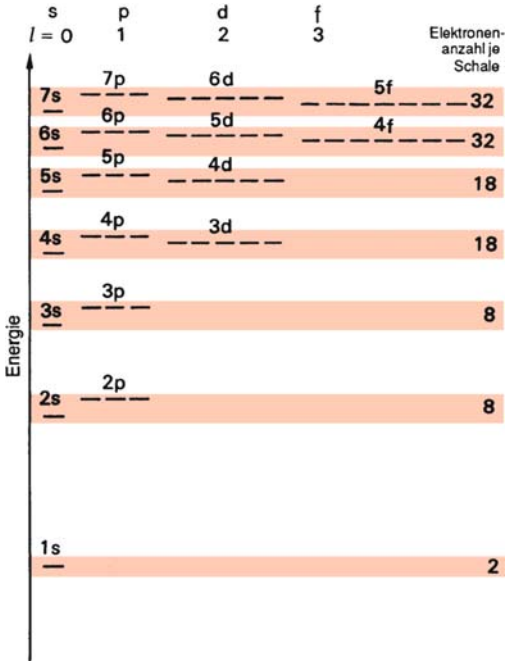


Abb. 8.32 Energiediagramm der besetzten Atomorbitale

Tabelle 8.2 Elektronenkonfiguration

n	l	m_l	m_s	Bezeichnung	Elektronen Anzahl	
1	0	0	$\pm 1/2$	$1\,s^2$	2	**2**
2	0	0	$\pm 1/2$	$2\,s^2$	2	
	1	1, 0, −1	$\pm 1/2$	$2\,p^6$	6	**8**
3	0	0	$\pm 1/2$	$3\,s^2$	2	
	1	1, 0, −1	$\pm 1/2$	$3\,p^6$	6	**18**
	2	2, 1, 0, −1, −2	$\pm 1/2$	$3\,d^{10}$	10	
4	0	0	$\pm 1/2$	$4\,s^2$	2	
	1	1, 0, −1	$\pm 1/2$	$4\,p^6$	6	**32**
	2	2, 1, 0, −1, −2	$\pm 1/2$	$4\,d^{10}$	10	
	3	3, 2, 1, 0, −1, −2, −3	$\pm 1/2$	$4\,f^{14}$	14	

dem *Pauli-Prinzip*, das besagt, dass in einem Atom keine Elektronen in allen vier Quantenzahlen (n, l, m_l, m_s) übereinstimmen dürfen.
Aus dem Energiediagramm Abb. 8.32 folgt, dass sich nach Abschluss von Zuständen mit gleichem n, l (Teilschalen) besonders stabile Elektronenanordnungen ergeben. Für abgeschlossene Teilschalen addieren sich die Bahndrehimpulse $\boldsymbol{l}_i$ zu $L = \sum_i \boldsymbol{l}_i = 0$ bzw. die Spins $\boldsymbol{s}_i$ zu $\boldsymbol{S} = \sum_i \boldsymbol{s}_i = 0$ und diese abgschlossenen Schalen haben damit auch kein magnetisches Dipolmoment.
Die Elektronenanordnung (Elektronenkonfiguration) im Atom wird durch die Symbolik

$$(\text{Hauptquantenzahl})(\text{Bahndrehimpuls})^{(\text{Anzahl der Elektronen})}$$

vorgenommen. In Tabelle 8.2 ist die maximale Anzahl der Elektronen zur Hauptquantenzahl n mit der Kurzschreibweise zusammengestellt. Da die Entartung im Wasserstoffatom n^2 ist, können $2n^2$ Elektronen mit der Hauptquantenzahl n im Atom auftreten.
Zur Vereinfachung kürzt man die Elektronenkonfiguration des jeweils letzten Edelgases ab (beispielsweise [Ar]) und gibt nur die äußersten Elektronen an.

8.5 Röntgenstrahlung

In Abschn. 8.3 sind die Energiezustände der äußeren Elektronen (*Valenzelektronen*) und deren Aufspaltung beschrieben. Der folgende Abschnitt hat die Energiezustände der inneren Elektronen zum Inhalt.

8.5.1 Bremsstrahlung und charakteristische Strahlung

Die *Röntgenstrahlung* (Strahlungsenergie im Bereich keV) wird in vielen technischen und medizinischen Bereichen eingesetzt, z. B. im *Röntgentomograf* und bei Materialuntersuchungen. Abbildung 8.33 zeigt den schematischen Aufbau einer Röntgenröhre. Elektronen werden aus einer beheizten Kathode emittiert und durch Anlegen einer Spannung U_0 von etwa 20 kV bis 250 kV auf die Anode (*Antikathode*) beschleunigt. Die in das Material eindringenden Elektronen werden durch das elektrische Feld der positiv geladenen Atomkerne abgelenkt und abgebremst. Dieser Vorgang ist in Abb. 8.34 veranschaulicht. Die Abbremsung des Elektrons ist eine negative Beschleunigung der Ladung, die nach der Elektrodynamik zur Aussendung elektromagnetischer Strahlung führt. Die so erzeugte Strahlung bezeichnet man als *Röntgenbremsstrahlung*. Das Spektrum der Bremsstrahlung ist ein kontinuierliches Spektrum, da es sich um freie Elektronen handelt, deren Energie nicht gequantelt ist (Abschn. 8.2). Die kurzwellige Grenze des *Bremsstrahlspektrums* ergibt sich aus der vollständigen Abbremsung des Elektrons mit der Energie $e\ U_0$ in einem Vorgang ($\lambda_0 = h\ c/(e\ U_0)$).
Die auf das Antikathodenmaterial auftreffenden Elektronen können Elektronen aus den inneren Schalen entfernen, sodass eine Ionisation des Atoms stattfindet. In Tabelle 8.3 sind die *Ionisierungsenergien* für das Elektron der

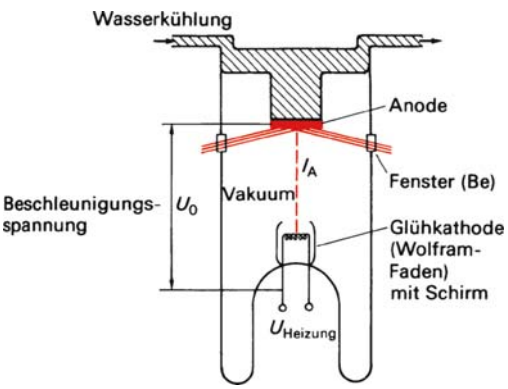


Abb. 8.33 Aufbau einer Röntgenröhre (schematisch)

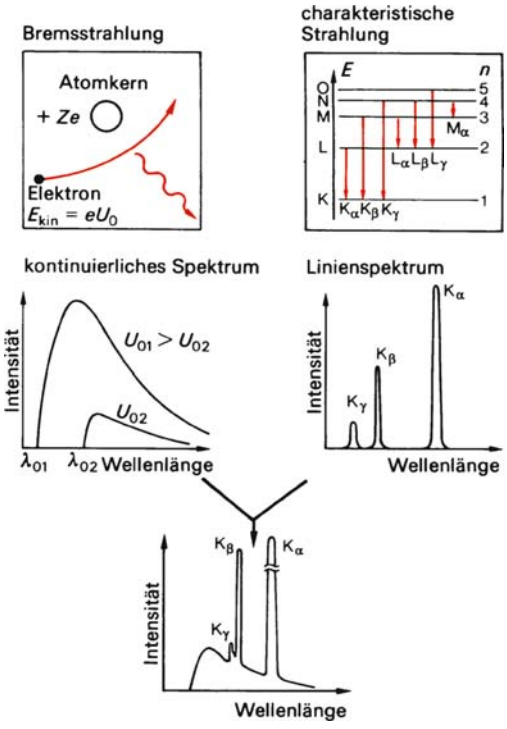


Abb. 8.34 Entstehung des Röntgenspektrums einer Röntgenröhre

K- und L-Schale E_K und E_L für einige Elemente angegeben.

Elektronenübergänge aus den höheren Schalen füllen die entstandene Elektronenlücke unter Aussendung *charakteristischer Röntgenstrahlung* (Linienspektrum, Abb. 8.34) auf. Die Bezeichnung der Strahlung erfolgt durch zwei Größen. Die erste gibt die *Schalenbezeichnung* des Endzustands des Elektrons an (K, L, M, …), die zweite als Index ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$) die *Schalenherkunft* des Elektrons. Das Auftreten des charakteristischen Röntgenspektrums ist abhängig von der Beschleunigungsspannung U_0 der Elektronen und dem Antikathodenmaterial. Bei geringen Elektronenenergien eU_0 reicht die Energie nur zur Ionisation beispielsweise der L-Schale aus. Es können somit nur die *L-Linien* (L-Serie) entstehen. Bei größerer Elektronenenergie ist eine Ionisation der K-Schale möglich. Es entstehen die *K-Linien* (K-Serie). Das kontinuierliche Bremsstrahlspektrum wird vom diskreten Linienspektrum des Antikathodenmaterials überlagert.

Tabelle 8.3 Ionisierungsenergien innerer Elektronen

Element	Ordnungszahl	E_K in keV	$E_{L_{III}}$ in keV
Aluminium	13	1,560	0,073
Kupfer	29	8,979	0,931
Silber	47	25,514	3,351
Wolfram	74	69,525	10,207
Gold	79	80,725	11,919

8.5.2 Absorption von Röntgenstrahlung, Computertomographie

Die Schwächung von Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie der Dicke x erfolgt durch Ionisation (*Fotoeffekt*) und *Streuprozesse* (Abschn. 8.10) und wird mathematisch beschrieben durch

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\mu x} \, . \tag{8.67}$$

Hierin ist I die Strahlungsintensität nach dem Materiedurchgang, I_0 diejenige vor dem Materiedurchgang und μ der *Schwächungskoeffizient*. Dieser setzt sich aus dem *Streuanteil* μ_{streu} und *Absorptionsanteil* μ_{abs} zusammen. Für μ_{abs} gilt

$$\mu_{abs} \sim \frac{Z^k}{E^3} \, ; \qquad 3 < k < 4 \, . \tag{8.68}$$

Der Absorptionskoeffizient nimmt mit zunehmender Energie E der Strahlung ab. Bei bestimmten Energien treten große Sprünge im Absorptionskoeffizienten auf, wie Abb. 8.35

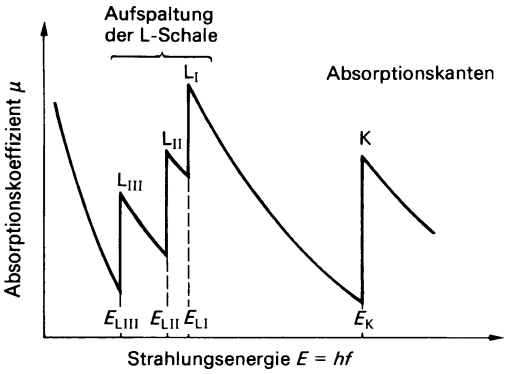


Abb. 8.35 Absorption in Abhängigkeit von der Energie der Röntgenstrahlung

zeigt. Die Energie dieser *Absorptionskanten* entspricht der Ionisationsenergie des zugehörigen Elektrons.

Eine wichtige Anwendung der Absorption von Röntgenstrahlung ist die *Röntgendiagnostik* in der Medizin. Der Körper wird mit Röntgenstrahlung bestrahlt und der nicht absorbierte Strahlungsanteil ermittelt (Röntgenfilm). Bereiche großer Schwärzung stellen Körperteile mit geringem Absorptionskoeffizienten (z. B. Gewebe), Bereiche geringer Schwärzung Körperteile mit großem Absorptionskoeffizienten (z. B. Knochen) dar. Da die verschiedenen Absorptionskoeffizienten der entsprechenden Bereiche gemäß Abb. 8.36 entlang der Durchstrahlrichtung aufsummiert werden, handelt es sich um ein *integrales Abbildungsverfahren*.

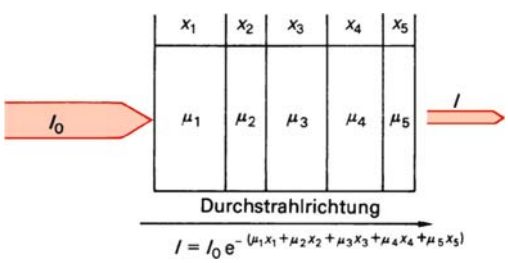


Abb. 8.36 Schwächung der Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie unterschiedlicher Zusammensetzung

Eine entscheidende Verbesserung der Abbildung gelingt durch die *Röntgencomputertomografie*. Hiermit ist es möglich, entlang der Durchstrahlrichtung Strukturen (Bereiche unterschiedlicher Absorptionskoeffizienten) aufzulösen. Man erhält somit *Schnittbilder* des Körpers. Das Prinzip der Computertomografie zeigt Abb. 8.37 am Beispiel einer aus neun gleich großen Bereichen bestehenden Probe.

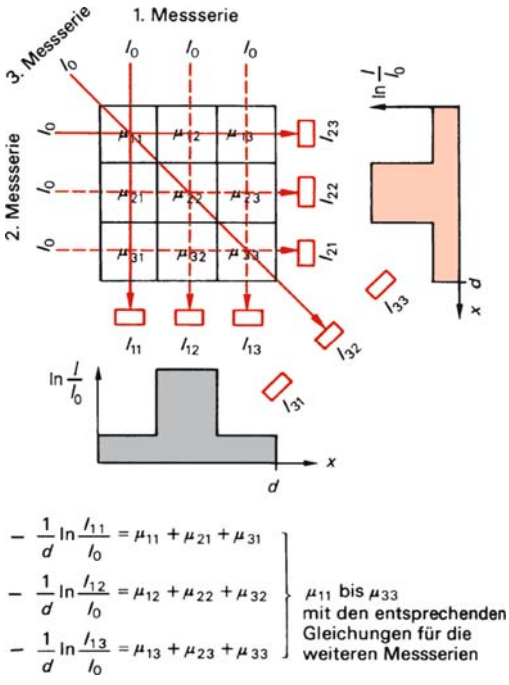


Abb. 8.37 Prinzip der Computertomografie

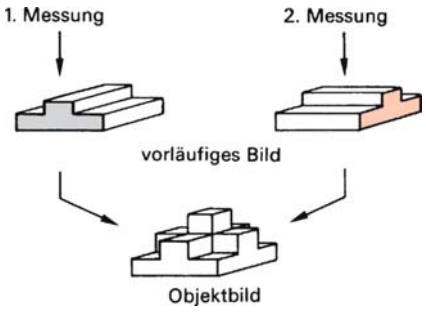


Abb. 8.38 Kombination der vorläufigen Bilder zum Objektbild

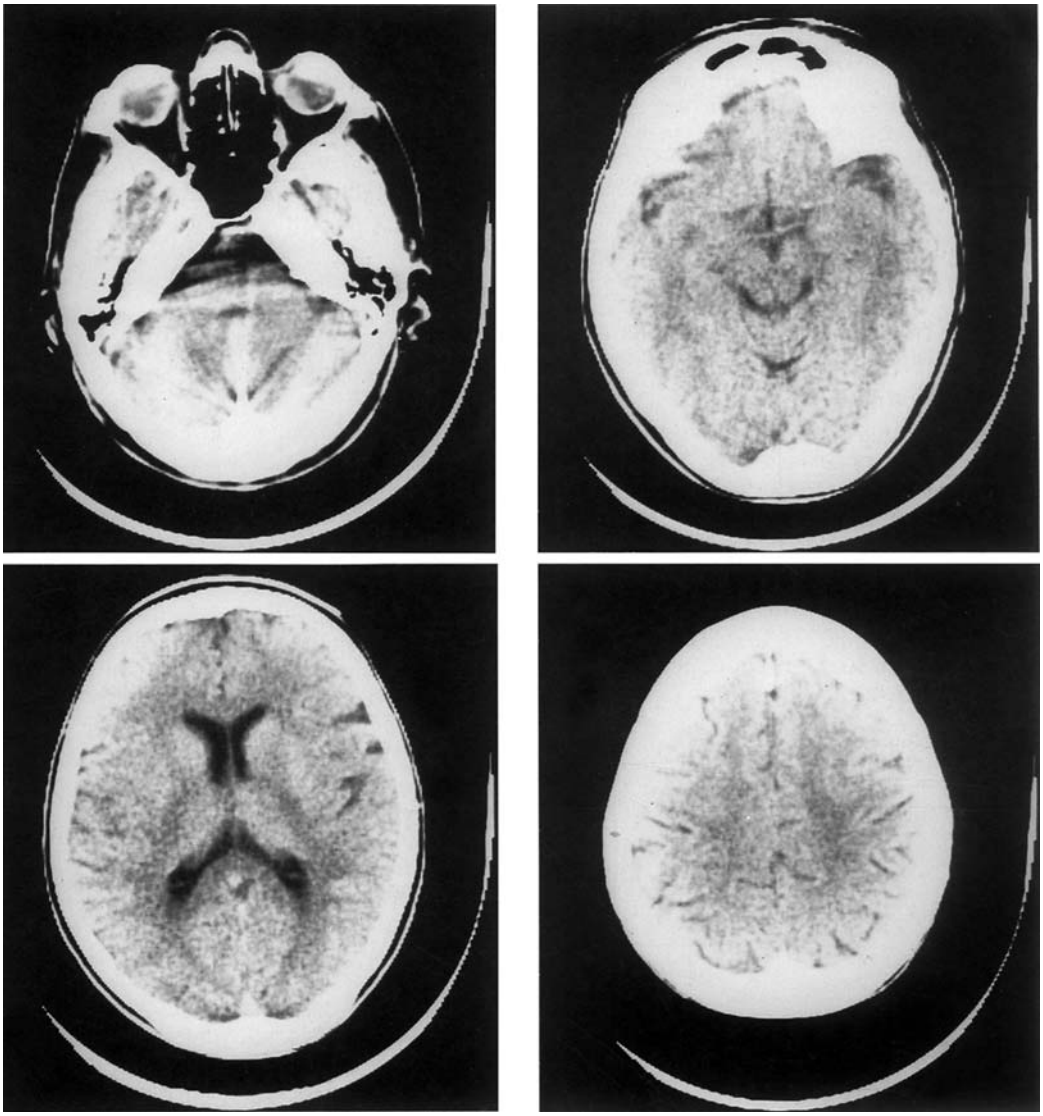


Abb. 8.39 Schnittbilder eines Kopfes, aufgenommen mit einem Röntgencomputertomografen. (Ostalbklinikum Aalen)

Das mittlere Feld soll sich durch einen verhältnismäßig großen Absorptionskoeffizienten (μ_{22}) von der Umgebung unterscheiden. In drei Messserien wird die Probe durchstrahlt und die Intensität I ermittelt. Aus den so erhaltenen neun Gleichungen können μ_{11} bis μ_{33} berechnet werden. Wird dem Absorptionskoeffizienten ein Grauwert oder eine Farbe zugeordnet, so entsteht eine Abbildung des inneren Aufbaus der Probe, also z. B. eines Körperteils. Will man Einzelheiten in der Größenordnung Millimeter auflösen, so muss das 3×3-Raster auf 200×200 erweitert werden. Dies erfordert die Lösung eines Gleichungssystems mit $200 \times 200 = 40\,000$ Unbekannten. Hierfür ist eine sehr lange Rechenzeit erforder-

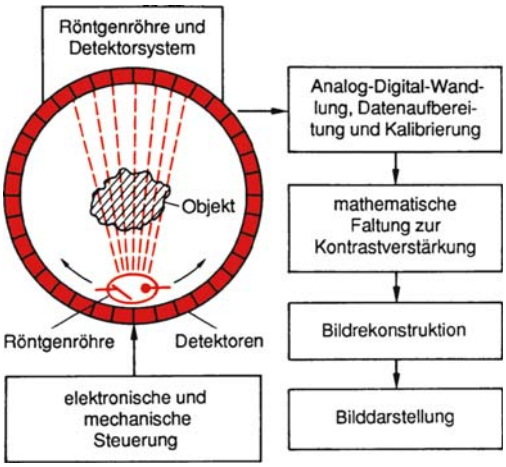


Abb. 8.40 Aufbau eines Computertomografen (schematisch)

lich. Um aus den Messergebnissen trotzdem ein Bild des Körperinneren zu gewinnen, wird entlang der Durchstrahlrichtung ein konstanter mittlerer integraler Absorptionskoeffizient angenommen. Dies führt zu den in Abb. 8.38 dargestellten vorläufigen Bildern, deren Überlagerung (Aufsummierung) ein ungefähres Bild des Probeninnern ergibt. Bei dieser Bildrekonstruktion findet eine Verschmierung des mittleren Teils statt. Dies kann durch eine *Kontrastverstärkung* (hervorgerufen durch die mathematische Operation der *Faltung* an der Messkurve) verbessert werden. In Abb. 8.39 sind Aufnahmen eines Kopfes bei unterschiedlichen Schnittstellen dargestellt. Abbildung 8.40 zeigt schematisch den Aufbau eines Computertomografen. Hierbei wird lediglich die Röntgenröhre bewegt, während die Detektoren in einem Kreis fest angeordnet sind. Die Bestrahlungszeit beträgt nur einige Sekunden.

8.6 Molekülspektren

Atome kommen in den seltensten Fällen isoliert vor. Sie gehen chemische Bindungen ein. Außer der *ionischen* und *metallischen* Bindung, die die Wechselwirkung vieler Atome beinhaltet, gibt es noch die *kovalente Bindung* zwischen zwei Atomen zu einem Molekül, z. B. N_2, HCl, CO (Abschn. 9.1).

8.6.1 Potentialkurve

Wird der Abstand r zwischen zwei Atomen A und B (z. B. Wasserstoff und Chlor) immer mehr verringert, dann tritt eine Kraftwirkung $F_{AB}(r)$ zwischen ihnen auf. Diese kann abstoßend oder anziehend wirken und somit zu einer Energieerhöhung bzw. Energieabsenkung von AB führen. (Das Potential $V(r) = \int_{\infty}^{r} F(r')\,dr'$ nimmt mit r zu oder ab.) Die Ursache der Potentialänderung besteht in der Wechselwirkung der nicht vollständig besetzten Atomorbitale von A und B miteinander (*Coulomb-Wechselwirkung*). Dabei bilden sich *Molekülorbitale* aus. Sie entsprechen analog zu den Atomorbitalen den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektronen. Erstrecken sie sich über beide Atomkerne A und B, so führt dies zu einer Anziehung (*bindendes Molekülorbital*). Ist das Molekülorbital lediglich auf ein Atom A bzw. B beschränkt, so findet keine Bindung statt (*nichtbindendes Molekülorbital*). Für das einfachste Molekül H_2^+ ist dies in Abb. 8.41 mit den entsprechenden Potentialkurven veranschaulicht.

Findet eine chemische Bindung zwischen A und B statt, so zeigt die Potentialkurve beim Gleichgewichtsabstand r_e ein Minimum. Eine weitere Annäherung der Atomkerne führt zu einer schnell anwachsenden abstoßenden Coulomb-Kraft. In Abb. 8.41 ist rot das harmonische Potential ($V(r) \sim (r - r_e)^2$) und die dazu gehörige, von r linear abhängige Kraft eingezeichnet. Das harmonische Potential ist für die Umgebung des Gleichgewichtsabstandes r_e eine gute Näherung.

Das klassische Modell eines zweiatomigen Moleküls kann durch zwei Massen m_A und m_B

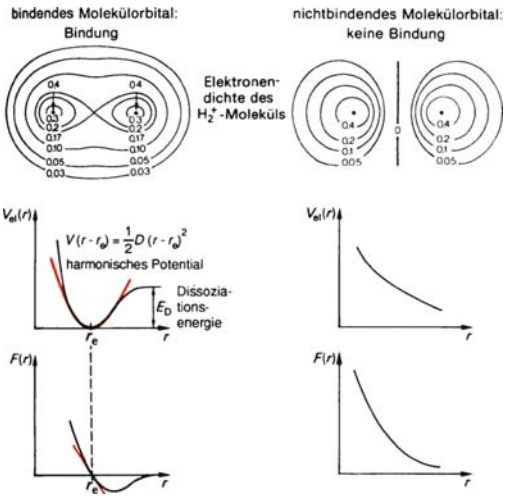


Abb. 8.41 Potentialkurve eines bindenden und nichtbindenden Molekülorbitals

beschrieben werden, die im Abstand r_e durch eine Feder verbunden sind. Eine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage r_e führt zu einer rücktreibenden Kraft, sodass die beiden Kerne gegeneinander schwingen können. Die zur Auslenkung erforderliche Energie wirkt als Potential $V(r)$ für die Schwingung des Moleküls um die Gleichgewichtslage r_e. Ein n-atomiges Molekül hat folgende voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten (f: Anzahl der *Freiheitsgrade*):

- *Schwingung der Kerne gegeneinander* (Schwerpunkt des Moleküls bewegt sich nicht)

$$f_{\text{Schw}} = \begin{cases} 3n-5 \text{ lineares Molekül} \\ 3n-6 \text{ nichtlineares Molekül} \end{cases}$$

- *Rotation um den Schwerpunkt*

$$f_{\text{rot}} = \begin{cases} 2 \text{ lineares Molekül} \\ 3 \text{ nichtlineares Molekül} \end{cases}$$

- *Translation des Schwerpunktes*

$$f_{\text{trans}} = 3\,.$$

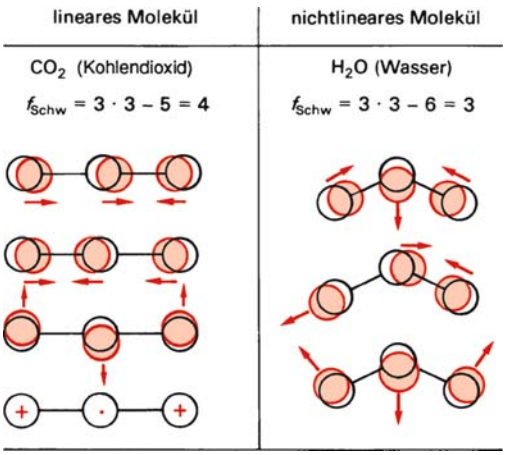


Abb. 8.42 Schwingungen eines dreiatomigen Moleküls

Abbildung 8.42 zeigt die Schwingungsmöglichkeiten eines dreiatomigen Moleküls. – In einem Molekül können wie beim Atom Elektronen in ein energetisch höheres Orbital angeregt werden. Dies führt zu einer Erhöhung der Potentialkurve um die Anregungsenergie E_{Anreg}. Infolge der veränderten Elektronenverteilung und der damit verbundenen Änderung der Coulomb-Wechselwirkungsenergie kann eine elektronische Anregung des Mo-

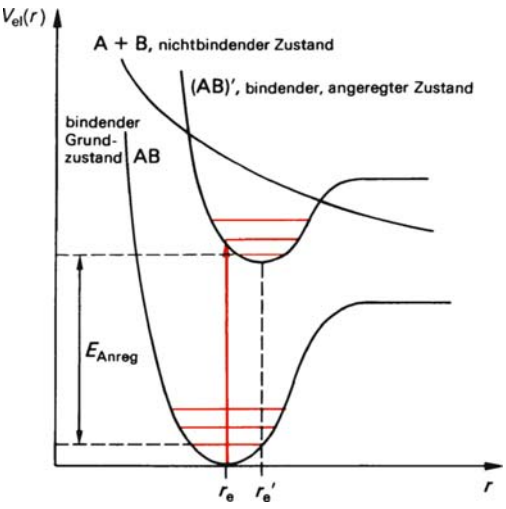


Abb. 8.43 Verschiebung der Potentialkurve bei Molekülanregung

leküls zu einer Verschiebung des Gleichgewichtsabstands r_e im angeregten Zustand führen, wie Abb. 8.43 verdeutlicht. Eine Anregung in einen nichtbindenden Zustand führt zur Dissoziation des Moleküls.

8.6.2 Rotations-Schwingungs-Spektrum

Die Schwingungs- und Rotationszustände sind *gequantelt*, d. h., das Molekül kann nicht mit jeder Frequenz schwingen bzw. jeder Kreisfrequenz rotieren.
Zur Berechnung der Energiewerte E_{Schw} (*Eigenwerte*) und der zugehörigen Wellenfunktionen der Schwingungszustände $\psi_{\text{Schw}}(r - r_e)$ muss die Schrödinger-Gleichung gelöst werden:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{el}}(r - r_e)\right) \psi_{\text{Schw}}(r - r_e) = E_{\text{Schw}}\, \psi_{\text{Schw}}(r - r_e)\,. \tag{8.69}$$

Als Potentialverlauf $V_{\text{el}}(r)$ muss die in Abb. 8.41 für den bindenden Zustand angegebene Funktion eingesetzt werden. Für nicht zu große Auslenkungen aus der Ruhelage kann dieses Potential durch das harmonische Potential $V(r - r_e) = \frac{1}{2}D(r - r_e)^2$ ersetzt werden. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für dieses Potential ist in Abb. 8.9 angegeben (Abschn. 8.2.2).
In Abb. 8.44 sind die Energieniveaus $E_{\text{Schw}} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + v)$ mit den Energien und den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $|\psi_{\text{Schw}}(r - r_e)|^2$

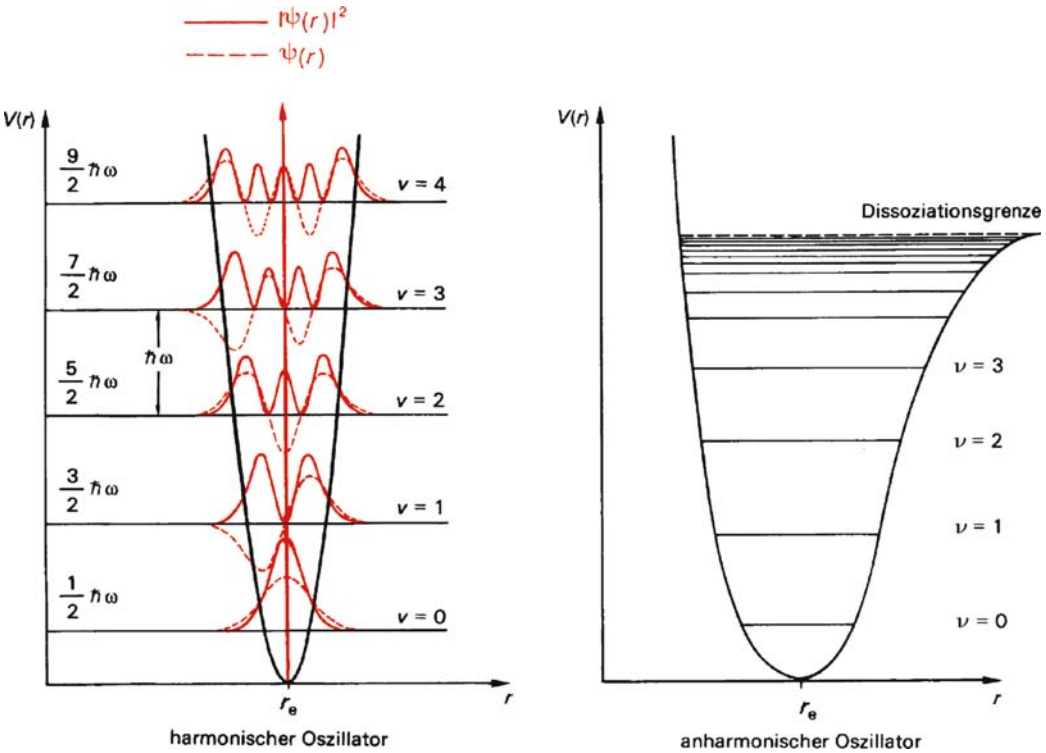


Abb. 8.44 Harmonischer Oszillator mit den Wellenfunktionen $\psi(r)$ und den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $|\psi(r)|^2$ im Vergleich zum anharmonischen Oszillator

eingezeichnet. (v ist die Schwingungsquantenzahl.) Die Wahrscheinlichkeit, die Atomkerne in einem Abstand zwischen $(r - r_e)$ und $(r - r_e + dr)$ anzutreffen ($|\psi_{Schw}(r - r_e)|^2\, dr$), ist für die angeregten Zustände am Parabelrand am größten. Lediglich im Grundzustand ($v = 0$) mit der Nullpunktsenergie $\frac{1}{2}(\hbar\,\omega)$ liegt das Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Mitte der Parabel. Durch Absorption oder Emission eines Photons der Energie $\hbar\,\omega$ findet ein Übergang zwischen benachbarten Energiezuständen statt (*Grundschwingung*). Ändert sich die Schwingungsquantenzahl v um $\pm 2, \pm 3, \ldots$, so treten im Spektrum *Oberschwingungen* bei $2\,\hbar\,\omega$, $3\hbar\,\omega$, ... auf.
Für große Schwingungsamplituden gilt die Näherung durch das harmonische Potential nicht mehr. Die Energiezustände rücken bis zur Dissoziation des Moleküls immer dichter zusammen (Abb. 8.44). Gleichzeitig verschiebt sich der Gleichgewichtsabstand r_e zu größeren Werten (*Unsymmetrie des Potentials*).
Zur Berechnung der Energiewerte E_{rot} (Eigenwerte) und der zugehörigen Wellenfunktionen der Rotationszustände $\psi_{rot}(\vartheta, \varphi)$ benötigt man die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\hat{l}^2}{2J}\psi_{rot}(\vartheta,\varphi) = E_{rot}\psi_{rot}(\vartheta,\varphi)\,. \qquad (8.70)$$

Dabei ist der Abstand r_e zwischen den Atomen A und B konstant ($V(r) = \text{konst} = 0$, starrer Rotator). Die Rotationsenergie ist durch $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = l^2/(2J)$ gegeben ($J = m_{red}r_e^2$, reduzierte Masse m_{red}, Drehimpuls $l = J\omega$). Die Lösung dieser Schrödinger-Gleichung ist in Abb. 8.11 angegeben. Sie besteht aus den *Drehimpuls-Eigenfunktionen* $\psi_{rot} = F_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ mit den Eigenwerten des Drehimpulsquadrats. Für die Eigenwerte des starren Rotators ergibt sich damit

$$E_{rot}(l) = \frac{\hbar^2}{2J}(l+1)\,l \qquad (8.71)$$

mit l als Rotationsquantenzahl.
Der Abstand zwischen zwei benachbarten Energieniveaus beträgt

$$E_{rot}(l+1) - E_{rot}(l) = \frac{\hbar^2}{J}(l+1) \qquad (8.72)$$

und nimmt mit l stark zu. Das Quadrat der Eigenfunktionen des Drehimpulses einer rotierenden Hantel $|F_{l,m}(\vartheta, \varphi)|^2$ ist in Abb. 8.45 als Polardiagramm für einige Quantenzahlen l dargestellt (Abschn. 8.2.4). Der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$

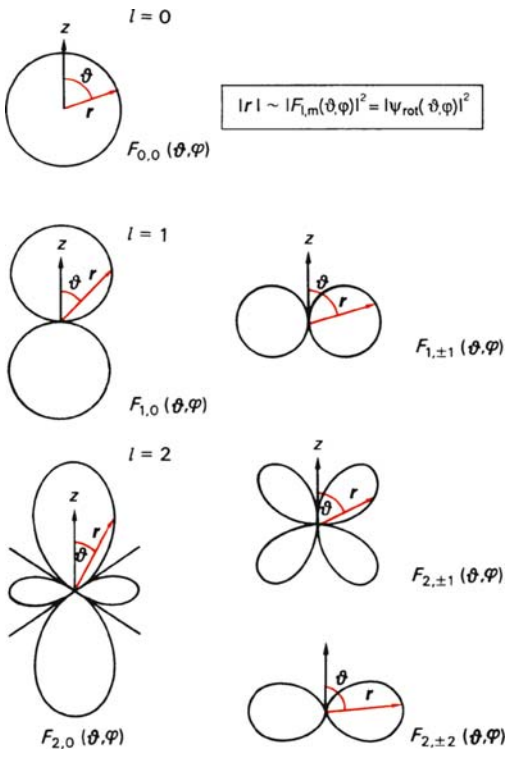


Abb. 8.45 Polardiagramm zur Verdeutlichung der Lage der Molekülachse bei der Rotation

in ϑ-Richtung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Molekülachse in dieser Richtung liegt. Mit zunehmender Rotationsenergie werden die Fliehkräfte größer und führen zu einer Vergrößerung des Abstands und damit des Trägheitsmoments J (unstarrer Rotator). Dies führt zu einer Absenkung der Rotationsenergie (8.71).

Wird ein Molekül, beispielsweise HCl, mit Infrarotstrahlung bestrahlt, so finden Schwingungs- und Rotationsübergänge gleichzeitig statt (*Rotationsschwingungsspektrum*). Abbildung 8.46 zeigt die beiden Schwingungsniveaus $v = 0$ und $v' = 1$ mit den zu jedem Schwingungszustand gehörenden Rotationszuständen l bzw. l'. Mit den *Auswahlregeln* $\Delta v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und $\Delta l = \pm 1$ ergeben sich zwei Zweige im Absorptionsspektrum, ein *R-Zweig* mit $\Delta l = +1$ und ein *P-Zweig* mit $\Delta l = -1$. Der Übergang mit $\Delta l = 0$ ist in einem zweiatomigen Molekül nicht erlaubt und erscheint als Lücke im Spektrum. Bei mehratomigen Molekülen gelten die Auswahlregeln nicht in voller Strenge, und der Übergang mit $\Delta l = 0$ tritt auf.

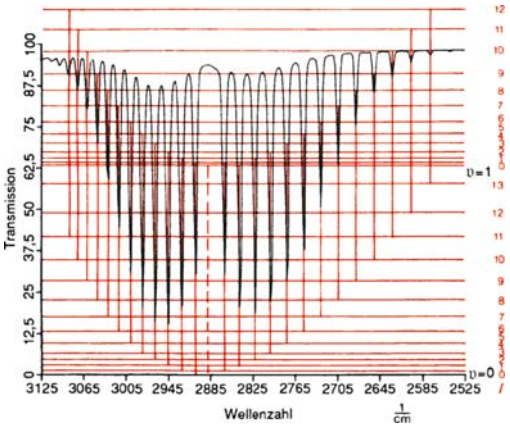


Abb. 8.46 Infrarot-Gasspektrum von Chlorwasserstoff (HCl) mit den entsprechenden Übergängen im Energieniveauschema (Nicolet 5DX FT-IR-Spektrometer)

Die Stärke der Absorption hängt von der Anzahl der Moleküle ab, die sich im Energiezustand (v, l) befinden. Ist dieser Energiezustand von vielen Molekülen besetzt, so kann mehr Strahlung absorbiert werden, als wenn sich nur wenige Moleküle in diesem Zustand befinden. Die Besetzung der Zustände wird durch die Temperatur T bestimmt und durch die Boltzmann-Verteilung beschrieben (Abschn. 3.2.3).

Die Rotationsstruktur im Absorptionsspektrum tritt nur bei Gasen unter geringem Druck auf. Bei Druckerhöhung finden zunehmend mehr Stöße zwischen den Molekülen statt, die eine Linienverbreiterung zur Folge haben (*Druckverbreiterung*). Bei Flüssigkeiten ist die Rotation sehr stark behindert. Infolgedessen beobachtet man keine einzelnen Rotationslinien mehr, sondern eine verhältnismäßig breite unstrukturierte Absorptionsbande. Im festen Zustand ist die Rotationsbewegung nahezu völlig unterdrückt, sodass die Absorptionsbanden schmaler werden.

Abbildung 8.47 zeigt das *Infrarot-Absorptionsspektrum* einer Kunststofffolie aus Polystyrol. Ein solches Infrarotspektrum zeigt deutliche Absorptionen bei bestimmten Wellenzahlen

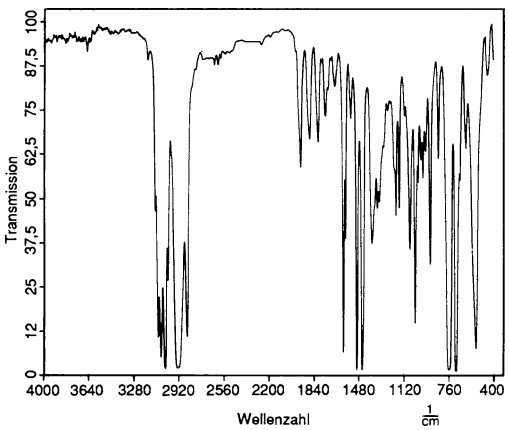


Abb. 8.47 Infrarotspektrum einer Polystyrolfolie (Nicolet 5DX FT-IR-Spektrometer)

(Energien), denen bestimmte Schwingungen im Molekül zugeordnet werden können. So weisen beispielsweise die Absorptionslinien zwischen 3 000 und 3 100 cm^{-1} auf einen Aromaten (Benzolring) hin. Anhand eines solchen Spektrums können Kunststoffe identifiziert oder Motorenöle auf Verunreinigungen untersucht werden.

8.6.3 Raman-Effekt

In einem Molekül können nur solche Schwingungen elektromagnetische Strahlung absorbieren, bei denen sich während der Schwingung das Dipolmoment ändert. In einem *unpolaren Molekül*, beispielsweise im N_2- oder O_2-Molekül, ändert sich bei der Schwingung der Atome kein Dipolmoment und es findet somit auch keine Strahlungsabsorption statt (*IR-inaktiv*). Die in Abschn. 8.6.2 genannten *Auswahlregeln* ($\Delta\nu = 0, \pm 1, \ldots, \Delta l = \pm 1$) gelten nur für Dipolstrahlung.

Durch Messung des gestreuten Lichts (Raman-Effekt; C. V. Raman, 1888 bis 1970) können auch die nicht IR-aktiven Schwingungen bestimmt werden. Die feste oder flüssige Probe wird mit intensivem monochromatischen Licht (z. B. He-Ne-Laser, Kr-Laser) bestrahlt. Die eingestrahlte Energie $\hbar\,\omega_L$ (ω_L ist die Laserkreisfrequenz) darf von der Substanz nicht absorbiert werden. Man misst die von der Probe gestreute Strahlung. Infolge der intensiven Bestrahlung wird ein Elektron auf ein *virtuelles Niveau* (kein Eigenzustand des Moleküls) angeregt und geht sofort wieder in einen Energiezustand des Moleküls über. Dabei sind die in Abb. 8.48 dargestellten Fälle möglich:

- *Rayleigh-Streuung:* Das Molekül geht in seinen Ausgangszustand zurück ($\omega = \omega_L$);
- *Raman-Streuung:* Das Molekül geht in einen angeregten Zustand über ($\omega < \omega_L$, *Stokes-Übergang*); das Molekül geht in einen abgeregten Zustand über ($\omega > \omega_L$, *Antistokes-Übergang*).

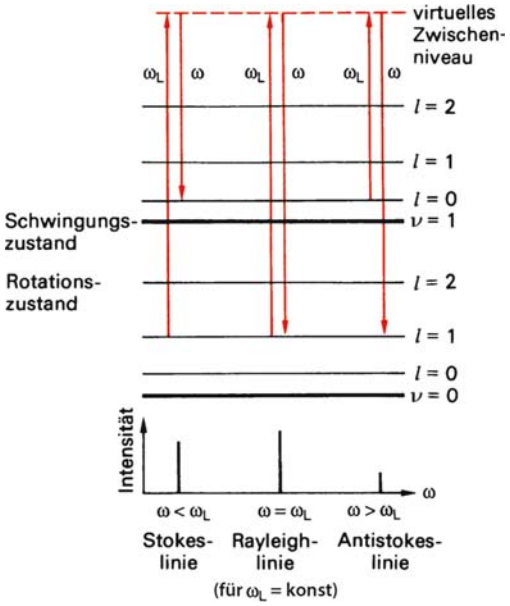


Abb. 8.48 Quantenmechanische Darstellung des Raman-Effekts

Damit ist der Streustrahlung mit der Grundfrequenz ω_L das Schwingungs- und Rotationsspektrum überlagert. Durch die Anregung über den virtuellen Zustand gelten nicht die Auswahlregeln für Dipolstrahlung.

8.7 Aufbau der Atomkerne

8.7.1 Größe und Ladungsverteilung

Die ersten Erkenntnisse über einen Atomkern ergaben Untersuchungen über die Streuung von α-Teilchen (Heliumkerne) an dünnen Metallfolien durch E. Rutherford (1871 bis 1937) im Jahr 1911. In Abb. 8.49 ist die Rutherford-Streuung anderen elastischen Streuprozessen gegenübergestellt. Die quantitative Beschreibung von Streuprozessen erfolgt durch den *differentiellen Wirkungs-*

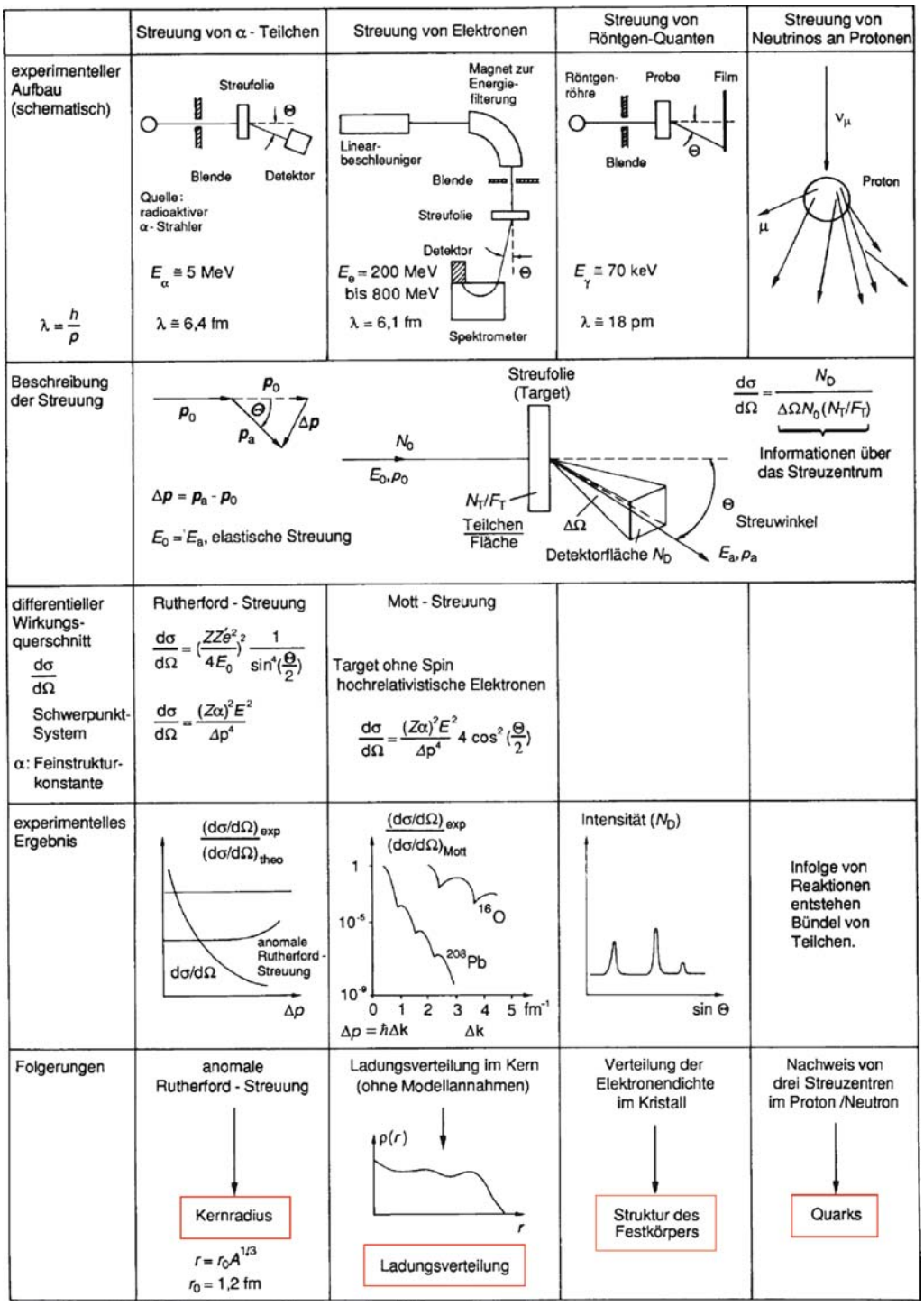


Abb. 8.49 Streuung von α-Teilchen, Elektronen, Röntgen-Quanten und Neutrinos

querschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$. Dieser gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein auf das Streuobjekt auftreffendes Teilchen (Quant) unter dem Winkel Θ in den Raumwinkel $\Delta\Omega$ gestreut wird. Die theoretische Beschreibung der Ergebnisse der Rutherford-Streuung an unterschiedlichen Streumaterialien kann mit folgenden Voraussetzungen durchgeführt werden:

- Das Atom besteht aus einem Kern, der fast die gesamte Masse des Atoms vereinigt. Die Wechselwirkung der α-Teilchen mit den Elektronen führt zu keiner merklichen Winkelablenkung.
- Der Kern hat eine positive Ladung der Größe $Z\,e$. (Z ist die Ordnungszahl.)
- Der positiv geladene Atomkern erzeugt ein elektrisches Feld (Coulombfeld einer Punktladung mit der Feldstärke $\boldsymbol{E} = (1/4\pi\,\varepsilon_0)(Z\,e/r^3)\boldsymbol{r}$.
- In der Streufolie soll keine Mehrfachstreuung der α-Teilchen auftreten.

Der Abstand b (*Stoßparameter*), mit dem das α-Teilchen am punktförmigen Streuzentrum (Kern) vorbeifliegt, ist durch

$$b = \frac{ZZ'e^2}{2E}\cot\left(\frac{1}{2}\Theta\right) \tag{8.73}$$

gegeben mit E als der Energie und Z' als der Ladung des Teilchens.
Bei einem konstanten Streuwinkel Θ muss ein α-Teilchen mit höherer Energie näher am Streuzentrum vorbeifliegen als ein α-Teilchen mit geringerer Energie. Das Auftreten von Abweichungen (*anomale Rutherford-Streuung*), beispielsweise bei Aluminium unterhalb $b \approx 6 \cdot 10^{-15}$ m (6 fm), weist auf eine kurzreichweitige anziehende Kraft hin (*Kernkraft*). Somit hat ein positiv geladenes Teilchen den in Abb. 8.50 dargestellten Potentialverlauf, bestehend aus dem Coulomb-Potential und dem

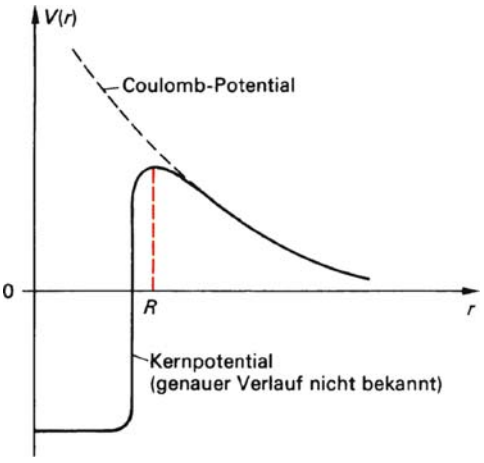


Abb. 8.50 Potentialverlauf

Kernpotential. Als *Kernradius* R kann man den Abstand definieren, bei dem sich beide Kräfte etwa das Gleichgewicht halten. Als Ergebnis einer Großzahl von Messungen ergibt sich für den so definierten Kernradius

$$R = R_0 A^{1/3}\,. \qquad (R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}) \tag{8.74}$$

mit der Massenzahl $A = N + Z$. Für die Dichte der Kernmaterie gilt (Kern als Kugel angenommen)

$$\varrho_{\mathrm{Kern}} = \frac{Am_{\mathrm{u}}}{\frac{4\pi}{3}(R_0A^{1/3})^3} \approx 2 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = \text{konstant}\,. \tag{8.75}$$

Mit Teilchenstrahlen, deren Wellenlänge größer als das zu untersuchende Objekt ist, können keine Informationen über die innere Struktur des Kerns, beispielsweise über die Ladungsverteilung, erhalten werden. Hierfür müssen Teilchen- oder Quantenstrahlen mit einer Wellenlänge, die kleiner als der Atomkernradius ist, verwendet werden.

Zur Untersuchung der Ladungsverteilung im Kern werden hochenergetische Elektronen ($E \approx 300\,\text{MeV}$) auf die Streufolie (*Target*) geschossen und wie bei der Rutherford-Streuung (Abb. 8.49) wird der Anteil elastisch gestreuter Elektronen in Abhängigkeit vom Winkel vermessen. Der experimentelle Aufwand ist um ein Vielfaches größer als bei der Rutherford-Streuung. Ein Spektrometer ist erforderlich, um elastisch gestreute Elektronen von inelastisch gestreuten zu trennen. Berechnet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Coulomb-Streuung von hochenergetischen und damit hochrelativistischen Elektronen ($E \gg m_{0e}c^2$) an einer punktförmigen Ladung $Z\,e$, so unterscheidet sich der Wert von der Rutherford-Streuung durch den Faktor $4\cos^2(\Theta/2)$. Dieser Faktor rührt vom *inneren Drehimpuls* (Eigendrehimpuls, Spin) des Elektrons her, der mit einem magnetischen Moment verbunden ist (Abschn. 8.3). Aus der Sicht des Elektrons bedeutet das vorbeifliegende geladene Streuzentrum einen Strom mit einem Magnetfeld, mit dem das magnetische Moment des Elektrons in Wechselwirkung tritt.

Das experimentelle Ergebnis (Abb. 8.49) zeigt eine Art *Interferenzstruktur*. Es ist prinzipiell vergleichbar mit der elastischen Streuung von Röntgen-Quanten an einem Kristall, bei der ebenfalls Interferenzen auftreten. Sie sind bedingt durch die Struktur der Elektronenverteilung im Festkörper. Das Streuzentrum ist für die hochenergetischen Elektronen nicht mehr punktförmig, sondern stellt eine Ladungsverteilung $\varrho(r)$ dar, wobei an unterschiedlichen Stellen der Ladungsverteilung gestreute Wellen interferieren.

In erster Näherung kann die Ladungsverteilung durch eine Fermi-Verteilung gemäß Abb. 8.51 beschrieben werden. Die modellunabhängig ermittelten Ladungsverteilungen zeigen keine Gesetzmäßigkeiten mit der Massenzahl. Die auftretenden Oszillationen in der Ladungsverteilung sind darauf zurückzuführen, dass der Kern aus einzelnen Teilchen aufgebaut ist, und das streuende Elektron den Impulsunterschied $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{p}_0$ nur an ein Proton überträgt, von dem es auf den gesamten Kern übertragen wird. Eine geringe Erhöhung der Ladungsverteilung vor dem Abfall der Ladungsdichte wird durch die Coulomb-Abstoßung der Protonen verursacht, die dadurch stärker an den Rand des Kerns gedrückt werden.

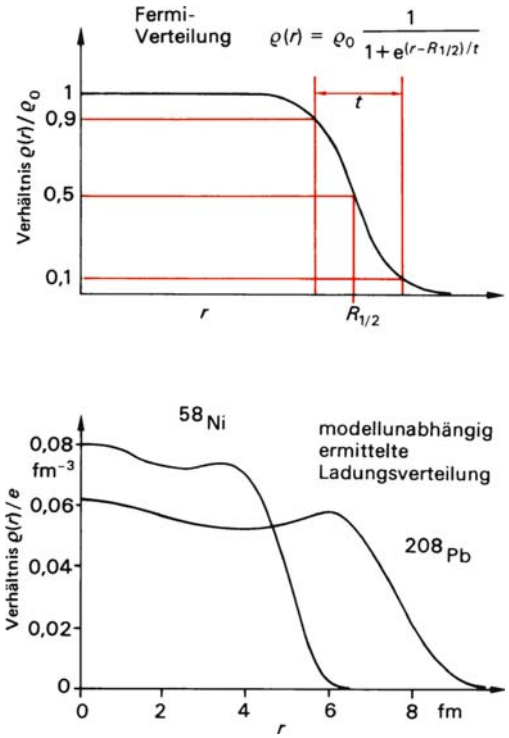


Abb. 8.51 Ladungsverteilung im Atomkern

8.7.2 Kernmodelle

Nach der Entdeckung des Neutrons 1932 durch J. Chadwick (1891 bis 1974) ergab sich folgendes Kernmodell: Der Atomkern, der den Hauptanteil der Masse vereinigt, besteht

aus Protonen und Neutronen (*Nukleonen*), die durch die kurzreichweitigen Kernkräfte zusammengehalten werden.

Mithilfe eines *Massenspektrometers* kann die Masse eines Atoms sehr genau bestimmt werden. Abbildung 8.52a zeigt den Aufbau und die Arbeitsweise eines modernen Massenspektrometers. In der Ionenquelle wird die Probe ionisiert, dann werden die entstandenen Ionen beschleunigt und in einem elektrischen und magnetischen Feld getrennt. Das Auflösungsvermögen eines solchen Massenspektrometers verdeutlicht Abb. 8.52b.

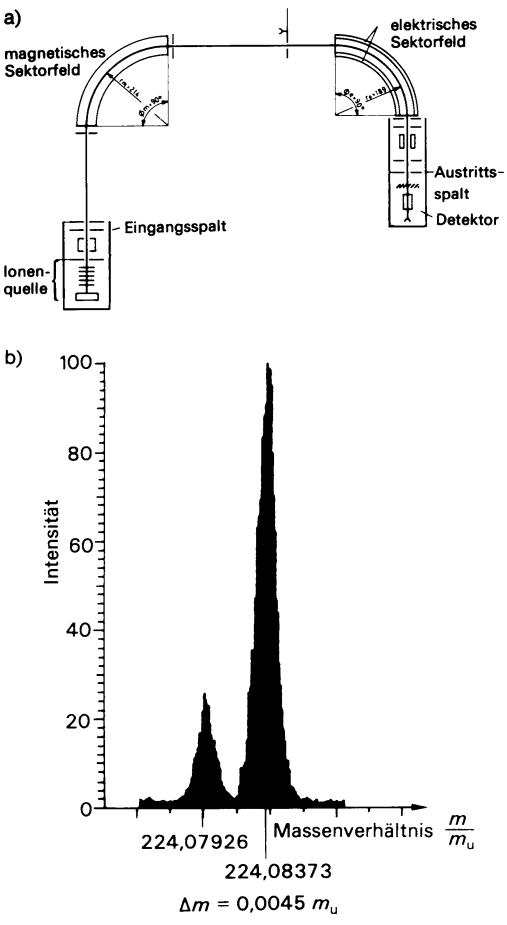


Abb. 8.52 Massenspektrometer: **a)** Aufbau, schematisch, **b)** Ausschnitt aus einem Massenspektrum. Werkbild: Finnigan Mat, Bremen

Als Einheit verwendet man die *atomare Masseneinheit* u (Atommassenkonstante). Diese ist definiert als ein Zwölftel der Masse des Kohlenstoffisotops ^{12}C:

$$m_u = 1\,u = \frac{1}{12} m_a(^{12}C) = \frac{1}{12}\frac{12 \cdot 10^{-3}\ kg/mol}{N_A} = 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\ kg \tag{8.76}$$

$N_A = 6{,}02214 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ ist die Avogadro-Konstante, d. h. die Anzahl der Teilchen je mol. Die relative Atommasse A_r (Molekülmasse M_r) ist durch

$$A_r = \frac{m_a}{m_u};\quad \left(M_r = \frac{m_m}{m_u}\right) \tag{8.77}$$

gegeben. Hierin ist

$m_a, m_a(^AX)$ Atommasse (des Nuklids ^AX),
$m_m, m_m(A_x B_y)$ Molekülmasse (des Moleküls $A_x B_y$).

Die Masse von 1 mol eines Atoms oder Moleküls ergibt die Molmasse M:

$$M = \begin{cases} A_r N_A m_u = A_r \cdot 1\ g/mol\ , \\ M_r N_A m_u = M_r \cdot 1\ g/mol\ . \end{cases}$$

In der Kernphysik und besonders in der Elementarteilchenphysik ist es üblich, die Masse eines Teilchens in der *äquivalenten Energie* über die Beziehung $m = E/c^2$ anzugeben. Es ergibt sich $m_u = 1\ u = 931{,}4943\ MeV/c^2$. (Häufig entfällt c^2.) In Tabelle 8.4 sind für einige Teilchen und Atomkerne die Massen zusammengestellt.

Die genauen Atommassen von instabilen Kernen oder Teilchen kann man aus Kernreaktionen oder Zerfallsprozessen (α-, β-Zerfall) durch *Messung der Zerfallsenergien* ermitteln.

Tabelle 8.4 Teilchen- und Nuklidmassen

Teilchen bzw. Nuklid	Masse in u
Elektron	$5{,}48580 \cdot 10^{-4}$
Proton	1,00727647
Neutron	1,008664915
^{1}H	1,007825037
^{2}H	2,014101787
^{4}He	4,00260325
^{9}Be	9,0121825
^{12}C	12,00000000
^{14}N	14,003074008
^{17}O	16,9991306
^{27}Al	26,9815413
^{30}Si	29,9737717
^{30}P	29,9783098
^{164}Dy	163,929183
^{165}Dy	164,931712

Ein Beispiel hierfür ist die Bestimmung der Masse des Neutrons aus der Reaktion der Spaltung des Deuteriums durch γ-Quanten:

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + \Delta E\,.$$

Der Betrag $\Delta E = -2{,}226$ MeV ergibt sich aus der Energie der γ-Quanten, die zur Spaltung von $^{2}_{1}$H erforderlich ist (*endoergische Reaktion*). Aufgrund der Energieerhaltung gilt

$$m_\mathrm{a}(^{2}\mathrm{H})c^2 = m_\mathrm{a}(\mathrm{n})c^2 + m_\mathrm{a}(^{1}\mathrm{H})c^2 + \Delta E\,.$$

Mit den Tabellenwerten für $m_\mathrm{a}(^{2}\mathrm{H})$ und $m_\mathrm{a}(^{1}\mathrm{H})$ ergibt sich für $m_\mathrm{a}(\mathrm{n}) = 939{,}573\ \mathrm{MeV}/c^2$. In analoger Weise kann anhand der genau bestimmten Atommassen der ΔE-Wert der allgemeinen Reaktion

$$N\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} + Z\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{N+Z}_{Z}\mathrm{K} + \Delta E$$

berechnet werden. Der ΔE-Wert dieser Reaktion ergibt die *Bindungsenergie* E_B des Kerns:

$$E_\mathrm{B} = (N\,m_\mathrm{a}(\mathrm{n}) + Z\,m_\mathrm{a}(^{1}\mathrm{H}) - \\ - m_\mathrm{a}(^{N+Z}\mathrm{K}))c^2\,. \qquad (8.78)$$

Hierin ist $m_\mathrm{a}(\mathrm{n})$ die Masse des Neutrons, $m_\mathrm{a}(^{1}\mathrm{H})$ die des neutralen Wasserstoffatoms und $m_\mathrm{a}(^{N+Z}\mathrm{K})$ die Atommasse des K-Atoms. Die Größe $E_\mathrm{B}/c^2 = \Delta m$ wird auch als *Massendefekt* bezeichnet. Die Berücksichtigung der Bindungsenergie der Elektronen E_e kann durch die Näherung

$$E_\mathrm{e} = 15{,}73Z^{7/3}\ \mathrm{eV} \qquad (8.79)$$

in eV erfolgen. In Abb. 8.53 ist der Verlauf der Bindungsenergie je Nukleon E_B/A in Abhängigkeit von der Massenzahl für die stabilen Kerne dargestellt. Die Bindungsenergie je Nukleon ist negativ abgetragen. Das Minimum der Kurve befindet sich im Bereich der Massenzahl $A = 60$.

Es sind grundsätzlich zwei Kernprozesse denkbar, durch die Energie erzeugt werden kann:

- *Kernspaltung*
  Durch Spaltung eines Kerns mit der Massenzahl 235 ($^{235}_{92}$U, $E_\mathrm{B}/A = 7{,}6$ MeV) in zwei gleich große Bruchstücke ($E_\mathrm{B}/A = 8{,}5$ MeV) wird eine Energie von etwa 200 MeV frei.
- *Kernfusion*
  Die Verschmelzung leichter Kerne, beispielsweise Wasserstoff zu Helium, führt zu einem Energiegewinn von etwa 24 MeV.

Näherungsweise ist die Bindungsenergie je Nukleon (7,5 MeV bis 8,8 MeV) konstant.

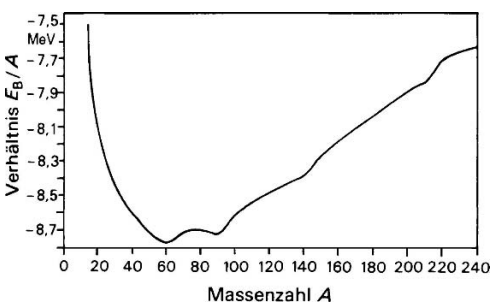


Abb. 8.53 Bindungsenergie je Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl

Dies hat zur Folge, dass ein Nukleon nicht mit jedem anderen Nukleon eine Wechselwirkung durch Kernkräfte eingeht. In einem solchen Fall müssten $A(A-1)/2$ „Bindungen“ gebildet werden, sodass E_B/A proportional A wäre. Die Kernkräfte haben somit „*Sättigungscharakter*“ wie die kovalente Bindung zwischen zwei Wasserstoffatomen.

8.7.2.1 Tröpfchenmodell

Bei diesem Kernmodell betrachtet man die Nukleonen als Moleküle eines *inkompressiblen*

Tabelle 8.5 Tröpfchenmodell des Atomkerns

Name	Abhängigkeit von der Massenzahl	Konstante in MeV	Bemerkungen
Kondensationsenergie Volumenenergie	$E_V = -a_V A$	$a_V = 15{,}85$	Volumenenergie, da A dem Kernvolumen proportional; entspricht der Konstanz der Bindungsenergie je Nukleon.
Oberflächenenergie	$E_O = +a_O A^{2/3}$	$a_O = 18{,}34$	Die Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Bindungspartner, sodass die Bindungsenergie proportional zu $r^2 = A^{2/3}$ verringert wird.
Coulomb-Energie	$E_C = +a_C Z^2 A^{-1/3}$	$a_C = 0{,}71$	gegenseitige Abstoßung der Protonen; Energie einer homogen geladenen Kugel mit der Ladung $Z\,e$.
Asymmetrie-Energie	$E_A = +a_A \frac{\left(Z-\frac{A}{2}\right)^2}{A}$	$a_A = 92{,}86$	Berücksichtigt den Neutronenüberschuss, der zu einer Verminderung von E_B führt gegenüber einem symmetrischen Kern;
Symmetrie-Energie	$E_S = +a_S \frac{(A-2Z)^2}{A}$	$a_S = 23{,}22$ $a_S = \frac{a_A}{4}$	Symmetrie der Kernkräfte zwischen Neutron und Proton.
Paarungsenergie	$E_\delta = \begin{cases} -\delta(A,Z) & \text{(g, g)} \\ 0 & \text{(g, u)(u, g)Kerne} \\ +\delta(A,Z) & \text{(u,u)} \end{cases}$ $\delta = \frac{33}{A}$		Durch das Tröpfchenmodell nicht erklärbar.
	$E_B = -a_V A + a_O A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{\left(Z-\frac{A}{2}\right)^2}{A} + E_\delta$		Weizsäcker-Formel (8.80)
	$\frac{E_B}{A} = -a_V + a_O A^{-1/3} + a_C Z^2 A^{-4/3} + a_A \frac{\left(Z-\frac{A}{2}\right)^2}{A^2} + \frac{E_\delta}{A}$		

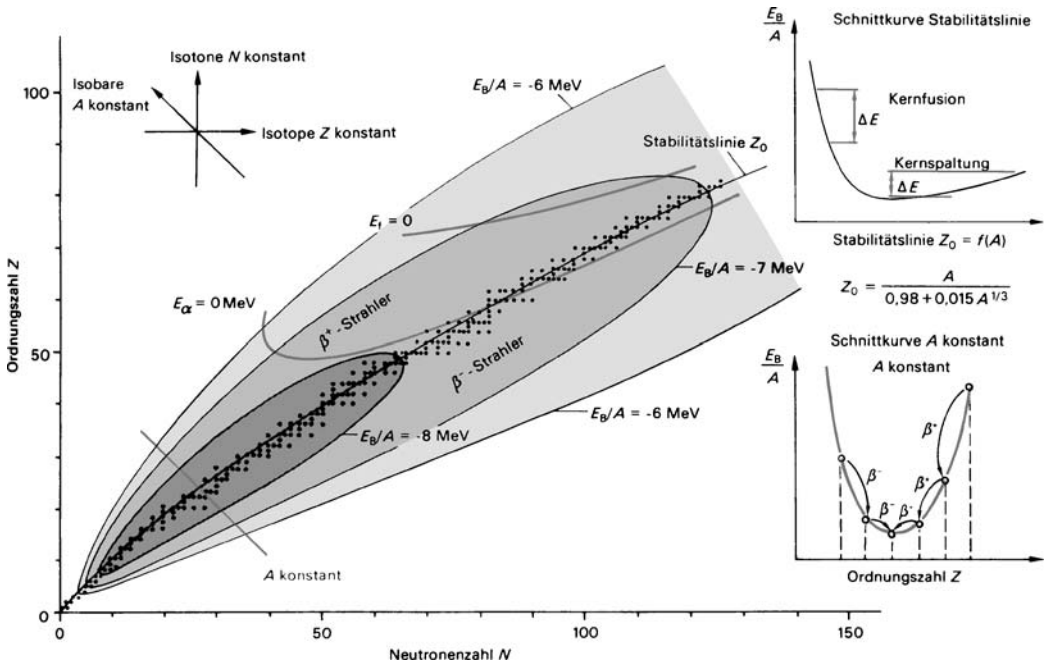


Abb. 8.54 Linien konstanter Bindungsenergie je Nukleon nach der Weizsäcker-Formel ohne Paarungsterm (stabile Nuklide eingezeichnet)

geladenen Flüssigkeitströpfchens. Zwischen den Flüssigkeitsmolekülen im Tröpfchen wirkt eine anziehende Kraft kurzer Reichweite. Die Bindungsenergie des Tröpfchens ist dann derjenige Energiebetrag, der bei der Kondensation freier Moleküle zu einem Tröpfchen frei wird. Diese Energie hängt von der Anzahl der kondensierten Moleküle, der Oberfläche des Tröpfchens, der Coulomb-Energie und von der Form des Tröpfchens ab (*Weizsäcker-Formel* (8.80)). Die Abhängigkeit der einzelnen Terme von der Massenzahl A ist in Tabelle 8.5 zusammengestellt. Zur Veranschaulichung der Beziehung zwischen der Bindungsenergie je Nukleon, der Massenzahl $A = N + Z$ und der Ordnungszahl Z bzw. der Neutronenzahl N sind in Abb. 8.54 Linien konstanter Werte E_B/A in Abhängigkeit von N und Z dargestellt. Man erhält ein *Tal*, das bei kleinen N, Z-Werten sehr stark abfällt und eng ist, sich aber zu größeren N, Z-Werten öffnet. In dieses Diagramm sind die stabilen Atomkerne (*Nuklide*) mit eingezeichnet. Rechts unten ist die Schnittkurve entlang einer Geraden mit A = konstant (*Isobaren*) dargestellt. Hierbei handelt es sich um eine Parabel. Wird der Paarungsterm mit berücksichtigt, so ergibt sich für gerade A-Werte eine Doppelparabel. Der stabile Kern befindet sich in der Nähe des Parabelminimums. Die im linken Parabelast liegenden Nuklide wandeln sich durch β^--Zerfall ($n \rightarrow p + e^-$), die rechts liegenden durch β^+-Zerfall ($p \rightarrow n + e^+$) in Richtung auf das stabile Nuklid um. Deshalb wird das Tal auch *Tal der* β-*Stabilität* bezeichnet. Es gilt für dieses Tal

$$\left(\frac{\partial(E_B/A)}{\partial Z}\right)_{A=\text{konst}} = 0\,.$$

Dies liefert (ohne Paarungsterm) die Linie der β-Stabilität

$$Z = \frac{A}{1{,}98 + 0{,}015\,A^{2/3}}\,.$$

Mithilfe der Bindungsenergieformel (8.80) kann auch die Stabilität der Kerne gegenüber α-Zerfall und *Spontanspaltung* (f: fission) angegeben werden. Eine solche Zerfallsreaktion kann dann ablaufen, wenn diese mit einem Energiegewinn verbunden ist:

$$E_\alpha = \left[m_a \left({}^{N+Z}_{Z}\mathrm{K} \right) - m_a \left({}^{N+Z-4}_{Z-2}\mathrm{K} \right) - m_a(\alpha) \right] c^2 \geqq 0 \,,$$

$$E_f = \left[m_a \left({}^{N+Z}_{Z}\mathrm{K} \right) - 2\, m_a \left({}^{N/2+Z/2}\mathrm{K} \right) \right] c^2 \geqq 0 \,.$$

In Abb. 8.54 sind Linien für $E_\alpha = 0$ und $E_f = 0$ eingezeichnet. Rechts von diesen Linien ist der α-Zerfall oder die Kernspaltung mit einem Energiegewinn verbunden. Man erkennt daraus, dass α-Strahler nur bei Ordnungszahlen größer als 60 zu erwarten sind.

Alle Nuklide mit $Z > 84$ sind instabil. Sie haben zum Teil große Halbwertszeiten ($^{232}_{90}$Th: $1{,}4 \cdot 10^{10}$ a) und kommen deshalb noch natürlich auf unserer Erde vor. Durch Kernreaktionen sind Elemente bis $Z = 111$ (Roentgenium) hergestellt worden.

Betrachtet man die stabilen Nuklide im *Z-N*-Diagramm genauer, so stellt man fest, dass bei den Neutronen- bzw. Protonenzahlen 2, 8, 20, 50, 82, 126 (*magische Zahlen*) besonders viele stabile Isotope (Nuklide mit gleicher Protonenzahl) bzw Isotone (Nuklide mit gleicher Neutronenzahl) auftreten. Von den 267 bekannten stabilen Nukliden sind

158 g, g-Kerne	*Z* gerade	*N* gerade,
53 g, u-Kerne	*Z* gerade	*N* ungerade,
50 u, g-Kerne	*Z* ungerade	*N* gerade,
6 u, u-Kerne	*Z* ungerade	*N* ungerade.

Die Betrachtung der Separationsenergie für Neutronen E_n bzw. Protonen E_p liefert

$$E_n(Z,N) = \left[m_a \left({}^{A}_{Z}\mathrm{K} \right) - m_a \left({}^{A-1}_{Z}\mathrm{K} \right) - m_a(\mathrm{n}) \right] c^2,$$

$$E_p(Z,N) = \left[m_a \left({}^{A}_{Z}\mathrm{K} \right) - m_a \left({}^{A-1}_{Z-1}\mathrm{K} \right) - m_a(\mathrm{p}) \right] c^2 .$$

Dies führt zu einem ähnlichen Verlauf wie das Ionisierungspotential der Elektronenhülle. Bei bestimmten Werten von *N* oder *Z* (den magischen Zahlen) treten Extremwerte von E_n und E_p auf (Abschn. 8.7.2.2, Abb. 8.56).

Die Differenz der Separationsenergien E_n E_p von benachbarten Isotopen bzw. Isotonen

$$\delta_n = E_n(Z,N) - E_n(Z,N-1) \,,$$

$$\delta_p = E_p(Z,N) - E_p(Z-1,N)$$

weist darauf hin, dass bei geraden *N*- bzw. *Z*-Werten stets eine größere *Separationsenergie* erforderlich ist. Zwei Nukleonen (Protonen oder Neutronen) bilden ein energetisch günstiges Paar. Deshalb bezeichnet man δ_n bzw. δ_p als *Paarungsenergie* (~ 2 MeV). Auch im Verlauf der Paarungsenergie treten bei den magischen Zahlen Extremwerte auf. Diese Effekte weisen auf eine *Schalenstruktur* des Kerns hin.

8.7.2.2 Schalenmodell

Im *Tröpfchenmodell* werden die Nukleonen wie die Moleküle eines Tropfens behandelt. Beim *Schalenmodell* geht man davon aus, dass ein Nukleon in einem mittleren Kernpotential, hervorgerufen durch die andern Nukleonen, einen bestimmten Eigenzustand einnimmt, der durch die Eigenwerte Energie und Bahndrehimpuls charakterisiert ist. Im Grundzustand des Kerns werden die Zustände nacheinander nach dem Pauli-Prinzip mit der entsprechenden Anzahl Nukleonen besetzt.

Trotz der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen gibt es keine Möglichkeit für ein Teilchen, seinen Zustand, d. h. seine Quantenzahlen, ohne eine äußere Energiezufuhr zu ändern. Sie verhalten sich deshalb wie wechselwirkungsfreie Teilchen. Aus diesem Grund können die Nukleonen des Kerns wie die Leitungselektronen des Metalls beschrieben werden. Dies ist in Abb. 8.55 dargestellt. Alle Teilchen mit dem Spin 1/2 (Elektronen, Protonen, Neutronen) befinden sich in einem rechteckigen Potentialtopf unterschiedlicher Höhe mit der Kantenlänge *a*. Die Lösung der

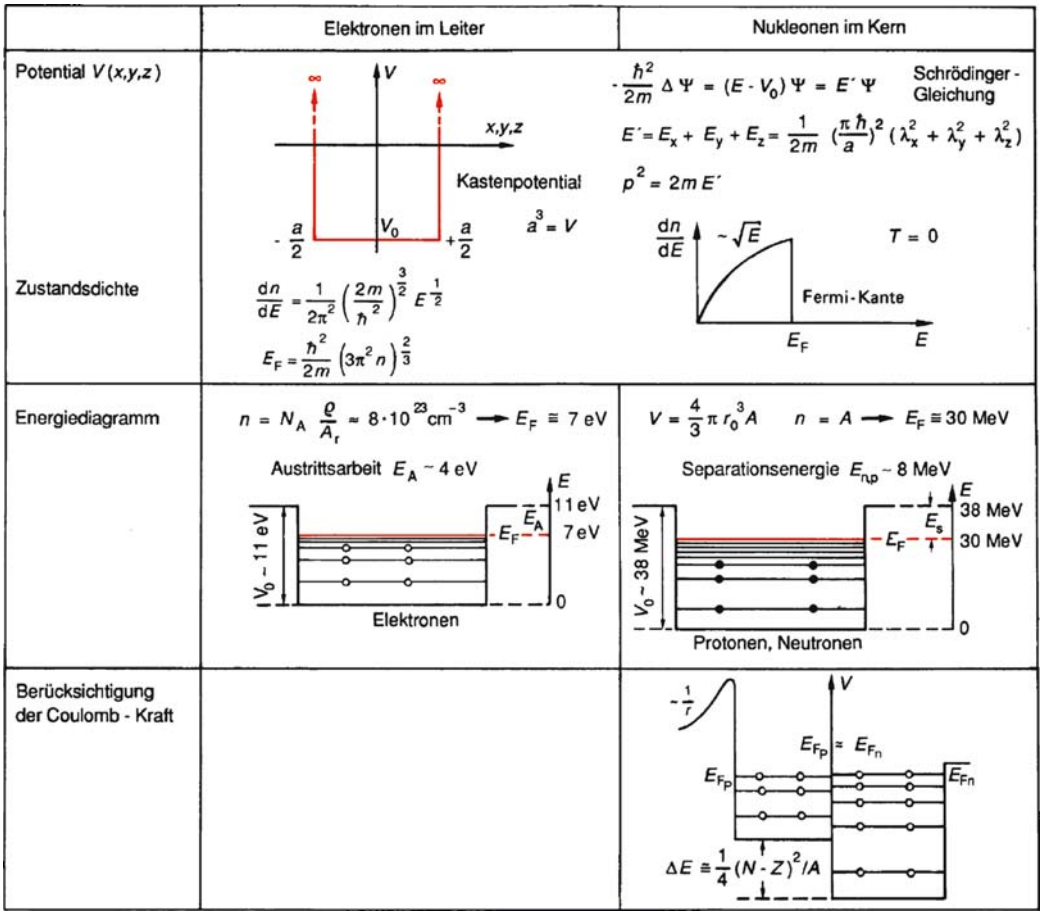


Abb. 8.55 Elektronen in einem Metall im Vergleich zu Nukleonen im Kern

Schrödinger-Gleichung, die für jede Koordinate getrennt durchgeführt werden kann, ergibt die Energieniveaus mit den Quantenzahlen λ_i. In einem Koordinatensystem mit den Achsen $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ stellen die Gitterpunkte die erlaubten Zustände dar. In 1/8 der Kugelschale mit dem Radius $\varrho = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$ befinden sich dann $\mathrm{d}N = \frac{1}{2}\pi\varrho^2\mathrm{d}\varrho$ Zustände. Mit $\varrho = ap/(\pi\hbar)$ und $p^2\mathrm{d}p = \sqrt{2m^3E}\ \mathrm{d}E$ ergibt sich die angegebene Zustandsdichte als Funktion der Energie. Da in diesem Potentialtopf N Teilchen untergebracht werden sollen, und nach dem Pauli-Prinzip bei Spin 1/2 Teilchen 2 Teilchen je Zustand Platz haben, muss der Topf bis zu einer bestimmten Energie E_F (Fermi-Energie) lückenlos aufgefüllt werden. Der Kern oder das Elektronensystem befindet sich dann im Grundzustand (*thermodynamisch* $T = 0$). Anhand der bekannten Teilchenanzahldichte $n = N/V$ kann mit der Beziehung

$$n = \int_0^{E_\mathrm{F}} 2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E}\,\mathrm{d}E$$

die Fermi-Energie berechnet werden.

Bei der bisherigen Betrachtung des Kerns nach dem *Fermi-Gas-Modell* wurde die Ladung der Protonen und damit die Coulomb-Abstoßung nicht berücksichtigt, sodass sich für Protonen

und Neutronen der gleiche Potentialtopf mit den gleichen Eigenzuständen ergibt. Durch die Berücksichtigung der Coulomb-Abstoßung verschiebt sich der Potentialtopf der Protonen zu geringeren Bindungsenergien. Die Folge ist, dass die Fermi-Energien E_{Fp} des Protonentopfes höher liegen als die des Neutronentopfes E_{Fn}. Dies ist vergleichbar mit dem Kontakt zweier Metalle mit unterschiedlicher Fermi-Energie, bei denen es im Gleichgewicht durch Elektronenfluss zum Ausgleich der beiden Fermi-Energien kommt. Es entsteht ein *Kontaktpotential* (s. auch Abb. 9.68 in Abschn. 9.3.2.2). Der gleiche Vorgang erfolgt auch im Kern. Es wandeln sich Protonen in Neutronen um, sodass $E_{\mathrm{Fp}} = E_{\mathrm{Fn}}$ ist. Die Energieverschiebung ΔE des Protonentopfes gegenüber dem Neutronentopf lässt sich aus der Differenz der Gesamtenergie

$$E_{\mathrm{G}} = \int_0^{E_{\mathrm{F}}} E \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E} \mathrm{d}E = C_0 E_{\mathrm{F}}^{5/2} = \frac{3}{5} N E_{\mathrm{F}}$$

für eine gleichmäßige Verteilung ($N = Z$) und eine Verteilung Z, N abschätzen. Dieser Energieunterschied $\Delta E \sim (1/4)(N-Z)^2/A$ ist proportional dem Neutronenüberschuss und entspricht dem Asymmetrie- bzw. Symmetrieterm der *Weizsäcker-Gleichung*.

Mit Hilfe des Fermi-Gas-Modells hat man ungefähre Daten über die Tiefe des Potentials

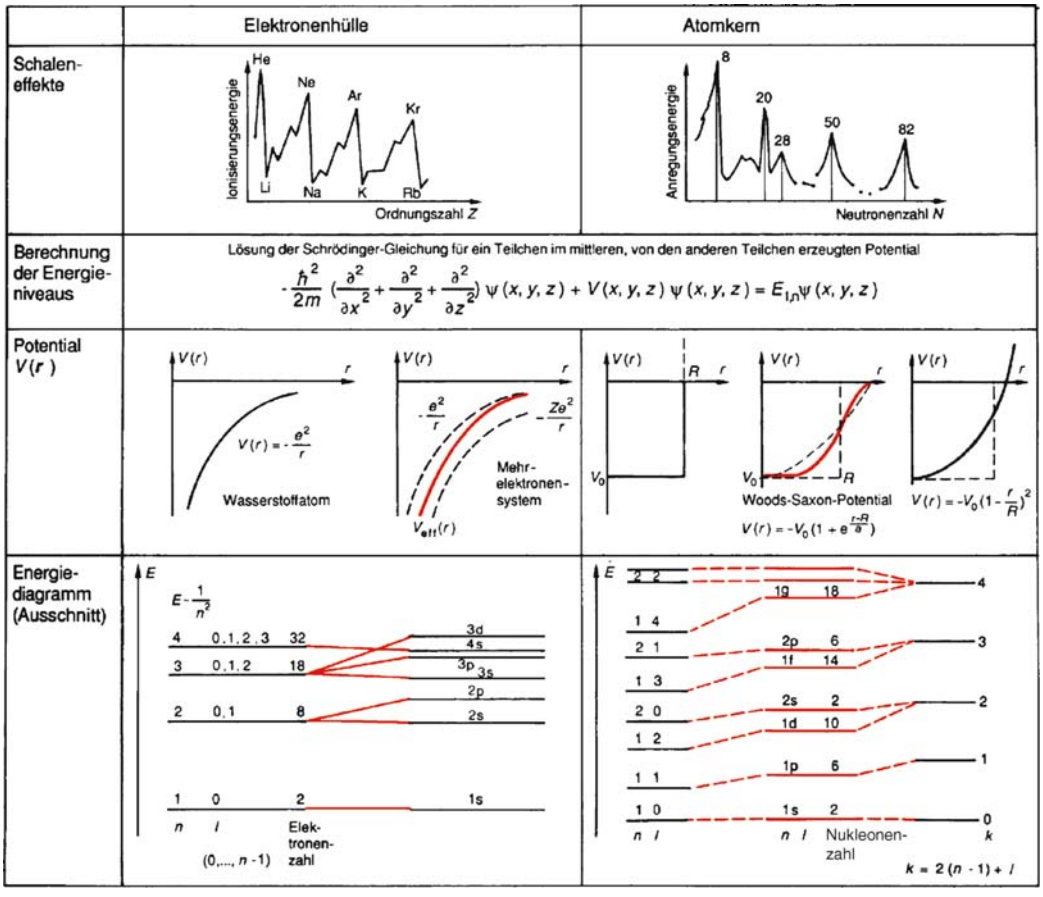


Abb. 8.56 Elektronenhülle und Atomkern

und die Begründung des Neutronenüberschusses, nicht aber über den Verlauf der *Separationsenergien*. Aus der Physik der Elektronenhülle ist bekannt, dass Extremwerte, beispielsweise des Ionisierungspotentials, durch Schalenabschluss zustande kommen. Im Kern liegen die Schalenabschlüsse bei den *magischen Zahlen*. Abbildung 8.56 zeigt den Vergleich der Schalenstruktur von Elektronenhülle und Kern. Es gilt, die Eigenzustände in einem mittleren Kernpotential durch Lösung der Schrödinger-Gleichung zu ermitteln. Für das Elektron im Wasserstoffatom ist dieses Potential das Coulomb-Potential (Abb. 8.11).

Der Verlauf des Kernpotentials lässt sich nicht auf ein einfaches Potential zurückführen, sondern kann nur empirisch ermittelt werden. Aufgrund der kurzen Reichweite der Kernkräfte muss man annehmen, dass das Kernpotential sehr schnell abfällt und im Kernmittelpunkt konstant ist, da dort das Nukleon allseitig von Nukleonen umgeben ist und keine resultierende Kraft erfährt. Ein Potential, das den Anforderungen genügt, ist das *Woods-Saxon-Potential* (Abb. 8.56). Die Lösung der Schrödinger-Gleichung mit diesem Potential ist nur numerisch möglich. Dieses Potential kann näherungsweise aus einem kugelsymmetrischen Rechteckpotential und dem Potential des harmonischen Oszillators zusammengesetzt werden (Abb. 8.56). Für diese Potentiale lässt sich die Schrödinger-Gleichung explizit lösen, wenn der Potentialverlauf nicht bei $r = R$ abgeschnitten wird. Auf die Lage der tiefer liegenden Energieniveaus hat dies keinen merklichen Einfluss. Die Lösungen für das so angenäherte Woods-Saxon-Potential ergeben sich durch Interpolation beider oben genannter Potentialverläufe.

Die Bezeichnung der Energiezustände erfolgt in gleicher Weise wie bei der Elektronenhülle. In Abb. 8.56 sind die Energiezustände mit den maximal besetzbaren Teilchenzahlen angegeben. Man erkennt, dass dieses Modell die Schalenabschlüsse bei 2 und 8 erklärt, nicht aber die höheren. Der Grund liegt in der Wechselwirkung des Spinmoments mit dem Bahnmoment (*Spin-Bahn-Kopplung*); hierbei kommt es zu einer Aufspaltung der Energieniveaus, wie Abb. 8.57 zeigt. Man erkennt deutlich die Schalenabschlüsse bei den magischen Zahlen sowohl für die Neutronen als auch für die Protonen.

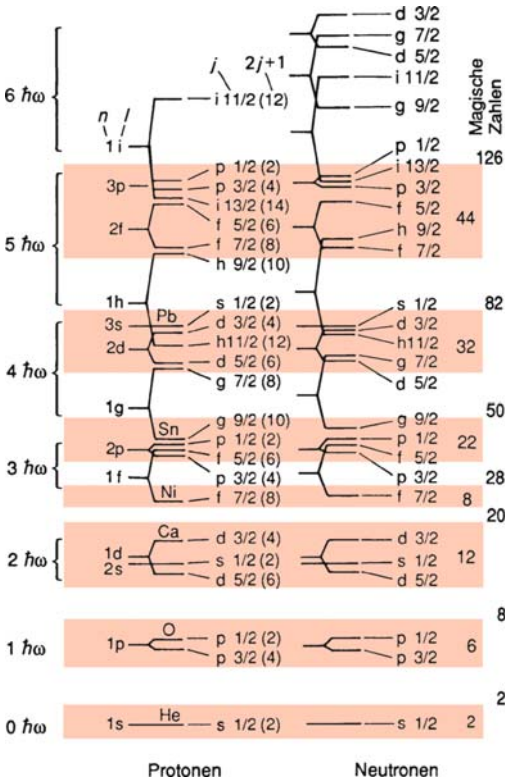


Abb. 8.57 Energiediagramm der Protonen und Neutronen im Kern mit Spin-Bahn-Kopplung

8.8 Kernumwandlung

Es gibt grundsätzlich zwei Typen von Kernumwandlungen, den radioaktiven Zerfall und die Kernreaktionen. Während beim radioaktiven Zerfall die Prozesse ohne äußere Beeinflus-

sung ablaufen, müssen sie bei Kernreaktionen von außen in Gang gesetzt werden (z. B. durch Beschuss des Atomkerns mit Teilchen).

8.8.1 Radioaktiver Zerfall

Der französische Physiker H. A. Becquerel (1852 bis 1908) entdeckte 1896, dass von Uransalzen eine Strahlung ausgeht, die eine lichtdicht verpackte Fotoplatte schwärzt. Das Ehepaar M. und P. Curie (1867 bis 1934 bzw. 1859 bis 1906) isolierte 1898 aus dem Uranmineral Pechblende (U_3O_8) die Elemente Polonium und Radium, die wesentlich stärker als Uran strahlen.

8.8.1.1 Strahlenarten

Die von den natürlich vorkommenden Substanzen emittierte Strahlung (*natürliche Radioaktivität*) lässt sich in einem Magnetfeld in drei Komponenten zerlegen.

α-Strahlung

α-Strahlen werden nur wenig abgelenkt und sind aufgrund der Ablenkungsrichtung positiv geladen. Es handelt sich hierbei um *Heliumkerne* (bestehend aus 2 Protonen und 2 Neutronen).

β^--Strahlung

β^--Teilchen werden im Magnetfeld stärker als α-Teilchen abgelenkt und haben eine negative Ladung. Es handelt sich hierbei um *Elektronen* mit sehr hoher Geschwindigkeit (etwa 99% der Lichtgeschwindigkeit c).

γ-Strahlung

Diese Strahlung wird durch ein Magnetfeld nicht abgelenkt. Es handelt sich um eine *elektromagnetische Strahlung* vergleichbar der Röntgenstrahlung, jedoch mit größerer Energie (> 100 keV). Da die γ-Strahlung in vielen Wechselwirkungsprozessen Teilchencharakter hat, spricht man auch von γ-*Quanten*.

β^+-Strahlung

Hierbei handelt es sich um *positiv geladene Elektronen* (*Positronen*). Bei Kernreaktionen entstehen instabile Kerne (*radioaktive Nuklide*), die Positronen aussenden (*künstliche Radioaktivität*).

8.8.1.2 Zerfallsreaktionen

Die bei der Kernumwandlung ablaufende Kernreaktion kann für den radioaktiven Zerfall allgemein geschrieben werden

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{A'}_{Z'}\mathrm{K}' + {}^{A-A'}_{Z-Z'}x + \Delta E \, . $$

Bei dem von selbst ablaufenden radioaktiven Zerfall ist ΔE stets positiv (exoergische Reaktion) und berechnet sich aus den Massendifferenzen (Abschn. 8.7.2):

$$ \Delta E = [m_\mathrm{N}(\mathrm{K}) - m_\mathrm{N}(\mathrm{K}') - m_\mathrm{N}(\mathrm{x})]c^2 \, . $$

Hierbei ist m_N die Masse des Atomkerns. Mit der Atommasse $m_\mathrm{a}({}^{A}_{Z}\mathrm{K}) = m_\mathrm{N}({}^{A}_{Z}\mathrm{K}) + Z\, m_\mathrm{e}$ ergibt sich

$$ \Delta E = [m_\mathrm{a}(\mathrm{K}) - m_\mathrm{a}(\mathrm{K}') - m_\mathrm{a}(\mathrm{x})]c^2 \, . $$

Die Energie ΔE verteilt sich auf das emittierte Teilchen x, auf den Kern K′ als Rückstoßenergie (Impulserhaltung) und auf möglicherweise frei werdende γ-Quanten. Nach dem Kernumwandlungsprozess befinden sich die Nukleonen (Protonen, Neutronen) nicht immer

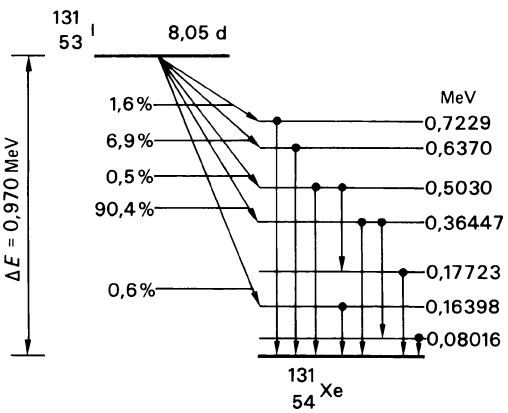


Abb. 8.58 Energiediagramm des radioaktiven Zerfalls von ^{131}I

Zerfallsart	Zerfallsgleichung	ΔE-Wert Zerfallsschema	Energieverteilung	Bemerkungen
α-Zerfall α	$^{A}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{K}'$ $^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m(\mathrm{K}) - m(\alpha) - m(\mathrm{K}')$ $T = 138{,}4\ \mathrm{d}$ $^{210}\mathrm{Po}$ $\alpha(5{,}305\ \mathrm{MeV})$ 100% $^{206}\mathrm{Pb}$	diskontinuierlich $\frac{dN}{dE}$ E_1 E	Dieser Zerfall tritt vorwiegend bei Ordnungszahlen größer als 80 auf.
β^- (e^-) Elektronen	$^{A}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta^- + {}^{A}_{Z+1}\mathrm{K}' + \bar{\nu}_e$ $^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta^- + {}^{1}_{1}\mathrm{p} + \bar{\nu}_e$ $^{90}_{38}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta^- + {}^{90}_{39}\mathrm{Y} + \bar{\nu}_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m(\mathrm{K}) - m(\mathrm{K}')$ $^{90}\mathrm{Sr}$ $T = 28{,}6\ \mathrm{a}$ β^- $E_{max} = 0{,}546$ MeV $^{90}\mathrm{Y}$	kontinuierlich $\frac{dN}{dE}$ E_{max} E	Nuklide mit relativem Neutronenüberschuss (unterhalb der Linie der β-Stabilität).
β-Zerfall β^+(e^+) Positronen	$^{A}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{0}_{1}\beta^+ + {}^{A}_{Z-1}\mathrm{K}' + \nu_e$ $^{1}_{1}\mathrm{p} \rightarrow {}^{0}_{1}\beta^+ + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \nu_e$ (im Atomkern) $^{14}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{0}_{1}\beta^+ + {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \nu_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m(\mathrm{K}) - m(\mathrm{K}') - m_e + 4{,}12\ \mathrm{MeV}/c^2$ $T = 70{,}6\ \mathrm{s}$ $^{14}\mathrm{O}$ $\beta_1^+ 1{,}81$ MeV 2,311 MeV $E_\gamma = 2{,}31$ MeV β_2^+ 4,12 MeV $^{14}\mathrm{N}$	kontinuierlich $\frac{dN}{dE}$ E_{max} E	Dieser Prozess kommt natürlich aufgrund der kurzen Halbwertszeit nicht vor (oberhalb der Linie der β-Stabilität).
Elektroneneinfang (EC)	$^{A}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{K}'$ $^{1}_{1}\mathrm{p}_{(\mathrm{Kern})} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^- \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{n} + \nu_e$ Hülle K-Schale $^{40}_{19}\mathrm{K} \rightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \nu_e$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m(\mathrm{K}) - m(\mathrm{K}') + 1{,}46\ \mathrm{MeV}/c^2$ $^{40}\mathrm{K}$ EC γ 1,46 MeV $^{40}\mathrm{Ar}$	$\frac{dN}{dE}$ charakteristische Röntgenstrahlung von K E_1 E_2 E	Neutronenmangel wie bei β^+-Zerfall
γ-Emission	$^{A}_{Z}\mathrm{K}^* \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{K} + \gamma$ $^{137}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \gamma$	$\frac{\Delta E}{c^2} = m(\mathrm{K}^*) - m(\mathrm{K})$ $^{137}\mathrm{Cs}$ 0,662 $E_\gamma = 0{,}662$ MeV $^{137}\mathrm{Ba}$	$\frac{dN}{dE}$ diskontinuierlich E_1 E_2 E_3 E	Begleiterscheinung der anderen Zerfallsarten.
Isomere Umwandlung (I. U.)	$^{Am}_{Z}\mathrm{K} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{K}$	$^{133\,m}\mathrm{Xe}$ $T = 2{,}19\ \mathrm{d}$ 0,233 $E_\gamma = 0{,}233$ MeV $^{133}\mathrm{Xe}$	$\frac{dN}{dE}$ E	verzögerte Abgabe von γ-Quanten.

Abb. 8.59 Radioaktive Zerfallsreaktionen

im Grundzustand, sondern in einem angeregten Zustand. Beim Übergang von diesem in den Grundzustand (oder einen anderen angeregten Zustand) werden γ-Quanten emittiert. Analog zu den angeregten Zuständen der Elektronenhülle (Abschn. 8.2.4) kann man die Anregungszustände des Kerns in einem *Energiediagramm* darstellen. Abbildung 8.58 zeigt das Energiediagramm von Iod (^{131}I). Die einzelnen Energiezustände werden durch die *Kernspinquantenzahl I* (analog *J* der Elektronenhülle) und die *Parität* (Abschn. 8.9.2) charakterisiert. In Abb. 8.59 sind die Zerfallsmöglichkeiten von instabilen Kernen mit der allgemeinen Zerfallsgleichung, dem ΔE-Wert, dem Energiediagramm und der Energieverteilung (Spektrum) der emittierten Strahlung zusammengestellt.

α-Zerfall

Die von den Radionukliden emittierten α-Teilchen haben eine Energie zwischen $E_\alpha = 4$ MeV und 9 MeV. Der Potentialverlauf für die Wechselwirkung eines α-Teilchens mit dem Kern ist vereinfacht in Abb. 8.60 gezeigt. Damit ein α-Teilchen in das anziehende Kernpotential gelangt, muss es die Coulomb-Abstoßung überwinden (z. B. > 9 MeV für $^{238}_{92}$U). Ein vom Kern emittiertes α-Teilchen müsste klassisch eine kinetische Energie besitzen, die größer als die Potentialschwelle ist. Die α-Teilchen, die beispielsweise den Uran-238-Kern verlassen, haben jedoch lediglich eine Energie von 4,20 MeV. Sie müssen somit die Potentialschwelle durchtunneln. In Abschn. 8.2.2 ist für ein Rechteckpotential gezeigt, dass quantenmechanisch ein solcher Vorgang möglich ist.

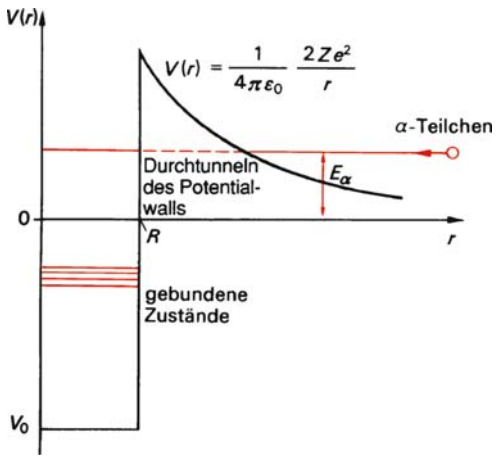


Abb. 8.60 Energieverhältnisse beim Beschuss eines Kerns mit α-Teilchen

β-Zerfall

Im Gegensatz zum α-Spektrum weist das β-Spektrum eine *kontinuierliche Energieverteilung* auf. Die Ursache für diese Energieverteilung liegt in der Emission zweier Teilchen, dem Elektron β^- und dem Antineutrino $\overline{\nu}_e$ bzw. dem Positron β^+ und dem Neutrino ν_e. Die Maximalenergie der β-Teilchen verteilt sich dabei statistisch auf diese beiden Teilchen: $E_\beta + E_\nu = E_{max}$. Das Neutrino ist ein Teilchen ohne Ladung und mit der Ruhemasse $m_\nu = 0$. Es wird nicht von einem elektromagnetischen Feld umgeben (im Gegensatz zum Elektron) und hat den Spin 1/2. Aufgrund dieser Eigenschaften ist der Nachweis des Neutrinos sehr schwierig. Er gelang 1956 durch die Reaktion

$$^0_0\overline{\nu}_e + {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_1e\,.$$

In einem Experiment wurden Protonen (Wasser) mit Antineutrinos aus einem Kernreaktor bestrahlt. Der Nachweis der Positronen erfolgte über ihre *Vernichtungsstrahlung* ($^0_1e + {}^0_{-1}e \rightarrow 2\gamma$) und der Nachweis des Neutrons über die bei einer (n, γ)-Reaktion, mit Cadmium (Abschn. 8.8.2) auftretende γ-Strahlung. Der Wirkungsquerschnitt dieser Antineutrinoreaktion ist sehr gering und beträgt 10^{-43} cm^2.

Der β^--Zerfall führt zu einem Abbau eines Neutronenüberschusses im Kern; hierbei wird

ein Elektron aus dem Kern emittiert. Es entsteht ein Nuklid mit gleicher Massenzahl, aber mit einer um eins größeren Ordnungszahl. β^--Strahler liegen deshalb *unterhalb* der Linie der β-Stabilität (Abb. 8.54).

Der β^+-Zerfall führt zu einem Abbau eines Protonenüberschusses im Kern. Es entsteht ein Nuklid mit gleicher Massenzahl, aber mit einer um eins geringeren Ordnungszahl (deshalb Zerfallsrichtung im Energiediagramm nach links). β^+-Strahler liegen *oberhalb* der Linie der β-Stabilität (Abb. 8.54).

Elektroneneinfang

Beim Elektroneneinfang wird vom Kern ein Hüllenelektron (meist K-Elektron) eingefangen. Betrachtet man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des K-Elektrons, so besteht eine Wahrscheinlichkeit, dieses Elektron auch im Kern anzutreffen.

Beim β^+-Zerfall treten im Gegensatz zum β^--Zerfall im ΔE-Wert zwei Elektronenmassen auf. Dies bedeutet, dass die Atommasse von K um mindestens zwei Elektronenmassen größer sein muss als die Atommasse von K′. Der Elektroneneinfang kann dagegen immer stattfinden, wenn $m_a(\mathrm{K}) > m_a(\mathrm{K}')$ ist; er tritt somit bevorzugt bei geringen ΔE-Werten auf. Bei höheren ΔE-Werten tritt dagegen der β^+-Zerfall in den Vordergrund. Es gibt viele Nuklide, die sowohl β^+-Zerfall als auch den Elektroneneinfang ausführen. Durch Auffüllung der Elektronenlücke in der K-Schale wird charakteristische Röntgenstrahlung frei.

γ-Emission

Nach einer Kernumwandlung (α-, β^--, β^+-Zerfall) befindet sich der Kern K′ häufig in einem angeregten Zustand (Lebensdauer 10^{-16} s bis 10^{-13} s). Beim Übergang zwischen Energieniveaus des Kerns wird γ-Strahlung frei. Das diskontinuierliche γ-Spektrum ist für jedes Radionuklid charakteristisch. Für die Übergänge zwischen den Niveaus gelten die Auswahlregeln analog zur Elektronenhülle. Das emittierte γ-Quant nimmt einen Drehimpuls $L\hbar$ mit $(I_a + I_e \geqq L \geqq |I_a - I_e|$; I_a ist die Kernspinquantenzahl des Ausgangszustandes, I_e die des Endzustandes). 2^L bezeichnet die *Ordnung der Strahlung* ($2^1 = 2$: Dipolstrahlung; $2^2 = 4$: Quadrupolstrahlung; $2^3 = 8$: Oktupolstrahlung). Je höher die Ordnung der Strahlung, desto geringer ist die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den entsprechenden Kernniveaus. Außer der Drehimpulserhaltung muss noch die *Erhaltung der Parität* (Abschn. 8.9) berücksichtigt werden.

Ist der Unterschied im Kernspin zwischen Ausgangszustand I_a und Endzustand I_e (Grundzustand) besonders groß, so ist die Übergangswahrscheinlichkeit sehr gering (Lebensdauer besonders groß). In diesem Fall spricht man von einem *mesomeren Zustand*, der mit dem Zusatz m bezeichnet wird (z. B. $^{137\,m}$Ba).

Das γ-Quant (Photon) hat einen Eigendrehimpuls mit der Spinquantenzahl $s = 1$. Übergänge zwischen $I_a = 0$ und $I_e = 0$ können deshalb nicht unter Aussendung eines γ-Quants erfolgen. Wenn sich bei einem solchen Übergang die Parität nicht ändert, so kann ein *Konversionselektron* ausgesandt werden oder bei genügend hoher Zerfallsenergie ($E > 1{,}02$ MeV) ein *Elektron-Positron-Paar*.

Bei der *inneren Konversion* gibt der Kern seine Anregungsenergie nicht in Form von γ-Quanten, sondern durch direkte Wechselwirkung mit der Elektronenhülle (meist 1 s-Elektron) an das Hüllenelektron ab. Dabei entstehen monoenergetische Elektronen. Die Elektronenlücke wird unter Aussendung charakteristischer Röntgenstrahlung aufgefüllt.

p-Emission, n-Emission

Befindet sich nach einem Kernzerfall der Folgekern in einem hoch angeregten Zustand, so ist ein Zerfall unter Aussendung eines Protons

oder Neutrons möglich (*verzögerte Protonen*, *verzögerte Neutronen*). Die Emission verzögerter Neutronen spielt bei der Regelung eines Kernreaktors eine entscheidende Rolle.

Spontanspaltung

Im Jahre 1940 entdeckte man die Spontanspaltung (ohne äußere Beeinflussung) von Uran-238-Kernen. Die zugehörige Halbwertszeit (Abschn. 8.8.1.3) beträgt $9 \cdot 10^{15}$ a (Halbwertszeit für α-Zerfall $4{,}47 \cdot 10^9$ a). Die Spontanspaltung überwiegt bei schweren, neutronenreichen Kernen. Cf-254 spaltet sich mit einer Halbwertszeit von 60 d unter Aussendung von durchschnittlich 3,88 Neutronen und eignet sich deshalb gut als Laborneutronenquelle.

8.8.1.3 Radioaktives Zerfallsgesetz

Zu welchem Zeitpunkt ein bestimmter instabiler Kern zerfällt, lässt sich nicht vorhersagen. Es sind nur Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls möglich. Diese *Zerfallswahrscheinlichkeit* λ ergibt sich aus dem Verhältnis von im Moment zerfallenden Kernen $(-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t)$ zur Gesamtanzahl vorhandener instabiler Kerne N:

$$\lambda = \frac{-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t}{N} \,. \tag{8.81}$$

Die Zerfallswahrscheinlichkeit λ ist für jeden radioaktiven Zerfall eine charakteristische Größe und wird *Zerfallskonstante* genannt. Die Dimension von λ ist eine reziproke Zeit (1/s). Die Anzahl der Zerfälle je Zeiteinheit $(-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t)$ wird als *Aktivität* A bezeichnet.

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N \,. \tag{8.82}$$

Die Einheit der Aktivität ist das Becquerel (Bq). 1 Bq entspricht einem Zerfall je Sekunde.

Aus (8.81) ergibt sich durch Integration das *Zerfallsgesetz:*

$$N = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \,. \tag{8.83}$$

Die Größe N ist die Anzahl der noch vorhandenen und N_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Anzahl zerfallsfähiger Kerne. In der Praxis wird die weniger anschauliche Größe λ durch die *Halbwertszeit* T ersetzt. Sie gibt an, in welcher Zeit eine ursprünglich vorhandene Anzahl Kerne N_0 durch Zerfall auf die Hälfte $N_0/2$ abgenommen hat. Aus (8.83) ergibt sich damit für die Halbwertszeit

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}69315}{\lambda} \,. \tag{8.84}$$

Ist die Zerfallswahrscheinlichkeit λ groß, so werden in kürzerer Zeit T die Hälfte der Kerne zerfallen als bei kleiner Zerfallswahrscheinlichkeit. Mit (8.84) kann das Zerfallsgesetz für die Kernanzahl N bzw. Aktivität A geschrieben werden als

$$\begin{aligned} N &= N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} , \\ A &= A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = A_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T} t} = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \,. \end{aligned} \tag{8.85}$$

Hierbei ist A die Aktivität zum Zeitpunkt t und A_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$. Abbildung 8.61 zeigt den zeitlichen Verlauf der Aktivität.
Wird der Logarithmus der Aktivität aufgetragen, so entsteht eine Gerade. In Tabelle 8.6 sind Angaben über die natürliche Radioaktivität von Wasser und einigen Nahrungsmitteln zusammengestellt.
Die Beziehung zwischen Aktivität A und Teilchenzahl N $(A = \lambda N)$ ist die Grundlage vieler Anwendungen radioaktiver Stoffe in der Chemie und Technik (z. B. klinische Chemie, Kor-

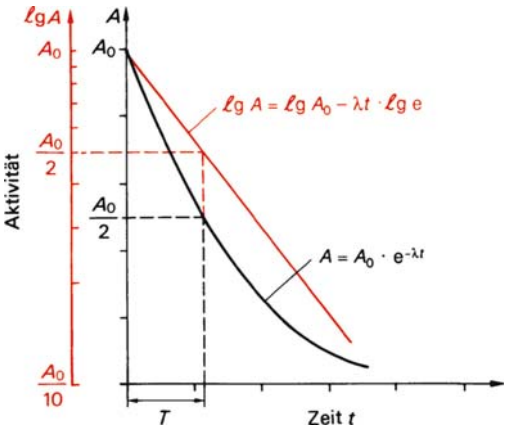


Abb. 8.61 Zeitlicher Verlauf der Aktivität

rosionsuntersuchungen). Wird N durch die Masse der Substanz ersetzt, so gilt

$$A = \lambda N = \lambda \frac{m N_A}{M} \qquad (8.86)$$

mit m als der Masse des Radionuklids oder dessen Verbindung, M als Molmasse des Radionuklids oder dessen Verbindung und der Avogadro-Konstante $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. Die Aktivität ist direkt proportional der Masse des entsprechenden Radionuklids. Somit kann aus der Aktivitätsmessung die Menge der Substanz ermittelt werden, z. B.

1 g ^{238}U ($T = 4{,}51 \cdot 10^9$ a): $A = 1{,}23 \cdot 10^4$ Bq (8.85) und (8.83),

37 Bq ^{131}I ($T = 8{,}05$ d): $m = 8{,}1 \cdot 10^{-15}$ g (8.85) und (8.83).

In Tabelle 8.7 sind für einige Radionuklide die Massen angegeben, die einer Aktivität von 37 Bq (messtechnisch gut zu ermitteln) entsprechen. Liegen mehrere unterschiedliche Radionuklide vor, so muss man zwischen abhängigem (*genetisch verknüpftem*) und unabhängigem (*nicht genetisch verknüpftem*) Zerfall unterscheiden. In Abb. 8.62 sind diese beiden Fälle gegenübergestellt. Bei Radionukliden, die nicht genetisch verknüpft sind, zerfällt jedes unabhängig vom anderen in ein stabiles Nuklid. Die Gesamtaktivität ergibt sich aus der Summe der Einzelaktivitäten (8.87). Bei genetisch verknüpften Radionukliden ist der Folgekern ebenfalls instabil. Die in der Natur vorkommenden Zerfallsreihen, ausgehend von ^{238}U, ^{235}U und ^{232}Th entsprechend Abb. 8.63, sind Beispiele von genetisch verknüpften Radionukliden. Diese natürlichen Zerfallsreihen enden bei unterschiedlichen Bleiisotopen.

Für zwei miteinander genetisch verknüpfte Radionuklide (Mutter-Tochter-System) ergibt sich die Aktivität der Tochter A_b aus ihrem Zerfall ($-\lambda_b N_b$) und aus ihrer Bildung durch Zerfall der Mutter ($+\lambda_a N_a$) (8.88). Die Lösung dieser Differentialgleichung führt zur (8.89) (zu Beginn keine Tochter vorhanden).

Tabelle 8.6 Natürliche Radioaktivität

Gegenstand	Radionuklid	Konzentration in mBq/l
Grundwasser	^{3}H	40 bis 400
	^{40}K	4 bis 400
	^{238}U	1 bis 200
Oberflächengewässer	^{3}H	20 bis 100
	^{40}K	40 bis 2 000
	^{238}U	bis zu 40
Trinkwasser	^{3}H	20 bis 70
	^{40}K	200
	^{238}U	0,4
Milch	^{40}K	46 Bq/kg
Rindfleisch		116 Bq/kg
Hering		136 Bq/kg

Tabelle 8.7 Masse von jeweils 37 Bq entsprechendem reinem Radionuklid

Nuklid	Halbwertszeit T	Masse in g
^{14}C	5 730 a	$0{,}22 \cdot 10^{-9}$
^{85}Kr	10,72 a	$2{,}5 \cdot 10^{-12}$
^{122}Sb	2,74 d	$2{,}5 \cdot 10^{-15}$
^{18}F	110 min	$1{,}0 \cdot 10^{-17}$

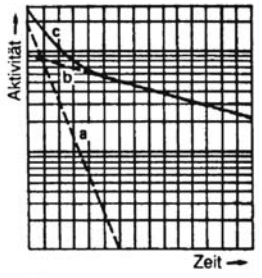
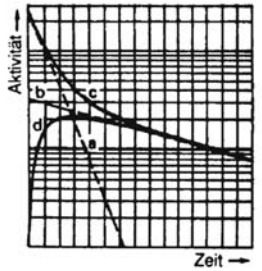
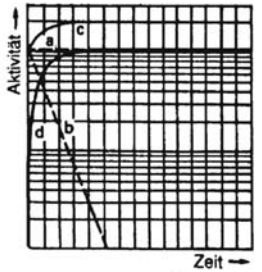
<table>
<tr><th></th><th>Zerfallsschema</th><th>Aktivitätsgleichung</th><th>Zerfallskurven</th></tr>
<tr><td>unabhängiger Zerfall, genetisch nicht verknüpft</td><td>$a^* \rightarrow c$
$b^* \rightarrow d$
(c, d stabile Kerne)</td><td>$A_a = \lambda_a N_a$
$A_b = \lambda_b N_b$
Gesamtaktivität
$A_G = A_a + A_b$ (8.87)
allgemein
$A_G = \sum_i^n A_i$</td><td>a: Zerfallskurve von a*
b: Zerfallskurve von b*
c: Gesamtaktivität
  </td></tr>
<tr><td>abhängiger Zerfall, genetisch verknüpft</td><td>$a^* \rightarrow b^* \rightarrow c$
c stabiler Kern
Mutter-Tochter-System
allgemein
$a^* \rightarrow b^* \rightarrow c^* \rightarrow \ldots, z$</td><td>$A_b = \frac{dN_b}{dt} = \underbrace{-\lambda_b N_b}_{\text{Zerfall von b}} + \underbrace{\lambda_a N_a}_{\text{Nachbildung von b aus a}}$ (8.88)
$N_a = N_{a,o}\, e^{-\lambda_a \cdot t}$
$A_b = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} A_{a,o} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$
$A_b = \frac{T_a A_{a,o}}{T_a - T_b} \left(e^{-\ln 2 \frac{t}{T_a}} - e^{-\ln 2 \frac{t}{T_b}} \right)$ (8.89)
Gleichgewichtseinstellung
$A_b = \frac{T_a}{T_a - T_b} A_a \underbrace{\left(1 - e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a}\right) t}\right)}$
(kann nach einer gewissen Zeit vernachlässigt werden)
$\frac{A_a}{A_b} = 1 - \frac{T_b}{T_a}$ (8.90)
im Gleichgewicht</td><td>$T_a < T_b$
a: Zerfallskurve von a*
b: Zerfallskurve von b*
c: Gesamtaktivität
d: A_b
Aktivität von b*, wenn anfänglich nur a*-Aktivität vorliegt
 
$T_a \gg T_b$
a: Zerfallskurve von a*
b: Zerfallskurve von b*
c: Gesamtaktivität
d: A_b
Aktivität von b*, wenn anfänglich nur a*-Aktivität vorliegt
$A_a = A_b$
 
Nachbildungsgleichung von b
$A_b = A_a \left(1 - e^{-\ln 2 \frac{t}{T_b}}\right)$ (8.91)</td></tr>
</table>

Abb. 8.62 Radioaktives Gleichgewicht

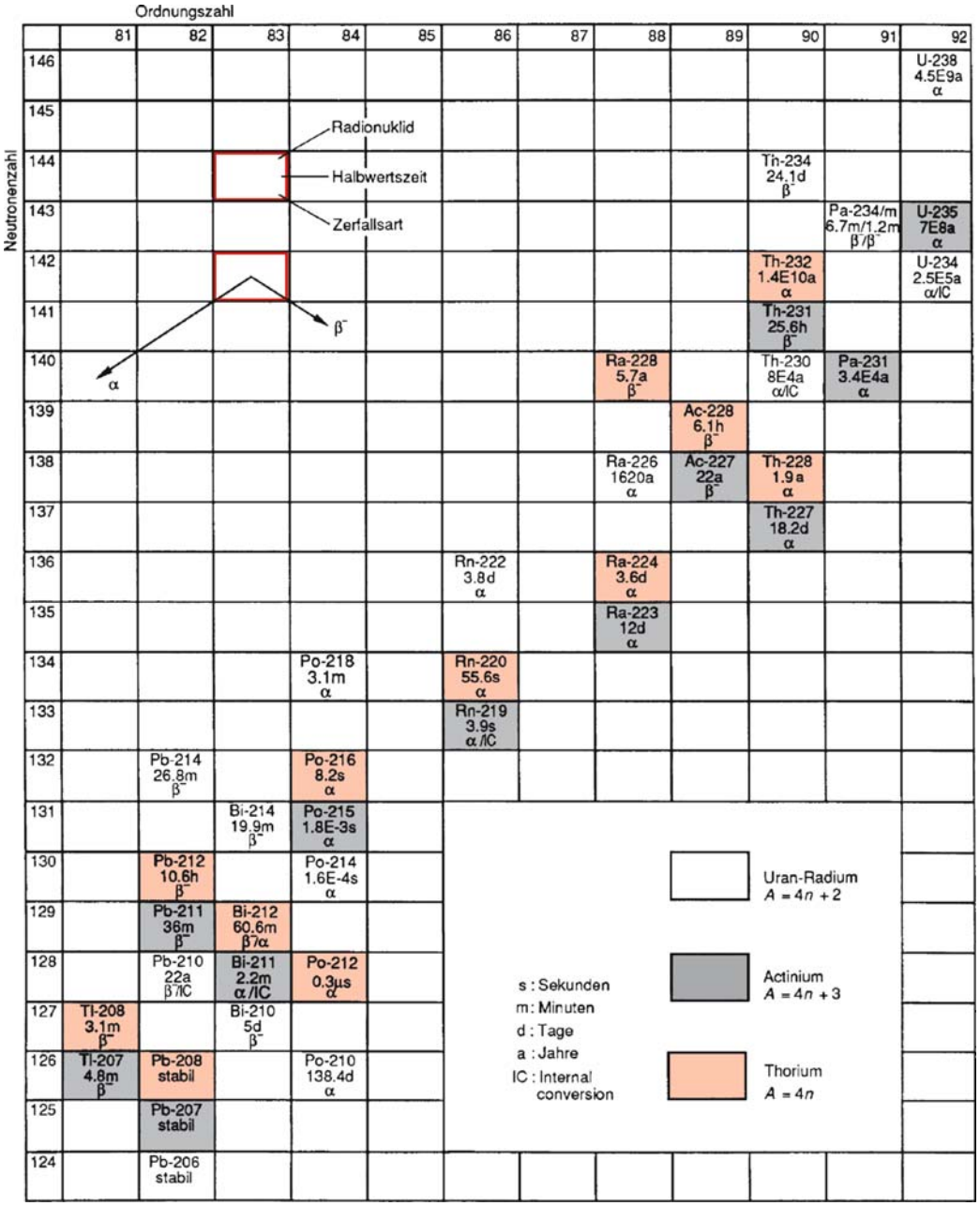


Abb. 8.63 Natürliche Zerfallsreihen

Ist die Halbwertszeit T_b größer als T_a, so ist die Zerfallsgeschwindigkeit von a größer als von b. Es findet somit eine Anhäufung von b statt. Wenn a zerfallen ist, wird die Aktivität nur von b bestimmt, die dann mit der Halbwertszeit von b abnimmt (Abb. 8.62).

Wenn $T_a > T_b$ ist, so lässt sich aus (8.89) ersehen, dass nach einer bestimmten Zeit der

Faktor $e^{-\lambda_b t}$ gegenüber $e^{-\lambda_a t}$ vernachlässigt werden kann. Dies führt zu (8.90). Das Verhältnis der Aktivitäten von a und b ist nach einer bestimmten Zeit konstant. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein (*radioaktives Gleichgewicht*). Die Größe des Aktivitätsverhältnisses wird durch die Halbwertszeiten bestimmt.

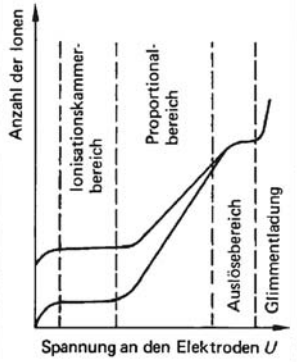
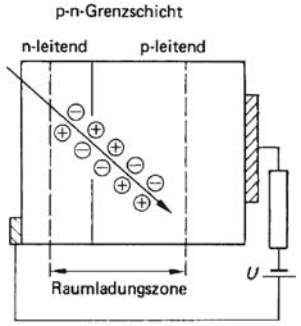
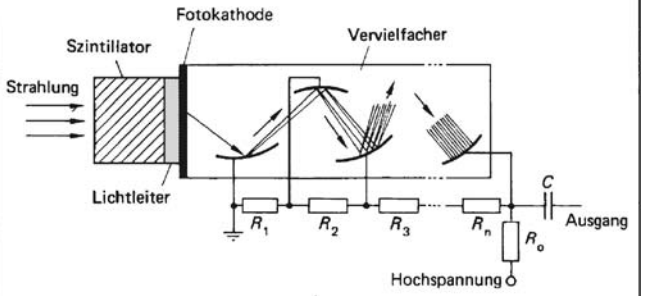
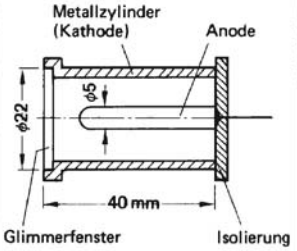
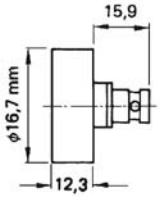
Für den häufigen Fall, dass die Halbwertszeit von a wesentlich größer als die von b ist, sind die beiden Aktivitäten im Gleichgewicht gleich ($A_a = A_b$). Wird aus einem radioaktiven Geichgewicht b entfernt, so bildet sich b durch Zerfall von a wieder nach (Abb. 8.62). Nach zehn Halbwertszeiten von b (8.91) hat sich b bis auf 0,1% nachgebildet. Für Uran-238, das von seinen Folgeprodukten abgetrennt wurde, sind nach zehn Halbwertszeiten von Thorium-234 folgende Radionuklide im Gleichgewicht: ^{238}U, ^{234}Th, $^{234\,m}$Pa; $A_{U\text{-}238} = A_{Th\text{-}234} = A_{Pa\text{-}234\,m}$. Aufgrund des radioaktiven Gleichgewichts kommen kurzlebige Radionuklide noch natürlich vor.

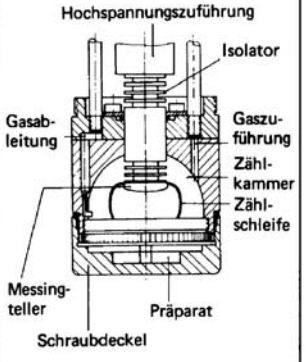
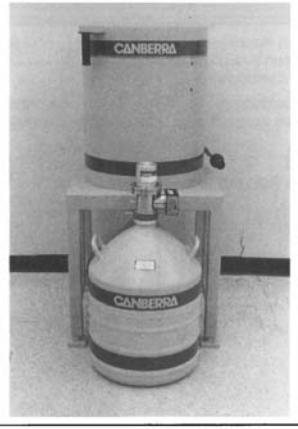
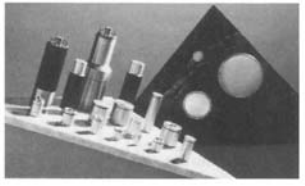
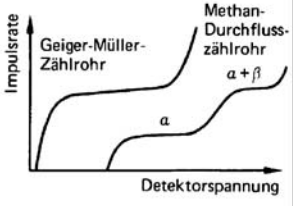
8.8.1.4 Messung ionisierender Strahlung

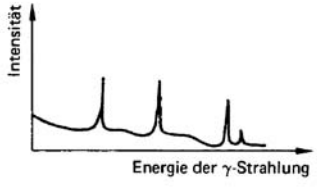
Ionisierende Strahlung (α, β, γ-Strahlung) kann nur über ihre Wechselwirkungsprozesse mit Materie nachgewiesen werden (Abschn. 8.10, Abb. 8.91). Zur Messung der Aktivität oder Energie der Strahlung eines radioaktiven Präparats wird hauptsächlich die Ionisation und die Anregung von Materie ausgenutzt. Die entsprechenden Strahlungsdetektoren werden als *Ionisationsdetektoren* bzw. *Anregungsdetektoren* bezeichnet. Sie sind in Abb. 8.64 mit ihrem Aufbau und ihren Eigenschaften zusammengestellt.

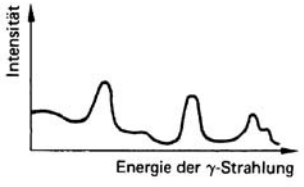
Bei den Ionisationsdetektoren wird die durch die Strahlung im Zählgas oder Halbleiterkristall erzeugte Ladung (*Primärionisation*) gemessen. Die im Gasraum durch Primärionisation des Zählgases (Edelgase He, Ne, Ar) erzeugten Elektronen und Ionen wandern infolge des angelegten elektrischen Feldes zu den Elektroden. Dies ist der Ionisationskammerbereich. Die Anzahl der gebildeten Ionen hängt von der Strahlungsart und -energie ab. α-Teilchen erzeugen längs ihres Wegs mehr Ionen als β-Teilchen (Abschn. 8.10). Deshalb liegt die Kurve für α-Teilchen in Abb. 8.64 höher als die für β-Teilchen. Durch Erhöhung der angelegten Spannung werden die primär erzeugten Elektronen zwischen zwei Stößen mit Gasatomen so stark beschleunigt, dass sie ihrerseits ionisieren können (*Sekundärionisation*). Die sekundär erzeugten Elektronen können wieder Gasatome oder Gasmoleküle ionisieren. Dieser Prozess wird noch durch das zur Anode zunehmende elektrische Feld (Zylinderkondensator) begünstigt. Es entstehen örtlich begrenzte *Elektronenlawinen* (Bereich 1 mm). Aus einem primär erzeugten Elektron entstehen somit A_g-Elektronen (Gasverstärkungsfaktor A_g). Die von angeregten Atomen oder Molekülen (durch Stoßprozesse) ausgesandten Photonen können aus dem Wandmaterial und Füllgas zusätzliche Elektronen erzeugen (*Fotoeffekt*). Im Proportionalbereich (Abb. 8.64) liegt die Gasverstärkung A_g zwischen 10^2 und 10^5. Der Stromimpuls, den ein geladenes Teilchen im *Proportionalzählrohr* auslöst, ist proportional der primär erzeugten Elektronenanzahl. Deshalb ist eine Teilchenunterscheidung bzw. Energiemessung möglich.

Bei weiterer Erhöhung der Spannung vergrößert sich die Gasverstärkung A_g auf 10^6 bis 10^8. Die einzelnen Elektronenlawinen überlagern sich, und die Anzahl der durch Fotoeffekt erzeugten Elektronen erhöht sich. Da die Elektronen wesentlich beweglicher sind als die Ionen (geringere Masse), wandern sie schneller zur Anode als die Ionen zur Kathode. Dadurch bildet sich eine positive Raumladung aus, die die Feldstärke so weit herabsetzt, dass das Entstehen einer neuen Elektronenlawine

	Ionisationsdetektoren		Anregungsdetektoren	
	Gas	fest	fest	flüssig
Funktionsweise	Ionisationsdetektoren bestehen aus zwei Elektroden, zwischen denen sich ein Gas (Gasionisationsdetektoren) oder ein Halbleiterkristall (Festkörperionisationsdetektoren) befindet. Die ionisierende Strahlung erzeugt zwischen den Elektroden Ladungen, die durch die angelegte Spannung zu einem Stromimpuls führen.		Bei Anregungsdetektoren führt die Bestrahlung mit Teilchen oder Quanten in einem Kristall, in Kunststoff oder in Flüssigkeit zu einer Lichtemission. Diese Lichtemission wird von einem Fotovervielfacher in elektrische Impulse umgewandelt.	
	Elektronen-Ionen-Paare 	Elektronen-Defektelektronen- Paare 	 NaI/Tl: γ-Strahlung ZnS/Ag: α-Strahlung Anthracen: β-Strahlung	 p-Terphenyl gelöst in Xylol
Aufbau	Geiger-Müller-Zählrohr  arbeitet im Auslösebereich	Oberflächensperrschichtdetektor 	Der lichtdicht verpackte Kristall befindet sich direkt auf der Photokathode. Die Größe der zylindrischen Kristalle beträgt wenige cm bis etwa 50 cm Durchmesser.	Der Fotovervielfacher befindet sich lichtdicht in einem Probenwechsler. Die Probe wird in der Szintillatorlösung und in einem Fläschchen durch den Probenwechsler vor die Fotokathode transportiert.

<table>
<tr>
<td></td>
<td> 
</td>
<td>Ge(Li)-Halbleiterdetektor
 
</td>
<td>  </td>
<td>  </td>
</tr>
<tr>
<td>Eigenschaften</td>
<td> 

Zählrohrcharakteristik:
Mit dem Geiger-Müller-Zählrohr ist keine Unterscheidung der Teilchenart und Energie möglich.
Mit dem Proportionalzählrohr ist eine Energiemessung möglich.
Strahlung unterschiedlicher Ionisation führt zu unterschiedlicher Impulshöhe. Deshalb entstehen zwei Plateaus; bei einem wird nur α-Strahlung, beim anderen α- und β-Strahlung gemessen.– Mit BF_3-Gasfüllung oder Kathodenmaterial mit B überzogen zur Neutronenmessung anwendbar $^{10}_{5}B(n,\alpha)\,^{7}_{3}Li$.</td>
<td>Die Höhe der Detektorimpulse ist von der Energie der Strahlung abhängig. Mit einem Impulshöhenanalysator (Spektrometer) kann ein Energiespektrum gemessen werden.
 

Halbleiterdetektoren haben ein gutes Energieauflösungsvermögen.– Ge(Li)-Detektoren werden zur Bestimmung der Energie der γ-Quanten eingesetzt.– Energieauflösungsvermögen <2 keV.</td>
<td>Die Impulsgröße ist i. Allg. proportional der Energie der Strahlung. NaI/Tl-Szintillatoren haben ein wesentlich geringeres Energieauflösungsvermögen als Halbleiterdetektoren.
 

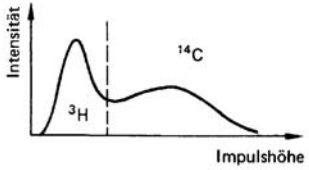
LiI/Eu-Szintillatoren und Li-haltige Gläser werden zum Nachweis von langsamen Neutronen aufgrund der Reaktion $^{6}_{3}Li\,(n,\alpha)\,^{3}_{1}H$ eingesetzt.</td>
<td>Flüssige Szintillatoren eignen sich besonders zum Nachweis energiearmer β-Strahlung (^3H, ^{14}C). Die zu messende Probe kann dabei mit dem Szintillator gemischt werden. Es treten deshalb keine Absorptionsverluste der Strahlung beim Durchdringen der Szintillatorumhüllung auf. Man erzielt Wirkungsgrade bis 100%. Eine getrennte Messung von ^3H und ^{14}C ist bei gleichzeitiger Anwesenheit möglich.
 
</td>
</tr>
</table>

Abb. 8.64 Eigenschaften und Anwendung von Strahlungsdetektoren Werkfotos: Zinser und Canberra

nicht mehr möglich ist. Das Zählrohr kann eine bestimmte Zeit (*Totzeit*) keine Strahlung registrieren. Nach 10^{-4} s wandern die positiven Ionen zur Kathode und erzeugen bei ihrer Neutralisation aus der Kathode oder durch Fotoeffekt weitere Elektronen, die eine erneute Lawine auslösen. Der Vorgang muss deshalb durch Zusatz eines *Löschgases* (Methan, Ethanol, Brom, Chlor) gelöscht werden. Das Löschgas mindert zum einen das Entstehen von Fotoelektronen (durch Absorption der Photonen), zum andern übergeben die Ionen durch Stoß ihre Ladung an das Löschgas. Beim Entladen der Löschgasmoleküle an der Kathode dissoziieren diese ohne Aussendung von Sekundärelektronen. Da die Erzeugung eines Ionenpaars zur Auslösung einer Elektronenlawine und damit eines Impulses ausreicht, bezeichnet man diese Zählrohre als *Auslösezählrohre* (*Geiger-Müller-Zählrohr*).

Bei den Halbleiterdetektoren wird das empfindliche Volumen durch die *Raumladungszone* eines pn-Übergangs gebildet (Abb. 8.64). An ihr fällt fast die gesamte, von außen angelegte Spannung U ab. Erzeugt ein geladenes Teilchen oder ein γ-Quant entlang des Weges durch Ionisation Elektron-Lochpaare, so führt dies zu einem Spannungsimpuls am Widerstand R. Außer den in unterschiedlichen Bauformen eingesetzten Oberflächensperrschichtdetektoren werden zur Energiemessung von γ-Quanten Ge(Li)-Detektoren wegen ihrer großen Energieauflösung eingesetzt (Si (Li) für Röntgenstrahlung). Zur Vergrößerung der Raumladungszone wird Li bei 400 °C in einen p-leitenden Si- oder Ge-Einkristall eindiffundiert. Da die auf Zwischengitterplätzen abgelagerten Li-Atome als Donatoren wirken (bei Raumtemperatur bereits ionisiert), bildet sich ein pn-Übergang aus. Unter dem Einfluss einer in Sperrichtung angelegten Spannung lässt man bei 100 °C die Li-Ionen von der n-Seite in das p-Gebiet driften. Auf diese Weise entsteht zwischen dem n- und dem p-Gebiet eine hochohmige, *eigenleitende Zone* (*i-Schicht*, Abschn. 9.2.3). Diese i-Zone stellt das empfindliche Detektorvolumen dar (pin-Fotodiode Abschn. 9.4.2.3). Um das Herausdiffundieren der Li-Atome zu verhindern, muss der Ge- oder Si-Kristall mit flüssigem Stickstoff (77 K) gekühlt werden.

Durch Herstellung von extrem reinen Germanium-Einkristallen ist die Dotierung mit Li-Atomen nicht mehr erforderlich. Derartige Detektoren werden als *Reinstgermaniumdetektoren* bezeichnet.

Bei den Anregungsdetektoren führt die Strahlung zu einer *Lichtemission* in einem *Szintillator*. Der Aufbau eines Szintillationsdetektors ist in Abb. 8.64 dargestellt. Der Lichtblitz wird mit einem Photosekundärelektronenvervielfacher (*PSEV*) in ein elektrisches Signal umgewandelt und verstärkt (Abschn. 4.2.2.1). Als Szintillatoren werden anorganische oder organische Kristalle sowie Flüssigkeiten bzw. feste Lösungen (Plastszintillatoren) eingesetzt. Anorganische Stoffe lumineszieren im Gegensatz zu organischen Stoffen nur im kristallinen Zustand. Die meisten Kristalle müssen durch Einbau von Fremdatomen (*Aktivatoren*) lumineszenzfähig gemacht werden. Organische Verbindungen können sowohl in Lösung als auch im kristallinen Zustand eingesetzt werden.

8.8.1.5 Anwendung radioaktiver Stoffe

Beim Einsatz radioaktiver Stoffe unterscheidet man gemäß Tabelle 8.8 zwischen *offenen* und *umschlossenen radioaktiven Strahlenquellen*. In umschlossenen radioaktiven Strahlenquellen sind die radioaktiven Stoffe in einer allseitig dichten, festen, inaktiven Hülle oder in einem festen, inaktiven Stoff eingebettet.

Unter betriebsmäßiger Beanspruchung wird ein Austritt radioaktiver Stoffe mit Sicherheit

Tabelle 8.8 Anwendung radioaktiver Nuklide

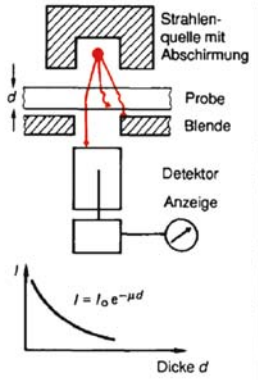
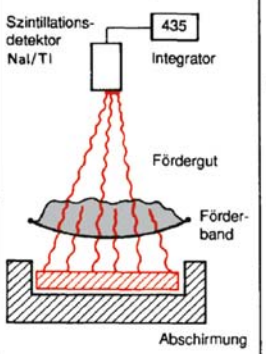
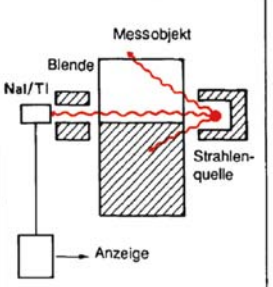
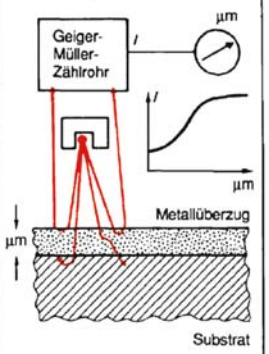
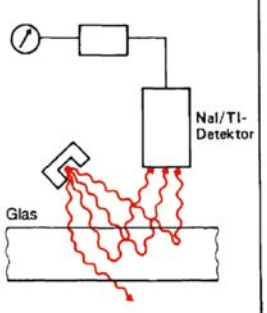
Bereiche	Anwendungsfelder
umschlossene Strahlungsquellen	
Medizin	Strahlentherapie
Strahlenchemie	Sterilisierung medizinischer Produkte (z. B. Einwegspritzen); Konservierung von Nahrungsmitteln; Abwasserbehandlung
chemische Analytik	Röntgenfluoreszenz-Analyse; Elektroneneinfangdetektor zum Spurennachweis halogenierter Kohlenwasserstoffe
Messtechnik	Durchstrahl- und Rückstrahl-Verfahren mit β- und γ-Quellen (z. B. Messung der Füllhöhe, der Dichte und der Dicke)
Energieumwandlung	Umwandlung der Zerfallsenergie in Wärme; weitere Umwandlung der Wärme (Seebeck-Effekt) in elektrische Energie; Radionuklid-Batterien
offene Strahlungsquellen	
Medizin	Organ-Funktionsdiagnostik (Leber- und Nierendiagnostik); Lokalisationsdiagnostik (Anreicherung im Gewebe); Szintigrafen
chemische Analytik	Bestimmung des Schilddrüsenhormons
Ökotoxikologie	Bestimmung der Anreicherung von Umweltchemikalien in Organen und Geweben von Tieren durch radioaktive Markierung
Prozessanalyse	quantitative Verfolgung des Stoff-Transports in verfahrenstechnischen Anlagen durch Zusatz radioaktiver Indikatoren
Verschleißmessungen	Abriebmessung bis 10^{-3} µm bis 10^{-4} µm

verhindert. Offene radioaktive Strahlenquellen sind beispielsweise *radioaktive Lösungen*. Tabelle 8.8 gibt einen Überblick der Einsatzgebiete radioaktiver Stoffe. Wichtige Bereiche sind die Medizin und Chemie. Außer der Funktions- und Lokalisationsdiagnostik werden radioaktive Stoffe zur Bestimmung beispielsweise des Schilddrüsenhormons Triiodthyronin (T3) im Konzentrationsbereich ng/ml (10^{-9} g/ml) routinemäßig eingesetzt. Ein immer wichtigeres Gebiet ist die Untersuchung des Verhaltens von Chemikalien in der Umwelt (*Ökotoxikologie*).

Abbildung 8.65 zeigt einige wichtige Einsatzgebiete umschlossener radioaktiver Strahlenquellen. Bei den *Durchstrahlverfahren* wird die Schwächung bzw. Absorption der Strahlung im Messobjekt zur Messung herangezogen. Die durchdringende Strahlungsintensität ist abhängig von der Dicke oder Füllhöhe des Objekts. Die *Rückstreuverfahren* nützen den Rückstreueffekt aus. Der Strahlendetektor ist im Gegensatz zu dem Durchstrahlmessverfahren nicht gegenüber dem radioaktiven Strahler, sondern auf der gleichen Seite angeordnet. Von diesen beiden Verfahren unterscheiden sich die *Radiografieverfahren*, bei denen das Untersuchungsobjekt durch β-, γ- oder n-Strahlen abgebildet wird.

Radioaktive Strahlung (meist α-Teilchen) ionisiert die Luft, deren Ionen die elektrische Aufladung neutralisiert. Dies erfolgt durch fest eingebaute Flächenstrahler (Statikeliminatoren) oder durch Luftgebläse mit einem radioaktiven Präparat in der Düse (Abb. 8.65). Eine Beseitigung statischer Elektrizität ist bei folgenden Problemen erforderlich:

- Klebeverhalten unterschiedlich geladener Warenbahnen (Papier, Folien aller Art),
- Anziehen unerwünschter Teilchen aus der Luft (z. B. Staubteilchen bei Lackierungsarbeiten),
- Funkenbildung (Gefahr bzw. Belästigung für Bedienungspersonal, eventuell Explosions- und Brandherde).

	Durchstrahlverfahren			Rückstreuverfahren	
Mess-prinzip	β-Strahlung  	γ-Strahlung  Bestimmung der Masse des Fördergutes	γ-Strahlung  	β-Strahlung  Messung der rückgestreuten β-Teilchen	γ-Strahlung  Dickenmessung durch γ-Rückstreuung
typische Anwen-dungen	Dickenmessung von z.B. Kunststoff, Papier, Metall. Messbereich: 1 mg/cm² bis 1000 mg/cm² Es ist eine kontinuierliche Messung und Kontrolle der Dicke von Folien möglich (Steuerung von Folienher-stellungsmaschinen). Messung von Staubniederschlägen auf Filter: Messbereich: 0,1 mg/m³ bis 200 mg/m³	Schichtdickenbestimmung von z. B. Metall, Glas, Kunststoff, die nicht mit β-Strahlung durchführbar sind (> 500 mg/cm²) Bestimmung der Masse des Förder-gutes auf Förderbändern (kg/m²)	Kontrolle der Füllhöhe in Behältern und der Füllstandshöhe von Tanks (Pumpensteuerung)	Bestimmung dünner Schichten auf einem Grundmaterial (Substrat). Messbereich liegt in der Größenord-nung Mikrometer je nach β - Energie (Strahlenquelle) und Material. Auf einem Grundmetall abgeschie-dene Metallüberzüge lassen sich bei genügend großem Unterschied der Ordnungszahl von Substrat und Me-tallüberzug messen.	Messung von Glas, Kunststoff, Leichtmetalllegierungen mit einer Flächenmasse > 500 mg/m²
Strahlen-quellen	Messbereich mg/cm² ^{147}Pm 1 bis 15 ^{204}Tl 7 bis 150 ^{90}Sr/^{90}Y 25 bis 500 ^{106}Ru/^{106}Rh 50 bis 1000 Aktiviät: 37 MBq bis 37 GBq	Messbereich kg/m² ^{241}Am 10 bis 100 ^{137}Cs 30 bis 200 ^{60}Co 100 bis 400 Aktivität: 37 MBq bis 37 GBq	^{241}Am (3,7 GBq) 10 cm Material geringer Ordnungs-zahl ^{137}Cs Aktivität entsprechend der Durchstrahldicke ^{60}Co eingesetzt für Dicken (Inhalt und Wandstärke) 7 cm bis 1000 cm	^{147}Pm ^{85}Kr ^{204}Tl ^{90}Sr/^{90}Y ^{106}Ru/^{106}Rh } 37 MBq bis 185 MBq Punktstrahler für Rückstreuung	typischer Messbereich ^{241}Am (3,7 GBq) Glas 1 mm bis 10 mm ± 0,03 mm Kunststoff 1 mm bis 30 mm ± 0,05 mm ^{137}Cs (1,8 GBq) Glas > 20 mm ± 0,1 mm

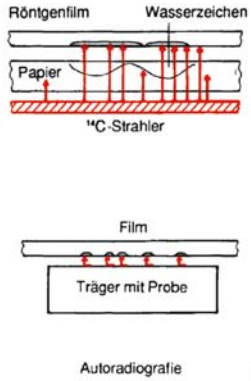
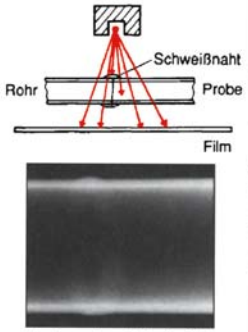
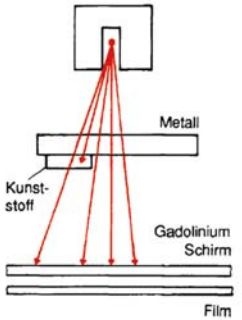
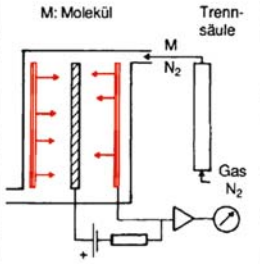
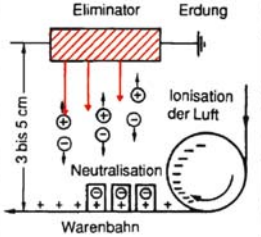
	Radiografieverfahren			Elektroneneinfangdetektor	Statik-Eliminatoren
Mess-prinzip	β-Strahlung  Autoradiografie	γ-Strahlung  Aufnahme eines Rohrabschnitts mit einwandfreier Schweißnaht.	n-Strahlung  	 1) $N_2 + \beta^- \rightarrow N_2^+ + e^-$ (thermisch) führt zu einem Grundstrom 10^{-9} A 2) $M + e^- \rightarrow M^- +$ Energie Moleküle fangen Elektron ein 3) $M^- + N_2^+ \rightarrow M + N_2$	α-Strahlung 
typische Anwen-dungen	Sichtbarmachung von Wasser-zeichen Autoradiografie Zur Bestimmung beispielsweise der Verteilung eines Medikaments in einem Organ, wird das Medikament radioaktiv markiert (^{14}C, ^{3}H). Nach Applikation der radioaktiven Sub-stanz wird von dem Organ ein dün-ner Schnitt hergestellt und mit einem Film kontaktiert. Die β - Strahlung führt zu einer Schwärzung, die die Verteilung der Substanz im Organ wiedergibt.	Bereiche unterschiedlicher Absorp-tion (Dicke) werden als Schattenbild abgebildet. Lufteinschlüsse oder andere Unre-gelmäßigkeiten einer Schweißnaht können dadurch zerstörungsfrei und am Montageort kontrolliert werden.	Thermische Neutronen werden von Elementen geringer Massenzahl ge-streut oder von Elementen mit gro-ßem Wirkungsquerschnitt absorbiert. Die Neutronen aktivieren die Gado-linium-Atome, deren radioaktive Strahlung den Film schwärzt. Zerstörungsfreie Untersuchung von Bauelementen mit Komponenten ge-ringer Massenzahl: Turbinenschau-feln, Ventilteile, Verklebungen. Die meisten Metalle sind für Neu-tronen transparent.	Durch Einfang der thermischen Elektronen vermindert sich der Grundstrom und führt somit zum Nachweis der Substanz. In der Gaschromatografie werden die Substanzen auf der Trennsäule getrennt und dann einzeln im Detektor nachgewiesen. Nachweis halogenierter Verbindun-gen (z.B. Pestizide, Dioxine) $<10^{-12}$g.	Aktive Eliminatorstäbe befinden sich z.B. in Kalandern oder Druckma-schinen kurz hinter den Umlenkrollen oder Walzen. Anwendungsbereiche: Drucken, Papierherstellung, Her-stellung von Überzügen, Umformung, Verpackung, Filmfertigstellung, Mi-krofilmverarbeitung. Anwendung luftionisierender Düsen, Pistolen und Gebläse z.B. in der Elektronik. Das Gebläse entfernt statische Aufladungen von gedruck-ten Schaltungen.
Strahlen-quellen	^{14}C Polymethylmethacrylat ca. 3,7 MBq	^{192}Ir bis 7,2 TBq ^{60}Co bis 72 TBq ^{170}Tm bis 1,3 TBq Optimaler Arbeitsbereich für Stahl in mm ^{60}Co 50 bis 150 ^{192}Ir 12 bis 62 ^{170}Tm 2,5 bis 12,5	^{252}Cf 100 µg bis 10 mg	^{63}Ni 370 MBq ^{3}H 18,5 GBq (in Folie aus Titannitrid)	^{210}Po 30 MBq/cm erzeugt einen Ionenstrom von ca. 10 µA/cm.

Abb. 8.65 Einsatzbereiche offener und umschlossener radioaktiver Strahlenquellen

8.8.2 Kernreaktionen

Die erste künstliche Kernumwandlung wurde von Rutherford 1919 beschrieben. Er beschoss in einer Nebelkammer Stickstoffkerne mit α-Teilchen des ^{214}Po und konnte das Auftreten von Protonen nachweisen:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} + \Delta E\,.$$

Nach der Entdeckung des Neutrons führten 1934 F. Joliot (1900 bis 1958) und I. Curie (1887 bis 1956) die erste Kernreaktion durch, bei der ein künstliches radioaktives Nuklid entstand:

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \Delta E\,,$$
$$^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \Delta E\,.$$

Zur Vereinfachung der Reaktionsgleichung wird folgende Kurzschreibweise eingeführt:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \Delta E$$
$$^{9}_{4}\mathrm{Be}\,(\alpha, \mathrm{n})\,{}^{12}_{6}\mathrm{C}\,.$$

Diese (α, n)-Reaktion dient zur Herstellung von Neutronen im Labor.

8.8.2.1 Energetik

Die Kernreaktion kann allgemein geschrieben werden als

$$\underset{\text{Target}}{\mathrm{A}} + \underset{\text{Projektil}}{\mathrm{a}} = \underset{\text{Produktkern}}{\mathrm{B}} + \underset{\text{Produktteilchen}}{\mathrm{b}} + \Delta E$$

A (a, b) B .

Die bei der Kernreaktion frei werdende oder benötigte Energie ΔE (*exoergische* bzw. *endoergische Reaktion*) berechnet sich aus der Massendifferenz des Ausgangszustands ($A + a$) und des Endzustandes (B + b):

$$\Delta E = [(m_\mathrm{a}(\mathrm{A}) + m_\mathrm{a}(\mathrm{a})) - (m_\mathrm{a}(\mathrm{B}) + m_\mathrm{a}(\mathrm{b}))]c^2\,.$$

In Tabelle 8.9 sind einige stabile und instabile Nuklide jeweils mit der Nuklidmasse, Halbwertszeit, Häufigkeit und dem Wirkungsquerschnitt zusammengestellt. Anhand dieser Werte errechnet sich der ΔE-Wert für die Reaktion, $^{9}_{4}$Be (α, n) $^{12}_{6}$C zu 5,7 MeV. Diese Reaktion ist exoergisch, und das α-Teilchen muss lediglich die elektrische Abstoßung durch die positive Kernladung überwinden. Für die (n, γ)-Reaktion $^{164}_{66}$Dy (n, γ) $^{165}_{66}$Dy ergibt sich ein ΔE-Wert von 5,63 MeV. Die bei der exoergischen Reaktion frei werdende Energie verteilt sich auf den Produktkern B und das Produktteilchen b unter Berücksichtigung des Impulserhaltungssatzes. Für die (n, γ)-Reaktion ergibt sich, dass nahezu der gesamte Energiebetrag ΔE als γ-Quant(en) ausgesendet wird.

Tabelle 8.9 Daten einiger Nuklide

Nuklid	Häufigkeit in %	Nuklidmasse in u	Halbwertszeit T	Wirkungsquerschnitt für thermische Neutronen
^{4}He	100	4,00260325	–	
^{9}Be	100	9,0121825	–	0,0092 barn
^{10}B	20	10,0129380	–	0,5 barn
^{11}B	80	11,0093053	–	0,005 barn
^{12}C	98,89	12,00000000	–	0,0034 barn
^{17}N		17,008449	4,61 s	
^{21}Mg		21,011715	122,5 ms	
^{113}Cd	12,26	112,9044013	–	20 000 barn
^{115}Cd		114,905429	53,45 h	

Eine endoergische Reaktion ($\Delta E < 0$) kann nur ablaufen, wenn das Projektil a eine minimale Energie E_S mitbringt. Diese *Schwellenenergie* ist infolge der Impulserhaltung größer als ΔE:

$$E_S = -\Delta E \left(1 + \frac{m_a(a)}{m_a(A)}\right) . \qquad (8.92)$$

Für die Reaktion $^{27}_{13}$Al (α, n) $^{30}_{15}$P mit $\Delta E = -2{,}65$ MeV ergibt sich E_S zu 3,04 MeV.

Beim Ablauf der Kernreaktion mit geladenen Teilchen muss die Abstoßungsenergie zwischen gleichnamig geladenen Teilchen berücksichtigt werden (*Coulomb-Wall* V_C). Es gilt

$$V_C = 1{,}44 \frac{Z_a Z_A}{R} . \qquad (8.93)$$

Hierin ist V_C die Höhe des Coulomb-Walls in MeV, Z_a die Ladung des Projektils und Z_A die Ladung des Targetkerns jeweils in Vielfachen der Elementarladung sowie R die Summe der Radien von A und a in fm ($R = R_0(A_a^{1/3} + A_A^{1/3})$, $R_0 = 1{,}2$ fm).

Für die Reaktion $^{9}_{4}$Be (α, n) $^{12}_{6}$C ergibt sich ein Coulomb-Wall von $V_C = 3{,}16$ MeV. Aufgrund dieses Ergebnisses dürfte die Kernreaktion klassisch nur mit α-Teilchen mit einer Energie > 3,16 MeV ablaufen. Durch den *Tunneleffekt* (Abschn. 8.2.2) ist die (α, n)-Reaktion auch mit α-Teilchen geringerer Energie möglich.

Wie beim radioaktiven Zerfall können auch die Kernreaktionen in einem Energiediagramm dargestellt werden. Abbildung 8.66 zeigt ein allgemeines Energiediagramm. Aus dem Target und dem Projektil (A + a) bildet sich ein Zwischenkern (*Compoundkern C*) mit einer Lebensdauer < 10^{-16} s. Der Grundzustand des Zwischenkerns liegt im Allgemeinen tiefer als der Ausgangszustand (A + a) aufgrund der Bindungsenergie $E_{B,a}$ des Projektils im Compoundkern. Für Protonen und Neutronen beträgt diese Energie im Mittel 8 MeV. Je nach Energie des Projektils E_a wird ein angereg-

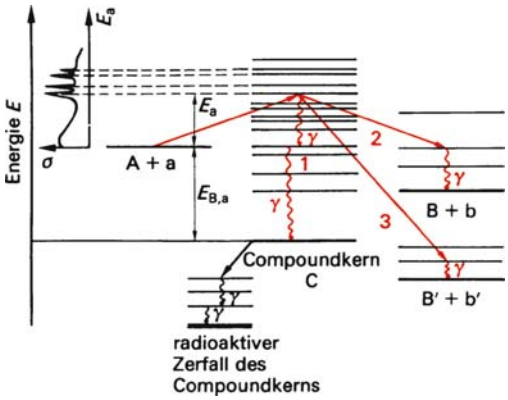


Abb. 8.66 Darstellung der Kernreaktion über einen Compoundkern im Energiediagramm

Tabelle 8.10 Kernreaktionen

Bezeichnung	Beschreibung
Austauschreaktion	Ein Teilchen gelangt in den Kern, ein anderes wird dafür emittiert. (p, n); (d, p); (α, p)
Einfangreaktion	Das einfallende Teilchen verbleibt im Kern. Die Anregungsenergie wird durch Emission von γ-Quanten frei. (n, γ)
elastische Streuung	Das einfallende Teilchen wird, ohne den Kern anzuregen, wieder emittiert. (n, n)
inelastische Streuung	Das Teilchen gibt einen Teil seiner Energie als Anregungsenergie an den Kern. (n, n′)
inelastische Stöße	Teilchen werden aus dem Kern durch energiereiche Teilchen herausgeschlagen. (n, 2n); (d, 2n)
Kernspaltung	Der Kern zerfällt beim Beschuss in zwei oder mehrere Bruchstücke. (n, f); (γ, f)

ter Zustand des Compoundkerns erreicht, von dem aus verschiedene Zerfallsreaktionen ablaufen können. Bei (n, γ)-Reaktionen (1) geht der angeregte Compoundkern unter Aussendung von γ-Quanten in den Grundzustand über. Viele der so entstandenen Reaktionsprodukte sind infolge des Neutronenüberschusses β^--Strahler. Der Compoundkern kann auch über den Weg 2 oder 3 in B + b bzw. B′+ b′ zerfallen. In Tabelle 8.10 sind einige Kernreaktionen zusammengestellt. Welche der möglichen Kernreaktionen ablaufen, wird durch die Energie und Art des Projektils bestimmt.

8.8.2.2 Wirkungsquerschnitt

Der *Wirkungsquerschnitt* σ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine Kernreaktion stattfindet. Stellt man sich die Atomkerne als kleine Zielscheiben bestimmter Fläche vor, die mit Projektilen a beschossen werden, so wird immer dann eine Kernreaktion (a, b) ablaufen, wenn ein Projektil die Zielscheibe trifft, wie in Abb. 8.67 verdeutlicht. Damit ergibt sich die Trefferanzahl pro Zeit zu

$$\frac{\text{Trefferzahl}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Projektilteilchen a}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}} \cdot \begin{array}{c}\text{Wahrscheinlichkeit}\\ \text{des Treffers}\end{array}$$

$$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = \Phi \cdot N_A\sigma\,.$$

Φ ist die Projektilflussdichte in $\mathrm{m^{-2}\,s^{-1}}$, N_A die Anzahl der Kerne A im Target und σ der Wirkungsquerschnitt (Fläche der Zielscheibe je Atom in $\mathrm{m^2}$).

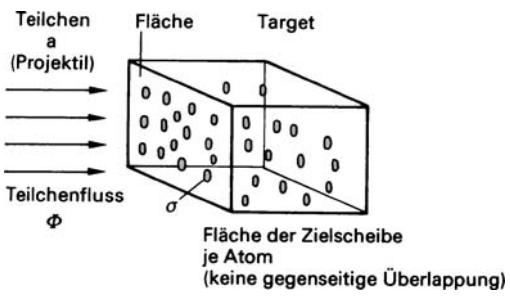


Abb. 8.67 Zum Begriff Wirkungsquerschnitt

Die Einheit des Wirkungsquerschnitts ist das *barn* ($1\,\mathrm{b} = 10^{-28}\,\mathrm{m^2}$) und entspricht etwa der Kernquerschnittsfläche. Der Wirkungsquerschnitt ist abhängig von dem Reaktionstyp, der Energie des Projektils und dem Zielkern (Target). Er kann ein Vielfaches der Kernquerschnittsfläche betragen. Dies ist nur quantenmechanisch durch die Welleneigenschaften zu erklären. Jedem Reaktionstyp eines bestimmten Kerns A mit dem Projektil, beispielsweise Neutronen n, muss ein Wirkungsquerschnitt zugeordnet werden (z. B. $\sigma^A_{(n,\,n)}$, $\sigma^A_{(n,\,\gamma)}$, $\sigma^A_{(n,\,p)}$, …; partielle Wirkungsquerschnitte). Der totale Querschnitt oder *Gesamtwirkungsquerschnitt* σ^A_t ergibt sich durch Addition der *partiellen Wirkungsquerschnitte*:

$$\sigma^A_t = \sigma^A_{(n,\,n)} + \sigma^A_{(n,\,\gamma)} + \cdots\,. \qquad (8.94)$$

Durch Bestrahlung von $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ mit Neutronen können folgende Kernreaktionen ablaufen:

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow \underset{\text{Compound-kern}}{(^{28}_{13}\mathrm{Al})} \begin{cases} \xrightarrow{\sigma(n,\gamma)} {}^{28}_{13}\mathrm{Al} + \gamma \\ \xrightarrow{\sigma(n,p)} {}^{27}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \\ \xrightarrow{\sigma(n,\alpha)} {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + {}^{4}_{2}\alpha \\ \xrightarrow{\sigma(n,2n)} {}^{26}_{13}\mathrm{Al} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}\,. \end{cases}$$

Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Projektilenergie wird als *Anregungsfunktion* bezeichnet. Abbildung 8.68 zeigt die Anregungsfunktionen des $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ für die unterschiedlichen Reaktionen. Der Wirkungsquerschnitt kann sich dabei um Größenordnungen ändern und weist u. U. bei bestimmten Energien ein Maximum auf. Dies wird besonders beim Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts für Neutronen mit Cd in Abb. 8.69 deutlich. Bei bestimmten Neutronenenergien treten Maxima des Wirkungsquerschnitts (*Re-*

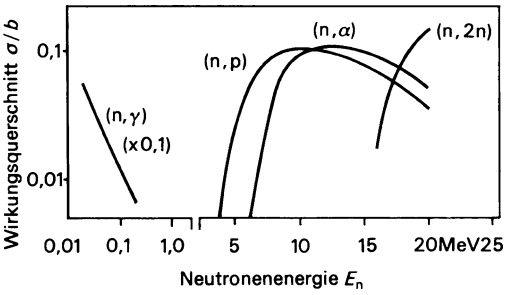


Abb. 8.68 Wirkungsquerschnitt von ^{27}Al für verschiedene Kernreaktionen in Abhängigkeit von der Neutronenenergie

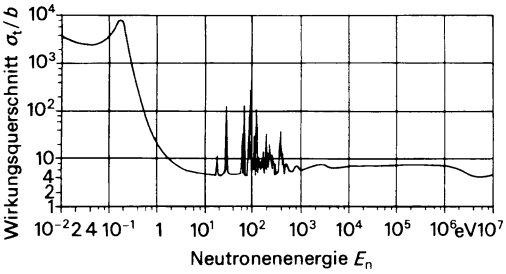


Abb. 8.69 Wirkungsquerschnitt von Cadmium in Abhängigkeit von der Neutronenenergie

sonanzen) auf, wenn die Energie des Teilchens einem Wert entspricht, der genau zu einem Energieniveau des Zwischenkerns führt (Abb. 8.66). Analoge Resonanzen treten in der Elektronenhülle auf, wenn die Strahlungsenergie einer Energiedifferenz der Elektronenniveaus entspricht.

In den meisten Fällen ist der durch die Kernreaktion X(x, y)Y gebildete Kern Y radioaktiv und zerfällt mit der Zerfallskonstanten $\lambda_Y (\lambda_Y = \ln 2/T_Y)$. Für die Änderungsrate dN/dt der Kerne Y gilt

$$\left.\begin{aligned}\text{Bildung } \frac{dN_Y}{dt} &= \Phi N_X \sigma \\ \text{Zerfall } \frac{dN_Y}{dt} &= -\lambda_Y N_Y\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{dN_Y}{dt}$$

$$= N_X \Phi \sigma - \lambda_Y N_Y \qquad (8.95)$$

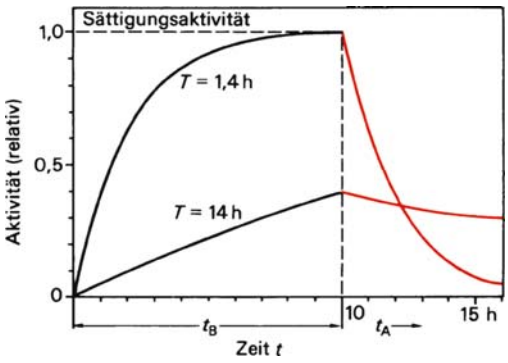


Abb. 8.70 Darstellung der Aktivierungsgleichung

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt für N_Y in Abhängigkeit von der Zeit

$$N_Y = \frac{\sigma \Phi N_X}{\lambda_Y}(1 - e^{-\lambda_Y t_B}) \,. \qquad (8.96)$$

Diese Gleichung ist in Abb. 8.70 für zwei unterschiedliche Halbwertszeiten dargestellt. Nach der Bestrahlungszeit t_B zerfällt das Radionuklid mit der Halbwertszeit T_Y.

8.8.3 Kernspaltung und Kernreaktoren

8.8.3.1 Kernspaltung

Durch Bestrahlung schwerer Atomkerne mit geeigneten Teilchen a (z. B. n, p, d, α) kann eine Kernspaltung ausgelöst werden. Eine solche Spaltung wird im Gegensatz zur Spontanspaltung als *künstliche Spaltung* (kurz Kernspaltung) bezeichnet. Die erste künstliche Kernspaltung wurde von O. Hahn (1879 bis 1968) und F. Strassmann (1902 bis 1980) 1938 bei dem Versuch der Herstellung von Transuranelementen entdeckt.

Die wichtigste Spaltreaktion ist die (n, f)-Reaktion. Die Spaltung wird dabei durch thermische Neutronen ($E \sim 10^{-2}$ eV) ausgelöst:

$$\mathrm{A} + \mathrm{n} \rightarrow \underset{\text{Compoundkern}}{(\mathrm{C})} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{D} + \nu\mathrm{n} + \Delta E \,.$$

Aus dem schweren Kern A bildet sich durch Neutroneneinfang der Compoundkern C. Dieser zerfällt in zwei mittelschwere Kerne B und D unter Aussendung mehrerer Neutronen. In Tabelle 8.11 sind für einige Kerne die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{(n,f)}$ und die Neutronenzahl ν für die Kernspaltung mit thermischen Neutronen zusammengestellt. Für (g, u)-Kerne (z. B. ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu und ^{241}Pu) ist der Wirkungsquerschnitt besonders groß, verglichen mit (g, g)-Kernen (z. B. ^{238}U, ^{240}Pu und ^{232}Th). Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Bindungsenergie eines zusätzlichen Neutrons für (g, u)-Kerne besonders groß ist, sodass die Energieschwelle für die Kernspaltung leichter überschritten werden kann. Dies führt zu einem großen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{(n,f)}$. Abbildung 8.71 zeigt die Energieabhängigkeit des Spaltungsquerschnitts $\sigma_{(n,f)}$ für ^{238}U, ^{235}U und ^{239}Pu. Das Resonanzgebiet zwischen 1 eV und 1 keV ist nur angedeutet.

Der Ablauf der Kernspaltung durch thermische Neutronen ist für den wichtigen Spalt-

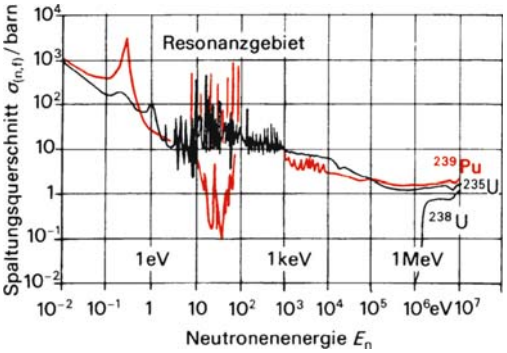


Abb. 8.71 Abhängigkeit des Spaltungsquerschnitts von der Neutronenenergie. (Das Resonanzgebiet ist nur angedeutet.)

stoff ^{235}U in Abb. 8.72 gezeigt. Durch *Neutroneneinfang* bildet sich aus ^{235}U der Compoundkern ^{236}U. Dabei wird die Bindungsenergie des Neutrons in Höhe von etwa 6 MeV frei. Der angeregte Kern führt Deformationsschwingungen aus (vergleichbar mit einem schwingenden Wassertropfen). Bei großen Deformationen des Kerns ist die langreichweitige Coulomb-Abstoßung der Protonen größer als die kurzreichweitige Kernkraft, sodass der Kern instabil wird und in zwei Bruchstücke zerfällt. Von der Neutronenabsorption bis zur kritischen Deformation dauert es etwa 10^{-15} s. Die entstandenen Spaltprodukte liegen in hochangeregten Zuständen vor und zerfallen innerhalb von 10^{-14} s unter Aussendung von γ-Strahlung und Abdampfen von Neutronen (*prompte Neutronen*) in den Grundzustand. Diese sogenannten primären Spaltprodukte zerfallen durch β^--Zerfall und Aussenden von γ-Quanten über mehrere Nuklide (*sekundäre Spaltprodukte*) in stabile Kerne.

Zwei dieser Spaltketten sind in Abb. 8.73 gezeigt. In einer Zeit von 0,2 s bis 54 s nach der Spaltung treten durch Neutronenzerfall von Spaltprodukten sogenannte *verzögerte Neutronen* auf. Der Bruchteil dieser verzögerten Neutronen beträgt bei der Spaltung des ^{233}U 0,0026, bei ^{235}U 0,0065 und bei ^{239}Pu 0,0021.

Tabelle 8.11 Wirkungsquerschnitt $\sigma_{(n,f)}$

Nuklid	Kerntyp	$\sigma_{(n,f)}$ in barn	Neutronenzahl ν
^{227}Th	(g, u)	$\approx$ 200	
^{229}Th	(g, u)	31	
^{232}Th	(g, g)	0,00004	
^{230}Th	(g, g)	$\leqq$ 0,0012	2,08 ± 0,02
^{233}U	(g, u)	531	3,13 ± 0,06
^{235}U	(g, u)	582	2,43 ± 0,07
^{238}U	(g, g)	< 0,0005	
^{239}U	(g, u)	$\approx$ 14	
^{239}Np	(u, u)	2500	
^{237}Np	(u, g)	0,019	
^{238}Np	(u, u)	2070	
^{239}Pu	(g, u)	743	2,874 ± 0,138
^{240}Pu	(g, g)	$\approx$ 0,03	2,884 ± 0,007
^{241}Pu	(g, u)	1009	2,969 ± 0,023

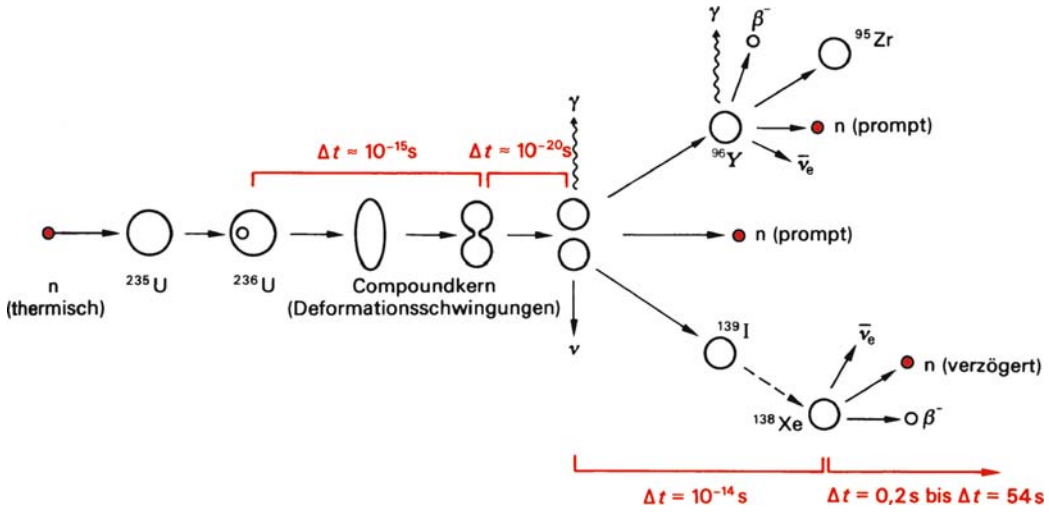


Abb. 8.72 Zeitlicher Verlauf bei der Kernspaltung

Die Häufigkeit der Spaltprodukte von ^{235}U bei der Spaltung durch thermische Neutronen ist in Abb. 8.74 in Abhängigkeit von der Massenzahl gezeigt. Es tritt bevorzugt eine *asymmetrische Spaltung* auf. Die Maxima der Kurve liegen im Bereich der Massenzahlen 90 bis 100 und 133 bis 143 mit einer Spaltausbeute von etwa 6%. Für die *symmetrische Spaltung* (A = 236/2) beträgt die Spaltausbeute lediglich 10^{-2}%. Die Häufigkeitsverteilung der Spaltprodukte sieht für ^{233}U und ^{239}Pu ähnlich aus.

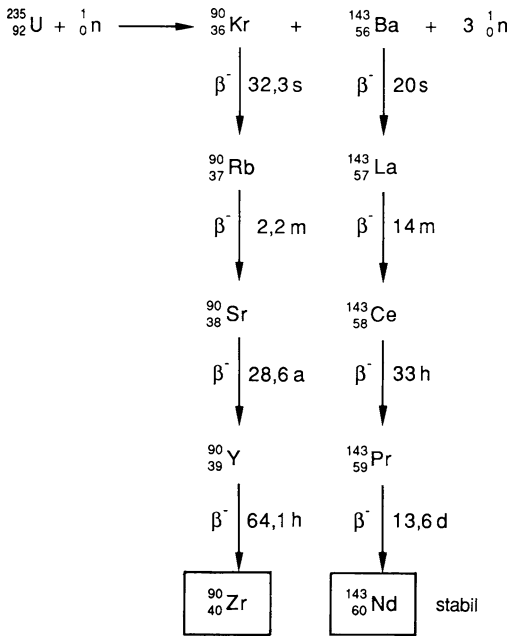


Abb. 8.73 Spaltkette von ^{235}U

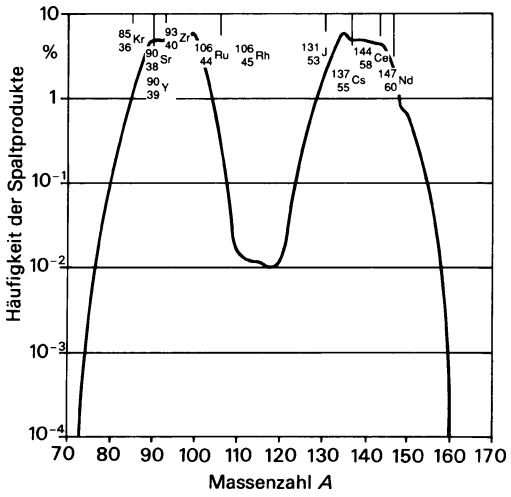


Abb. 8.74 Massenverteilungskurve bei der Spaltung von ^{235}U mit thermischen Neutronen

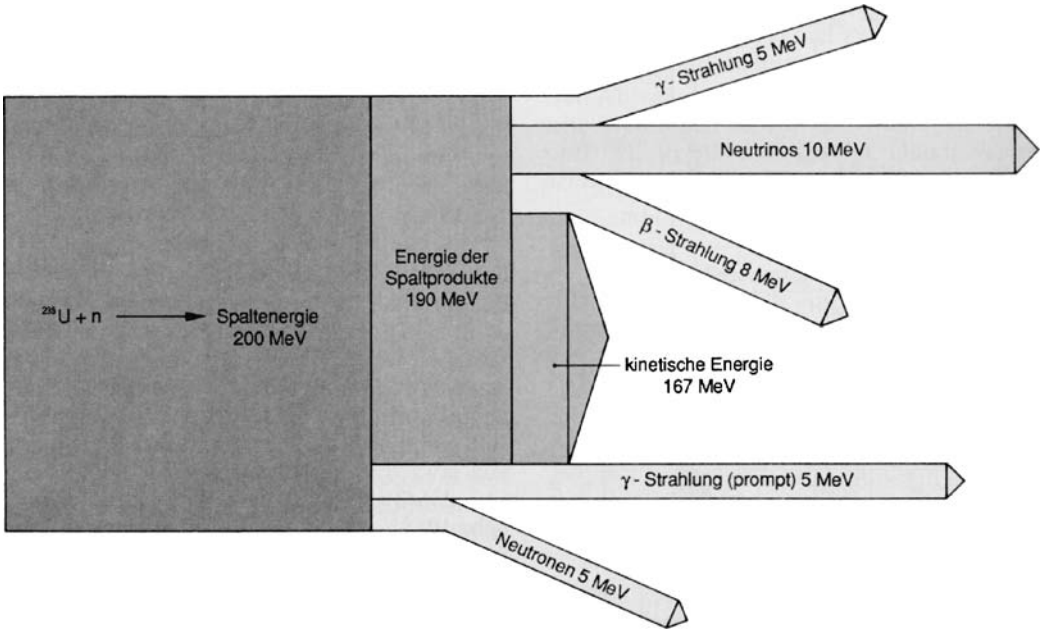


Abb. 8.75 Verteilung der Spaltenergie auf die Spaltprodukte

Der bei der Spaltung frei werdende Energiebetrag ΔE kann aus der *Bindungsenergiekurve* (Abb. 8.53) abgeschätzt werden. Für ^{235}U ergibt sich ein Energiegewinn von 0,86 MeV je Nukleon oder 200 MeV je Spaltung. Diese Energie verteilt sich zu 85% auf die Spaltprodukte als kinetische Energie. Abbildung 8.75 zeigt die Energieverteilung auf die Reaktionsprodukte. Durch Umwandlung dieser Spaltenergie in Wärme kann mittels einer Dampfturbine elektrische Energie erzeugt werden (*Kernreaktoren*).

8.8.3.2 Kernreaktoren

Die kinetische Energie der Spaltprodukte und die Energie des β-Zerfalls werden in unmittelbarer Nähe des Zerfallsorts in Wärme umgewandelt. Die Energie der *Neutronen* und der γ-Strahlung steht nur dann als Wärme zur Verfügung, wenn diese im betreffenden Medium absorbiert wird. Die Energie der *Neutrinos* geht infolge der geringen Wechselwirkung verloren. Durch *Neutroneneinfang* erhöht sich die Energie je Spaltung um den Wert der Bindungsenergie der Neutronen. Im Mittel wird je Kernspaltung des ^{235}U eine nutzbare Energie von 200 MeV frei.

Für die Berechnung der Energie, die aus 1 kg spaltbaren Materials ^{235}U in einem Kernreaktor gewonnen werden kann, muss berücksichtigt werden, dass ein Teil des spaltbaren Materials durch (n, γ)-Reaktion in weniger leicht spaltbares Material umgewandelt wird. Dieser Anteil ergibt sich aus dem Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für Spaltung und Absorption ($\sigma_{(n,f)}/\sigma_{(n,\gamma)} = 0{,}839$):

$$E = 200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 0{,}839 \cdot \frac{1\,000 \text{ g}}{235 \text{ g/mol}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} ,$$

$$E = 6{,}89 \cdot 10^{13} \text{ Ws} = 6{,}89 \cdot 10^{10} \text{ kJ} = 797 \text{ MWd} .$$

Zum Vergleich: Bei der Verbrennung von 1 kg Kohlenstoff wird eine Energie von $34 \cdot 10^3$ kJ frei ($5 \cdot 10^7$ mal weniger als für 1 kg ^{235}U).

Voraussetzung für die Energiegewinnung durch Kernspaltung ist das Freiwerden von 2 bis 3 Neutronen je Spaltung, um eine *Kettenreaktion* zu ermöglichen. Die Spaltung eines ^{235}U-Kerns führt zu 2 Neutronen, die ihrerseits eine Spaltung induzieren und somit $2 \cdot 2$ Neutronen freisetzen. Diese 4 Neutronen erzeugen durch Kernspaltung $2 \cdot 4$ Neutronen und so fort. Für diese Kettenreaktion ist der *Multiplikationsfaktor* $k = 2$, da je Neutron 2 Neutronen erzeugt werden. Um eine kontrollierte Kettenreaktion zur Energiegewinnung aufrecht zu erhalten, muss $k = 1$ sein.

In Abb. 8.76 ist die Neutronenbilanz für einen idealisierten (unendlich ausgedehnten) Reaktor dargestellt. Ein Neutron erzeugt durch die Kernspaltung ν *schnelle Neutronen* ($\nu = 2{,}43$ für ^{235}U). Infolge der Spaltung von ^{238}U mit schnellen Neutronen werden $\varepsilon - 1$ zusätzliche schnelle Neutronen erzeugt. Damit diese schnellen Neutronen (Energie einige MeV) weitere ^{235}U-Kerne spalten können, müssen sie durch Streuprozesse auf thermische Energie abgebremst werden. Dies erfolgt in einem *Moderator*, der aus leichten Atomen mit geringen Einfangsquerschnitten, beispielsweise Wasser oder Graphit, besteht. Zur *Thermalisierung* von Spaltneutronen sind im Mittel 18 Stöße mit Wassermolekülen, dagegen 2 170 mit Uranatomen notwendig (Ausgangsenergie $E_n = 1{,}75$ MeV; Endenergie $E_n = 0{,}025$ eV). Bei der Thermalisierung der Neutronen entstehen Verluste durch Neutroneneinfang des ^{238}U im Resonanzgebiet (p). Damit eine Spaltung auftritt, muss das thermische Neutron vom Spaltstoff absorbiert werden (f). Diese Absorption führt mit der Wahrscheinlichkeit p^* zu einer Spaltung. Diese *Spaltwahrscheinlichkeit* p^* ergibt sich aus dem Verhältnis des Spaltquerschnitts zum Gesamtabsorptionsquerschnitt.

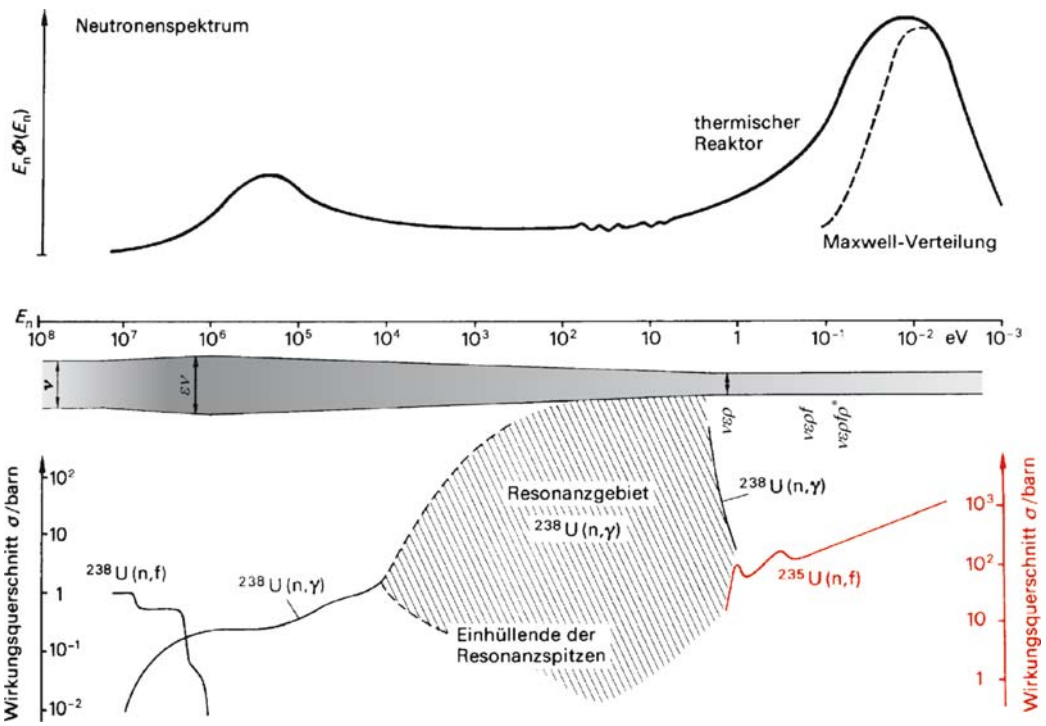


Abb. 8.76 Neutronenbilanz bei der Thermalisierung schneller Spaltneutronen

Der Multiplikationsfaktor k_∞ für einen idealen Reaktor ist

$$k_\infty = \nu\,\varepsilon\,p\,f\,p^* = \eta\,\varepsilon\,p\,f\,. \qquad (8.97)$$

Der *Vermehrungsfaktor* $\eta = \nu p^*$ gibt die Anzahl der schnellen Neutronen an, die für jedes im Spaltstoff absorbierte Neutron emittiert werden. Abbildung 8.77 zeigt η für verschiedene Spaltstoffe in Abhängigkeit von der Neutronenenergie. Für ^{235}U ergibt sich für thermische Neutronen ($E_n \approx 10^{-2}$ eV) mit $\nu = 2{,}43$ der Wert $\eta = 2{,}07$. Es sind also nur 2,07 Neutronen weiterhin nutzbar, der Rest geht durch die (n, γ)-Reaktion mit ^{238}U verloren.
Beim realen Reaktor muss der Neutronenverlust durch die endliche Ausdehnung des Reaktorkerns berücksichtigt werden. Der *effektive Multiplikationsfaktor* ist

$$k_{\text{eff}} = k_\infty L\,. \qquad (8.98)$$

L ist die *Leckage*, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spaltneutron im Reaktor verbleibt. Je nach Größe von k_{eff} unterscheidet man drei Fälle:

- $k_{\text{eff}} < 1$: Das System ist *unterkritisch*, die Kettenreaktion kann nicht ablaufen.
- $k_{\text{eff}} = 1$: Das System ist *kritisch*, die Kettenreaktion ist möglich.
- $k_{\text{eff}} > 1$: Das System ist *überkritisch*.

Durch den Verbrauch an Kernbrennstoff und das Entstehen neutronenabsorbierender Spaltprodukte ist eine bestimmte *Überschussreaktivität* $\delta = k_{\text{eff}} - 1$ erforderlich. Diese wird durch Kontrollstäbe aus stark neutronenabsorbierendem Material (z. B. Cadmium, Bor) gesteuert. Das Auftreten verzögerter Neutronen spielt bei der Regelung des Reaktors eine wichtige Rolle, da durch sie eine Verlängerung der Regelzeit hervorgerufen wird.

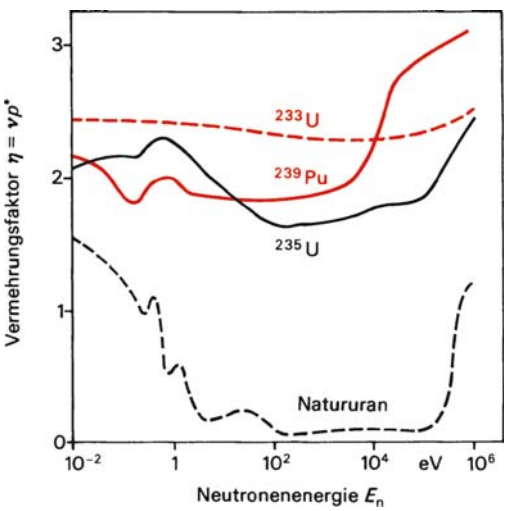


Abb. 8.77 Vermehrungsfaktor in Abhängigkeit von der Neutronenenergie für verschiedene Spaltstoffe

8.8.3.3 Reaktortypen

Die Einteilung der Reaktoren kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen, beispielsweise nach dem

- *Brennstoff* (z. B. Uranoxid, Uran-Plutoniumoxid (MOX)),
- *Moderator* (z. B. leichtes Wasser, schweres Wasser (D_2O), Graphit),
- *Kühlmittel* (z. B. gasgekühlte, wassergekühlte, natriumgekühlte Reaktoren).

In Abb. 8.78 bis 8.80 sind einige Reaktortypen mit ihren charakteristischen Daten beschrieben.
Für den Betrieb eines *Druckwasserreaktors* (Abb. 8.78) mit ^{235}U als Spaltstoff muss dieser etwa auf 5% angereichert werden (natürlicher ^{235}U-Gehalt 0,72%). Die abgebrannten Brennstoffelemente enthalten noch etwa 0,8% ^{235}U. Die gewonnene Energie stammt dabei zur Hälfte aus der Spaltung von ^{239}Pu, das durch Neutroneneinfang aus ^{238}U gebildet wird.
Das Verhältnis neu gebildeter spaltbarer Atome zur Anzahl der gespaltenen Atome

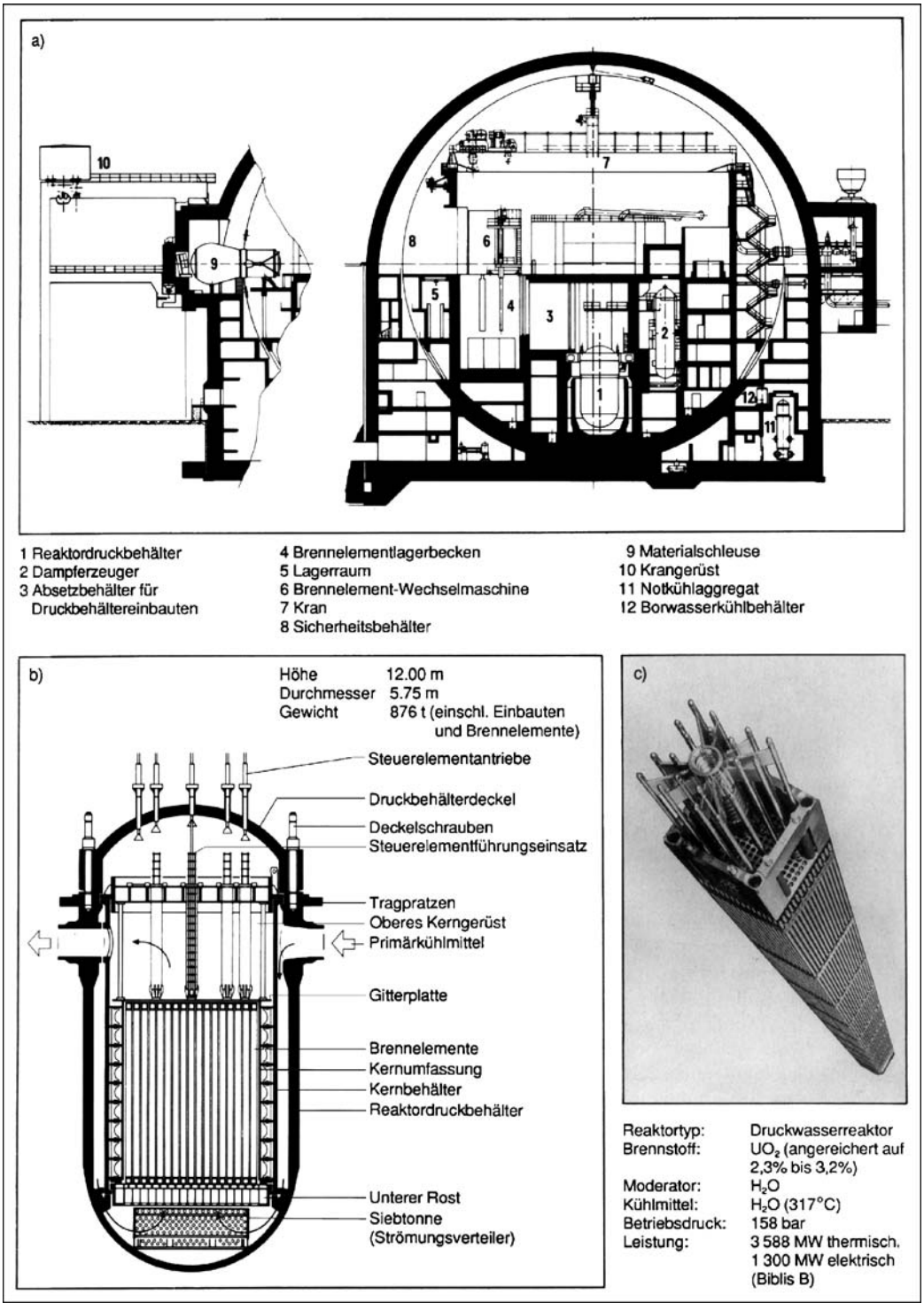


Abb. 8.78 **a**) Reaktorgebäude, **b**) Reaktordruckbehälter und **c**) Brennstoffelement eines Druckwasserreaktors. Werkbilder: Kraftwerk-Union

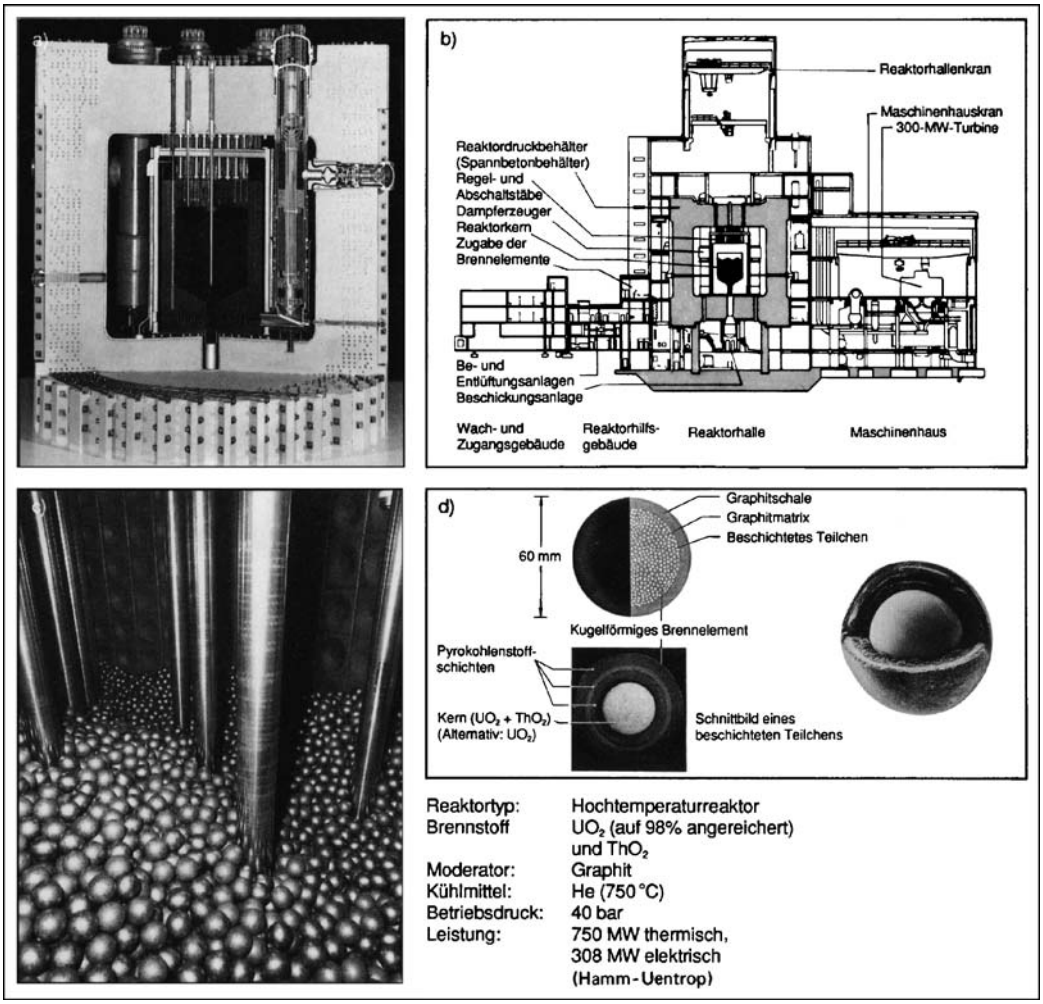


Abb. 8.79 Reaktorgebäude, Reaktorkern und Brennelement eines Hochtemperaturreaktors. Werkfoto: Hochtemperatur-Reaktorbau GmbH

wird als *Konversionsfaktor* bzw. *Brutrate* bezeichnet. Ist die Brutrate größer als 1, so erzeugt der Reaktor mehr spaltbares Material als er verbraucht (Brutreaktor s. Abb. 8.80). Folgende Kombinationen von Spalt- und Brutstoff sind sinnvoll:

$$^{238}\mathrm{U} \xrightarrow{(n,\gamma)} {}^{239}\mathrm{U} \xrightarrow[23{,}5\,\mathrm{min}]{\beta^-} {}^{239}\mathrm{Np} \xrightarrow[2{,}36\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}^{239}\mathrm{Pu}$$

$$^{232}\mathrm{Th} \xrightarrow{(n,\gamma)} {}^{233}\mathrm{Th} \xrightarrow[22{,}3\,\mathrm{min}]{\beta^-} {}^{233}\mathrm{Pa} \xrightarrow[27{,}0\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}^{233}\mathrm{U}$$

Brutstoff — Spaltstoff

Zur Beurteilung der Möglichkeit eines Brutreaktors ist der *Vermehrungsfaktor* η wichtig. Aus Abb. 8.77 ist zu erkennen, dass ^{239}Pu als Spaltstoff mit thermischen Neutronen ($E_n \approx 10^{-2}$ eV) lediglich den Wert 2,1 hat. Dieser Wert ist zur Aufrechterhaltung einer Kettenreaktion zu gering. Für schnelle Neutronen ($E_n \sim$ MeV) steigt der η-Wert auf 2,93 an. Deshalb ist ein Brutreaktor auf der Basis Uran-238/Plutonium-239 nur mit schnellen Neutronen durchführbar (*schneller Brutreaktor*).

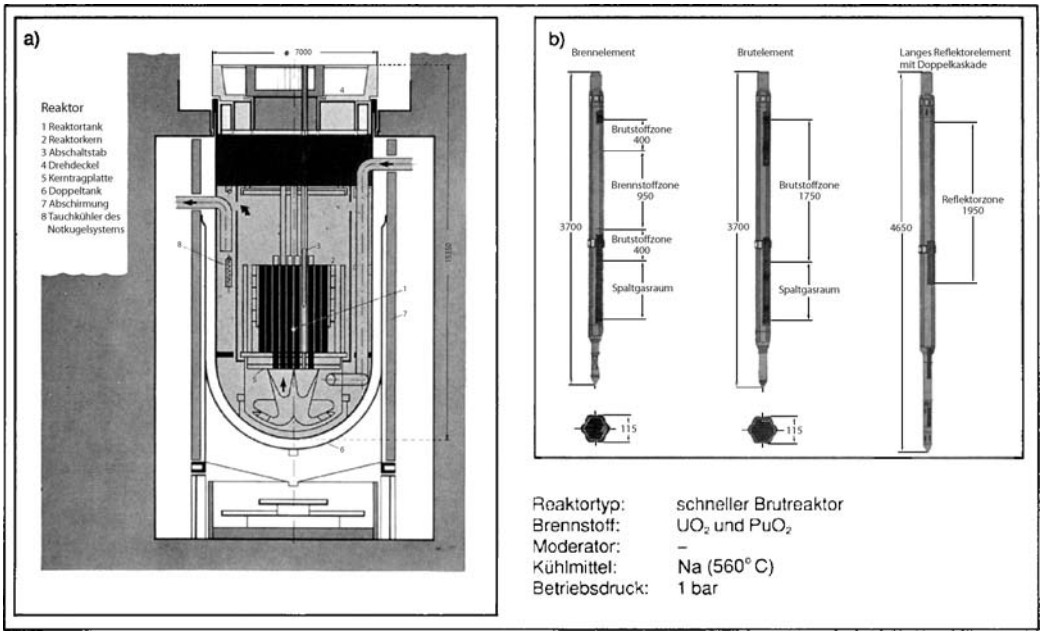


Abb. 8.80 Reaktortank und Brennelemente eines schnellen Brutreaktors. Werkfoto: Schnell-Brüter-Kernkraftwerksgesellschaft

Für ^{233}U als Spaltstoff beträgt der η-Wert für thermische Neutronen 2,3 und damit ist ein thermischer Brüter möglich. Im *Thorium-Hochtemperaturreaktor* (Abb. 8.79) wird ein Konversionsfaktor nahe bei 1 erreicht.

8.8.4 Kernfusion

8.8.4.1 Fusionsreaktion

Aus Abb. 8.53 ist ersichtlich, dass eine *Verschmelzung* (*Fusion*) leichter Kerne, z. B. Wasserstoff zu Helium, zu einem Energiegewinn führt. Solche Fusionsreaktionen laufen ständig in der Sonne und in Fixsternen ab. Man unterscheidet hierbei zwischen dem *Deuterium-Zyklus* und dem *Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus*.

Deuterium-Zyklus

$$^1_1\mathrm{p} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^2_1\mathrm{D} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} \quad \text{(langsam)}$$
$$^2_1\mathrm{D} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma \quad \text{(rasch)}$$
$$^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\,{}^1_1\mathrm{p} \quad \text{(rasch)}$$
$$\text{Bruttoreaktion } 4\,{}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\,\mathrm{e}^+ + 2\,\nu_\mathrm{e} + \Delta E$$

Kohlenstoff-Zyklus

$$^{12}_6\mathrm{C} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^{13}_7\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_6\mathrm{C} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$$
$$^{13}_6\mathrm{C} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^{14}_7\mathrm{N} + \gamma$$
$$^{14}_7\mathrm{N} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^{15}_8\mathrm{O} \rightarrow {}^{15}_7\mathrm{N} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$$
$$^{15}_7\mathrm{N} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + {}^4_2\mathrm{He}$$
$$\text{Bruttoreaktion } 4\,{}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\,\mathrm{e}^+ + 2\,\nu_\mathrm{e} + \Delta E$$

Die Bruttoreaktion ist für beide Zyklen gleich. Aus der Massendifferenz errechnet sich $\Delta E = (4m_\mathrm{a}(\mathrm{H}) - m_\mathrm{a}({}^4\mathrm{He}) - 4m_\mathrm{e})c^2$ zu 24,69 MeV. Zur Überwindung der Coulomb-Abstoßung zwischen den gleichnamig geladenen Kernen müssen die Kerne eine ausreichende kinetische Energie E_kin haben. Aus der kinetischen Gastheorie ergibt sich für die wahrscheinlichste kinetische Energie (Maximum der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung $v_\mathrm{w}^2 = 2/3\overline{v^2}$, Abschn. 3.2.3)

$$E_\mathrm{kin} = \frac{m}{2} v_\mathrm{w}^2 = kT\,. \tag{8.99}$$

k ist die Boltzmann-Konstante. Zur Überwindung der Proton-Proton-Abstoßung ist eine Energie von etwa 0,5 MeV nötig. Dies entspricht nach (8.99) einer Temperatur von $T = 5{,}8 \cdot 10^9$ K. Die Temperatur im Sonneninnern beträgt etwa $1{,}5 \cdot 10^7$ K. Da für den Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus eine etwa viermal höhere Temperatur erforderlich ist als für den Deuterium-Zyklus, läuft dieser bevorzugt auf Sternen ab, deren Innentemperatur größer ist als die der Sonne.

Bei der Explosion einer Wasserstoffbombe findet eine Kernfusion statt. Die für die Fusion benötigten hohen Temperaturen werden hierbei durch eine Kernspaltung erzeugt.

Für die Durchführung der Kernfusion zur Energiegewinnung kann man folgende *Fusionsreaktionen* in Betracht ziehen:

$$
\begin{aligned}
{}^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 17{,}61\ \mathrm{MeV}\\
{}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} &\rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 3{,}27\ \mathrm{MeV}\\
{}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} &\rightarrow {}^3_1\mathrm{T} + {}^1_1\mathrm{p} + 4{,}03\ \mathrm{MeV}\\
{}^2_1\mathrm{D} + {}^3_2\mathrm{He} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{p} + 18{,}35\ \mathrm{MeV}\\
{}^1_1\mathrm{p} + {}^{11}_5\mathrm{B} &\rightarrow 3\,{}^4_2\mathrm{He} + 8{,}7\ \mathrm{MeV}\ .
\end{aligned}
$$

Aus diesen Reaktionsgleichungen ist ersichtlich, dass die Bildung des stabilen ${}^4_2$He große Energiebeträge freisetzt. Abbildung 8.81 zeigt den Wirkungsquerschnitt σ der Fusionsreaktion D-T und D-D in Abhängigkeit von der Deuteronenenergie. Die *Deuterium-Tritium-Reaktion* hat den *größten* Wirkungsquerschnitt und erfordert gleichzeitig die geringsten Ausgangsenergien der Stoßpartner. Dies führt bei der Anwendung in einem Fusionsreaktor zur größtmöglichen Leistungsdichte und geringsten Brenntemperatur. Die freigesetzte Energie verteilt sich mit 14 MeV auf das Neutron und mit 3,5 MeV auf den Heliumkern. Während der Heliumkern im Reaktorraum bleibt und zur Aufrechterhaltung der Brenntemperatur beiträgt, verlässt das Neutron den Reaktorraum und erzeugt (*erbrütet*) den Brennstoff Tritium. Tritium

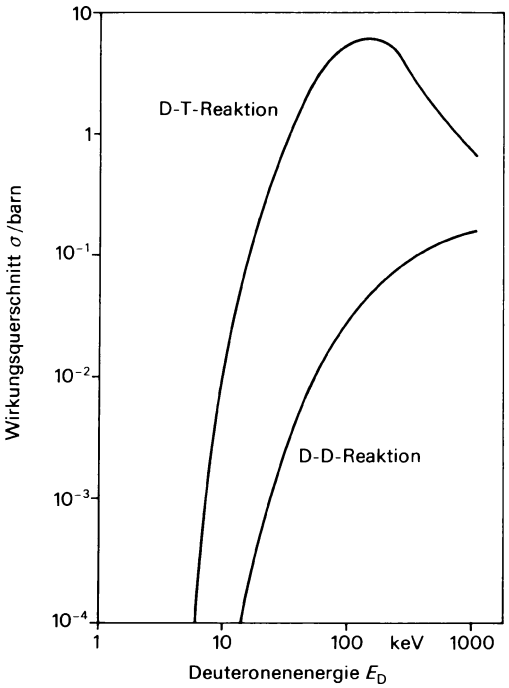


Abb. 8.81 Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Deuteronenenergie für die Kernfusion

ist im Gegensatz zu Deuterium instabil (β-Zerfall, $T = 12{,}3$ a) und kommt deshalb in der Natur praktisch nicht vor. In einer den Reaktorraum umschließenden Lithiumwand, dem „*Blanket*“, wird das Tritium durch folgende Reaktionen gebildet:

$$
\begin{aligned}
{}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_0\mathrm{n} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^3_1\mathrm{T} + {}^1_0\mathrm{n} - 2{,}47\ \mathrm{MeV}\\
{}^6_3\mathrm{Li} + {}^1_0\mathrm{n} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^3_1\mathrm{T} + 4{,}78\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}
$$

(Natürliches Lithium enthält 92,6% ^{7}Li und 7,4% ^{6}Li.) Deuterium steht praktisch in unbegrenzter Menge in den Weltmeeren zur Verfügung, Lithium findet sich in Lithium-Lagerstätten, mineralhaltigen Quellen und im Meerwasser. Bei den gegenwärtigen Experimenten wird auf das radioaktive Tritium verzichtet und durch Wasserstoff oder Deuterium ersetzt.

Aus Abb. 8.81 ist ersichtlich, dass für den Ablauf der Fusion aufgrund des Wirkungsquer-

schnitts eine Teilchenenergie von mehr als 100 keV nötig ist (entspricht einer Temperatur von 10^8 K). Bei dieser Temperatur sind die Atome vollständig ionisiert. Ein solches Gas aus Ionen und Elektronen nennt man *Plasma*. Wegen der freien Ladungsträger und des meist hohen Energieinhalts weichen die Eigenschaften des Plasmas von den sonstigen Zustandsformen der Materie ab. Plasmen weisen ein besonderes Verhalten in elektrischen und magnetischen Feldern auf und zeigen charakteristische Transporteigenschaften (Wärmeleitung, Viskosität, Diffusion und elektrische Leitfähigkeit). Sie können Strahlung vom Hochfrequenz- bis zum Röntgenbereich emittieren.

Zur Zündung des Plasmas muss dieses zuerst durch äußere Energiezufuhr auf eine Temperatur aufgeheizt werden, bei der genügend Fusionsreaktionen ablaufen, sodass die frei werdende Fusionsenergie die Temperatur ohne äußere Heizung aufrechterhält. Dies bedeutet ein Gleichgewicht zwischen der Heizung durch die Fusions-Heliumkerne (Deuterium-Tritium-Plasma) und den Energieverlusten durch Abstrahlung und Wärmeleitung. Die das Plasma verlassenden Neutronen werden im Blanket abgebremst, ihre Energie wird als thermische Energie frei und kann in einem Fusionsreaktor über Dampferzeuger, Turbine und Generator in elektrische Energie umgewandelt werden.

Außer der Temperatur ist für die Zündung eines Plasmas die Teilchendichte n (Teilchen/cm^3) und die Energieeinschlusszeit τ wichtig. Je besser die Wärmeisolierung des Plasmas ist – je geringer also die Energieverluste sind –, desto größer ist die Energieeinschlusszeit. Bereits 1957 wurden von J. D. Lawson Minimalwerte für die Temperatur T und den Einschlussparameter (Produkt aus Teilchendichte n und Energieeinschlusszeit τ) aufgestellt (*Lawson-Kriterium*),

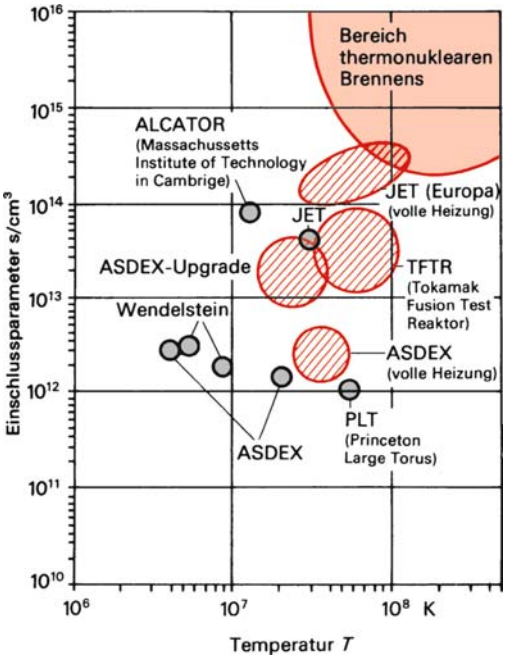


Abb. 8.82 Lawson-Diagramm

ab der ein Fusionsreaktor mit positiver Energiebilanz möglich ist. Für die Deuterium-Tritium-Reaktion ergibt sich eine Temperatur von 10^8 K und ein Einschlussparameter von etwa 10^{14} s/cm^3. Abbildung 8.82 zeigt den genauen Verlauf des Einschlussparameters mit der Temperatur für die Deuterium-Tritium-Reaktion (*Lawson-Diagramm*). In dieses Diagramm sind die bisher in Fusionsexperimenten erreichten Einschlussparameter als graue Punkte eingezeichnet. Die rot schraffierten Gebiete geben den erwarteten Bereich der laufenden Experimente an.

8.8.4.2 Experimente zur kontrollierten Kernfusion

Zur Erfüllung des Lawson-Kriteriums muss das Plasma bei geeigneter Zündtemperatur (10^8 K) hinreichend lange ohne Wandkontakt zusammengehalten werden. Die dafür notwendige Einschlusszeit τ ist umso kleiner, je größer die Plasmadichte n ist.

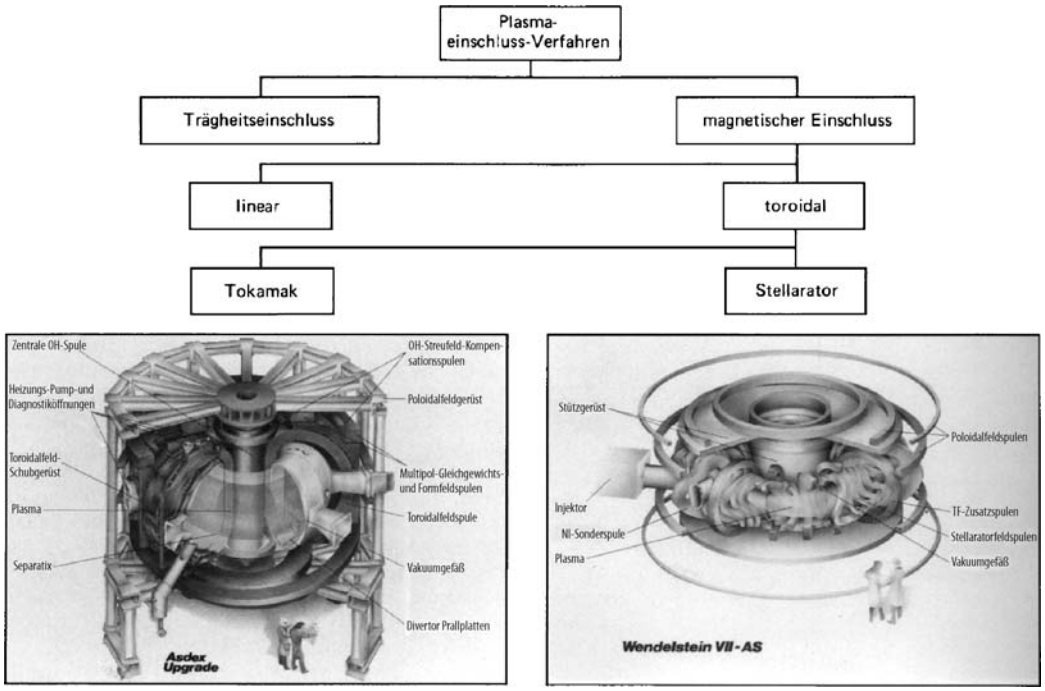


Abb. 8.83 Plasmaeinschluss-Verfahren zur Kernfusion. Fotos: Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching

Im Prinzip gibt es zwei voneinander unabhängige Wege, diese Bedingungen zu erfüllen: den *Trägheitseinschluss* und die *Anwendung von Magnetfeldern,* wie Abb. 8.83 zeigt. Beim *Trägheitseinschluss* werden kleine Mengen aus festem Deuterium und Tritium (*Pellets*) durch Hochleistungslaser (oder auch mit Elektronen- oder Ionenstrahlen) aufgeheizt. Das entstehende Plasma wird infolge seiner eigenen Massenträgheit (ohne Magnetfelder) für eine bestimmte Zeit zusammen bleiben, die ausreichen sollte, um durch Fusionsreaktionen einen Energieüberschuss zu erreichen. Durch Anlegen von Magnetfeldern werden beim *magnetischen Einschluss* die geladenen Teilchen auf Spiralbahnen um die Magnetfeldlinien gezwungen. Dadurch kann der gaskinetische Druck des Plasmas durch ein äußeres Magnetfeld aufgefangen werden. Der Druck des Magnetfelds ist durch das Quadrat der Feldstärke bestimmt, der Druck des Plasmas durch die Dichte und Temperatur. Bei den Zündbedingungen herrscht ein Plasmadruck von etwa 1 bar, der Magnetfelder in der Größenordnung 5 T bis 10 T erfordert. Bei einer linearen Anordnung treten Teilchenverluste an den Enden auf, da das Plasma längs der Feldlinien ungehindert ausströmen kann. Diese Verluste können durch „*magnetische Spiegel*“ mit stark erhöhter Magnetfeldstärke an den Enden vermindert werden.

Das Ausströmen des Plasmas wird durch Ausbildung von *toroidalen Anordnungen* verhindert. Hierbei sind die Magnetfeldlinien zu Ringen geschlossen und bilden einen magnetischen Torus. Die Magnetfeldstärke nimmt mit kleiner werdendem Radius zu, sodass der magnetische Druck auf der Innenseite des Torus größer ist als auf der Außenseite. Dadurch würde das Plasma innerhalb kurzer Zeit gegen die Außenwand gedrückt. Durch geeignete Zusatzfelder muss dies verhindert wer-

den. Das resultierende Feld muss so beschaffen sein, dass die Feldlinien schraubenförmig um die Torusachse verlaufen und geschlossene magnetische Flussflächen aufspannen.

In Abb. 8.83 sind zwei Anordnungen zum Erreichen dieser Verdrillung gezeigt. Beim *Tokamak* bildet das Plasma die Sekundärwicklung eines Transformators. Es entsteht ein Plasmastrom, der ein ringförmiges Magnetfeld erzeugt (*poloidales Feld*). Die Überlagerung von *poloidalem* und *toroidalem* Feld führt zu der notwendigen Verdrillung der Feldlinien. Mit dem *Tokamak ASDEX* (Axial Symmetrisches Divertor Experiment) will das Max-Planck-Institut für Plasmaphysik unter reaktorähnlichen Bedingungen vor allem die Plasmareinhaltung mit einem *magnetischen Divertor* studieren. *Divertoren* sind Nebenkammern, die durch besondere Führung des Magnetfeldes ober- und unterhalb des Plasmaschlauches entstehen.

Das Transformatorprinzip funktioniert nur während der Einschaltphase der zentralen Transformatorspule (zentrale OH-Spule in Abb. 8.83). Nur dann wird ein Plasmastrom induziert, der das poloidale Feld zur Plasmastabilisierung erzeugt. Im *Tokamak* ist daher nur Pulsbetrieb möglich.

Im Gegensatz zu den Tokamaks arbeiten die *Stellaratoren* nur mit externen Magnetfeldern und können daher kontinuierlich betrieben werden. Zur Erzeugung der schraubenförmigen Feldlinien sollen beim Stellarator-Experiment *Wendelstein VII-AS* am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik 45 unterschiedlich geformte Einzelspulen eingesetzt werden. Folgende Problemkreise sind besonders kritisch:

Plasmaverunreinigungen

Im Plasma findet eine Vielzahl von Stößen der Teilchen untereinander statt, durch die die Teilchen aus dem Plasmainnern an den Plasmarand und von dort an die Wand des Plasmagefäßes gestreut werden können. Beim Auftreffen der Elektronen, Ionen, Neutralteilchen und Neutronen auf die Gefäßwand oder durch Strahleneinwirkung können Atome von der Wand gelöst werden und das Plasma verunreinigen. Besonders problematisch sind Schwermetalle, da sie bei den Fusionstemperaturen erst teilweise ionisiert sind und deshalb intensive Linien- und Rekombinationsstrahlung aussenden, die zu einem Energieverlust des Plasmas führt. Ein Wolframatom unter 10 000 Plasmateilchen würde die thermonukleare Zündung verhindern.

Der aus dem Plasma an der Gefäßwand angelagerte Wasserstoff wird durch die Bestrahlung freigesetzt und wieder zurückgeführt. Der Rückfluss von kälteren, vorwiegend neutralen Wasserstoffatomen von der Gefäßwand in das Plasma spielt bei der Teilchen- und Energiebilanz des Plasmas eine wichtige Rolle.

Plasmainstabilitäten

Eine stromdurchflossene Plasmasäule ist von einem zylindrischen Magnetfeld umgeben. Schnürt sich der Plasmaschlauch zufällig an einer Stelle leicht ein, so vergrößert sich das Magnetfeld und damit der Druck des Magnetfeldes auf das Plasma. Dieser Druck verstärkt die Einschnürung der Plasmasäule, bis es u. U. zur Stromunterbrechung kommt. Ein zufälliger Knick in der Plasmasäule führt auf der Seite mit dem kleineren Radius zu einer Magnetfeldvergrößerung und damit zu einer Druckerhöhung in Knickrichtung. Die Instabilität nimmt von selbst zu.

Plasmaheizung

Damit die Kernfusion mit Energiegewinn abläuft, muss das Plasma auf 10^8 K aufgeheizt werden. Die Heizung des Plasmas kann durch Ohm'sche Heizung, Neutralteilcheninjektionsheizung oder Hochfrequenzheizung

erfolgen. Die Ohm'sche Heizung geschieht durch einen Plasmastrom (vgl. Tokamak). Durch den Plasmawiderstand wird dem Plasma Energie (Wärme) zugeführt. Da der Widerstand des Plasmas mit zunehmender Temperatur abnimmt, ist diese Methode nur zur Anfangsheizung geeignet. – Bei der *Neutralteilcheninjektionsheizung* werden geladene Teilchen beschleunigt und vor Einschuss in das Plasma neutralisiert. (Geladene Teilchen können das Magnetfeld nicht durchdringen.) Die kinetische Energie der eingeschossenen Neutralteilchen liegt weit über der der Plasmaionen und wird durch Stöße an sie übertragen.

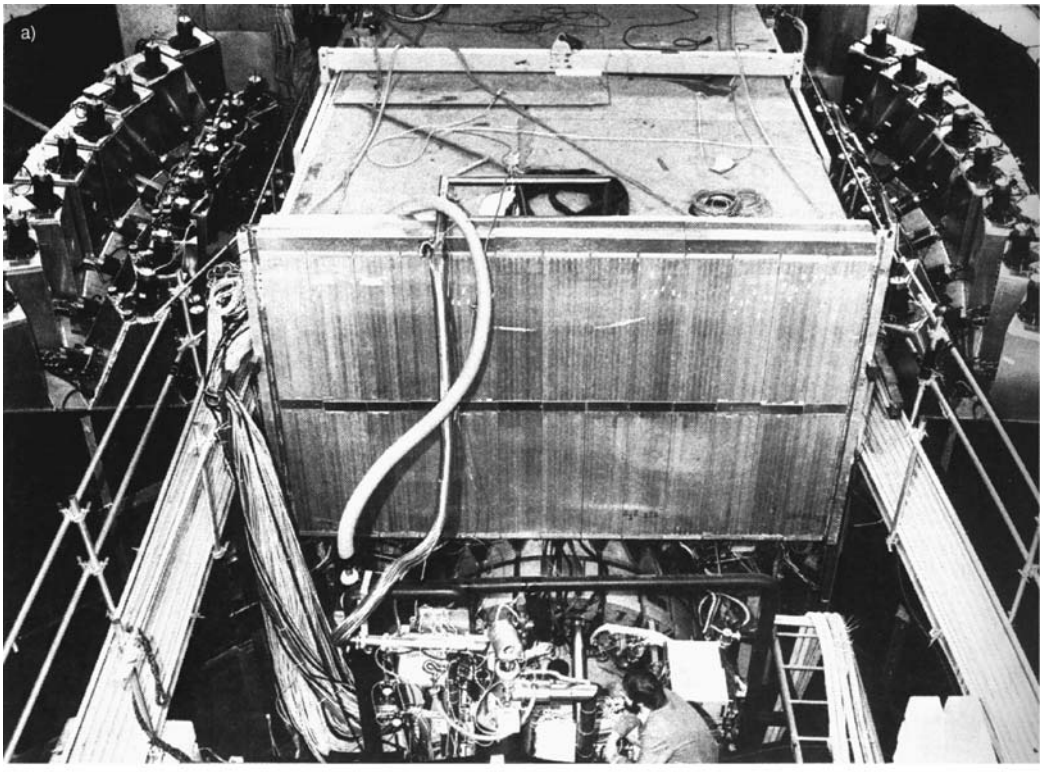
Die Ionen und Elektronen eines Plasmas führen verschiedenartige Eigenschwingungen aus, die durch Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle zur Resonanz angeregt werden können. Die spiralförmige Bewegung der geladenen Teilchen um die Magnetfeldlinien erfolgt mit einer bestimmten Kreisfrequenz (*Zyklotronfrequenz*). Diese liegt bei Ionen und den üblichen Magnetfeldstärken zwischen 10 MHz und 100 MHz, für Elektronen zwischen 60 GHz und 150 GHz. Durch Einstrahlung mit der entsprechenden Frequenz nehmen die Teilchen aus dem elektromagnetichen Feld Energie auf und geben sie durch Stöße an das Plasma ab.

Kernspaltung und Kernfusion unterscheiden sich in folgenden wichtigen Punkten: Die Energiegewinnung aus 1 kg Deuterium durch Fusion entspricht der Verbrennung von $8 \cdot 10^6$ kg Kohle, die aus 1 kg Uran-235 durch Kernspaltung der von $2 \cdot 10^6$ kg Kohle. Die Kernspaltung kann leicht mit thermischen Neutronen in Gang gesetzt werden. Für die Kernfusion müssen erst ungewöhnlich hohe Temperaturen (10^8 K) erzeugt werden. Bei der Kernspaltung entstehen große Mengen an hochradioaktivem Abfall, im Gegensatz zur Fusionsreaktion, bei dem das radioaktive Tritium im Kreislauf geführt wird; lediglich durch Neutronenaktivierung der Materialien entstehen radioaktive Stoffe.

8.9 Elementarteilchen

Das Ziel der Elementarteilchenphysik ist die Aufdeckung und Beschreibung der fundamentalen Gesetze der *Wechselwirkung* von Materie. Unter Wechselwirkung wird dabei ganz allgemein jede Kraft oder jeder Einfluss auf Materie verstanden, der zu einer Zustandsänderung führt.

Die Frage nach den *Elementarteilchen* ist grundlegend mit der Frage nach dem Zusammenhalt der Atomkerne (Kernkraft) verbunden. Um eine Auflösung Δx zu erreichen, ist nach der *Unschärferelation* $\Delta p \Delta x \geqq \hbar/2$ ein Impuls $p \geqq \hbar/(2\,\Delta x)$ erforderlich. Nach der *Relativitätstheorie* kann gemäß $E^2 = p^2\,c^2 + m_0^2 c^4$ (10.19) die entsprechende Energie berechnet werden. Zur Ermittlung der inneren Struktur des Protons ($\Delta x \approx 10^{-16}$ m) sind Energien in der Größenordnung GeV erforderlich. Experimente in der Elementarteilchenphysik sind deshalb nur mit äußerst leistungsstarken Beschleunigeranlagen möglich. Tabelle 8.12 zeigt die Bauelemente von modernen Beschleunigeranlagen. Seit den siebziger Jahren sind *Kollisionsexperimente* (Speicherringexperimente) üblich, bei denen die zusammenstoßenden Teilchen (z. B. e^-, e^+, p, p^-) einen entgegengesetzten Impuls haben. Deshalb bleibt der Schwerpunkt des gesamten Systems in Ruhe, sodass die doppelte Teilchenenergie (z. B. für Protonen $2\,E_p = 2 \cdot 270$ GeV = 540 GeV) zur Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung steht. Um den gleichen Energiebetrag (540 GeV) beim Beschuss eines ruhenden Protons zur Verfügung zu haben, muss das bewegte Proton eine Energie von 155 TeV (10^{12} eV) haben.



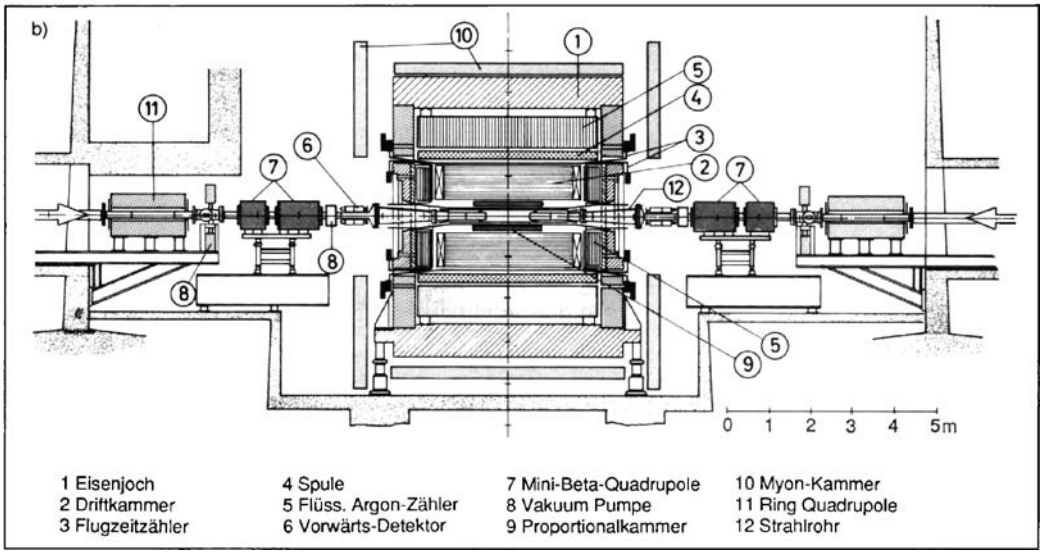


Abb. 8.84 **a**) Detektor TASSO am DESY, **b**) Querschnitt des Detektors TASSO. Foto: Deutsches Elektronen-Synchrotron, Hamburg

Tabelle 8.12 Bauelemente moderner Beschleunigeranlagen

Bauteil	Funktion
Ionenquelle	Sie liefert die erforderlichen Teilchen (z. B. Elektronen, Protonen).
Beschleunigungsstrecken	Resonatoren (Resonatorfrequenz 30 MHz bis 1 000 MHz), in denen die Teilchenpakete je Resonatorlänge Spannungsstöße bis 10^6 V/m erhalten. Durch Hintereinanderschalten vieler Resonatoren können Teilchen zu sehr hoher Energie beschleunigt werden.
Hochfrequenzsender	Die Resonatoren werden von Hochfrequenzsenderöhren (Klystron) gespeist mit einer Dauerleistung von mehr als 1 MW.
Vakuumsystem	Die zu beschleunigenden Teilchen müssen in einer Röhre mit Ultrahochvakuum (10^{-8} mbar) zur Vermeidung von Stößen geführt werden. Dabei müssen, um die Abgabe von Gasen zu vermeiden, Schweißstellen, Flansche und die Oberfläche des Materials besonders behandelt werden.
Strahlführungssysteme	
Quadrupolmagnete	Sie dienen zur Bündelung des Teilchenstrahls.
Sextupolmagnete	Stabilisierung des Teilchenstrahls.
Ablenkmagnete	Sie sind bei Ringen erforderlich, um die Teilchen auf die Kreisbahn zu zwingen (Energieverlust durch Synchrotronstrahlung); bei Linearbeschleunigern nicht erforderlich.
Zusatzeinrichtungen	Vorbeschleuniger, Einschusssystem, Korrekturelemente, Strahlmess- und Kontrolleinrichtungen.

Zum Nachweis der Reaktionsprodukte sind aufwändige *Detektoren* erforderlich, die nicht nur Art und Energie der Teilchen, sondern auch ihre Richtung genau bestimmen. Abbildung 8.84a zeigt den Detektor TASSO (Two Arm Spektrometer Solenoid) und Abb. 8.84b den Querschnitt schematisch. Die vom Computer rekonstruierten Teilchenbahnen (z. B. π^+, K^+, K^-) für eine Energie von 35 GeV (e^-, e^+) sind in Abb. 8.85 dargestellt.

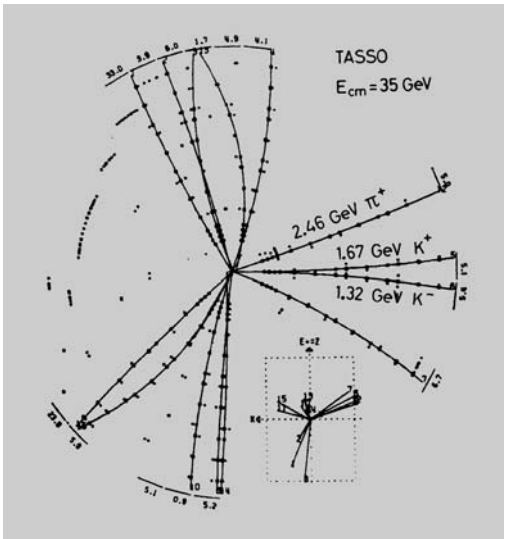


Abb. 8.85 Vom Computer rekonstruierte Teilchenbahnen aufgrund der Daten von TASSO

8.9.1 Einteilung

Die ersten Elementarteilchen, die *Pionen* π^+, π°, π^-, *Myonen* μ, *Kaonen* und *Positronen*, wurden in der Höhenstrahlung durch Bestrahlung fotographischer Emulsionen oder durch Nebelkammeraufnahmen nachgewiesen.
In Abb. 8.86 oben sind einige Teilchen mit ihren charakteristischen Größen (Quantenzahlen) aufgeführt. Die Masse der Teilchen ist durch die Beziehung $m = E/c^2$ in der Einheit MeV/c^2 angegeben. Zu jedem Teilchen existiert

ein *Antiteilchen* mit entgegengesetzter Ladung und entgegengesetzten Werten aller ladungsartigen Quantenzahlen (z. B. B, S, C, I_3). Alle anderen Eigenschaften, beispielsweise Masse und Lebensdauer, stimmen bei Teilchen und Antiteilchen überein. In Abb. 8.86 sind nur für die *Leptonen* und *Quarks* die Antiteilchen mit angegeben (rot). Die grau unterlegten Teilchen sind aus heutiger Sicht stabil. Dies gilt auch für die entsprechenden Antiteilchen (sofern sie nicht mit anderen Teilchen zusammenkommen). Das Neutron ist nur im gebundenen Zustand (z. B. im Atomkern) stabil.

Man unterscheidet zwischen Teilchen mit *schwacher* (*Leptonen*) und Teilchen mit *starker Wechselwirkung*, den *Hadronen*. Die Hadronen bestehen aus den *Baryonen* (Spin J halbzahlig) und den *Mesonen* (Spin J ganzzahlig). Baryonen zerfallen stets direkt oder über einen Umweg in *Nukleonen* (Protonen oder Neutronen):

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{n} & \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e} & (T = 918\ \mathrm{s}) \\
\Sigma^+ & \to \mathrm{p} + \pi^\circ & (T = 0{,}8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s}) \\
 & \to \mathrm{n} + \pi^+ & \\
\hline
\Xi^0 & \to \Lambda^\circ + \pi^\circ & (T = 3 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s}) \\
\Lambda^\circ & \to \mathrm{p} + \pi^- & \\
\hline
\Delta^+(1232) & \to \mathrm{n} + \pi^+ & (T = 6 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{s})\ .
\end{array}
$$

Baryonen können im Gegensatz zu Mesonen weder einzeln erzeugt werden, noch durch Zerfall verschwinden. Die Mesonen zerfallen in Photonen, Elektronen und Neutrinos:

$$
\begin{array}{lll}
\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu & & (T = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}) \\
\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu & & (T = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}) \\
\pi^\circ \to \gamma + \gamma & & (T = 0{,}83 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}) \\
\quad \to \gamma + \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- & & \\
\omega \to \pi^+ + \pi^- + \pi^\circ & & (T = 10^{-23}\ \mathrm{s}) \\
\quad \hookrightarrow \pi^\circ + \gamma & & \\
\mathrm{K}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu & & (T = 1{,}24 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}) \\
\quad \to \pi^+ + \pi^\circ & & \\
\mathrm{D}^+ \to \overline{\mathrm{K}}^\circ + \pi^+ & & (T = 7 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{s})\ .
\end{array}
$$

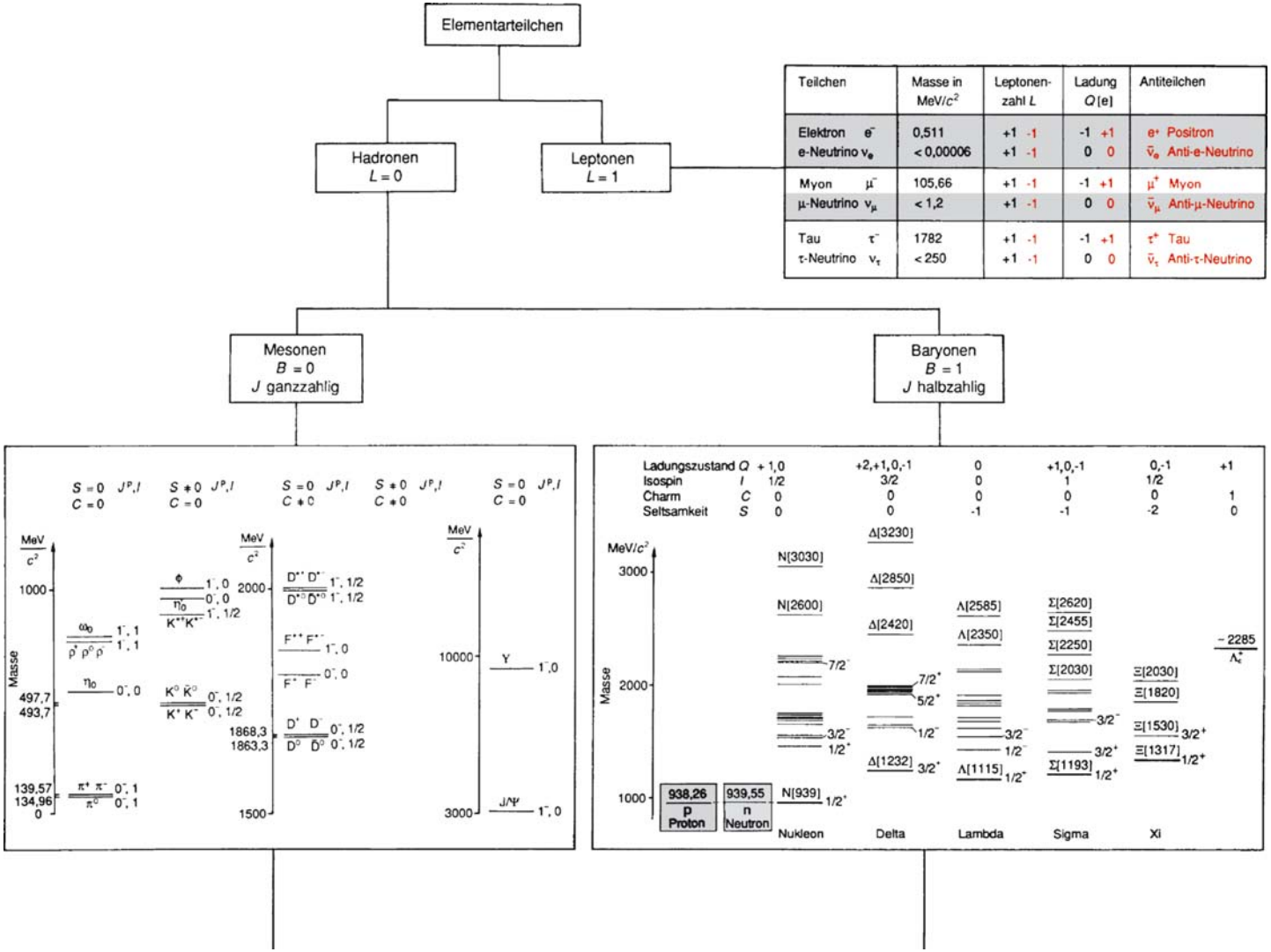
Die gebildeten Myonen (Leptonen) zerfallen nach folgendem Schema:

$$
\begin{aligned}
\mu^+ &\to \overline{\nu}_\mu + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} \\
\mu^- &\to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}\ .
\end{aligned}
$$

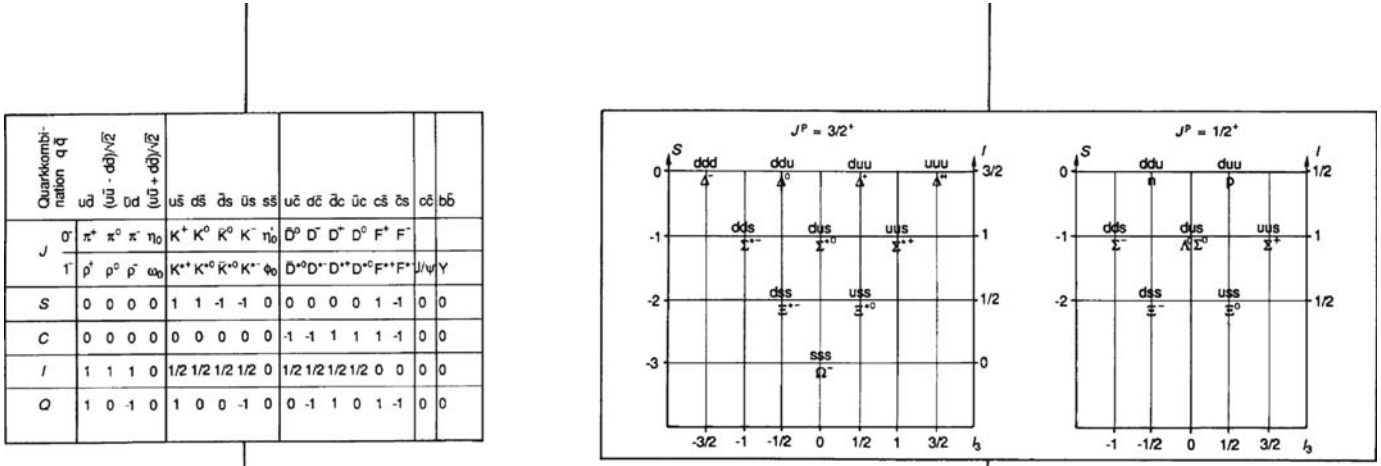
Viele der neu entdeckten *Hadronen* konnten als angeregte Zustände anderer Teilchen interpretiert werden. Diese angeregten Zustände sind in der Atomphysik mit dem angeregten Wasserstoffatom vergleichbar. Während dieses beim Übergang in den Grundzustand ein oder mehrere Photonen emittiert, emittieren die angeregten Hadronenteilchen *Pionen*. Dies weist auf eine *innere Struktur* der Teilchen hin; diese können deshalb nicht als elementar betrachtet werden.

In Abb. 8.86 unten sind die nach heutiger Sicht elementaren Bausteine (*Quarks* und *Antiquarks*) mit ihren Quantenzahlen zusammengestellt. Die *Mesonen* lassen sich durch ein *Quark-Antiquarkpaar* und die *Baryonen* durch eine *Dreier-Quarkkombination* aufbauen. Nach dem Pauli-Prinzip müssen sich in einem System die Teilchen mit Spin $s = 1/2$ (*Fermionen*) in einer Quantenzahl unterscheiden. Dies erfordert die Einführung einer zusätzlichen *Quantenzahl der Farbladung* (rot, grün, blau), die weder mit einer Farbe noch mit einer elektrischen Ladung vergleichbar ist.

Die Quark-Antiquark-Systeme (Mesonen) kann man mit einem *Positronium* vergleichen. Dieses ist eine wasserstoffähnliche Verbindung aus einem Positron und einem Elektron. Analog werden die Quark-Antiquark-Systeme als *Quarkonia* (z. B. *Charmonium* $c\overline{c}$ oder *Bottonium* $b\overline{b}$) bezeichnet. Die Quantenzahlen der Teilchen ergeben sich durch entsprechende Addition aus den Quantenzahlen der Quarks gemäß Tabelle 8.13. Die Kombination zweier Quarks kann somit nur Teilchen mit ganzzahligem Spin (Mesonen), die von drei Quarks nur Teilchen mit halbzahligem



Teilchen	Masse in MeV/c^2	Leptonenzahl L	Ladung Q [e]	Antiteilchen
Elektron e^-	0,511	+1 -1	-1 +1	e^+ Positron
e-Neutrino ν_e	< 0,00006	+1 -1	0 0	$\bar{\nu}_e$ Anti-e-Neutrino
Myon μ^-	105,66	+1 -1	-1 +1	μ^+ Myon
μ-Neutrino ν_μ	< 1,2	+1 -1	0 0	$\bar{\nu}_\mu$ Anti-μ-Neutrino
Tau τ^-	1782	+1 -1	-1 +1	τ^+ Tau
τ-Neutrino ν_τ	< 250	+1 -1	0 0	$\bar{\nu}_\tau$ Anti-τ-Neutrino



Name	q	J [ħ]	B		I	I_3,I_Z		S	C	B*	Q [e]		$\bar{q}$
up	u	1/2	1/3	-1/3	1/2	+1/2	-1/2	0	0	0	+2/3	-2/3	$\bar{u}$
down	d	1/2	1/3	-1/3	1/2	-1/2	+1/2	0	0	0	-1/3	+1/3	$\bar{d}$
charm	c	1/2	1/3	-1/3	0	0		0	+1 -1	0	+2/3	-2/3	$\bar{c}$
strange	s	1/2	1/3	-1/3	0	0		-1 +1	0	0	-1/3	+1/3	$\bar{s}$
top (truth)	t	1/2	1/3	-1/3	0	0		0	0	0	+2/3	-2/3	$\bar{t}$
bottom (beauty)	b	1/2	1/3	-1/3	0	0		0	0	-1 +1	-1/3	+1/3	$\bar{b}$

Abb. 8.86 Elementarteilchen

Tabelle 8.13 Quantenzahlen von Proton und Neutron

	Proton p	Neutron n
Quarkkombination	u + u + d	u + d + d
Ladung Q	$2/3 + 2/3 - 1/3 = +1$	$2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$
Baryonenzahl B	$1/3 + 1/3 + 1/3 = +1$	$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$
Isospin I_3	$1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$	$1/2 - 1/2 - 1/2 = -1/2$

Spin (Baryonen) liefern. Höhere Spins als $J = 1$ ergeben sich durch einen zusätzlichen Bahndrehimpuls der Quarks, vergleichbar dem Wasserstoffatom. In Abb. 8.87 ist dies für das $c\bar{c}$- System dargestellt. Die Übergänge zwischen einzelnen Zuständen erfolgen unter Aussendung von γ-Quanten.

Streuexperimente mit Elektronen bzw. Neutrinos (Abb. 8.49) zur Untersuchung der inneren Struktur des Protons ergaben die Existenz von drei Streuzentren (Quarks) in den Nukleonen. Zwischen Neutrino und Quark treten schwache Wechselwirkungskräfte auf, die nur eine Reichweite von etwa einem tausendstel Protonendurchmesser haben (10^{-17} m). Der Zwischenraum zwischen den Quarks muss ein elektrisch neutrales Füllmaterial enthalten, mit dem das Neutrino kaum wechselwirkt. Dieses Füllmaterial wird im Wesentlichen mit Trägern der *Quarkkräfte* (*Gluonen*) identifiziert.

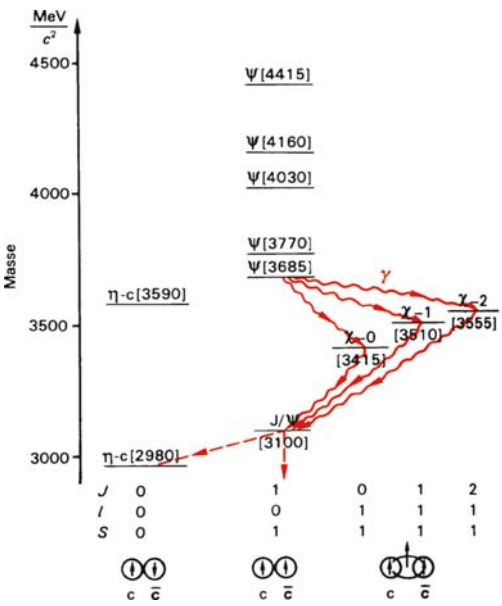


Abb. 8.87 Quarkoniumzustände

8.9.2 Erhaltungssätze

Elektrische Ladung Q

Die elektrische Ladung eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$Q: -1 = -1 + 0\ .$$

Das *Pion* und das *Muon* müssen deshalb exakt dieselbe Ladung haben. Neutrinos sind elektrisch neutral und können deshalb große Materiemengen ohne Energieverlust durch Ionisationsprozesse durchdringen. Entsprechend der Erhaltung elektrischer Ladung ergibt sich für das leichteste geladene Teilchen, das Elektron, dass dieses stabil sein muss.

Leptonenzahl L

Es gibt sechs Leptonen (L_e, L_μ, L_τ) in den Familien (e, ν_e), (μ, ν_μ) und (τ, ν_τ) mit ihren Antiteilchen (Abb. 8.86). Sie haben den Spin 1/2 und nur elektromagnetische schwache Wechselwirkung. Den Leptonen wird die Leptonenzahl $L = 1$ (Antiteilchen $L = -1$) zugeordnet. Diese bleibt bei einer Reaktion erhalten:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$L: \underbrace{-1}_{L_\mu} = \underbrace{(-1)}_{L_e} + \underbrace{(-1)}_{L_\mu} + \underbrace{(+1)}_{L_e}\ .$$

Baryonenzahl *B*

Baryonen (Spin 1/2) zerfallen direkt oder indirekt stets in ein Proton (Neutron zerfällt in ein Proton). Baryonen können sich nur ineinander verwandeln aber sie können nicht verschwinden. Demzufolge bleibt die Baryonenzahl B erhalten (Baryonen $B = 1$; Antibaryonen $B = -1$; alle anderen Teilchen $B = 0$, auch die Photonen):

$$e^+ + e^- \rightarrow p + \overline{p}$$
$$B\colon\ 0 + 0 = 1 + (-1)\ .$$

Die *Erhaltung der Baryonenzahl* führt zur Stabilität des leichtesten Baryons, dem Proton (analog dem Elektron bei Ladungserhaltung), und gilt für alle Wechselwirkungen.

Seltsamkeit *S*

Diese Quantenzahl leitet sich von den „*seltsamen Teilchen*", z. B. Λ und K°, ab. Solche Teilchen sollten theoretisch eine Lebensdauer von 10^{-23} s haben. Seltsamerweise ist ihre tatsächliche Lebensdauer aber 10^{13}-mal länger. Diese Seltsamkeit bleibt bei Reaktionen mit starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten, nicht aber bei der schwachen Wechselwirkung.

Charme *C*, Bottom *B**

Außer der Seltsamkeit S können noch weitere Quantenzahlen, wie z. B. Charme C und Bottom B^*, eingeführt werden, die bei *elektromagnetischer* und *starker Wechselwirkung* erhalten bleiben. Diese Quantenzahlen sind mit den c- bzw. b-Quarks verknüpft.

Isospin *I*

Das Proton und das Neutron (Abb. 8.86) können als zwei verschiedene Zustände ein und desselben Teilchens aufgefasst werden. Der jeweilige Zustand des Teilchens wird durch den Isospin I mit der Multiplizität $(2I + 1)$ gekennzeichnet. Der Isospin ist ein Vektor mit drei Komponenten im abstrakten Isospinraum. Die dritte Komponente des Isospins $I_3(I_z)$ liefert eine Aussage über die Ladung. Für ein Proton ist $I_3 = +1/2$, für ein Neutron $I_3 = -1/2$. Bei der *starken Wechselwirkung* bleibt der *Isospin erhalten* ($\Delta I = 0$), während bei der elektromagnetischen Wechselwirkung nur die dritte Komponente erhalten bleibt ($\Delta I = 0{,}1$; $\Delta I_3 = 0$).

Spin *J*, Parität *P*

Der Spin eines Teilchens ergibt sich durch Kombination der Quarkspins und des Bahndrehimpulses. Die Teilchen lassen sich durch das Produkt aus einer Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ und einer Spinfunktion $\varphi(s)$ beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an einem bestimmten Ort mit einem bestimmten Spin anzutreffen, ist durch das Quadrat der Wellenfunktion $|\psi(x, y, z)|^2$ gegeben. Dieses Betragsquadrat ist prinzipiell unabhängig von einer Spiegelung der Koordinaten an einer Ebene (Übergang eines rechtsdrehenden in ein linksdrehendes Koordinatensystem). Diese Spiegelung an einer Ebene ist identisch mit einer *Inversion* (Spiegelung am Koordinatenursprung $x, y, z, s \rightarrow -x, -y, -z, s$), verbunden mit einer Drehung. Die *Invarianz der Wellenfunktion gegenüber der Drehung* ist durch die Drehimpulserhaltung gegeben. Bei der Inversion darf die Wellenfunktion somit nur ihr Vorzeichen ändern:

$$\psi(-x, -y, -z) = \psi(x, y, z)$$
$$P = 1 \text{ (gerade Parität)}\ ,$$
$$\psi(-x, -y, -z) = -\psi(x, y, z)$$
$$P = -1 \text{ (ungerade Parität)}\ .$$

Die Parität kann sich bei der schwachen Wechselwirkung ändern. Anschaulich bedeutet dies, dass eine Reaktion in ihrer räumlich gespiegelten Form nicht genau in derselben Weise (mit derselben Häufigkeit) abläuft. Es tritt bei

der schwachen Wechselwirkung eine grundlegende Rechts-links-Unsymmetrie auf.

8.9.3 Fundamentale Wechselwirkungen

Man unterscheidet vier *fundamentale Wechselwirkungen*, die *Gravitation*, die *elektromagnetische*, die *starke* und die *schwache Wechselwirkung*. Aufgrund neuer Erkenntnisse können die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zur *elektroschwachen Wechselwirkung* zusammengefasst werden. In Abb. 8.88 sind die Wechselwirkungen mit ihren wichtigen Merkmalen zusammengestellt.

Die elektromagnetische Wechselwirkung wirkt zwischen geladenen Teilchen und wird in der nichtrelativistischen Quantenmechanik durch die Schrödinger-Gleichung mit dem elektrischen Potential φ und dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ beschrieben. Durch Einführung des Spins und des magnetischen Moments ist damit eine Beschreibung aller *elektromagnetischen Niederenergie-Phänomene*, wie z. B. Atombau, Spektren, molekulare Bindung, Makromoleküle und Festkörper, möglich.
Gravitation, Kern- und Elementarteilchenphysik können damit nicht beschrieben werden. Die relativistische Beschreibung von

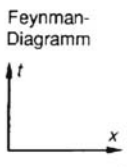
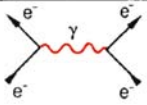
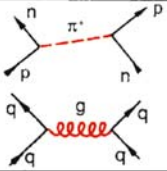
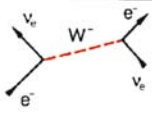
	Gravitation	elektromagnetische Wechselwirkung	starke Wechselwirkung	schwache Wechselwirkung
Reichweite	∞	∞	10^{-15} m bis 10^{-16} m	$<< 10^{-16}$ m
Beispiel	Kräfte zwischen Himmelskörpern	Kräfte zwischen Ladungen, z.B. Atom	Zusammenhalt der Atomkerne	Betazerfall der Atomkerne
Stärke (relative)	10^{-41}	10^{-2}	1	10^{-14}
betroffene Teilchen	alle	geladene Teilchen	Hadronen	Hadronen und Leptonen
Feynman-Diagramm				
Austauschteilchen	**Graviton**	**Photon**	Mesonen **Gluon**	**intermediäre Vektorbosonen**
Masse	0	0	$m_\pi = 0{,}14 \frac{\text{GeV}}{c^2}$; $m_g = 0$ π^+, π^-, π^0	$m_W = 82\ \text{GeV}/c^2$ $m_Z = 93\ \text{GeV}/c^2$ W^+, W^-, Z^0
Erhaltung				
Ladung Q	+	+	+	+
Baryonenzahl B	+	+	+	+
Leptonenzahl L	+	+	+	+
Spin J	+	+	+	+
Seltsamkeit S	-	+	+	-
Isospin I	-	-	+	-
I_3	-	+	+	-

Abb. 8.88 Fundamentale Wechselwirkungen

Teilchen erfolgt durch die *Wellengleichung* von P. A. M. Dirac (1902 bis 1984). Diese stellt die Verknüpfung von Relativitätstheorie und Quantenmechanik dar (Abb. 1.3). Die Lösung dieser Gleichung enthält den Eigendrehimpuls und das magnetische Moment der Teilchen, weshalb diese Größen nicht extra eingeführt werden müssen. Außerdem enthält die *Dirac-Gleichung* als Lösung die Antiteilchen.

Die starke Wechselwirkung beschreibt den Zusammenhalt der Atomkerne durch die kurzreichweitige Kernkraft (Reichweite etwa 10^{-15} m). Mit Hilfe der relativistischen Energiebeziehung ergibt sich analog zur Schrödinger-Gleichung die *Klein-Gordon-Gleichung*, wiedergegeben in Tabelle 8.14. Aus der Reichweite $r_0 = 1/k$ der Wellenfunktion ψ errechnet sich die Masse m zu etwa einem Fünftel der Protonenmasse. Diese Lösung kann als Teilchen interpretiert werden (*Austauschteilchen*), das ständig zwischen den Nukleonen ausgetauscht wird und so die Kernkraft verursacht. Dieses Austauschteilchen ist das *Pion* (π^+, π^-, π°):

$$
\begin{aligned}
p &\rightarrow n + \pi^+ \\
n &\rightarrow p + \pi^- \\
n &\rightarrow n + \pi^\circ \\
p + \pi^\circ &\rightarrow p \\
p + \pi^- &\rightarrow n \\
n + \pi^+ &\rightarrow p\,.
\end{aligned}
$$

Dementsprechend kann die elektromagnetische Wechselwirkung ebenfalls durch den Austausch von Teilchen (Photonen) verstanden werden. Da die Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung unendlich ist, muss das Photon die Masse null haben. Die anschauliche Beschreibung der Umwandlungsprozesse von Teilchen erfolgt in einem *Zeit-Ort-Koordinatensystem* (*Feynman-Diagramm*, R. P. Feynman, 1918 bis 1988). Abbildung 8.89 zeigt den Neutronenzerfall in einem Feynman-Diagramm. In Abb. 8.88 sind die Feynman-Diagramme für die fundamentalen Wechselwirkungen eingezeichnet.

Leptonen zeigen keine starke Wechselwirkung. Dies wird deutlich bei der Elektron-Elektron-Streuung, bei der Abstände von ungefähr 10^{-15} m auftreten, und bei den 1-s-Elektronen

Tabelle 8.14 Gegenüberstellung der nichtrelativistischen und der relativistischen Wellengleichung

	Schrödinger-Gleichung	Klein-Gordon-Gleichung
Energie-Impuls-Gleichung	$E = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2\,m}$ (nichtrelativistisch)	$E^2 = \boldsymbol{p}^2 c_0^2 + m_0^2\, c^4$ (relativistisch)
Operatoren	$\hat{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$; $\hat{E} = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$	
Wellengleichung des freien Teilchens	$\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2\,m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi = 0$	$\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_0^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi + \dfrac{m_0^2 c_0^4}{\hbar^2}\Psi = 0$
Lösung (stationär)	$\psi = \psi_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}r}$	$\psi = \psi_0 \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-kr}$ $\quad k = \dfrac{m\,c}{\hbar}$
		$r_0 \approx \dfrac{1}{k} = \dfrac{\hbar}{m\,c}$ Reichweite der Wellenfunktion
		mit $r_0 \approx 10^{-15}$ m $\Rightarrow m \approx 200\dfrac{\mathrm{MeV}}{c^2}$

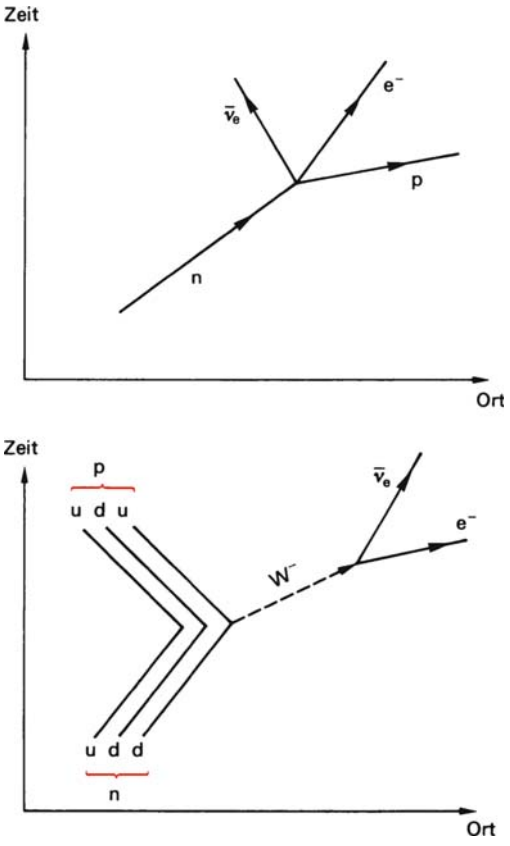


Abb. 8.89 Neutronenzerfall im Feynman-Diagramm

in schweren Atomen, deren Wellenfunktion zum erheblichen Anteil im Kerninnern liegt. Beim β-Zerfall werden Elektronen aus einem Kern emittiert:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \, .$$

Dies ist eine Wechselwirkung zwischen vier Teilchen mit dem Spin 1/2, die als schwache Wechselwirkung bezeichnet wird. Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung sind die *Weakonen* W^+, W^- und Z° (Abb. 8.89).

8.10 Strahlenschutz

In vielen wissenschaftlichen und technischen Bereichen (z. B. Röntgendiagnostik, Strahlentherapie, Kerntechnik, Biotechnologie, Teilchenbeschleuniger, Radiochemie, Plasmaforschung) wird mit Substanzen oder Apparaturen gearbeitet, die direkt oder indirekt ionisierende Strahlung emittieren. Die Grundlage des Strahlenschutzes – Abb. 8.90 zeigt die Zusammenhänge – ist die Wechselwirkung der verschiedenen Strahlenarten (z. B. α, p, d, n, γ, β) unterschiedlichster Energie und Flussdichte mit der Materie. Durch diese Wechselwirkungsprozesse sind die Messgrößen und Messprinzipien vorgegeben. Die Wechselwirkungsprozesse der Strahlung mit dem lebenden Organismus und der daraus resultierenden biologischen Wirkung ermöglicht die Beurteilung bezüglich der Qualität der Strahlung. Ferner führt die Wechselwirkung der Strahlung mit der Materie über die Sekundärstrahlung zur Beeinflussung des primären Strahlungsfeldes und somit der Strahlenbelastung (Abb. 8.90). Die – in der Regel schädliche – biologische Wirkung der Strahlung erfordert Strahlenschutzmaßnahmen zur Minderung der Strahlenbelastung auf ein nach dem jeweiligen Stand der Wissenschaften für vertretbar angesehenes Maß. Die gesetzlichen Regelungen enthalten die Strahlenschutz- und Röntgenverordnung. In diesen sind die Aufgaben des Strahlenschutzes formuliert:

1. Jede unnötige Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt ist zu vermeiden.
2. Jede Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt ist unter Beachtung des Standes von Wissenschaft und Technik und unter Berücksichtigung aller Umstände des Einzelfalles auch unterhalb der festgesetzten Grenzwerte so gering wie möglich zu halten.

Unter *Kontamination* versteht man eine unerwünschte Verunreinigung durch radioaktive

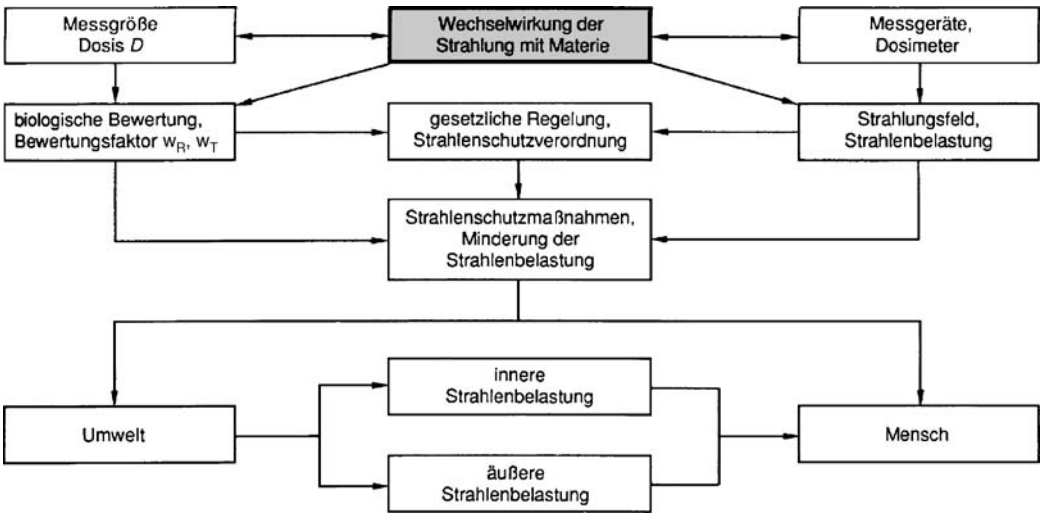


Abb. 8.90 Strahlenschutz

Stoffe, beispielsweise von Arbeitsflächen, Geräten, Räumen, Wasser, Luft. Es muss nicht nur die *äußere* Strahlenbelastung des Menschen begrenzt werden, sondern auch die *innere Strahlenbelastung*, die durch Aufnahme radioaktiver Substanzen über Kontamination der Umwelt (Luft, Wasser) direkt oder indirekt (über die Nahrungskette) in den Körper gelangen (*Inkorporation*).

8.10.1 Wechselwirkung der Strahlung mit Materie

Die wichtigsten Wechselwirkungsprozesse der verschiedenen Strahlenarten mit der Materie sind in Abb. 8.91 zusammengestellt. Durch die Wechselwirkungsprozesse mit dem Absorbermaterial wird die Flussdichte der Strahlung und deren Energie durch Energieabgabe an das Absorbermaterial oder durch Streuprozesse gemindert. Die Abhängigkeit der Flussdichte von der Schichtdicke oder Flächenmasse des Absorbermaterials wird *Absorptionskurve* genannt. Diese ist in Abb. 8.91 mit eingezeichnet und wird durch die Wahrscheinlichkeit (*Wirkungsquerschnitt*) der einzelnen Wechselwirkungsprozesse bestimmt. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, den verwendeten Absorber nicht durch seine Schichtdicke x, sondern durch das Produkt aus Schichtdicke und Dichte des Absorbermaterials, d. h. durch die *Flächendichte* d, zu charakterisieren.

Direktionisierende Strahlen

Zu dieser Gruppe gehören alle geladenen Teilchen, beispielsweise α-Teilchen, Elektronen bzw. Positronen aus radioaktiven Zerfällen (β^-, β^+), Elektronen aus Beschleunigern (e), Protonen (p) oder Deuteronen (d). Der Hauptabsorptionsprozess ist die Anregung und Ionisation der Absorberatome bzw. Moleküle. Dabei tritt das geladene Teilchen über sein elektromagnetisches Feld mit den Elektronen der Hülle in Wechselwirkung; hierbei bestimmen Energie, Ladung und Masse des Teilchens den *differentiellen Energieverlust* $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = S$ (Bremsvermögen) und das *differentielle Ionisationsvermögen* (Ionenpaare je Flugstrecke $\mathrm{d}N/\mathrm{d}x$, auch *spezifische Ionisation* genannt) in einem Absorbermaterial.

Vergleicht man Protonen und Elektronen gleicher Energie, so ist die Geschwindigkeit

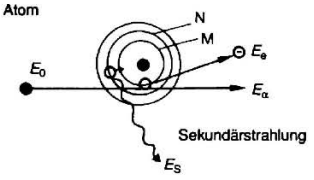
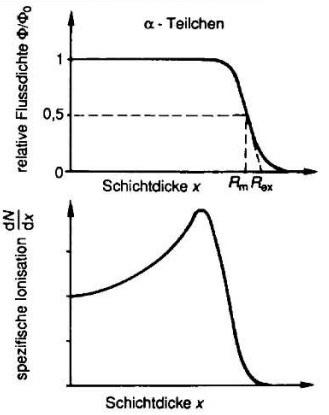
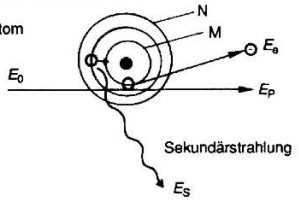
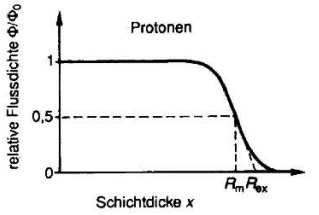
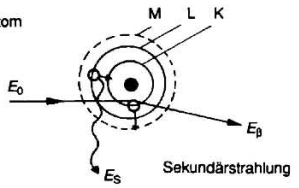
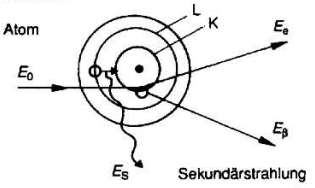
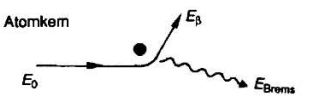
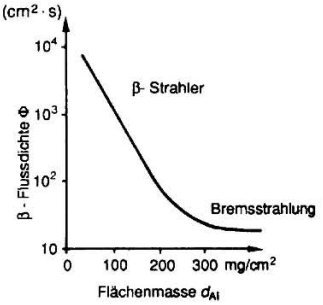
Strahlenart	Wechselwirkungsprozesse	Energiebilanz	Absorptionskurve
direkt ionisierende Strahlung: α	Ionisation, Anregung Atom  	E_B : Bindungsenergie des Elektrons $E_\alpha = E_0 - E_e - E_B$ $E_S = E_M - E_N$	
Protonen p	Ionisation, Anregung Atom  	$E_P = E_0 - E_e - E_B$ $E_S = E_M - E_N$	R_m : mittlere Reichweite R_{ex}: extrapolierte Reichweite 
Elektronen e β^-, β^+	Anregung Atom  Ionisation Atom  Bremsstrahlung Atomkern  Vernichtungsstrahlung $e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma$	$E_\beta = E_0 - (E_K - E_M)$ $E_S = E_K - E_L$ $E_\beta = E_0 - E_B - E_e$ $E_\beta = E_0 - E_{Brems}$ $E_\gamma = m_e c^2$	 $\Phi = \Phi_0 e^{-\mu_m d}$ μ_m: Massenabsorptionskoeffizient $\mu_m = \mu/\rho$ in cm²/mg d : Flächenmasse in mg/cm² $d = x\rho$ ϱ : Dichte

Abb. 8.91 Wechselwirkungsprozesse von Strahlung mit Materie

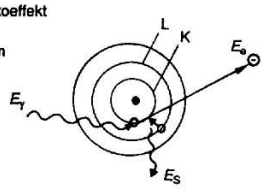
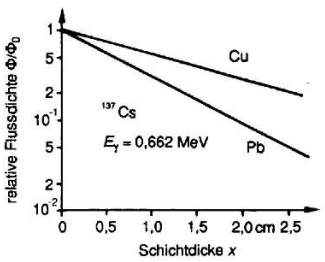
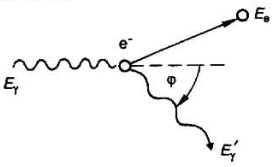
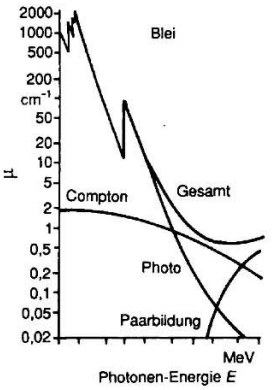
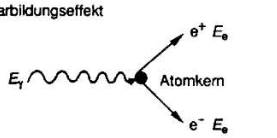
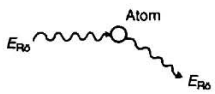
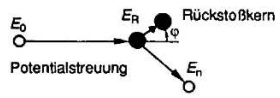
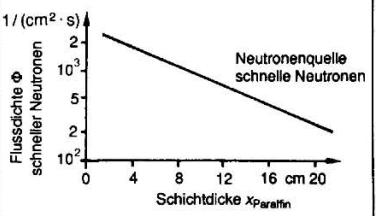
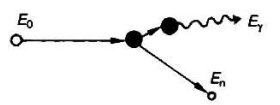
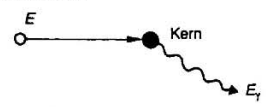
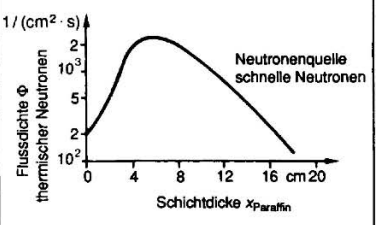
Strahlenart	Wechselwirkungsprozesse	Energiebilanz	Absorptionskurve
indirekt ionisierende Strahlung: γ	**Photoeffekt** Atom  Sekundärstrahlung	$E_e = E_\gamma - E_B$ $E_S = E_K - E_L$	
	Comptoneffekt  	$E_e = E_\gamma - E'_\gamma$ $E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + E_\gamma q}$ $q = \frac{1 - \cos\varphi}{m_e c^2}$	
	Paarbildungseffekt  	$E_e = E_\gamma - 2 m_e c^2$	
	Rayleigh-Streuung  	$E_{Röntgen}$	$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x}$ $\mu = \mu_{Photo} + \mu_C + \mu_{Paar}$
	Neutronen n **elastische Streuung (n, n)**  	$E_n = E_0 - E_R$ $E_R = E_n \cos^2\varphi$ für Protonen	
	inelastische Streuung (n, n′)  		
	Absorption (n,γ)  		
	weitere Reaktionen (n,p); (n,α) (n, 2n); (n, np)		

Abb. 8.91 (Fortsetzung)

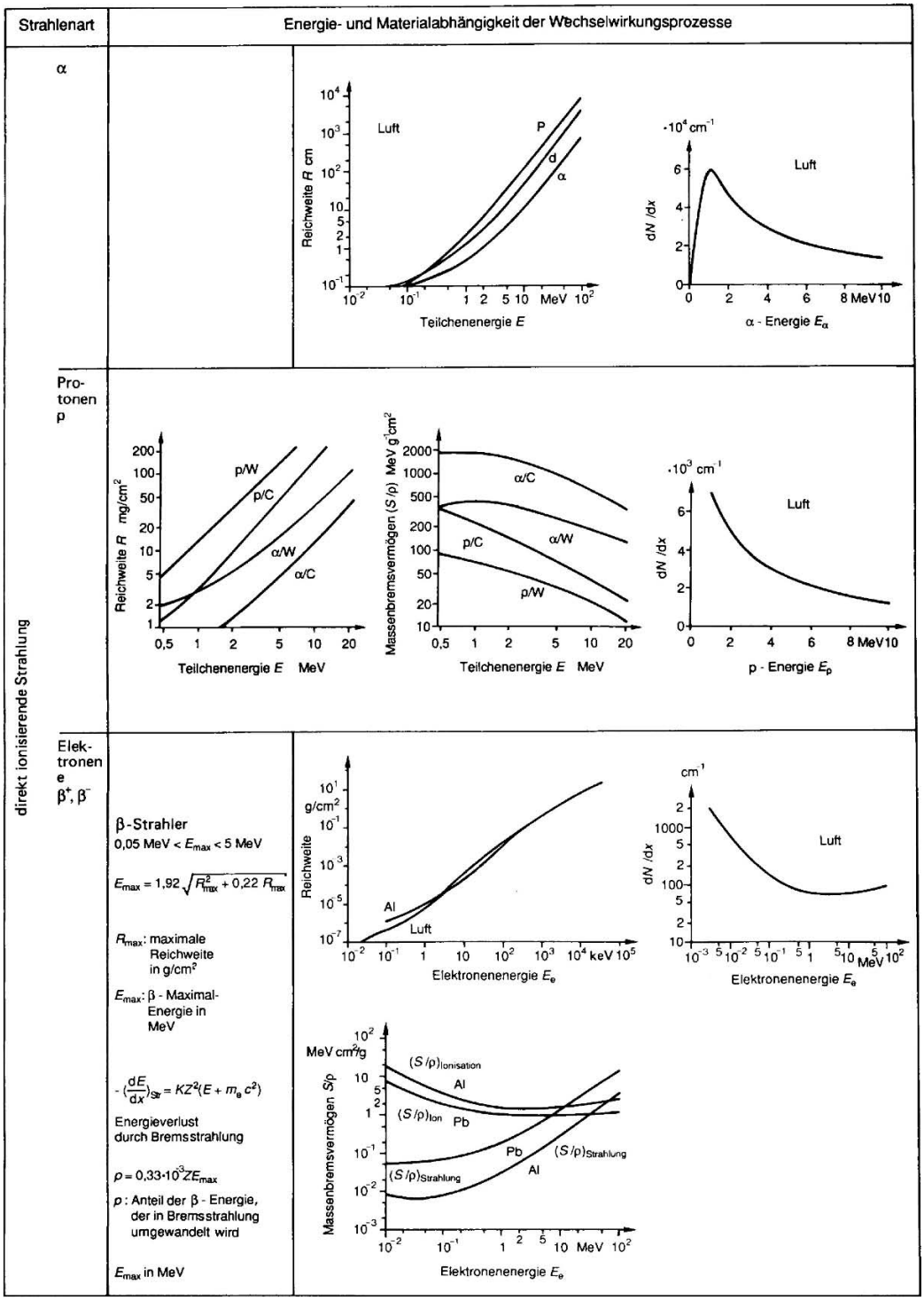


Abb. 8.91 (Fortsetzung)

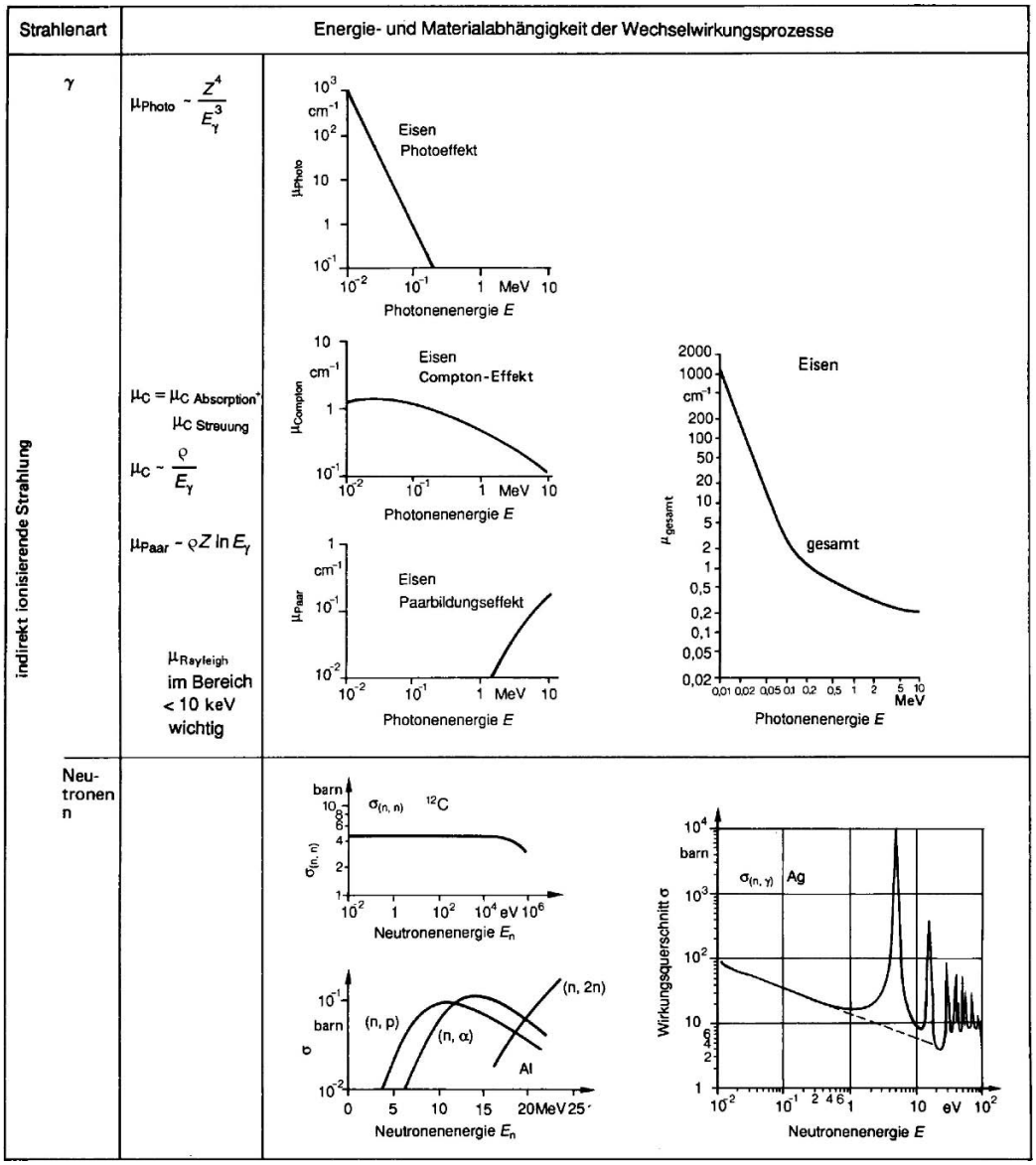


Abb. 8.91 (Fortsetzung)

des Protons infolge seiner 1 836-mal größeren Masse etwa 43-mal geringer als die des Elektrons. Dies führt zu einer größeren Wechselwirkungszeit des Protons mit dem Absorberatom und daher zu einem größeren differentiellen Ionisationsvermögen (Abb. 8.91).

Der differentielle Energieverlust kann für schwere geladene Teilchen (z. B. α, p, d) mit einer Energie $E \ll m_0 c^2$ (nichtrelativistische Teilchen) näherungsweise durch die *Bethe-Bloch-Gleichung* (H. A. Bethe, 1906 bis 2005 und F. Bloch, 1905 bis 1983) beschrieben werden:

$$S = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{Z z^2 \mathrm{e}^4 n}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{oe}} v_{\mathrm{i}}^2} \ln\left(\frac{2 m_{\mathrm{oe}} v_{\mathrm{i}}^2}{\bar{I}}\right)$$
$$= \frac{Z z^2 e^4 N_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{i}}}{8\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{oe}} E_{\mathrm{kin}} M_{\mathrm{A}}} \ln\left(\frac{4 m_{\mathrm{oe}} E_{\mathrm{kin}}}{\bar{I} m_{\mathrm{i}}}\right) \quad (8.100)$$

S Bremsvermögen, $[S] = 1$ MeV/cm,
Z Ordnungszahl des Absorbermaterials,
z Ladung des Teilchens i,
m_{i} Masse des Teilchens i,
v_{i} Geschwindigkeit des Teilchens i,
E_{kin} kinetische Energie des Teilchens i,
n Teilchendichte des Absorbermaterials
N_{A} Avogadro-Konstante
M_{A} Molmasse des Absorbers
$\bar{I}$ mittlere Ionisierungsenergie.

Die *mittlere Ionisierungsenergie* ist in Tabelle 8.15 für einige Elemente zusammengestellt.

Dividiert man das Bremsvermögen S durch die Dichte ϱ des Absorbermaterials, so erhält man das *Massenbremsvermögen*. Mit Hilfe dieser Größe kann durch Gewichtung mit dem Masseanteil der entsprechenden Komponente das Massenbremsvermögen von Mischungen und Verbindungen ermittelt werden. Aus (8.100) wird ersichtlich, dass mit zunehmender Energie des Teilchens das Bremsvermögen abnimmt (Abb. 8.91) und bei gleicher Ladung und Energie des Teilchens (z. B. p und d) das schwerere Teilchen stärker im Material gebremst wird. Die Reichweite (Eindringtiefe) von α-Teilchen mit einer Energie von 10 MeV in Kohlenstoff beträgt nur 0,07 mm. Bei Teilchenenergien im Bereich der Ruheenergie – dies entspricht bei Protonen ungefähr 10^3 MeV – zeigt das Bremsvermögen infolge relativistischer Effekte ein Minimum. Die Reichweite $R(E_0)$ der Teilchen mit der Anfangsenergie E_0 gibt die notwendige Schichtdicke oder Flächenmasse an, die das Teilchen bei senkrechtem Auftreffen nicht mehr zu durchdringen vermag.

Bei schweren geladenen Teilchen findet kaum Streuung statt, sodass die Bahnkurve nahezu eine Gerade ist. Die Reichweite ergibt sich aus dem Bremsvermögen zu

$$R(E_0) = -\int_{E_0}^{0} \frac{1}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}E = \int_{0}^{E_0} \frac{1}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}E\,. \quad (8.101)$$

Für Elektronen, die sehr stark gestreut werden, liefert diese Beziehung die *Bahnlänge*, d. h. den Weg unter Berücksichtigung der Umwege infolge Streuung im Absorber, die größer als die Reichweite ist. Die Reichweite, die sich aus der Absorptionskurve ergibt, Abb. 8.91, schwankt statistisch für die einzelnen Teilchen infolge der diskontinuierlichen Energieabgabe an das Absorbermaterial. Man gibt deshalb in der Praxis die *mittlere Reichweite* (gegeben durch die Schichtdicke, die zu einer Flussdichte-Halbierung führt) oder die *extrapolierte Reichweite* (Schnittpunkt der Wendetangente mit der Schichtdickenachse) an.

Betrachtet man das *differentielle Ionisationsvermögen* $\mathrm{d}N/\mathrm{d}x$, so ist dies für Protonen, verglichen mit α-Teilchen, um den Faktor 10 ge-

Tabelle 8.15 Mittlere Ionisierungsenergie

Ordnungszahl Z	Element bzw. Stoff	mittlere Ionisierungsenergie $\bar{I}$ in eV
1	Wasserstoff	18,7
6	Graphit	78
13	Aluminium	163
79	Gold	797
82	Blei	826
	Luft	86,8
	Wasser	65,1

Tabelle 8.16 Mittlerer Energieverbrauch $\overline{E}$ zur Bildung eines Ionenpaars

Gas	$\overline{E}$ in eV		E_I in eV
	Elektronen, β-Teilchen	α-Teilchen	Ionisierungsenergie
Helium	41,4	44,4	24,6
Argon	26,1	26,4	15,8
Wasserstoff	36,3	36,7	15,4
Stickstoff	34,7	36,5	15,6
Luft	34,0	35,1	–

ringer (Abb. 8.91). α-Teilchen zeigen im differentiellen Ionisationsvermögen in Luft ein Maximum bei ungefähr 1 MeV, das zu einem Maximum der Ionendichte am Ende der Teilchenbahn führt. Der Energieverbrauch zur Erzeugung eines Ionenpaars ist für α- und β-Teilchen in Tabelle 8.16 mit der Ionisierungsenergie zusammengestellt. Die für α-Teilchen angegebenen Daten gelten auch in guter Näherung für Protonen und Deuteronen, da der Energieverlust unabhängig von der Teilchenart ist. Aus diesen Daten ist ersichtlich, dass der Energieverbrauch etwa doppelt so groß ist wie die Ionisierungsenergie. Die Hälfte der Energie wird somit zur Anregung von Atomen oder Molekülen verbraucht.

Für Elektronen muss das Bremsvermögen relativistisch berechnet werden, da die Ruheenergie des Elektrons $E = m_{oe}c^2 = 0{,}511$ MeV beträgt. Das *Bremsvermögen* für Elektronen ergibt sich damit zu

$$S = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{Ze^4 n}{8\pi\varepsilon_0^2 m_{oe} v^2} \cdot \cdot \ln\left(\frac{m_{oe} v^2 E_{kin}}{2\bar{I}^2(1-\beta^2)}\right) + f(\beta)\,. \quad (8.102)$$

mit $f(\beta)$ als Funktion, die $\beta = v/c$ enthält. Das Bremsvermögen für Luft in Abhängigkeit von der Elektronenenergie (Abb. 8.91) zeigt den Anstieg von S über 1 MeV, der durch den logarithmischen Term in (8.102) verursacht wird. Das differentielle Ionisationsvermögen von Elektronen ist um den Faktor 1000 kleiner als bei α-Teilchen. Gleichung (8.102) berücksichtigt lediglich den Energieverlust durch Ionisation und Anregung, nicht dagegen den Energieverlust durch Bremsstrahlung. Der Energieverlust durch Bremsstrahlung wird erst oberhalb der Ruheenergie des Teilchens merklich, z. B. für Protonen oberhalb einer Ruheenergie von etwa 10^3 MeV; hierbei laufen dann zum großen Teil Kernreaktionen ab. Bei Elektronen steigt das Massenbremsvermögen infolge der Bremsstrahlung $(S/\varrho)_{\text{Strahlung}}$ oberhalb 1 MeV stark an (Abb. 8.91). Die Elektronenbahn im Absorbermaterial ist im Gegensatz zu den schweren geladenen Teilchen nicht geradlinig, weil infolge der wesentlich geringeren Masse des Elektrons Streuungen auftreten. Die Integration über das reziproke Bremsvermögen $(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)^{-1}$ (Summe der Energieverluste durch Ionisation und Bremsstrahlung) analog den schweren geladenen Teilchen ergibt die *mittlere Bahnlänge*. Infolge der Vielfachstreuung haben die Elektronen keine einheitliche Reichweite nach (8.101), sondern nur eine *maximale Reichweite*. Hierunter versteht man die zur vollständigen Absorption der Elektronenstrahlung erforderliche Absorberdicke oder Flächenmasse.

Das exponentielle Absorptionsverhalten von β-Teilchen für radioaktive Strahlung (Abb. 8.91) ist rein zufällig und durch die Messgeometrie (Anordnung von Strahlenquelle-Absorber-Detektor) beeinflussbar. Da bei der Absorption – besonders bei hohen Elektronenenergien und großer Ordnungszahl des Absorbermaterials – Bremsstrahlung auftritt, führt dies in der Absorptionskurve zu einer

Konstanten, von der Flächenmasse unabhängigen Flussdichte (*Bremsstrahluntergrund*). Aus der maximalen Reichweite kann auf die Energie bzw. die Maximalenergie der β-Teilchen geschlossen werden.

Das Auftreten von Vielfachstreuung im Absorber wird besonders durch die *Rückstreuung* deutlich. Bei der Rückstreuung verlassen die Elektronen entgegen der Auftreffrichtung den Absorber. β^+-Teilchen verhalten sich analog β^--Teilchen. Nachdem das β^+-Teilchen durch Wechselwirkungsprozesse seine kinetische Energie an das Absorbermaterial abgegeben hat, zerstrahlt (*annihiliert*) es mit einem Elektron zu zwei γ-Quanten der Energie 0,511 MeV = $m_{0e}c^2$.

Indirekt ionisierende Strahlen

Die Schwächung von Röntgen- und γ-Strahlung (Abb. 8.91) kann beschrieben werden durch

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\mu x} = \Phi_0 e^{-(\mu/\varrho)d} \,. \qquad (8.103)$$

$\Phi(x)$ Photonenflussdichte nach dem Absorber,
Φ_0 Photonenflussdichte vor dem Absorber,
x Schichtdicke des Absorbers,
μ linearer Schwächungskoeffizient,
d Flächenmasse $d = x\varrho$,
μ/ϱ Massenschwächungskoeffizient.

Der lineare Schwächungskoeffizient bzw. *Massenschwächungskoeffizient* ist eine Funktion der Photonenenergie und der Ordnungszahl des Absorbers. Der Unterschied zu den direkt ionisierenden Teilchen besteht darin, dass das Röntgen- bzw. γ-Quant lange Wege zwischen zwei Wechselwirkungsprozessen zurücklegt und die das Absorbermaterial durchdringenden Quanten die Ausgangsenergie haben (abgesehen von inelastisch gestreuten Quanten). Eine vollständige Absorption der Strahlung ist im Gegensatz zu den geladenen Teilchen nicht möglich. Der Massenschwächungskoeffizient für Gemische oder Verbindungen kann aus den Massenanteilen p der Komponenten ermittelt werden:

$$(\mu/\varrho)_{\text{Mischung}} = \sum_i p_i (\mu/\varrho)_i \,; \quad \sum_i p_i = 1 \,. \qquad (8.104)$$

Die Wechselwirkungsprozesse der γ-Strahlung mit Materie sind der *Fotoeffekt*, *Compton-Effekt* und *Paarbildungseffekt*. Während beim Fotoeffekt Elektronen aus inneren Schalen entfernt werden und den Großteil der γ-Energie als kinetische Energie erhalten, tritt beim Compton-Effekt die Wechselwirkung mit äußeren Elektronen (geringe Bindungsenergie, quasi-freie Elektronen) ein (Abschn. 6.5.1.2). Beim Paarbildungseffekt muss aus Energie und Impulserhaltungsgründen ein Teilchen (z. B. Atomkern) zur Erzeugung eines Positron-Elektron-Paars vorhanden sein.

Der *Gesamtschwächungs-* bzw. *Gesamtmassenschwächungskoeffizient* setzt sich aus den Koeffizienten der einzelnen Wechselwirkungsprozesse zusammen. Die Schwächungskoeffizienten können als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden, mit der der Wechselwirkungsprozess stattfindet. Somit ist der lineare Schwächungskoeffizient μ_i proportional einem Wirkungsquerschnitt σ_i für den Prozess i. Vom *Gesamtschwächungskoeffizienten* ist der stets kleinere *Energieabsorptionskoeffizient* μ_e zu unterscheiden. Der Energieabsorptionskoeffizient μ_e ist stets kleiner als der Gesamtschwächungskoeffizient, da der Streuanteil des Compton-Effektes ($\mu_{c,\,\text{Streu}}$) unberücksichtigt bleibt:

$$\mu = \mu_{\text{Photo}} + \mu_{c,\,\text{Abs}} + \mu_{c,\,\text{Streu}} + \mu_{\text{Paar}} \,,$$
$$\mu_e = \mu_{\text{Photo}} + \mu_{c,\,\text{Abs}} + \mu_{\text{Paar}} \,. \qquad (8.105)$$

Aus Abb. 8.91 ist zu erkennen, dass im niederenergetischen Bereich der Photoeffekt, im hochenergetischen Bereich der Paarbildungseffekt und im Zwischenbereich der Compton-Effekt überwiegt.

Wie bei den Wechselwirkungsprozessen geladener Teilchen können auch durch die γ-Quanten Elektronen aus inneren Schalen der Absorberatome entfernt werden. Beim Auffüllen der Elektronenlücke durch Elektronen aus höheren Schalen entsteht *Sekundärstrahlung* (*Röntgen-Fluoreszenzstrahlung*) geringen Durchdringungsvermögens.

Im Gegensatz zu den γ-Quanten können Neutronen nur mit dem Atomkern wechselwirken. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer bestimmten Reaktion wird durch den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{(n,\,x)}$ beschrieben, der eine große Abhängigkeit von der Neutronenenergie und dem Absorbermaterial aufweist. Die wichtigsten Wechselwirkungsprozesse sind in Abb. 8.91 zusammengestellt.

Schnelle Neutronen verlieren durch inelastische (n, n′) und elastische Streuprozesse (n, n) ihre Energie; hierbei ist der Energieverlust durch inelastische Streuung infolge Kernanregung größer und allgemein bei leichten Kernen am größten. Deshalb werden zum Abbremsen von Neutronen leichte Stoffe, wie z. B. Wasser bzw. schweres Wasser (D_2O), Paraffin oder Graphit eingesetzt. Bereits während des Bremsvorgangs können die Neutronen von Kernen eingefangen werden ((n, γ)-Reaktion). Mit kleiner werdender Neutronenenergie nimmt die Wahrscheinlichkeit $\sigma_{(n,\,\gamma)}$ des Neutroneneinfangs zu. Beim Neutroneneinfang werden ein oder mehrere γ-Quanten frei, deren Gesamtenergie der Bindungsenergie des Neutrons (etwa 8 MeV) entspricht. Beim Strahlenschutz ist zu beachten, dass die durch Neutroneneinfang oder andere Kernreaktionen entstandenen Nuklide häufig radioaktiv sind.

8.10.2 Dosisgrößen

Abbildung 8.92 zeigt die Dosisgrößen, deren Einteilung und Zusammenhänge. Die fundamentale physikalische Dosisgröße ist die *Energiedosis D* (Messung in Gray: Gy), während die *Ionendosis J* aus messtechnischem Grund und die *Äquivalentdosis H* (Messung in Sievert: Sv) sowie die effektive Äquivalentdosis *E* wegen ihrer Bedeutung in der Strahlenbiologie und im Strahlenschutz eingeführt wurden. Die Energiedosis *D* gibt die in einem Masseelement $dm = \varrho\, dV$ absorbierte Energie dE an. Diese Größe ist unabhängig von der Art der Wechselwirkung der Strahlung und dem Absorbermaterial. Zur Kennzeichnung eines Strahlenfeldes oder einer Strahlenwirkung durch die Energiedosis ist die Angabe des bestrahlten Materials notwendig, da die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkungsprozesse vom Material abhängig ist.

Eine für den Menschen tödliche Energiedosis von 10 Gy = 10 J/kg führt in Wasser lediglich zu einer Temperaturerhöhung von $2 \cdot 10^{-3}$ K. Aus diesem Grund ist die direkte Messung der Energiedosis mit einem Kalorimeter nur bei verhältnismäßig hohen Dosen möglich und sehr aufwändig. Messtechnisch lassen sich verhältnismäßig einfach und genau Ladungen erfassen. Deshalb betrachtet man nicht die Summe aller Wechselwirkungsprozesse, die zu einer Energieabgabe an das Masseelement dm führen, sondern nur die Ionisation und definiert die Ionendosis *J* als erzeugte Ladung eines Vorzeichens dQ je dm. Bei gleichem Strahlungsfeld ergeben sich für unterschiedliche Stoffe unterschiedliche Ionendosen, da die zur Erzeugung eines Ionenpaares erforderliche Energie vom Material abhängig ist. Außer der SI-Einheit C/kg findet man noch die ältere Einheit *Röntgen* (R). 1 R ist diejenige Ionendosis einer ionisierenden Strahlung, bei der in 0,001293 g Luft (1 cm^3 Luft unter

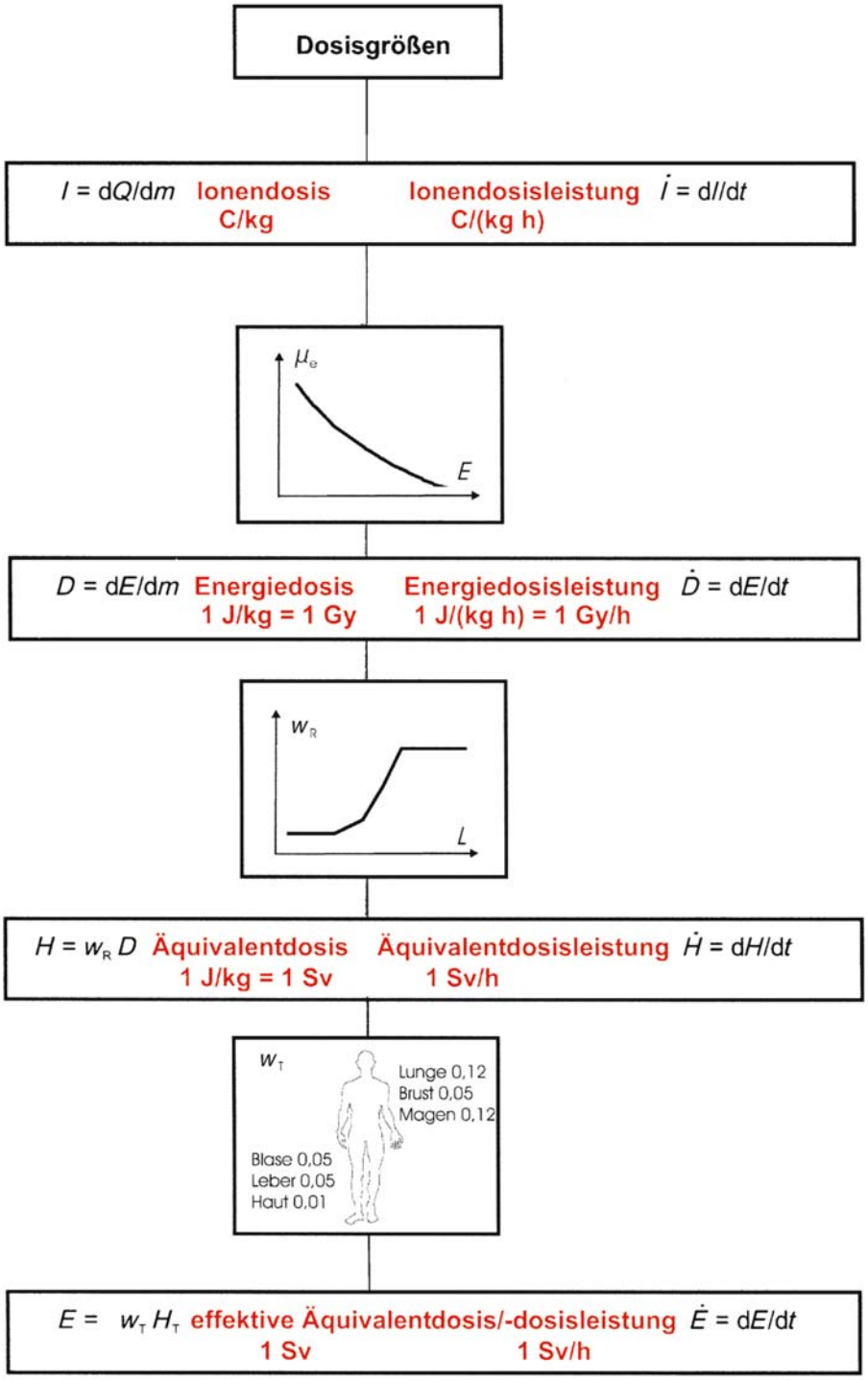


Abb. 8.92 Verwendete Dosisgrößen

Normalbedingungen) bei Elektronengleichgewicht mit der Umgebung eine Ionisation von $3{,}33 \cdot 10^{-10}$ C jedes Vorzeichens erzeugt wird. Für Luft benötigt man zur Erzeugung eines Ionenpaars 34 eV. Somit entspricht 1 R einer Energiedosis von $0{,}877 \cdot 10^{-2}$ Gy (in Luft).
Die Ionendosis und Ionendosisleistung sind für alle ionisierenden Strahlen mit Ausnahme der Neutronen gültig. Für die Umrechnung der Ionendosis in Luft in die Energiedosis eines Materials gilt für Röntgen- und γ-Strahlung

$$D = f \frac{(\mu_e/\varrho)_{\text{Material}}}{(\mu_e/\varrho)_{\text{Luft}}} I \,. \qquad (8.106)$$

Bei Verwendung der Einheit C/kg für die Ionendosis I und J/kg für die Energiedosis D gilt $f = 34{,}0$ J/C.
In Abb. 8.93 ist die Energieabhängigkeit von μ_e für verschiedene Materialien dargestellt. Für Weichteilgewebe (entspricht etwa Wasser) ergibt sich mit $(\mu_e/\varrho)_{\text{Gewebe}}/(\mu_e/\varrho)_{\text{Luft}} = 1{,}1$),
1 R (in Luft) $= 0{,}97 \cdot 10^{-2}$ Gy (in Gewebe) .
In der Strahlenschutzpraxis gilt
1 C/kg (in Luft) ≙37,6 Gy (in Weichteilgewebe).
Zur Beurteilung der biologischen Wirkung der Strahlung ist die Energiedosis ungeeignet, da gleiche Dosen verschiedener Strahlungsarten unterschiedliche Schädigungen in Art und Stärke zeigen. In der Strahlenbiologie wurde deshalb der *Faktor der relativen biologischen Wirksamkeit* f_{RBW} eingeführt. Dieser ergibt sich durch den Vergleich der für eine bestimmte biologische Wirkung erforderlichen Energiedosis D_{i} der zu beurteilenden Strahlung mit der Energiedosis D_{o} einer Vergleichsstrahlung, z. B. 250 kV Röntgenstrahlung oder ^{60}Co γ-Strahlung. Für eine bestimmte biologische Wirkung gilt

$$f_{\text{RBW}} = \frac{D_{\text{o}}\,(\text{Vergleichsstrahlung})}{D_{\text{i}}\,(\text{zu bewertende Strahlung})} \,. \qquad (8.107)$$

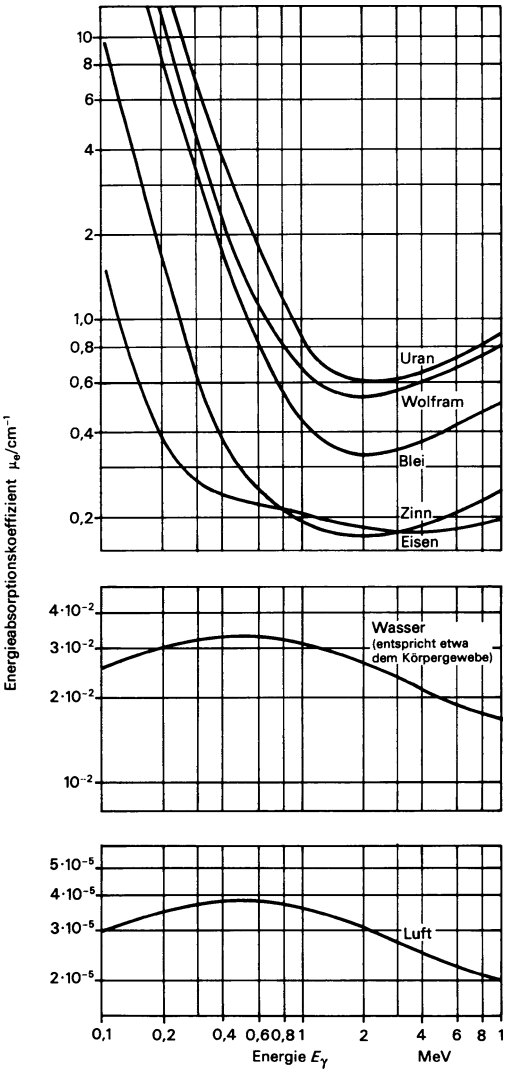


Abb. 8.93 Energieabsorptionskoeffizient in Abhängigkeit von der Photonenenergie für verschiedene Stoffe

Der Faktor f_{RBW} ist von der betrachteten Strahlenwirkung abhängig. Man führt deshalb zur Beurteilung der biologischen Wirkung den dimensionslosen *Strahlungs-Wichtungsfaktor* w_{R} (R für radiation) ein. Das Produkt aus Energiedosis und w_{R} wird als *Äquivalentdosis* H bezeichnet:

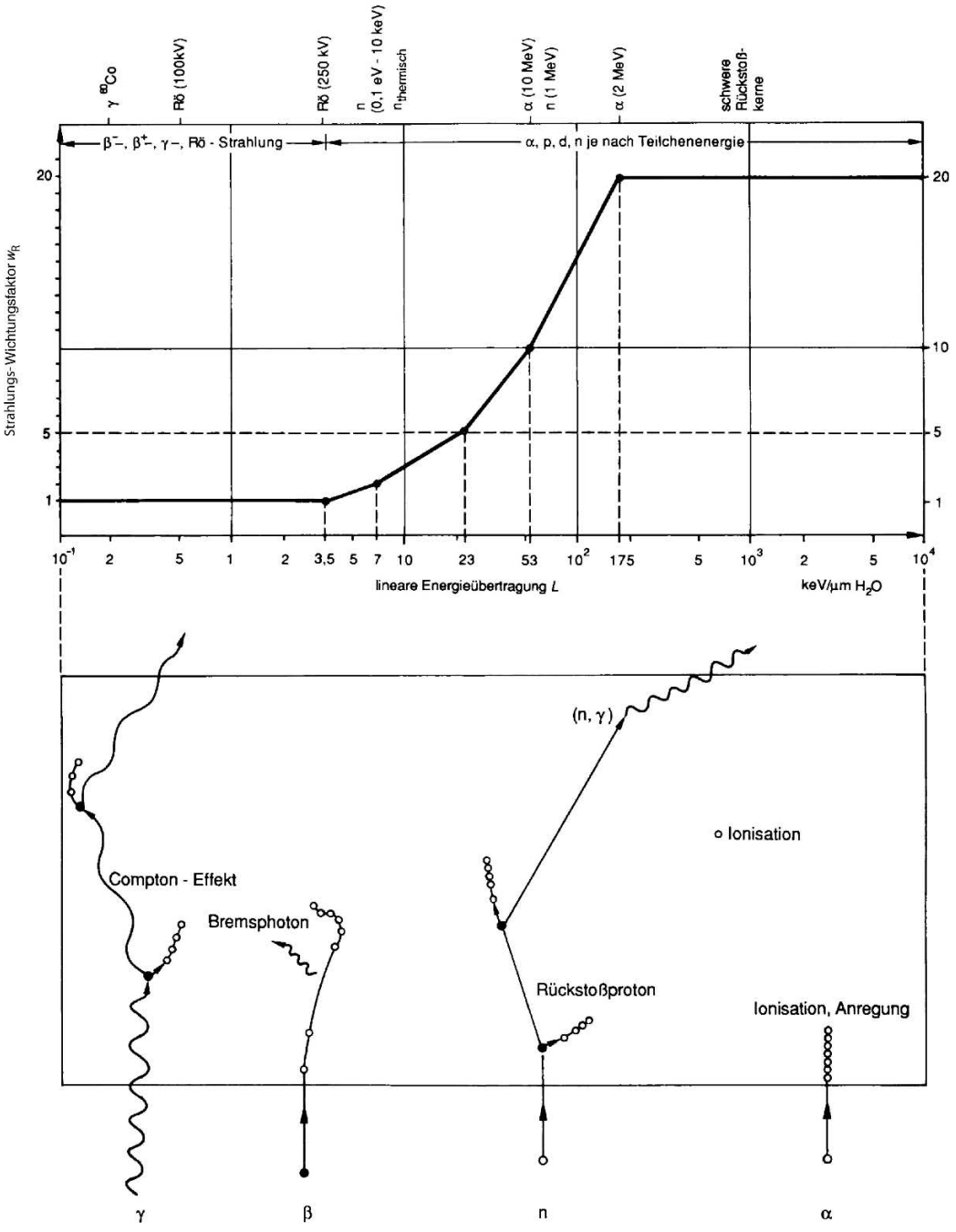


Abb. 8.94 Abhängigkeit des Strahlungs-Wichtungsfaktor von der linearen Energieübertragung und Zusammenstellung von Gewebe-Wichtungsfaktoren

Strahlungs-Wichtungsfaktor w_R	Strahlenart und Energiebereich
20	Alphateilchen, Spaltfragmente schwere Teilchen, Neutronen >100 keV bis 2 MeV
10	Neutronen 10 keV bis 100 keV >2 Mev bis 20 MeV
5	Neutronen <10 keV und >20 keV
1	Photonen, alle Energien, Elektronen alle Energien

Gewebe-Wichtungsfaktoren w_T	Gewebe oder Organ
0,20	Gonaden
0,12	Dickdarm
0,12	Knochenmark
0,12	Lunge
0,12	Magen
0,05	Blase
0,05	Brust
0,05	Leber
0,05	Schilddrüse
0,05	Speiseröhre
0,01	Haut
0,01	Knochenoberfläche
0,05	andere Organe oder Gewebe

$$H = w_R \cdot D\,. \qquad (8.108)$$

Im Gegensatz zum Faktor f_{RBW}, der gemessen werden kann, wird w_R unter Berücksichtigung der biologischen Erkenntnisse festgesetzt. H ist somit prinzipiell nicht messbar.
Die biologische Wirkung einer Strahlung ist eng verknüpft mit der *linearen Energieübertragung* L. Dieser Wert entspricht dem Bremsvermögen S und wird im Allgemeinen in keV/µm für Wasser angegeben. Man ordnet den L-Werten einen *Strahlungs-Wichtungsfaktor* w_R von 1 bis 20 entsprechend Abb. 8.94 zu. Für die Beurteilung von γ-Strahlung und n-Strahlung werden die L-Werte der Sekundärteilchen (Rückstoßkerne, Compton-Elektronen, Photoelektronen) zugrunde gelegt. Die lineare Energieübertragung L ist abhängig von der Energie der Strahlung und nimmt für geladene Teilchen normalerweise mit zunehmender Energie ab. Dies führt am Ende der Teilchenbahn zu einem größeren Energieverlust je Wegstrecke als zu Beginn der Teilchenbahn. Damit gelten entlang der Teilchenbahn unterschiedliche w_R-Werte. Für eine bestimmte Anfangsenergie kann ein durchschnittlicher L-Wert und damit ein effektiver w_R angegeben werden.
Zur Betrachtung der Wirkung der Strahlung auf den Menschen muss neben der räumlichen und zeitlichen Verteilung die Strahlenart und Energie sowie die unterschiedliche Empfindlichkeit von Organen/Gewebe berücksichtigt werden.
Die Strahlenart bzw. Energie wird durch den Strahlungs-Wichtungsfaktor w_R, die unterschiedliche Empfindlichkeit der Organe/Gewebe durch den Gewebe-Wichtungsfaktor w_T (T für tissue, siehe Abb. 8.94) bewertet. Durch diese Bewertung sind Strahlenbelastungen unterschiedlicher Art und Energie sowie in unterschiedlicher Organen bezüglich ihrer biologischen Wirkung miteinander vergleichbar und damit addierbar.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Organdosis} \quad H_T = \sum_R w_R \cdot D_{T,R} \\ &\text{Effektive Dosis} \quad E_T = w_T \cdot H_T \end{aligned}\right\} E$$
$$= \sum_T w_T \sum_R w_R \cdot D_{T,R} \qquad (8.109)$$
$$\text{mit} \sum_T w_T = 1 \quad \text{„Körperdosis“}$$

8.10.3 Biologische Wirkung der Strahlung

In Abb. 8.94 sind die Wechselwirkungen der unterschiedlichen Strahlen in Materie (z. B. Gewebe) mit dem Verlauf des Qualitätsfaktors zusammengestellt. Röntgenstrahlen, γ-Quanten und β-Teilchen haben eine geringe lineare Energieübertragung und damit $w_R = 1$. Mit zunehmender Energie der Quanten oder Elektronen verschiebt sich die maximale relative Tiefendosis in das Gewebeinnere, wie Abb. 8.95 zeigt. Für β-Teilchen aus einem radioaktiven Zerfall nimmt die Tiefendosis rasch mit der Gewebetiefe ab. Die mittleren Strahlungs-Wichtungsfaktoren w_R für Neutronen sind stark von der Neutronenenergie abhängig. Thermische Neutronen ($E_n = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ MeV) haben ein $w_R = 5$, im Energiebereich 100 keV bis 2 MeV ein $w_R = 20$ und ab 20 MeV wieder $w_R = 5$ (Abb. 8.94). Neutronen haben wie γ-Quanten ein großes Durchdringungsvermögen. α-Teilchen dagegen dringen kaum in das Gewebe ein, haben einen großen L-Wert und damit einen großen Strahlungs-Wichtungsfaktor von 20. Inkorporierte α-Strahler, die sich in bestimmten Organen anreichern (z. B. in Knochenmark), haben deshalb eine besonders große schädigende Wirkung.
Durch Ionisation und Anregung können sich chemisch sehr reaktive Molekülbruchstücke, sogenannte *Radikale* (Moleküle oder Molekül-

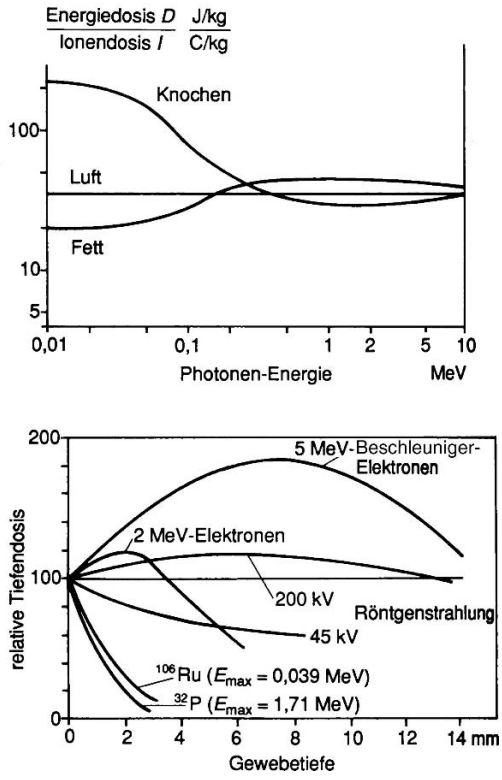


Abb. 8.95 Relative Tiefendosis und Dosisverhältnis

bruchstücke mit ungepaartem Elektron), bilden, die die komplizierten chemischen Reaktionen in der Zelle beeinflussen. Besonders schwerwiegend wirken sich Veränderungen der Erbanlagen der Zellen aus, insbesondere bei Keimzellen oder während des frühen Wachstums eines Organismus. Die Zellen sind in der Phase der Zellteilung besonders strahlenempfindlich. Deshalb erweisen sich Gewebe mit hohen Zellteilungsraten, wie z. B. Knochenmark und Haut, stärker gefährdet als Zellen, die sich weniger häufig teilen (Nerven, Bindegewebe, Muskel).

Man unterscheidet hinsichtlich der Wirkung zwischen Schäden in Körperzellen (*somatische Strahlenschäden*), die am bestrahlten Organismus in Erscheinung treten, und Schäden in Keimzellen (*genetische Schäden*), die sich nur in der Nachkommenschaft auswirken. Für genetische und somatische Spätschäden (Krebs) durch Strahleneinwirkung gibt es keine untere Dosisgrenze, unterhalb derer eine schädigende Wirkung mit Sicherheit nicht auftritt. Eine Dauerbelastung mit geringer Dosis über viele Jahre bewirkt infolge der natürlichen Regenerationsfähigkeit eine wesentlich geringere Schädigung als die gleiche Dosis in kurzer Zeit, in Tabelle 8.17 sind somatische Strahlenwirkungen für unterschiedliche Äquivalentdosen bei kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung zusammengestellt.

Durch die natürliche Radioaktivität und die Höhenstrahlung ist der Mensch ständig einer Strahlenbelastung ausgesetzt. Hinzu kommt die Strahlenbelastung in der Medizin (Röntgendiagnostik) und bei technischen Anwendungen (Kerntechnik). In Abb. 8.96 ist die mittlere genetisch signifikante Strahlenbelastung der Bevölkerung der Bundesrepublik Deutschland zusammengestellt.

Die individuelle Strahlenbelastung kann deutlich von der mittleren Strahlenbelastung abweichen. Ein dauernder Aufenthalt in 1000 m Höhe über dem Meerespiegel erhöht die Strahlenbelastung durch kosmische Strahlung bereits um 0,15 mSv/a.

Abbildung 8.97 zeigt die Häufigkeitsverteilung der terrestrischen Komponente der natürlichen Strahlenbelastung für die Bevölkerung der Bundesrepublik Deutschland. Ein Langstreckenflugzeug in einer Höhe von 10 km bis 20 km kann für den Flugreisenden eine Erhöhung der Strahlenbelastung durch die kosmische Strahlung bis 0,005 mSv je Flugstunde bedeuten.

Auch Kohlekraftwerke emittieren natürliche radioaktive Stoffe, beispielsweise die α-Strahler ^{238}U, ^{234}U, ^{232}Th, ^{226}Ra und ^{210}Po. Ein 320-MW-Kohlekraftwerk emittiert jährlich etwa $4 \cdot 10^9$ Bq. Die Gesamtjahresabgaben radioaktiver Stoffe in der Abluft und im

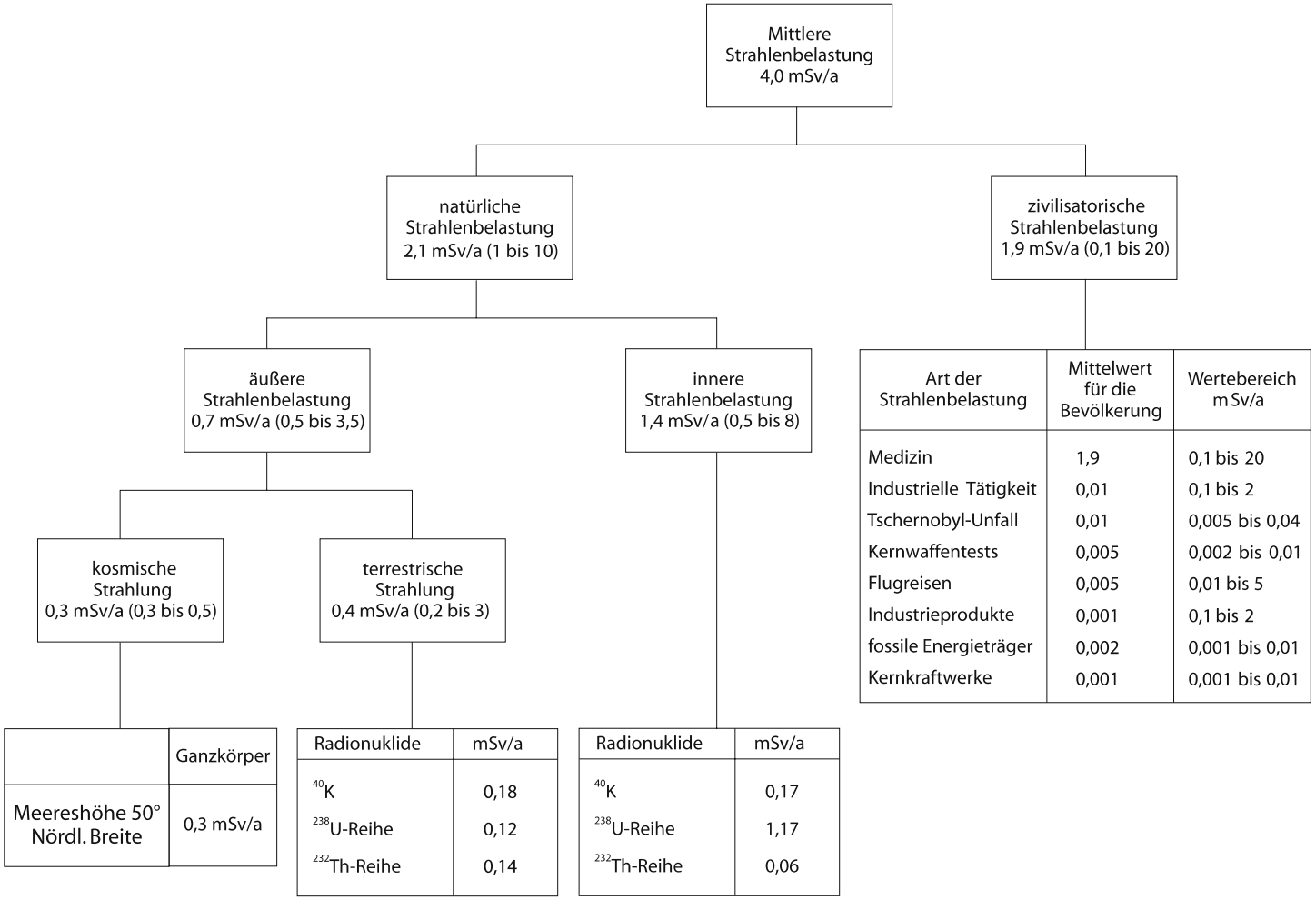


Abb. 8.96 Strahlenexposition der Bevölkerung in Deutschland mit Wertebereich für exponierte Einzelpersonen in Klammern

Tabelle 8.17 Somatische Strahlenwirkungen bei kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung mit γ-Strahlung angegeben in effektiver Dosis

Dosis	1. Woche	2. Woche	3. Woche	4. Woche
Schwellen-dosis 0,25 Sv	keine subjektiven Symptome, Absinken der Anzahl von Lymphozyten im Verlauf von zwei Tagen	Blutbild wird rasch wieder normal.		
subletale Dosis 1 Sv	Blutbild wird rasch wieder normal.	keine deutlichen subjektiven Symptome.	Unwohlsein, Mattigkeit, Appetitmangel; Haarausfall, wunder Rachen.	Spermienproduktion lässt vorübergehend nach. Kräfteverfall, Erholung wahrscheinlich.
mittlere letale Dosis 4 Sv	am ersten Tag Erbrechen und Übelkeit, Absinken der Anzahl der Lymphozyten auf 1000/mm^3 innerhalb von zwei Tagen	keine deutlichen Symptome	Unwohlsein, Mattigkeit, Appetitlosigkeit; Haarausfall, Entzündungen im Rachenraum und Dünndarm	längere bis lebenslange Sterilität bei Männern; Kräfteverfall, 50% Todesfälle
letale Dosis 7 Sv	nach 1 bis 2 h Erbrechen und Übelkeit. Nach zwei Tagen keine Lymphozyten mehr.	Mattigkeit, Appetitlosigkeit, Entzündungen im Mund- und Rachenraum, innere Blutungen, hohes Fieber.		

Abwasser aus kerntechnischen Anlagen der Bundesrepublik Deutschland bezogen auf eine erzeugte elektrische Energie von 1 GWa betragen für Edelgase 3 200 GBq/GWa, Tritium 10 360 GBq/GWa und ^{131}I 0,023 GBq/GWa. Anhand der Emissionswerte berechnet sich die Strahlenexposition in der Umgebung von Kernkraftwerken zu den in Tabelle 8.18 angegebenen Werten. Diese liegen deutlich unterhalb des in der Strahlenschutzverordnung angegebenen Grenzwertes von 1 mSv/a.

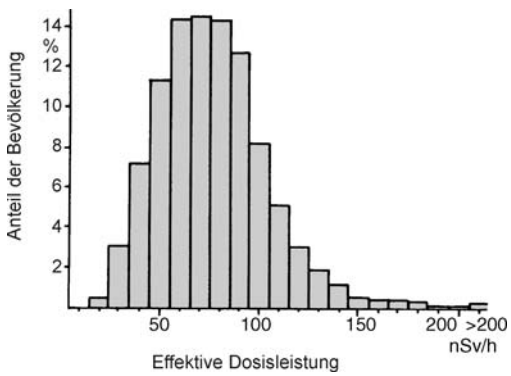


Abb. 8.97 Terrestrische Strahleneinwirkung

8.10.4 Dosismessung

Zur Dosismessung muss ein durch die Strahlung in Materie verursachter, dosisproportionaler messbarer Effekt ausgenutzt werden, wie z. B. *Ionisation, Lichterzeugung* in einem Szintillator, *Veränderungen in Festkörpern*, *che-*

Tabelle 8.18 Strahlenexposition in der Umgebung von Atomkernkraftwerken 2004

Kernkraftwerk	Oberer Wert der effektiven Dosis für Erwachsene µS/a	
	radioaktive Stoffe mit der Luft	radioaktive Stoffe mit dem Abwasser
Kahl	< 0,1	< 0,1
Lingen	< 0,1	–
Obrigheim	2	0,2
Stade	0,5	< 0,1
Würgassen	0,1	< 0,1
Biblis A,B	0,5	0,2
Neckarwestheim 1,2	2	0,5
Brunsbüttel	1	< 0,1
Isar 1,2	2	0,2
Unterweser	0,2	0,1
Philippsburg 1,2	3	0,1
Krümel	0,9	< 0,1
Grundremmingen A,B,C	2	0,6

mische Reaktionen oder *Wärmeerzeugung*. In Abb. 8.98 sind einige Messverfahren mit der Energieabhängigkeit der Anzeige und dem Messbereich zusammengestellt.

Bei der in der Praxis wichtigen Messung der Ionendosis unterscheidet man je nach Messbedingungen zwischen der *Standard-Gleichgewichts-Ionendosis* und der *Hohlraum-Ionendosis*. Die Standard-Gleichgewichts-Ionendosis ist die Ionendosis, die von einer Photonenstrahlung an einem Punkt bei Sekundärelektronengleichgewicht frei in Luft erzeugt wird. Man wählt ein entsprechend großes Luftvolumen und misst die in einem allseitig von Luft umgebenen Teilvolumen erzeugte Ladung. Dadurch wird erreicht, dass die Summe der Elektronenenergien, die in das Messvolumen gelangen, gleich der Energie der austretenden Elektronen ist (Sekundärelektronengleichgewicht). Dies kann nur bis zu einer Energie von 500 keV verwirklicht werden. Wird das Messvolumen mit einer Wand umgeben, für die gilt

$$(\mu_e/S)_{\text{Kammerwand}} = (\mu_e/S)_{\text{Luft}} \qquad (8.110)$$

mit S als dem Bremsvermögen der Sekundärelektronen, so spricht man von *luftäquivalentem Wandmaterial*. Solche Dosimeter sind bis 3*MeV* einsetzbar. In Abb. 8.99 ist ein *Stabdosimeter* schematisch dargestellt. Die in die Ionisationskammer eindringende Strahlung erzeugt durch primäre Ionisationsprozesse La-

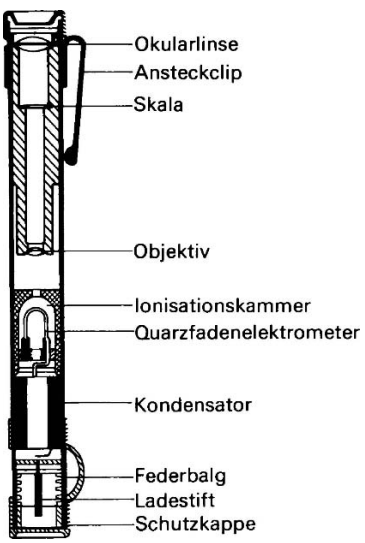


Abb. 8.99 Aufbau eines Füllhalterdosimeters

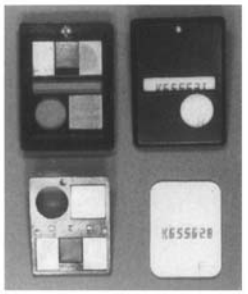
Messprinzip	Strahlung Ionisationskammer Gasverstärkung $A_g = 1$ 	5 2 4 Strahlung C R Proportionalzählrohr $1 < A_g < 10^4$ Auslösezählrohr $A_g \sim 10^8$ (Geiger-Müller-Zählrohr)	Film Strahlung lichtdichte Umhüllung Messung der Schwärzung 	Strahlung Glas 600 nm UV Glas 300 nm Radiophotolumineszenz	Strahlung Feststoff Feststoff Heizung Lichtmessung Thermolumineszenz
Messbereich	0,1 µGy bis 10^3 Gy 0,1 µGy h^{-1} bis 10^6 Gy h^{-1} je nach Gasvolumen 1 mm^3 bis 100 dm^3		0,1 mGy bis 100 kGy Belichtungszeit: µs bis mehrere Monate bestrahlte Fläche: 10 µm² bis 10 m²	10^{-6} Ckg^{-1} bis 10 Ckg^{-1} (Photonen)	$CdSO_4$ (Mn): 10^{-5} Ckg^{-1} bis 10 Ckg^{-1} CaF_2: 10^{-6} Ckg^{-1} bis 0,1 Ckg^{-1} (Photonen)
Energieabhängigkeit	Ionisationskammer LB 6701 N relative Dosisleistung 2, 1, 0,5, 0,2 0,03 0,05 0,1 0,2 MeV 0,5 Photonenenergie E	Geiger-Müller-Zählrohrsonde LB 6500-4 relative Dosisleistung 1,4, 1,2, 1,0, 0,5 0,05 0,1 0,2 MeV 1 Photonenenergie E	Filmempfindlichkeit 10, 5, 2, 1, 0,5, 0,2, 0,1 0,03 0,05 0,1 0,2 MeV 0,5 Photonenenergie E	Schulman-Glas "großes Z" Schulman-Glas "kleines Z" relative Dosis 20, 15, 10, 5, 1 0,03 0,05 0,1 0,2 MeV 0,5 Photonenenergie E	CaF_2(Mn) $CaSO_4$ LiF relative Dosis 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1 0,03 0,05 0,1 0,2 MeV 0,5 Photonenenergie E
Bemerkungen	Personendosimeter zur Bestimmung der Personendosis; schnelle und genaue Information	Ablesung sofort und jederzeit möglich; Warnmöglichkeiten bei Dosisüberschreitung; auch als Personendosimeter	Personendosimetrie: Auswertung durch amtliche Messstellen in vorgegebenen Zeiträumen; universell einsetzbar	Personendosimetrie; Messwertspeicherung, daher beliebig oft auswertbar	Personendosimetrie

Abb. 8.98 Dosismessverfahren

dungen, die zu einer Entladung des Kondensators führen. Die Ladung des Kondensators wird durch das Quarzfadenelektrometer angezeigt und kann durch das Mikroskop (Okularlinse – Objektiv) abgelesen werden. Die Aufladung des Kondensators erfolgt mit einem Ladegerät über den Ladestift. Diese Stabdosimeter sind vorzugsweise zur Ermittlung der Personendosis bestimmt und werden hierzu am Körper getragen. Außerdem können sie auch als Ortsdosimeter verwendet werden. Bei höheren Energien und anderen Strahlenarten wird die Ionendosis in einem kleinen gasgefüllten Hohlraum mit „gewebeäquivalenten" Wänden gemessen (*Hohlraum-Ionendosis*).

Die Messung der Neutronen-Ortsdosisleistung ist infolge der unterschiedlichen Neutronenenergien (0,025 eV bis MeV) problematisch. Dies zeigen die Absorptionskurven für schnelle Neutronen (Abb. 8.91), jeweils gemessen mit einem Detektor, der nur schnelle Neutronen bzw. thermische Neutronen nachweist. Die Zunahme des Flusses thermischer Neutronen erfolgt durch die Abbremsung der schnellen Neutronen im Absorbermaterial. Zur Messsung der Neutronen-Ortsdosisleistung dient ein LiI-Szintillationsdetektor, dessen Kristall (10 mm ∅ × 2 mm) auf einem Plexiglaslichtleiter montiert ist und sich im Mittelpunkt eines kugelförmigen Polyethylenmoderators befindet. Durch den kombinierten Effekt von Moderierung, Streuung und Absorption in der Kugel wird erreicht, dass der im Mittelpunkt herrschende Fluss thermischer Neutronen weitgehend der Äquivalentdosisleistung an der Oberfläche der Kugel, unabhängig vom Neutronenspektrum, entspricht.

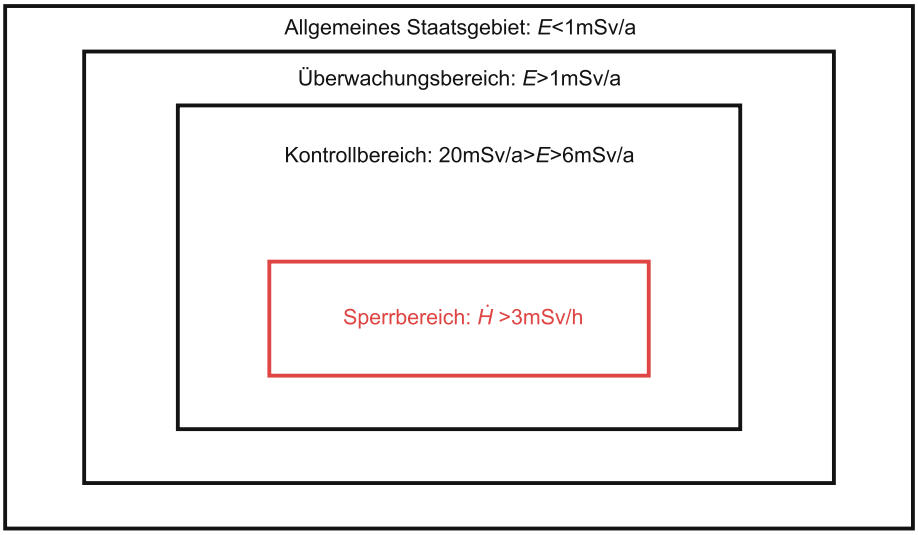
8.10.5 Strahlenschutzmaßnahmen

Im Strahlenschutz unterscheidet man zwischen *beruflich strahlenexponierten* und *nicht beruflich strahlenexponierten* Personen. Jede Person, die beruflich mit Röngtenstrahlung, radioaktiver Strahlung oder anderen ionisierenden Strahlen zu tun hat, wird als beruflich strahlenexponierte Person bezeichnet und unterliegt gesetzlichen Regelungen, die in der Strahlenschutzverordnung festgelegt sind. Die Strahlenschutzverordnung gilt für den Umgang mit radioaktiven Stoffen, ihre Beförderung, Einfuhr und Ausfuhr sowie die Aufsuchung, Gewinnung und Aufbereitung von radioaktiven Mineralien, den Umgang mit Kernbrennstoffen und die Errichtung und den Betrieb von Anlagen zur Erzeugung ionisierender Strahlen mit einer Energie oberhalb von 5 keV (§2 der Strahlenschutzverordnung). In den beiden Verordnungen (Strahlenschutz- und Röntgenverordnung) sind unter Berücksichtigung genetischer Schäden Dosisgrenzwerte gemäß Tabelle 8.19 festgelegt, die kontrolliert und eingehalten werden müssen.

Außer den in Abb. 8.92 dargestellten Dosisgrößen sind im Strahlenschutz noch weitere Dosisbegriffe, wie z. B. *Personendosis, Körperdosis* und *Ortsdosis*, wichtig. Unter Personendosis versteht man die Dosis, die von einem Dosimeter an einer für die Strahlenexposition repräsentativen Stelle der Körperoberfläche (Brust → Ganzkörper, Finger → Hände) angezeigt wird, angegeben als Äquivalentdosis H (Weichteilgewebe). Die *effektive Äquivalentdosis* E (Körperdosis) ist die gewichtete Summe der Strahlenbelastung der Organe (8.109).

Die *Ortsdosis* (Ortsdosisleistung) gibt die Äquivalentdosis für Weichteilgewebe an einem bestimmen Ort des Strahlungsfeldes in einem bestimmten Zeitintervall an. Durch die unterschiedliche Ortsdosisleistung werden verschiedene Bereiche des Strahlungsfeldes abgetrennt. Wie aus Tabelle 8.19 hervorgeht, unterscheidet man zwischen Sperrbereich, Kontrollbereich und Überwachungsbereich. In diesen Bereichen sind unterschiedliche

Tabelle 8.19 Strahlenschutzbereiche (§36, StrschV.) und Dosisgrenzwerte für beruflich Strahlenexponierte Personen (§54–59, StrschV.)



	Kategorie A (mSv/a)	Kategorie B (mSv/a)
Effektive Äquivalentdosis E	$20 > E > 6$ *)	$6 > E > 1$
Organdosen H_T:		
- Augenlinse	$150 > H_T > 45$	$45 > H_T > 15$
- Haut, Hände, Füße	$500 > H_T > 150$	$150 > H_T > 50$
- Rotes Knochenmark, Keimdrüsen	< 50	< 15
- Schilddrüse	< 300	< 100
- Andere Organe	< 150	< 50

*) gemittelt über einen Zeitraum von 5 Jahren, maximal 50 mSv in einem einzigen Jahr

Überwachungsmaßnahmen vorgeschrieben. Der Zugang zum Sperrbereich ist nur in Ausnahmefällen beruflich strahlenexponierten Personen der Kategorie A und B gestattet. Im Kontrollbereich dürfen nur Personen der Kategorie A und B tätig sein. In Ausnahmefällen ist auch für nicht beruflich strahlenexponierte Personen, beispielsweise für Ausbildungszwecke, der Zugang zum Kontrollbereich gestattet.

Man unterscheidet zwischen *äußerer* (Strahlenquellen außerhalb des Körpers) und *innerer* (Strahlenquellen innerhalb des Körpers) Strahlenbelastung. Die Gefahr einer inneren Strahlenbelastung ist bei Arbeiten mit offenen radioaktiven Stoffen durch Inkorporation besonders groß.

Schutz vor äußerer Strahlenbelastung

Mit folgenden Maßnahmen schützt man sich vor äußerer Strahlenbelastung:

– Strahlenquellen mit möglichst kleiner Quellstärke verwenden, soweit dies technisch einzurichten ist,

– Minimierung der Aufenthaltsdauer im Strahlungsfeld. Dies ist eine einfache, aber wirkungsvolle Maßnahme, da sich die Dosis proportional zur Zeit verhält:

$$H = \dot{H}t \,(H \text{ konstant}) ;$$
$$H = \int_0^t \dot{H}(t)\mathrm{d}t \,. \qquad (8.111)$$

– Einhaltung möglichst großer Abstände von der Strahlenquelle sowie
– Verwendung von Abschirmungen.

Eine punktförmige Strahlenquelle (Dimensionen der Quelle klein im Verhältnis zur betrachteten Umgebung), die in alle Richtungen gleichmäßig abstrahlt (isotrop), erzeugt an einem Punkt im Abstand r von der Quelle eine Flussdichte, die proportional der Quellstärke (Anzahl der Teilchen oder Quanten je Zeiteinheit) und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist. Dies ist dadurch bedingt, dass die Oberfläche einer Kugel um die Strahlenquelle mit r^2 zunimmt. Je größer die Flussdichte, desto größer ist bei konstantem Energieabsorptionskoeffizienten μ_e die je Zeiteinheit absorbierte Energie im Material. Somit ist die Flussdichte proportional zur Dosisleistung. Für Photonenstrahlung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H = \dot{H} = \Gamma_H \frac{A}{r^2} \,. \qquad (8.112)$$

Hierin ist $\dot{H}$ die Äquivalentdosisleistung in Sv/h, A die Aktivität der Quelle in Bq, r der Abstand von der Quelle und Γ_H die Äquivalent-Dosisleistungskonstante in Sv h^{-1} m^2 Bq^{-1}.
Die *Äquivalent-Dosisleistungskonstante* Γ_H ist abhängig vom Energiespektrum der Quelle und dem *Energieabsorptionskoeffizienten* μ_e für Weichteilgewebe ($w_R = 1$ für Röntgen- und γ-Strahlung). In Tabelle 8.20 sind für einige Radionuklide die Konstanten angegeben. Für β-Strahlung kann im Prinzip eine ähnliche Beziehung aufgestellt werden; hierbei wird allerdings die Äquivalent-Dosisleistungskonstante zur *Dosisleistungs-Funktion*, da die β-Teilchen entlang ihres Weges Energie verlieren. Außerdem werden die β-Teilchen bereits im radioaktiven Präparat absorbiert (*Selbstabsorption*), sodass die Berechnung der Äquivalentdosis von β-Strahlung sehr schwierig ist.

Tabelle 8.20 Gammastrahlendosiskonstante Γ_H einiger Radionuklide

Radionuklid	Dosiskonstante Γ_H in Sv m^2 h^{-1} Bq^{-1}
^{24}Na	$4{,}72 \cdot 10^{-13}$
^{60}Co	$3{,}36 \cdot 10^{-13}$
^{131}I	$5{,}45 \cdot 10^{-14}$
^{137}Cs	$7{,}70 \cdot 10^{-14}$
^{226}Ra	$2{,}14 \cdot 10^{-13}$

Aus (8.112) entnimmt man, dass sich die Dosisleistung mit dem Quadrat des Abstandes vermindert. Deshalb sollten auch schwach radioaktive Präparate niemals mit den Händen angefasst werden, wie das Rechenbeispiel Tabelle 8.21 belegt. Man erkennt, welchen Einfluss auf die Dosis der Abstand des Objekts zu einem Strahler hat.
Eine weitere Möglichkeit, die Dosisleistung zu senken, ist die Verwendung von Abschirmungen. α-Teilchen lassen sich bereits durch ein Stück Papier vollständig absorbieren. Mit millimeterdickem Aluminium erreicht man eine vollständige Absorption von β-Teilchen. Hierbei ist allerdings das Auftreten von Sekundärstrahlung größerer Reichweite (Bremsstrahlung, Röntgenstrahlung) zu berücksichtigen. Im Gegensatz zur α- und β-Strahlung kann die γ-Strahlung nicht vollständig absorbiert, sondern nur geschwächt werden. Es gilt das *exponentielle Absorptionsgesetz* (8.103) mit dem linearen

Tabelle 8.21 Zahlenbeispiel zur Strahlenbelastung

Radioaktives Präparat: ^{137}Cs Dosiskonstante: 0,077 µSv h^{-1} m^2 MBq^{-1} Aktivität: 10 MBq	Abstand r in m	Äquivalentdosisleistung H in µSv h^{-1}
direktes Greifen des radioaktiven Präparats, Armlänge 0,5 m	0,01 0,5	$7{,}7 \cdot 10^3$ Finger 3,1 Körper
Verwendung einer Zange zum Greifen (0,25 m)	0,25 0,75	12,3 Finger 1,4 Körper
	1,00	0,77
Abschirmung 5 cm Blei	1,00	0,004 $\mu = 1{,}2\ \text{cm}^{-1}$; $B = 2$

Schwächungskoeffizienten μ. In Abb. 8.100 ist diese Größe für einige Materialien in Abhängigkeit von der Energie dargestellt. Da infolge

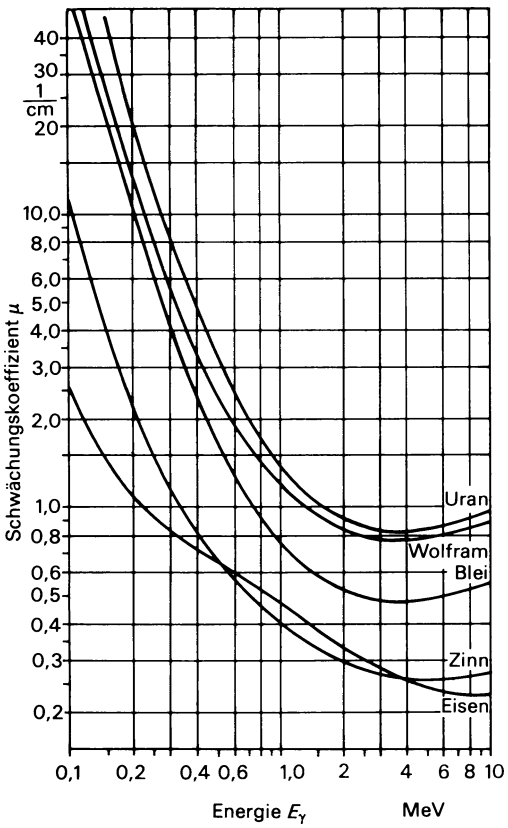


Abb. 8.100 Energieabhängigkeit des linearen Schwächungskoeffizienten einiger Metalle

des *Comptoneffekts* im Absorbermaterial auch Streuung von γ-Strahlung auftritt, kann dies zu einer Erhöhung der Dosisleistung führen. Dies wird durch den *Dosisaufbaufaktor B,* der eine Funktion der Energie. Absorberdicke und des Absorbermaterials ist, berücksichtigt. In Abb. 8.101 sind die B-Werte für Blei und Eisen in Abhängigkeit von μx dargestellt. Damit ergibt sich für die Äquivalentdosisleistung hinter einer Abschirmung

$$\dot{H} = \underbrace{\Gamma_\mathrm{H} \frac{A}{r^2}}_{\substack{\text{Dosis ohne} \\ \text{Abschir-} \\ \text{mung}}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mu x}}_{\substack{\text{Schwä-} \\ \text{chungs-} \\ \text{faktor}}} \underbrace{B(x,E)}_{\substack{\text{Aufbau-} \\ \text{faktor}}} . \qquad (8.113)$$

Zur Berechnung der Dosisleistung hinter einer Abschirmung entnimmt man aus Abb. 8.100 und 8.101 die Werte für μ und B. Für ^{137}Cs (E_γ = 0,662 MeV) entnimmt man die in Tabelle 8.21 angegebenen Werte und kann damit die Dosisleistung hinter einer 5 cm dicken Bleiwand ermitteln.

Schutz vor innerer Strahlenbelastung

Man unterscheidet zwischen *offenen* und *umschlossenen* radioaktiven Stoffen. Umschlossene radioaktive Stoffe sind ständig von einer allseitig dichten, festen, inaktiven Hülle um-

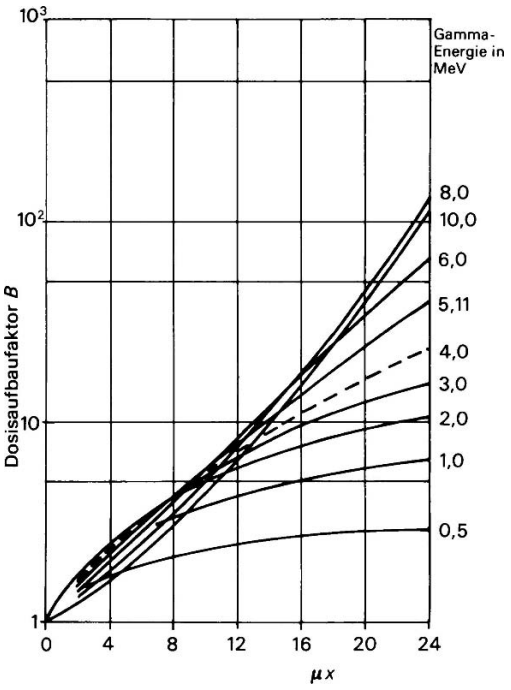


Abb. 8.101 Dosisaufbaufaktor in Abhängigkeit vom Produkt aus Schwächungskoeffizient und Absorberdichte sowie der Energie der γ-Quanten

schlossen oder in festen inaktiven Stoffen ständig so eingebettet, dass bei üblicher betriebsmäßiger Beanspruchung ein Austritt radioaktiver Stoffe mit Sicherheit verhindert wird.

Beim Arbeiten mit *offenen radioaktiven Stoffen* (z. B. Lösungen, Feststoffe, Gase) besteht die Gefahr einer Aufnahme in den Körper (Inkorporation). Dies muss durch entsprechende Laboreinrichtungen und umsichtiges Arbeiten verhindert werden, denn eine innere Strahlenbelastung ist bedeutend gefährlicher als eine äußere Strahleneinwirkung. Die inkorporierten Radionuklide können sich im Körper in bestimmten Organen anreichern und diese bis zu ihrem vollständigen Zerfall direkt schädigen.

Zur Beurteilung der *Radiotoxizität* (Tabelle 8.22) ist deshalb außer der *physikalischen* die *biologische Halbwertszeit* wichtig. Diese gibt die Zeit an, in der eine im Körper vorhandene Aktivität durch Ausscheidung auf die Hälfte vermindert wurde. Nach der Radiotoxizität werden die *Freigrenze* und *Grenzwerte* beispielsweise für Luft, Wasser und Nahrungsmittel festgelegt. Unter *Freigrenze* versteht man die Aktivität, mit der man ohne Genehmigung oder Anzeige umgehen kann. Der Umgang mit Aktivitäten oberhalb der Freigrenze erfordert eine Umgangsgenehmigung (des Gewerbeaufsichtsamts), die bestimmte Laboreinrichtungen und die Fachkenntnis des Personals voraussetzt. Als *kritisches Organ* wird das Organ bezeichnet, das nach einer Inkorporation die empfindlichsten Reaktionen des Körpers erwarten lässt.

In einem Labor, in dem mit offenen radioaktiven Stoffen oberhalb der Freigrenze gearbeitet wird (Isotopenlabor), müssen Überwachungseinrichtungen auf Kontamination vorhanden sein, um ein ungewolltes Verschleppen der radioaktiven Stoffe in die angrenzenden Räume zu vermeiden. Hierfür werden häufig *Xenon-Großflächen-Zählrohre* eingesetzt. Es handelt sich um *Proportionalzählrohre* mit einer effektiven Fensterfläche bis 900 cm^2 und Zählwirkungsgrade je nach Radionuklid bis zu 35%. Diese Detektoren sind auch in den *Personen-Kontaminationsmonitoren* eingebaut. Beim Verlassen des Isotopenlabors muss jede Person diesen Monitor betreten. Es erfolgt eine Messung der Oberflächenaktivität (Bq cm^{-2}) von Händen und Schuhen bzw. Kleidung (mit beweglichem Detektor). Bei Überschreitung eines Schwellenwertes sind Dekontaminationsmaßnahmen erforderlich. Zur Überprüfung von Kontaminationen am Arbeitsplatz eignen sich besonders Kontaminationsmonitore, die für ein Radionuklid direkt die Aktivität je Fläche angeben.

Zum Schutz von Wasser und Luft müssen in einem Isotopenlabor besondere Kontrolleinrichtungen installiert sein. Die Messung der

Tabelle 8.22 Radiotoxizität und kritische Organe

Nuklid	Freigrenze Bq	Halbwertszeit $T_{phys.}$	Halbwertszeit $T_{biol.}$	kritisches Organ
U-238 *)	10^3	$4{,}47 \cdot 10^9$ a	300 d	Nieren
Cs-137	10^4	30,17 a	100 d	Muskel
Pb-210 *)	10^4	22,3 a	730 d	Knochen
Po-210	10^4	138,4 d	40 d	Milz
Sr-90	10^4	28,6 a	11 a	Knochen
U-233	10^4	$1{,}59 \cdot 10^5$ a	300 d	Knochen
Ce-144	10^5	284,8 d	330 d	Knochen
Na-24	10^5	15 h	19 d	ges. Körper
Cd-109	10^6	1,3 a	100 d	Leber
I-131	10^6	8,0 d	180 d	Schilddrüse
Na-22	10^6	2,6 a	19 d	ges. Körper
Sr-85	10^6	68 m	11 a	Knochen
C-14	10^7	5 730 a	35 a	Fett
Rh-105	10^7	35,4 h	28 d	Nieren
H-3	10^9	12,3 a	19 a	ges. Körper

*) im Gleichgewicht mit Tochternukliden

Aktivität erfolgt durch *Tauchzählrohre*, die in das Abwasser eintauchen. Nur wenn entsprechende Grenzwerte unterschritten werden, darf das Abwasser in die öffentliche Kanalisation abgeleitet werden, andernfalls ist eine ordnungsgemäße Beseitigung des radioaktiven Wassers erforderlich.

Zur Übung

Ü 8-1 Welche Photonenenergien und welche Wellenlängen werden bei der *Balmer*-Serie des Wasserstoffatoms emittiert? Welche dieser Spektrallinien liegen im sichtbaren Spektralbereich?

Ü 8-2 Charakteristische Röntgenstrahlung entsteht beim Übergang von Elektronen aus Schalen höherer in solche niedrigerer Energie, insbesondere in innere Schalen mit kleiner Hauptquantenzahl *n*. a) Berechnen Sie die Quantenenergie und Wellenlänge der Kupfer-K_α-Strahlung, die entsteht, wenn Elektronen von der L-Schale auf die K-Schale fallen. Benutzen Sie dazu näherungsweise das *Bohr'sche* Atommodell. b) Das *Bohr'sche* Atommodell ist natürlich für ein Mehrelektronenproblem nicht anwendbar. Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle 8.3 die exakte Wellenlänge der Röntgen-$K_{\alpha 1}$-Strahlung, die entsteht, wenn Elektronen aus der L_{III}- in die K-Schale übergehen.

Ü 8-3 Berechnen Sie mit Hilfe der Radiokarbonmethode das Alter eines in einer archäologischen Fundstätte ausgegrabenen Knochens, der 80 g Kohlenstoff enthält. Die ^{14}C-Zerfallsrate beträgt 6,4 Bq.
Hinweis: In organischen Substanzen befindet sich stets ein geringer Anteil an radioaktivem ^{14}C, das entsprechend seiner Halbwertszeit zerfällt. In einem lebendigen Organismus ist das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C etwa $1{,}3 \cdot 10^{-12}$. Damit ist die spezifische Aktivität 0,25 Bq/g. Da nach dem Absterben des Organismus kein Kohlenstoff mehr eingebaut wird, kann aus der heute noch messbaren Aktivität an ^{14}C-Zerfällen in einem solchen Objekt auf sein Alter geschlossen werden.

Ü 8-4 Natürliches Silicium enthält die Isotope ^{28}Si, ^{29}Si und ^{30}Si. Beim *Transmutation Doping* wird es mit Neutronen bestrahlt. Dabei wandeln sich Kerne in ^{29}Si, ^{30}Si und ^{31}Si um. ^{31}Si ist instabil und geht durch einen β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von 2,6 h in den stabilen Kern ^{31}P über. Damit ist Silicium mit Phosphor dotiert. a) Ein Siliciumkristall der Masse 1 kg soll mit einer Phosphor-Konzentration von $n_p = 10^{17}\,\text{cm}^{-3}$ dotiert werden. Wie groß ist dann die Zahl der benötigten ^{31}Si-Kerne? b) Wie groß ist die Aktivität des Kristalls? c) Wie lange muss man warten bis die Aktivität auf 1 Bq abgenommen hat?

Kapitel 9
Festkörperphysik

9

9

9 Festkörperphysik

9.1 Struktur fester Körper ... 785
9.1.1 Kristallbindungsarten ... 785
9.1.2 Kristalline Strukturen ... 788
9.1.3 Gitterfehler ... 792
9.1.4 Amorphe Werkstoffe ... 794
9.1.5 Makromolekulare Festkörper ... 796
9.1.6 Ausgewählte Werkstoffe ... 800
9.1.7 Flüssigkristalle ... 806
9.2 Elektronen in Festkörpern ... 809
9.2.1 Energiebänder-Modell ... 809
9.2.2 Metalle ... 812
9.2.3 Halbleiter ... 818
9.2.4 Supraleitung ... 832
9.3 Thermodynamik fester Körper ... 837
9.3.1 Gitterschwingungen ... 837
9.3.2 Effekte im Zusammenhang mit Wärmefluss und elektrischem Strom ... 845
9.3.3 Piezoelektrizität ... 847
9.4 Optoelektronische Halbleiter-Bauelemente ... 850
9.4.1 Strahlungsquellen ... 850
9.4.2 Empfänger ... 854

9 Festkörperphysik

Die Festkörperphysik hat sich seit Mitte des 20. Jh. von der reinen Grundlagenforschung zu dem wichtigsten anwendungsorientierten Gebiet entwickelt. Abbildung 9.1 zeigt, dass die Festkörperphysik ohne die Atom- und Quantenphysik nicht verstanden werden kann, sodass des Öfteren auf die entsprechenden Abschnitte verwiesen werden muss.
Wie Abb. 9.1 weiterhin zeigt, spielt die Festkörperphysik praktisch in jedem Bereich eine Rolle, da sie die mechanischen, thermischen, elektrischen, magnetischen und optischen Eigenschaften fester Körper beschreibt. So betrachtet haben alle Abschnitte dieses Buches zu ihr einen Bezug. Um die große Bedeutung der Festkörperphysik zu zeigen, sei beispielsweise auf die Anwendungen in der Nanotechnologie, in der Mikroelektronik (vom Computerchip bis zur Flüssigkristallanzeige), in der Werkstofftechnik (z. B. metallische, magnetische, amorphe und keramische Werkstoffe) und in der Halbleitertechnik verwiesen.

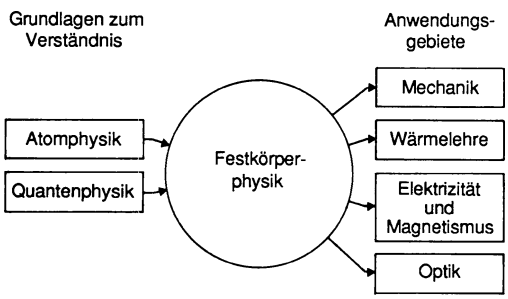


Abb. 9.1 Strukturbild Festkörperphysik

9.1 Struktur fester Körper

9.1.1 Kristallbindungsarten

Zwischen den Atomen bzw. Molekülen fester Körper wirken ausschließlich *elektrostatische Kräfte* der Anziehung oder Abstoßung. Magnetische Kraftwirkungen können demgegenüber völlig vernachlässigt werden. Je nach Wirkungsweise der Kräfte unterscheidet man vier Bindungstypen:

- *van-der-Waals'sche Bindung,*
- *kovalente (homöopolare) Bindung,*
- *Ionenbindung (heteropolare Bindung) und*
- *metallische Bindung.*

Abbildung 9.2 zeigt für die jeweilige Bindungsart die Kraftwirkungen, die Bindungsenergie, Beispiele und die typischen Werkstoffeigenschaften.

9.1.1.1 Van-der-Waals'sche Bindung

Auch Atome und Moleküle, die keine Elektronen austauschen können, weil ihre Elektronenschalen abgeschlossen sind, üben aufeinander schwache elektrische Bindungskräfte aus und kristallisieren; so befinden sich auch Edelgase bei entsprechend tiefen Temperaturen im festen Aggregatzustand, bis auf ^{3}He, das bei diesen Temperaturen superfluid wird. Fällt aufgrund der Molekülstruktur oder der Beweglichkeit der Atomelektronen

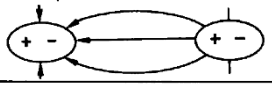
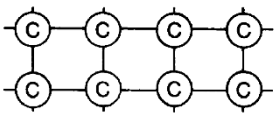
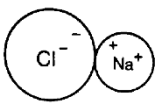
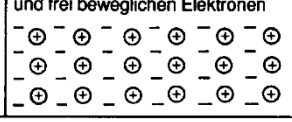
Bindungsart	Kraftwirkungen	Bindungsenergie eV/Atom	Beispiele	Eigenschaften
van der Waals	Zwischen zwei isolierten Atomen mit permanentem oder induziertem Dipolmoment 	$E_B \sim \frac{1}{r^6}$ 10^{-2} bis 10^{-1}	Edelgaskristalle, H_2, O_2, Molekülkristalle, Polymere	Isolator, leicht komprimierbar, niedriger Schmelzpunkt, durchlässig für Licht im fernen UV
kovalent (homöopolar)	Elektronenpaarbindung 	1 bis 7	viele organische Stoffe, Elemente der Vierergruppe, C, Si, InSb	Isolator oder Halbleiter, sehr schwer verformbar, hoher Schmelzpunkt
Ionen (heteropolar)	zwischen zwei verschieden geladenen Ionen 	$E_B \sim \frac{1}{r}$ 6 bis 20	Salze (NaCl, KCl) BaF_2	Isolator bei niedrigen Temperaturen, Ionenleitung bei hohenTemperaturen, plastisch verformbar
metallisch	zwischen festen Atomrümpfen und frei beweglichen Elektronen 	1 bis 5	Metalle, Legierungen	elektrischer Leiter, guter Wärmeleiter, plastisch verformbar, reflektiert im IR, reflektiert Licht (durchlässig im UV)

Abb. 9.2 Bindungsarten

der Schwerpunkt der positiven Ladung nicht mit dem der negativen zusammen, so entsteht ein permanentes bzw. induziertes elektrisches Dipolmoment (Abschn. 4.3.7). Dieses influenziert im Nachbaratom oder benachbarten Molekül ein entgegengesetztes Dipolmoment, sodass eine schwach wirkende Anziehungskraft auftritt. Sie wird nach ihrem Entdecker *van-der-Waals-Kraft* genannt (J. D. VAN DER WAALS, 1837 bis 1923).

Je mehr benachbarte Atome vorhanden sind und je dichter diese beieinander liegen, umso fester ist die Bindung. Deshalb kristallisieren die Edelgase in der *kubisch-dichtesten Kugelpackung*. Die Bindungsenergie der *van-der-Waals-Bindung* ist

$$E_B = \frac{\text{Konstante}}{r^6} . \qquad (9.1)$$

Die Konstante liegt in der Größenordnung von 10^{-77} J m^6. Wie (9.1) zeigt, nimmt die Bindungsenergie E_B sehr schnell mit zunehmendem Abstand ab (*Nahwirkung*) und ist zudem ziemlich schwach (etwa 0,02 eV/Atom bis 0,1 eV/Atom). van-der-Waals-Kräfte treten bei jeder Bindung auf, doch sind sie im Vergleich zu den bei anderen Bindungsarten wirkenden Bindungskräften so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

9.1.1.2 Kovalente (homöopolare) Bindung

Für die homöopolare oder kovalente Bindung sind die Elektronenstrukturen der Elemente der dritten bis fünften Hauptgruppe des Periodensystems (Abschn. 8.5.1) besonders geeignet. Beispielsweise haben alle Elemente der vierten Gruppe vier Valenzelektronen in der äußersten Elektronenschale. Mit Hilfe je eines Elektrons von vier nächsten Nachbarn kann sich jedes Atom eine edelgasähnliche Elektronenkonfiguration schaffen, die energetisch sehr günstig ist. Jeweils zwei benachbarte Atome teilen sich ein Elektronenpaar,

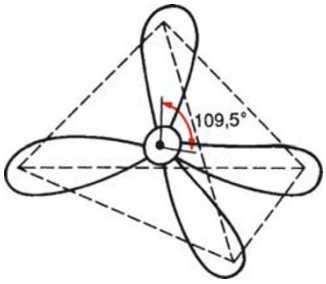


Abb. 9.3 Tetraederstruktur des Diamantgitters

wobei der Elektronenaustausch dann zu einer anziehenden Kraft führt, wenn die beteiligten Elektronen entgegengesetzte Spinrichtungen haben. Die Orbitale der Elektronen (Abschn. 8.2.4) gehen eine Hybridisierung ein und dies bewirkt eine stark gerichtete Bindung. So schließen beispielsweise die sp^3-Hybridorbitale des Kohlenstoffs einen Winkel von 109,5° ein, sodass sich die in Abb. 9.3 skizzierte tetraedrische Struktur des Diamantgitters ergibt.

Die kovalente Bindung herrscht in Stoffen, die Isolatoren oder Halbleiter sind. Sie sind außerordentlich hart und schwer verformbar und weisen einen hohen Schmelzpunkt auf.

9.1.1.3 Ionenbindung

Diese Bindung beruht auf der *Coulomb-Kraft* (4.1.1) zweier Ionen, d. h. unterschiedlich geladener Atome oder Moleküle. Das *Anion* ist negativ, das *Kation* positiv geladen. Die Bindungsenergie zweier Ionen beträgt

$$E_B = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,.$$

Im Gegensatz zur *van-der-Waals'schen Bindungsenergie*, die proportional zu $1/r^6$ abnimmt, verringert sich die Bindungsenergie der Ionenbindung nur mit $1/r$. Die Ionenbindung hat daher eine *große Reichweite* und macht die Einbeziehung auch der weiter entfernten Nachbarn erforderlich. Abbildung 9.4 zeigt am Beispiel einer linearen Kette, wie dies bei der Errechnung der Bindungsenergie berücksichtigt wird. Für die Bindungsenergie gilt

$$E_B = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha}{r} \tag{9.2}$$

mit

$$\frac{\alpha}{r} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r} - \frac{1}{4r} + \cdots\right)$$
$$= \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right)\,.$$

Der Faktor 2 vor der Klammer berücksichtigt, dass die Ionenkette nach beiden Seiten verläuft; r ist der Abstand benachbarter Ionen im Kristall. Daraus ergibt sich

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{2\cdot\ln 2}{r} = \frac{1{,}386}{r}\,. \tag{9.3}$$

Im dreidimensionalen Fall ist die Berechnung komplizierter. Der konstante Faktor α wird als *Madelung-Konstante* bezeichnet (E. Madelung, 1881 bis 1972) und beträgt für das dreidimensionale Kochsalzgitter (NaCl) $\alpha = 1{,}75$. Die Ionenbindung ist typisch für Salze. Diese Substanzen sind bei niedrigen Temperaturen Isolatoren, weisen aber bei höheren Temperaturen aufgrund der *Dissoziation* der Ionen eine elektrolytische Ionenleitung auf. Diese Werkstoffe sind in der Regel hart und nur plastisch verformbar.

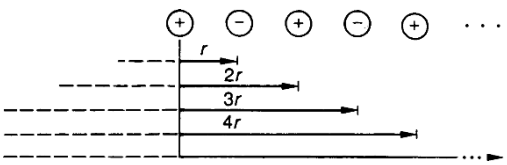


Abb. 9.4 Einfluss der Nachbarionen auf die Bindungsenergie bei einer Ionenbindung

Beispiel

9.1-1 Für NaCl soll die Bindungsenergie E_B für einen Atomabstand von $2{,}8 \cdot 10^{-10}$ m berechnet werden.

Lösung

Nach (9.2) ergibt sich $E_B = (\alpha\, e^2)/(4\pi\, \varepsilon_0\, r) = 1{,}44 \cdot 10^{-18}$ J/Ion oder 8,99 eV/Ion: Experimentell wird ein Wert von 7,99 eV/Ion gefunden. Dies bedeutet, dass eine abstoßende Energie von etwa 10% der Bindungsenergie berücksichtigt werden muss.

9.1.1.4 Metallische Bindung

Bei der metallischen Bindung kommt die bindende Wirkung dadurch zustande, dass die von den Atomen abgegebenen äußeren Valenzelektronen energetisch mit allen positiven Atomrümpfen des Kristalls wechselwirken und dadurch eine *metallische Bindungskraft* hervorrufen. Diese Bindung kettet die Bindungspartner nicht starr aneinander. Die Bindungselektronen sind nicht lokalisiert und haben eine große Beweglichkeit (*Elektronengas*). Deshalb haben Kristalle mit metallischen Bindungen eine *gute elektrische Leitfähigkeit* und *Wärmeleitung*. Die Bindungskräfte sind nicht so stark wie bei der *Ionenbindung*, sondern eher mit der *kovalenten Bindung* vergleichbar. Da die Bindungskräfte gleichmäßig im Raum wirken, werden *dichteste Kugelpackungen* bevorzugt. Atome mit zur metallischen Bindung geeigneter Elektronenstruktur, d. h. *Metalle*, kommen im Wesentlichen in der ersten, zweiten und dritten Hauptgruppe sowie in den Nebengruppen des periodischen Systems vor.

Weil bei der metallischen Bindung die positiven Atomrümpfe nicht stark aneinander gebunden sind, ist es auch leicht möglich, andere Atome einzuschmelzen und *Legierungen* herzustellen. Die Deformationsenergie des Kristallgitters darf jedoch nicht größer als die Bindungsenergie der metallischen Bindung sein, weil sich sonst die Legierungspartner entmischen. Besonders legierungsgeeignete Atome sind aus diesem Grund Atome aus den benachbarten Gruppen. Im Allgemeinen brauchen Legierungen jedoch kein festes stöchiometrisches Atomverhältnis aufzuweisen, um stabil zu sein.

Wegen der räumlichen *Isotropie* der metallischen Bindung ist eine leichte Verschiebbarkeit der Atomrümpfe innerhalb der Kristallstruktur vorhanden. Metalle und Legierungen sind deshalb in der Regel *leicht verformbar*.

9.1.2 Kristalline Strukturen

Viele Festkörper haben eine in *drei Raumrichtungen regelmäßige* (periodische) *Atomstruktur*, die *kristalline Struktur* genannt wird. Manche Kristalle lassen diese Symmetrien mit bloßem Auge erkennen. Festkörper *ohne regelmäßige Atomanordnung* werden *amorph* genannt. Zu dieser Stoffgruppe gehören beispielsweise die Gläser, die keramischen Werkstoffe und viele organische Materialien (Kunststoffe). Bei kristallinen Strukturen sind die



Abb. 9.5 Einkristalline Reinst-Silicium-Stäbe mit einem Durchmesser von 150 mm. Werkfoto: Wacker-Chemitronic

physikalischen Größen (z. B. Resistivität oder Zugfestigkeit) von der Kristallrichtung abhängig (*anisotropes Verhalten*), während sie bei homogenen amorphen Strukturen in allen Richtungen gleich groß sind (*isotropes Verhalten*).

Die meisten Festkörper kristallisieren aus ihren Schmelzen *polykristallin*; die kristallinen Strukturen erstrecken sich nur über eine Größe von einigen Mikrometern. Die makroskopischen Eigenschaften dieser Festkörper sind *isotrop*. Durch Kristallziehverfahren gelingt es heute, meterlange *Einkristalle* mit einheitlicher Gitterstruktur herzustellen, wie Abb. 9.5 zeigt. Sie werden bevorzugt in der Halbleiterfertigung benötigt.

9.1.2.1 Kristallsysteme

Bei einem Kristall befinden sich die Atome in jeder Raumrichtung in gleichmäßigen Abständen an den Kreuzungspunkten eines räumlichen Gitters. Das *Kristallgitter* kann somit durch ein räumliches Koordinatensystem beschrieben werden, dessen kleinstes Element die *Elementarzelle* ist.

Wie Abb. 9.6 verdeutlicht, wird die Elementarzelle beschrieben durch

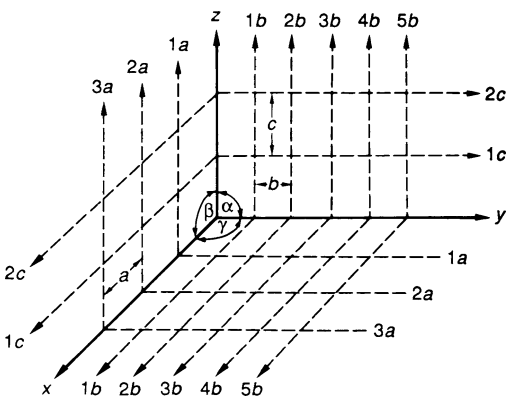


Abb. 9.6 Beschreibung einer Elementarzelle durch Gitterkonstanten in den drei Raumrichtungen

- die Atomabstände entlang der Koordinatenachsen (z. B. *Gitterkonstante* a in x-Richtung, b in y-Richtung und c in z-Richtung) sowie
- die Winkel α, β und γ zwischen den Kristallachsen.

Man unterscheidet *sieben Kristallsysteme* (Abb. 9.7) nach folgenden Kriterien:

- die Gitterkonstanten sind gleich oder ungleich und
- die Winkel zwischen den Achsen sind 90° oder haben einen anderen Betrag.

Innerhalb dieser Kristallsysteme sind je nach Belegung mit Atomen noch vier Varianten unterscheidbar:

- *primitive Gitter*
  Es sind nur die Eckpunkte der Elementarzelle mit Atomen belegt;

	primitiv	raum-zentriert	basis-zentriert	flächen-zentriert
kubisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				
tetragonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				
orthorhombisch $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				
hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$	γ			
rhomboedrisch $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$				
monoklin $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90°$ $\beta \neq 90°$				
triklin $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ $\neq 90°; \neq 120°$				

Abb. 9.7 Bravais-Gitter

- *flächenzentrierte Gitter*
  Zusätzlich sind die Gitterflächen mit Atomen belegt;
- *basiszentrierte Gitter*
  Zusätzlich sind zwei gegenüberliegende Flächen mit Atomen belegt;
- *raumzentrierte Gitter*
  Zusätzlich befindet sich noch ein Atom im Innern der Zelle.

Die sieben Kristallsysteme mit ihren Varianten ergeben die 14 *Bravais-Gitter* (A. Bravais, 1811 bis 1863). Sie sind in Abb. 9.7 nach zunehmender Teilchendichte geordnet zusammengestellt.
Die Kristallstrukturen ergeben sich durch die Verschiebung (Translation) der Elementarzellen um die Gitterkonstanten in allen drei Achsenrichtungen. Diese Gitter nennt man deshalb auch *Translationsgitter*. Die Kristallstrukturen können durch Röntgen-, Elektronen- und Neutronenbeugung genau bestimmt werden (Röntgenanalyse, Abschn. 6.4.1.8).
Bei den Metallen spielen wegen der isotropen Bindungswirkung (Abschn. 9.1.1.4) nur drei Gittertypen eine wesentliche Rolle:

- die *kubisch-flächenzentrierte* Struktur (Kfz- oder A1-Struktur),
- die *kubisch-raumzentrierte* Struktur (Krz- oder A2-Struktur) und
- die *hexagonal dichteste Kugelpackung* (HdP- oder A3-Struktur).

In Tabelle 9.1 sind für einige Metalle mit kubisch-flächenzentrierter oder kubisch-raumzentrierter Kristallstruktur die Dichte, die Gitterkonstante und der Abstand zweier nächster Nachbarn angegeben.

9.1.2.2 Dichteste Kugelpackungen

Die Atome, idealisiert dargestellt als Kugeln, liegen besonders dicht beieinander, wenn aufeinander folgende Kugelebenen die Lücken der Ausgangsebene besetzen. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese *dichteste Kugelpackung* zu verwirklichen:

- *Folge ABAB …* über den Kugellücken der Ausgangslage A liegt die Kugelebene B, und die nächste Kugelebene liegt wieder über der Ausgangslage A. Dies ist typisch für die hexagonal dichteste Kugelpackung (HdP-, A3-Struktur);
- *Folge ABCABC …* über den Kugellücken der Ausgangslage A liegt die Kugelebene B, darauf folgt über den entstandenen Kugellücken die Kugelebene C, bis sich die Kugelschichtung wiederholt. Dies ist typisch für die kubisch-flächenzentrierte Struktur (Kfz-, A1-Struktur).

In beiden Fällen beträgt das Kugelvolumen 74% des Volumens der Elementarzelle. Für das kubisch-raumzentrierte Gitter (Krz, A2) ergibt sich noch eine *Packungsdichte* von 68%. In Abb. 9.8 sind die Eigenschaften der drei Gitter-

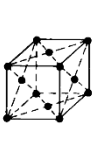
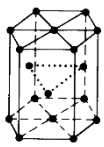
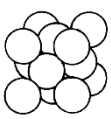
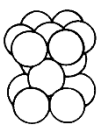
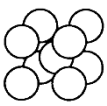
	Gittertypen		
Eigenschaften	kubisch-flächenzentriert	hexagonal dichteste Kugelpackung	kubisch-raumzentriert
Elementarzelle			
Kugelmodell			
Packungsdichte	74%	74%	68%
Atomanzahl je Zelle	4	2	2
Koordinationszahl	12	12	8
dichtest gepackte Richtung	Flächendiagonale	Sechseckseite	Raumdiagonale

Abb. 9.8 Gittertypen dichtester Kugelpackung

Tabelle 9.1 Atomare Konstanten einiger Metalle mit kubisch-flächenzentrierter und kubisch-raumzentrierter Struktur

Kubisch-flächen-zentriert	Dichte ϱ in g/cm^3	Gitter-konstante a in 10^{-10} m	Abstand zweier nächster Nachbarn in 10^{-10} m	Kubisch-raum-zentriert	Dichte ϱ in g/cm^3	Gitter-konstante a in 10^{-10} m	Abstand zweier nächster Nachbarn in 10^{-10} m
Ce	6,9	5,16	3,64	Cs	1,9	6,08	5,24
Pb	11,34	4,94	3,49	K	0,86	5,33	4,62
Ag	10,49	4,08	2,88	Ba	3,5	5,01	4,34
Au	19,32	4,07	2,88	Na	0,97	4,28	3,71
Al	2,7	4,04	2,86	Zr	6,5	3,61	3,16
Pt	21,45	3,92	2,77	Li	0,53	3,50	3,03
Cu	8,96	3,61	2,55	W	19,3	3,16	2,73
Ni	8,90	3,52	2,49	Fe	7,87	2,86	2,48

typen dichtester Kugelpackungen gegenübergestellt.

Um die Atomanzahl je Elementarzelle feststellen zu können, muss bedacht werden, dass bei einer kubischen Elementarzelle die Eckatome zu 8 Zellen, die flächenzentrierten Atome zu 2 Zellen und die raumzentrierten Atome zu 1 Zelle gehören. Es befinden sich also in der kubisch-flächenzentrierten Elementarzelle $8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2 = 4$ Atome. Entsprechende Berechnungen ergeben für die HdP- bzw. Krz-Struktur 2 Atome je Elementarzelle.

Die *Koordinationszahl* gibt die Anzahl der nächsten Nachbarn an. Sie beträgt bei der Kfz- und der HdP-Struktur 12 und bei der Krz-Struktur 8.

9.1.2.3 Richtungen und Ebenen im Kristallgitter

Weil viele physikalische Eigenschaften in Kristallen richtungsabhängig sind, müssen Kristallrichtungen und atombesetzte Ebenen (*Netzebenen*) gekennzeichnet werden. Dies geschieht durch *Miller'sche Indizes* (W. H. Miller, 1801 bis 1880).

Für die Indizierung wird ein Koordinatensystem gewählt, dessen Achsen parallel zu den Kanten der Elementarzelle des Gitters sind. Die Koordinatensysteme sind deshalb für kubische, tetragonale, orthorhombische und hexagonale Kristallsysteme rechtwinklig. Weil die *Kristallebenen die Kristallachsen immer im Verhältnis ganzer Zahlen* (bezogen auf die Gitterkonstanten) schneiden, kann eine Ebene in einem dreiachsigen Koordinatensystem durch ein *Zahlentripel h, k und l* indiziert werden. Die Ebenenkennzeichnung wird in runde Klammern gesetzt (h, k, l). Als Bezugsgrößen dienen also die Gitterkonstanten in x-, y- und z-

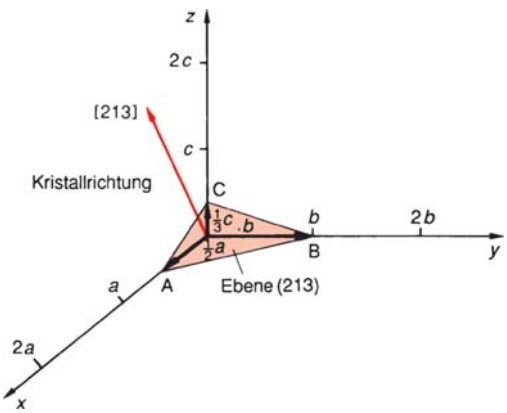


Abb. 9.9 Indizierung von Kristallrichtungen und Kristallebenen

Richtung (a, b und c). Abbildung 9.9 zeigt die Vorgehensweise. Die Ebene durch die Punkte A, B und C hat folgende Achsenabschnitte: $x = a/2$, $y = b$ und $z = c/3$. Die reziproken Werte sind $h = 2$, $k = 1$ und $l = 3$. Dies sind die Miller'schen Indizes der Ebene (213). Alle dazu parallelen Ebenen sind kristallografisch gleichwertig, z. B. (213) und (426).
Die *Kristallrichtung* steht immer *senkrecht* zur Kristallebene. Die Indizierung der Richtung setzt man in eckige Klammern, also [213]. Das Wertetripel ist die Gruppe kleinster ganzer Zahlen, die sich untereinander verhalten wie die Komponenten des Richtungsvektors (Abb. 9.9). Abbildung 9.10 zeigt die Indizierung der wichtigsten Ebenen und Richtungen in kubischen Kristallen.

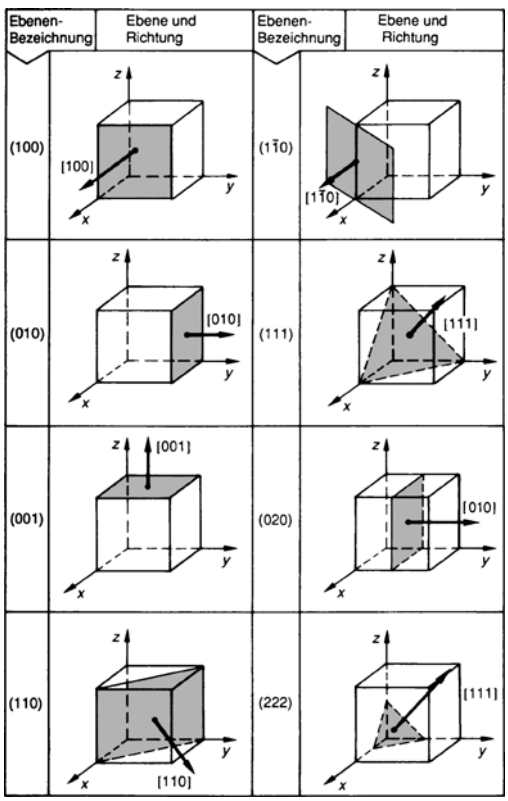


Abb. 9.10 Miller'sche Indizes für Ebenen und Richtungen in kubischen Kristallen

9.1.3 Gitterfehler

Der periodisch regelmäßige Kristallaufbau kann Fehler aufweisen (*Gitterfehler*), die zu veränderten Materialeigenschaften führen können. Durch den Einbau von Gitterfehlern können deshalb gezielt Werkstoffeigenschaften eingestellt werden, z. B. eine hohe Zugfestigkeit oder ein bestimmter Verformungsgrad oder elektrische Eigenschaften (Halbleiter). Abbildung 9.11 zeigt die Einteilung der Gitterfehler. Die Modellvorstellungen von Kristallgitterfehlern werden durch elektronenmikroskopische Beobachtungen analoger Fehler bei Flussliniengittern in Supraleitern bestätigt (Abschn. 9.2.4). Die Fotos stammen von einer Pb/6,3%In-Folie der Dicke 1 µm bei $T = 2{,}1$ K und $B_a = 7 \cdot 10^{-3}$ T. Außerdem zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme Versetzungslinien in Kupfer-Einkristallen.

9.1.3.1 Punktfehler

Man unterscheidet folgende Punktfehler:

- *Leerstellen*
  Es fehlen Atome auf den Gitterplätzen (*Schottky-Fehlordnung*);
- *Zwischengitteratome*
  Es befinden sich zusätzliche Atome im Gitter zwischen den Atomen (*Anti-Schottky-Fehlordnung*);
- *Frenkel-Paare*
  Es fehlen Atome auf den Gitterplätzen (Leerstellen) und es befinden sich zusätzliche Atome auf Zwischengitterplätzen;
- *Fremdstörstellen*
  Fremde Atome befinden sich im Atomgitter entweder an einem regulären Atomplatz (*Substitutionsatome*) oder zwischen den Gitterplätzen (*Einlagerungsatome* oder *interstitielle Atome*).

Punktfehler wirken sich auf die spezifische Wärmekapazität und die elektrischen Eigenschaften aus. Von besonderer Bedeutung sind

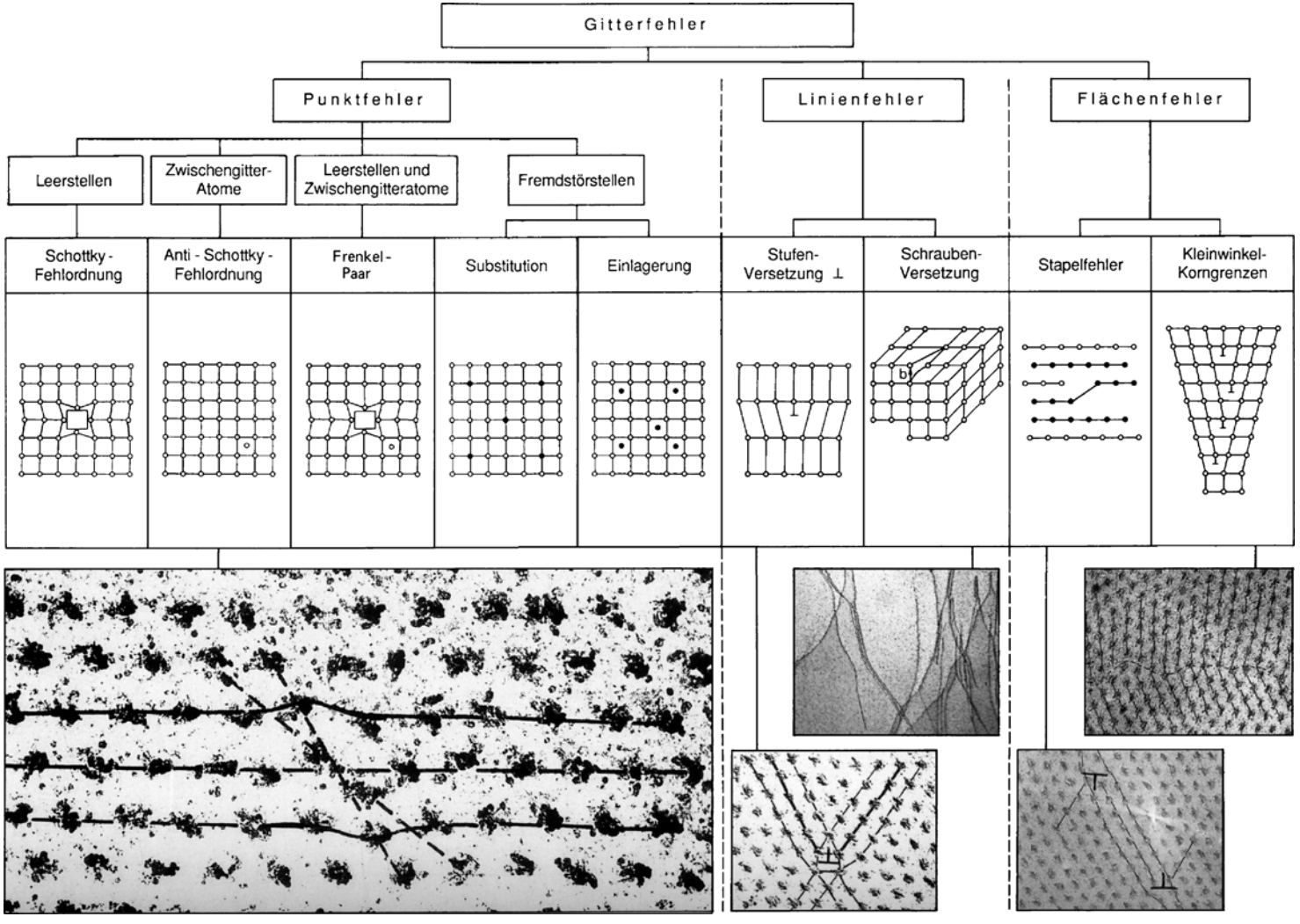


Abb. 9.11 Gitterfehler (Fotos: Flussliniengitter in Supraleitern nach Eßmann und Träuble)

bei Halbleitern die Fremdstörstellen der Dotierung.

9.1.3.2 Linienfehler

Die Linienfehler werden *Versetzungen* genannt. Bei *Stufenversetzungen* enden Gitterebenen wie Keile im Kristall. Die Gleitrichtung ist *senkrecht* zur Versetzungslinie (Symbol ⊥). Bei *Schraubenversetzungen* ist das Kristallgitter *parallel* zur Versetzungslinie um eine Netzebene (Abstand des *Burgers-Vektors* $\boldsymbol{b}$) versetzt. Schraubenversetzungen lassen sich modellhaft so vorstellen, dass das Kristallgitter zur Hälfte aufgeschnitten wird und die Schnittkanten z. B. um eine Gitterkonstante verschoben werden. Im realen Kristall liegen die Versetzungen sowohl als Stufen- als auch als Schraubenversetzungen vor (*gemischte Versetzungen*). Die *Versetzungsdichte* wird in Länge je Volumen (cm/cm^3) angegeben. Sie liegt für weichgeglühte Metalle beispielsweise zwischen $10^6\ cm^{-2}$ und $10^8\ cm^{-2}$ und kann durch Schmieden auf $10^{11}\ cm^{-2}$ bis $10^{12}\ cm^{-2}$ gesteigert werden.

Durch Versetzungen können Kristallebenen leichter gegeneinander verschoben werden. Dies wird deutlich, wenn eine Stufenversetzung mit einer Falte im Teppich verglichen wird. Durch die Wanderung der Teppichfalte (der Stufenversetzung) wird der Teppich verschoben (der Kristall verformt). Diese Verschiebung des Teppichs (plastische Verformung des Kristalls) durch Wanderung der Falte (der Versetzung) ist mit viel geringerem Kraftaufwand möglich als die Verschiebung des ganzen Teppichs (der ganzen Netzebene). Die äußere Spannung, die zur Verschiebung einer Versetzung notwendig ist, liegt zwischen $0{,}1\ N/m^2$ und $1\ N/m^2$.

9.1.3.3 Flächenfehler

Hierbei handelt es sich um Fehler in den Grenzflächen der Kristallbereiche. *Stapelfehler* treten bei den dichtesten Kugelpackungen (Abschn. 9.1.2.2) auf, wenn entweder zusätzliche Stapelebenen eingefügt oder entfernt werden. *Korngrenzen* sind die Grenzflächen zwischen *Kristalliten*, d. h. verschieden orientierten Kristallbereichen. Sie sind etwa 10 µm bis 100 µm groß und vor allem bei *Vielkristallen* (Polykristallen) gut zu erkennen.

9.1.4 Amorphe Werkstoffe

Im Gegensatz zu kristallinen Festkörpern sind in amorphen Festkörpern die einzelnen Atome weitgehend unregelmäßig angeordnet. Daraus ergeben sich eine Vielzahl spezieller Werkstoffeigenschaften. Im Folgenden ist die technisch bedeutsame Werkstoffgruppe der amorphen Legierungen beschrieben.

Kühlt man eine Legierung mit einer Abkühlgeschwindigkeit von mehr als 10^6 K/s ab, friert die weitgehend ungeordnete amorphe Struktur der flüssigen Phase ein, und die Kristallisation unterbleibt. Dies wird durch das *Schmelzspinnverfahren* erreicht, bei dem die flüssige Schmelze auf eine schnell rotierende (Umfangsgeschwindigkeit 10 m/s bis 50 m/s), sehr gut wärmeleitende Trommel gespritzt wird und dort zu einem dünnen Band erstarrt. Dieses Verfahren erlaubt die kontinuierliche Herstellung von Bändern mit einer Dicke von 20 µm bis 50 µm und Bandbreiten von 1 mm bis 50 mm.

Die amorphen Legierungen werden auch *metallische Gläser* genannt. Sie haben nämlich einerseits die Eigenschaften von Metallen (z. B. elastisch bei hoher mechanischer Spannung, magnetisch weich, gut wärme- und stromleitend) und andererseits die Eigenschaften von Gläsern (z. B. mechanisch hart und sehr korrosionsbeständig). Während Metalle eine kubische oder hexagonale Elementarzelle aufweisen, ist bei Gläsern das in der Zellmitte befindliche Atomvolumen etwas kleiner als bei

der hexagonalen Anordnung, sodass eine fünfzählige Symmetrie entsteht, die auch bei metallischen Gläsern beobachtet wird. Dadurch ist die für Metalle typische dichteste Raumausfüllung nicht möglich. In Tabelle 9.2 sind einige amorphe Legierungen und ihre Eigenschaften wiedergegeben.

Amorphe Legierungen zeigen eine einzigartige Kombination von Festigkeit und Verformbarkeit. Es gibt metallische Gläser, deren Bruchgrenze dreimal größer ist als diejenige von rostfreiem Stahl; hierbei ist die Ermüdungsfestigkeit vergleichbar mit hochwertigen Stählen. Wegen der amorphen Struktur ist eine Verformbarkeit des Materials durch Wanderung von Versetzungen nicht möglich. Bei Zugbeanspruchung bricht die Probe so, dass die Bruchfläche unter 45° zur Zugrichtung verläuft. In der Bruchebene sind Risse erkennbar, die, wie Abb. 9.12 zeigt, unter dem Elektronenmikroskop erhaben wie Blutgefäße aussehen und dem Bruchverhalten von Fetten ähnlich sind.

Die amorphen Legierungen sind wie die Gläser extrem korrosionsbeständig. Dennoch ist eine Behandlung der Oberfläche durch galvanische Überzüge oder durch Elektropolieren wie bei Metallen möglich.

Die elektrischen und magnetischen Eigenschaften sind ebenfalls bemerkenswert. Die Resistivität metallischer Gläser auf Fe-Ni- oder Co-Ni-Fe-Basis liegt zwischen 1,2 $(\Omega\,\mathrm{mm}^2)/\mathrm{m}$ und 1,5 $(\Omega\,\mathrm{mm}^2)/\mathrm{m}$ und ist vergleichbar mit Edelstahl (1,12 $(\Omega\,\mathrm{mm}^2)/\mathrm{m}$). In der Regel ist die Resistivität zwei- bis dreimal größer als bei vergleichbaren kristallinen Metallen. Der Temperaturkoeffizient der Resistivität ist sehr klein und liegt im Bereich von $-100 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ bis $500 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Es sind amorphe Legierungen mit einem Temperaturkoeffizienten von ungefähr null herstellbar.

Ausgangsmetalle für magnetische Anwendungen sind die klassischen magnetischen Metalle Fe, Co und Ni. Durch kristallisationshemmende Zusätze von Al, B, C, P und Si in der Größenordnung von 15 bis 25 Atomprozent wird der amorphe Zustand erreicht (Tabelle 9.2). Die amorphen Legierungen zeigen eine extrem hohe Permeabilitätszahl ($\mu_r \geq 500\,000$),

Tabelle 9.2 Amorphe Werkstoffe und ihre Eigenschaften

Zusammensetzung (Atomprozent)	Eigenschaften
Eisen-Legierungen Fe(80) mit C, Si, B (20) z. B. $Fe_{82}B_{18}$	hohe Permeabilitätszahl $\mu_r > 5 \cdot 10^5$
Eisen-Nickel-Legierungen Fe(40) und Ni(40) mit Si oder B (20) z. B. $Fe_{40}Ni_{40}B_{20}$	kleine Koerzitivfeldstärke $H_c \leq 1$ A/m
Kobalt-Nickel-Eisen-Legierungen Co, Ni, Fe(75) mit Si oder B(25) z. B. $Co_{50}Ni_{20}Fe_6Si_{12}B_{12}$	
$Fe_{32}Ni_{36}Cr_{14}P_{12}B_6$	sehr hart und korrosionsbeständig
$Ti_{50}Be_{40}Zr_{10}$	hohe Festigkeit bei geringer Dichte (4,13 g/cm^3)

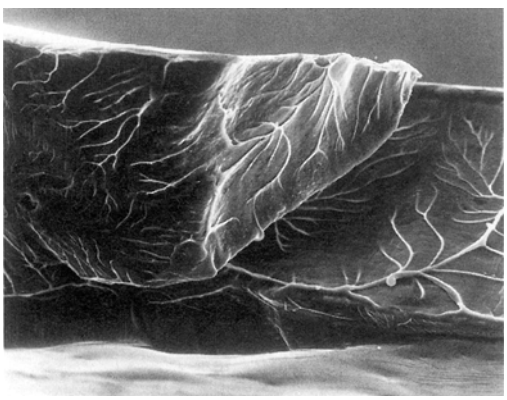


Abb. 9.12 Bruchflächen von amorphem Band (Vergrößerung 1800:1). Werkfoto: VAC

eine kleine Koerzitivfeldstärke ($H_c \leq 1$ A/m) und sehr geringe Ummagnetisierungsverluste (z. B. 10 W/kg bei 0,2 T und 20 kHz). Somit gehören sie zu den besten weichmagnetischen Materialien (Abb. 4.121) und werden verwendet als

- Transformatorenbleche,
- magnetische Abschirmungen,
- hartes Tonkopfmaterial, das zugleich schnell ummagnetisierbar ist,
- magnetische Speicher aufgrund der schnellen und verlustfreien Ummagnetisierung und als
- Federn und Spannbänder zur Verstärkung von Kunststoff und Gummi (z. B. Autoreifen).

9.1.5 Makromolekulare Festkörper

Aus sehr langen Molekülen aufgebaute Festkörper sind *makromolekulare Festkörper*. Die einzelnen Bausteine werden durch die kovalente oder homöopolare *Elektronenpaarbindung* zusammengehalten (Abschn. 9.1.1.2). Wie Abbildung 9.13 zeigt, sind makromolekulare Festkörper *Riesenmoleküle* aus vielen Einzelatomen (z. B. Fullerene, C_{60}, C_{70}) vielen einzelnen Molekülen (*Monomeren*) zusammengesetzt. Der makromolekulare Festkörper kann amorph, teilkristallin oder kristallin sein. Es treten Faden-, Schicht- und Raumnetzstrukturen auf. Kristalline Fadenstrukturen sind bei den Elementen Schwefel (S), Selen (Se) und Tellur (Te) zu finden. Kristalline Schichtstrukturen sind typisch für die Elemente der Fünfergruppe des periodischen Systems, wie z. B. Phosphor (P), Arsen (As), Antimon (Sb) und Wismut (Bi) sowie Kohlenstoff (C) in der Graphitstruktur. Die wichtigste Werkstoffgruppe sind die hochpolymeren organischen Werkstoffe, die als

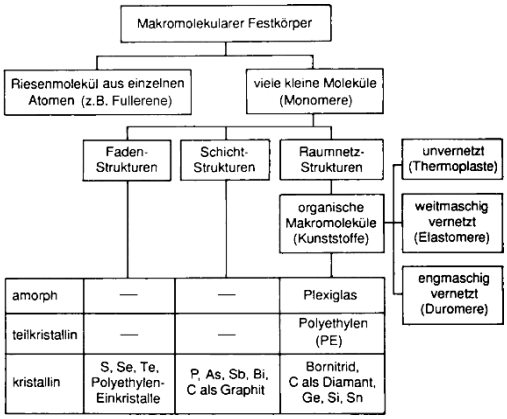


Abb. 9.13 Makromolekulare Festkörper

Polymerwerkstoffe oder *Kunststoffe* bekannt sind.

9.1.5.1 Struktur und Eigenschaften der Polymerwerkstoffe

Die Polymerwerkstoffe entstehen durch chemische Reaktion (*Polymerisieren*) der *Monomeren* zu *Makromolekülen*. Abb. 9.14 zeigt dies am Beispiel von *Polyethylen* (PE). Durch Öffnen der Kohlenstoff-Doppelbindungen des Monomers C_2H_4 kommt es zur Polymerisation: Es entsteht das Makromolekül $(CH_2)_n$. Solche Makromoleküle können linear oder

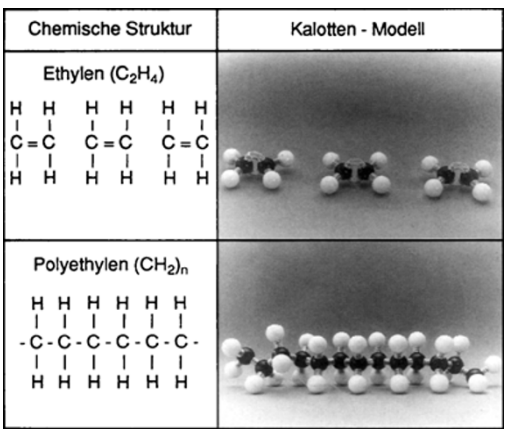


Abb. 9.14 Polymerisation von Polyethylen

Tabelle 9.3 Kunststoffe (Polymerwerkstoffe)

Charakteristik	Polymerwerkstoff		
	Thermoplaste	Elastomere	Duromere
Schmelzverhalten	schmelzbar	nicht schmelzbar	nicht schmelzbar
Quellverhalten	quellbar	quellbar	nicht quellbar
Löslichkeit	löslich	nicht löslich	nicht löslich
Struktur	Molekülknäuel, unvernetzt, amorph, teilkristallin	weitmaschig vernetzt, amorph, teilkristallin	engmaschig vernetzt
Umweltfreundlichkeit	wiederverwendbar (200 °C)	nicht wiederverwendbar (pyrolisierbar)	
Verarbeitung	alle Verfahren	alle Verfahren, Formgebung vor oder während der Vernetzung („Vulkanisieren“)	Pressen, Spritzgießen, Formgebung während der Vernetzung („Härtung“)
Beispiele	Polyethylen (PE), Polyvinylchlorid (PVC), Polystyrol (PS), Polyamid (Nylon, Perlon), Polyester (Trevira), Polyacrylnitril (Dralon), Polycarbonat (Macrolon)	Buna, Kautschuk, Silicon Rubber (SIR), Polychloropren (CR), Neopren	Phenolformaldehyd, Melaminformaldehyd, Harnstoffformaldehyd, (ungesättigter Polyester, UP), Epoxidharz (EP)

kettenförmig, verzweigt oder vernetzt sein (weitmaschig oder engmaschig); ihre Ordnung kann statistisch (*Knäuelstruktur*) oder *parakristallin* gerichtet sein.

Die Länge der Makromoleküle liegt zwischen 10^{-6} mm und 10^{-3} mm, und die Kettendicke beträgt etwa $2 \cdot 10^{-7}$ mm bis $3 \cdot 10^{-7}$ mm. Da die Länge eines Makromoleküls nicht direkt zugänglich ist, wird als Ersatzgröße die *mittlere relative Molekülmasse* ($M_r = m_M/u$) verwendet. Sie beträgt bei den Polymerwerkstoffen einige Tausend bis zu 7 Millionen. Die mittlere Molekülmasse ist ein Maß für die *Viskosität* des Werkstoffs. Eine große Molekülmasse bedingt eine große Viskosität und umgekehrt. Für das Werkstoffverhalten ist auch die Streubreite der Molekülmasse (*Molekülmassenverteilung*) maßgebend. Besteht beispielsweise ein Polymerwerkstoff nur aus Makromolekülen gleicher Länge, so zeigt er bei einer bestimmten Temperatur ein plötzliches Aufschmelzverhalten; besteht er dagegen aus unterschiedlich langen Makromolekülen, dann zeigt er einen weiten Erweichungsbereich.

Tabelle 9.3 zeigt die Einteilung der Polymerwerkstoffe in *Thermoplaste, Elastomere* und *Duromere* (*Duroplaste*) sowie die wichtigsten Eigenschaften. Thermoplaste sind schmelzbar, quellbar, löslich, schon mit geringem Energieeinsatz (ab 200 °C) wiederverwendbar und deshalb umweltfreundlich. Thermoplaste sind die gebräuchlichsten Polymerwerkstoffe. Unter den vielen Sorten bestreiten drei Werkstoffe zwei Drittel der Produktion aller Polymerwerkstoffe: die *Massenkunststoffe Polyethylen* (PE), *Polyvinylchlorid* (PVC) und *Polystyrol* (PS). Unter den Thermoplasten befinden sich auch *Kunststoff-Fasern*, die z. B. unter den Markennamen *Nylon, Trevira* und *Dralon* bekannt sind.

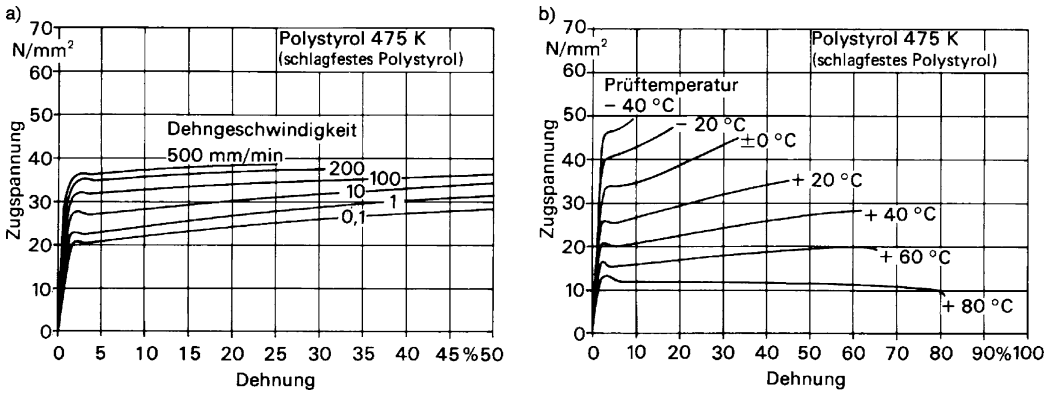


Abb. 9.15 Spannungs-Dehnungs-Diagramme von Polystyrol: **a**) bei verschiedenen Dehngeschwindigkeiten und **b**) bei verschiedenen Prüftemperaturen

Zu den Elastomeren werden nicht schmelzbare, nicht lösliche, aber quellbare Polymerwerkstoffe gerechnet. Sie sind weitmaschig vernetzt und zeigen *elastisches Verhalten*. Die Vernetzung wird *„Vulkanisieren"* genannt. Sie geschieht nach oder während der Formgebung. Zu den Elastomeren zählen die künstlichen Gummiwerkstoffe (Kunstkautschuk, z. B. *Buna, Neopren*) und *Polyurethan* (z. B. *Bayflex, Elastolan*).

Die Duromere sind im Gegensatz zu den Elastomeren hart, nicht schmelzbar, nicht quellbar, unlöslich und wie die Elastomere nicht umweltfreundlich, da sie nicht wiederverwendbar sind. Man kann sie jedoch über die Verschwelung (*Pyrolyse*) zur Energieerzeugung heranziehen.

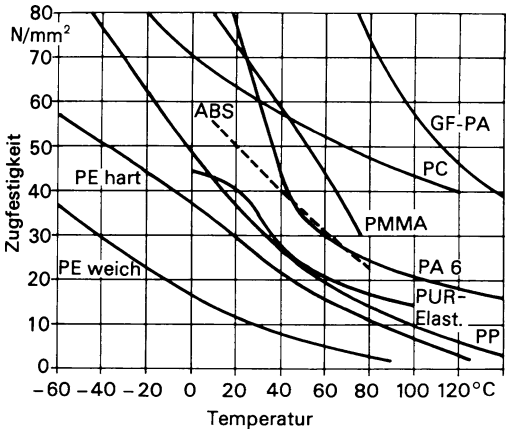
Zu ihnen zählen beispielsweise die *Bakelite, Formaldehydharze* und *Expoxidharze* (EP). Epoxidharze werden auch faserverstärkt als spezielle Hochleistungswerkstoffe eingesetzt, z. B. zur Herstellung der Rotorblätter für Hubschrauber und von ähnlich hochbeanspruchten Teilen.

9.1.5.2 Spezielle Eigenschaften der Polymerwerkstoffe

Die Eigenschaften der Polymerwerkstoffe sind sehr stark abhängig von der Temperatur, der Zeit, der Höhe und der Art der Beanspruchung. Zudem werden diese Werkstoffe von der Umgebung beeinflusst, z. B. von Lösungsmitteln und der UV-Strahlung.

Aus der Vielzahl der Eigenschaften sei im Folgenden das mechanische Verformungsverhalten ausgewählt. Abbildung 9.15a zeigt Spannungs-Dehnungs-Kurven von Polystyrol in Abhängigkeit von der Beanspruchungsgeschwindigkeit und Abb. 9.15b in Abhängigkeit von der Temperatur. Bei hoher Belastungsgeschwindigkeit (500 mm/s) und tiefer Temperatur (−40 °C) zeigt Polystyrol ein relativ *sprödes Verhalten*, weil die Umlagerung der Makromoleküle verhindert wird. Bei geringer Belastungsgeschwindigkeit (0,1 mm/s) und hoher Temperatur (80 °C) sind Umlagerungen möglich, sodass *zähes Verhalten* auftritt. Abbildung 9.15 soll verdeutlichen, dass für Polymerwerkstoffe die alleinige Angabe von Werkstoffkennwerten (z. B. Zugfestigkeit) nicht ausreicht. Es ist vielmehr notwendig, die entsprechende Temperatur und die Belastungsgeschwindigkeit mit anzugeben.

Die Werkstoffkennwerte von Kunststoffen (z. B. Zugfestigkeit) bleiben nicht konstant, sondern ändern sich mit der Belastungsdauer (*Kriechverhalten*). Deshalb ist die Kenntnis



ABS	Acrylnitril – Butadien – Styrol – Polymerisat
GF-PA	Polyamid, glasfaserverstärkt
PC	Polycarbonat
PE	Polyethylen
PMMA	Polyacrylat
PP	Polypropylen
PUR	Polyurethan

Abb. 9.16 Einfluss der Temperatur auf die Zugfestigkeit einiger Kunststoffe

des *Zeitstandsverhaltens* von Polymerwerkstoffen wichtig. Abbildung 9.16 zeigt für einige Polymerwerkstoffe die Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur: Die Zugfestigkeit nimmt mit steigender Temperatur beträchtlich ab.

Eine weitere Besonderheit von Polymerwerkstoffen ist der Abbau der Zugfestigkeit bei UV-Einstrahlung. Nur *Polytetrafluorethylen* (PTFE) weist keine UV-Abhängigkeit der Zugfestigkeit auf. Alle anderen Kunststoffe können durch Zusatz von Stabilisatoren weitgehend UV-beständig gemacht werden.

Das Verformungsverhalten kann durch eine Kombination des *elastischen* Verhaltens (Feder nach *Hooke*) mit einem *viskosen* Verhalten (Dämpfungsglied nach *Newton*) modellhaft erklärt werden (*Rheologie*). Abbildung 9.17 zeigt die unterschiedlichen Modelle und das zugehörige Dehnungsverhalten. Das *Maxwell-Modell* beschreibt das *elastisch-viskose* Verhalten:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_0} \,. \qquad (9.4)$$

Hierin ist ε_{el} der elastische Dehnungsanteil, E_0 der Elastizitätsmodul für den elastischen Bereich und η_0 die statische Viskosität. Demnach steigt die Zugspannung σ_{ges} mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ an (Abb. 9.15a). Das *visko-elastische* Verhalten (*relaxierendes* Verhalten) wird durch das *Voigt-Kelvin-Modell* erklärt. So werden die *Gummielastizität* von Kautschuk und Relaxationsvorgänge (z. B. *Kriechen*) verständlich.

Das *Vier-Parameter-Modell* von H. Burger gestattet die Beschreibung des Verformungsverhaltens eines Polymerwerkstoffs. Die Gesamtdehnung ε_{ges} ist die Summe aus der elastischen Dehnung ε_{el}, der Relaxationsdehnung ε_r und

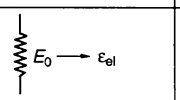
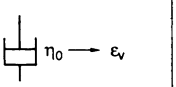
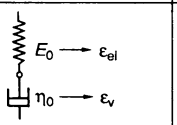
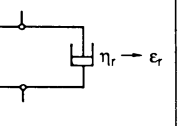
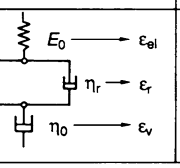
Modell	Verhalten
	Feder: Elastisches Verhalten (Hooke) $\sigma = \varepsilon_{el} E_0$
	Dämpfungsglied: Viskoses oder plastisches Verhalten (Newton) $\sigma = \frac{d\varepsilon}{dt}\,\eta_0$
	Maxwell-Modell: Elastisch-viskoses (plastisches) Verhalten $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_v$ $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = E \cdot \dot{\varepsilon}$
	Voigt-Kelvin-Modell: Viskoelastisches Verhalten (relaxierendes Verhalten) $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ $\varepsilon_r = \frac{1}{E_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\sigma_0\, u(t)$
	Burger-Modell: $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_r$ $\varepsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{E_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)\sigma_0 u(t)$

Abb. 9.17 Verformungsverhalten von Kunststoffen

der viskosen Dehnung ε_v. Mit den entsprechenden Ausdrücken ergibt sich die zeitabhängige Dehnung:

$$\varepsilon_{ges}(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{E_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] \cdot \sigma_0 u(t) \,. \tag{9.5}$$

$\tau = \eta_r/E_r$ ist die Relaxationszeit, wobei E_r der Elastizitätsmodul, η_r die dynamische Viskosität im Relaxationszustand und $u(t)$ eine Sprungfunktion ist.

9.1.6 Ausgewählte Werkstoffe

9.1.6.1 Verbundwerkstoffe

Werden verschiedene Werkstoffe zu einem Verbundwerkstoff vereinigt, dann lassen sich die unterschiedlichen Eigenschaften der beteiligten Werkstoffe kombinieren. Beispielsweise zeigt stahlfaserverstärktes Kupfer sowohl eine hohe Festigkeit (Stahl) als auch eine gute elektrische Leitfähigkeit (Kupfer). Häufig werden folgende Werkstoffgruppen zu Verbundwerkstoffen kombiniert:

- Metalle und Polymere,
- Metalle und Keramik sowie
- Polymere und Keramik.

Kombinationen aus gleichartigen Werkstoffgruppen bezeichnet man als *Stoffverbunde* (z. B. kohlenstofffaserverstärkter Kohlenstoff, SiC-Faser in SiC). Abbildung 9.18 vermittelt einen Überblick über die Verbundwerkstoffe, ihre Einteilung und Anwendungsbereiche sowie ihre Herstellungsverfahren. Nach der räumlichen Anordnung der Komponenten lassen sich die Verbundwerkstoffe in vier Gruppen einteilen:

- *Schichtverbundwerkstoffe* (schichtförmiger Aufbau der Komponenten),
- *Teilchenverbundwerkstoffe* (in einer Matrix eingebettete kleine Teilchen),
- *Durchdringungsverbundwerkstoffe* (zusammenhängende Gerüste der beteiligten Komponenten, z. B. Tränklegierungen),
- *Faserverbundwerkstoffe* (in einer homogenen Grundmasse eingebettete Fasern).

Schichtverbundwerkstoffe

Aus der Vielzahl der Schichtverbundwerkstoffe seien nur einige wichtige Anwendungsfälle genannt. Für Schichtverbundwerkstoffe in der Elektro- bzw. Wärmetechnik ist die *elektrische Leitfähigkeit* bzw. die *Wärmeleitfähigkeit* von Bedeutung. Die elektrische Leitfähigkeit ist stark richtungsabhängig. Senkrecht zu den Schichten sind die Widerstände der Einzelschichten in Reihe und parallel zu den Schichten parallel geschaltet. Analoges gilt für die Wärmeleitfähigkeit.

Kontaktbimetalle bestehen aus einem Kontaktträger aus einem Unedelmetall (z. B. Cu) und einem an geeigneter Stelle aufgebrachten Kontaktwerkstoff aus Edelmetall (z. B. Ag, Au). Der *Kontaktträgerwerkstoff* soll eine gute elektrische und thermische Leitfähigkeit, gute Festigkeits- und Federeigenschaften, hohe Erweichungs- und Dauerverwendungstemperaturen sowie gute Verarbeitungseigenschaften aufweisen. Die wichtigsten Trägerwerkstoffe sind Kupferlegierungen (z. B. Messing und Zinnbronze). Der Kontaktwerkstoff soll einen niedrigen, vor allem aber konstanten Übergangswiderstand aufweisen. Diese Forderung wird nur von Werkstoffen auf Edelmetallbasis erfüllt. Vielfach sind die Kontaktwerkstoffe selbst wiederum Verbundwerkstoffe (Teilchen-, Durchdringungs- oder Faserverbundwerkstoffe), so z. B. Ag/CdO. Abbildung 9.19 zeigt das Gefüge des dreifachen Kontaktverbund-

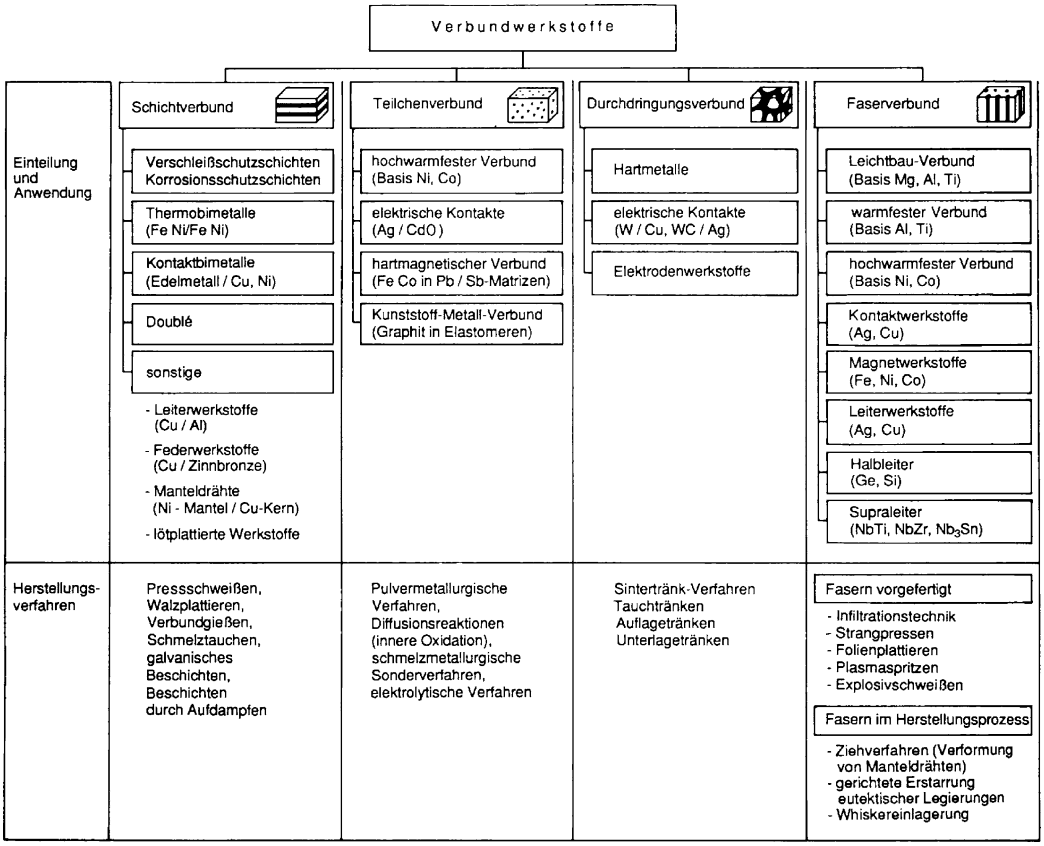


Abb. 9.18 Einteilung der Verbundwerkstoffe

werkstoffes Silber/Cadmiumoxid (AgCdO10) in der Folge AgCdO10/AgCd/Cu.

Thermobimetalle bestehen aus zwei Werkstoffen unterschiedlicher Wärmeausdehnung. Die Komponente mit der kleineren Wärmeausdehnung ($\alpha \leqq 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$) wird *passive* Komponente, die mit der größeren Wärmeausdehnung ($\alpha \geqq 15 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$) *aktive* Komponente genannt. Thermobimetalle finden in folgenden Gebieten Anwendung:

- *Messtechnik*
  (z. B. als Thermometer oder Temperaturschreiber),
- *Elektrotechnik*
  (z. B. als Schutzschalter oder als Regler im Bügeleisen),
- *Energietechnik*
  (z. B. als Temperaturregler im Warmwassermischer),
- *Automobilbau*
  (z. B. als Kühlwasser- oder Lichtmaschinenregler).

Teilchenverbundwerkstoffe

Bei den Teilchenverbundwerkstoffen werden unlösliche metallische oder nichtmetallische Teilchen in eine metallische oder nichtmetallische Matrix eingebettet. Sind es harte Teilchen (z. B. Carbide, Oxide oder Silicide) in einer weichen Matrix, so tritt wegen der Behinderung von Versetzungswanderungen eine

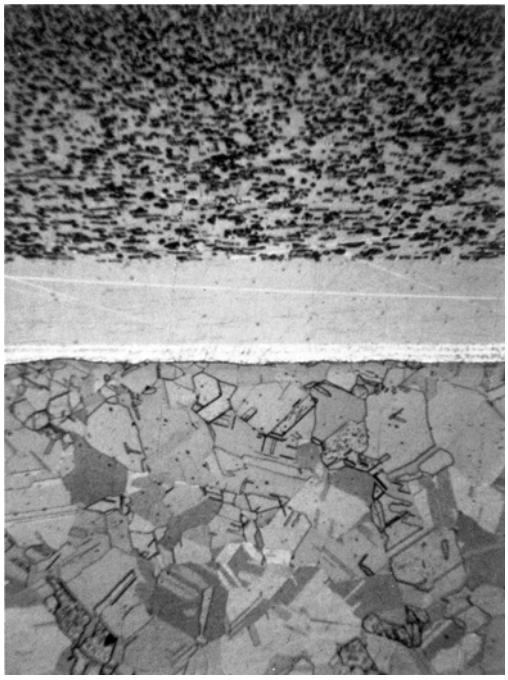


Abb. 9.19 Kontaktverbundwerkstoff AgCdO10/AgCd/Cu (Vergrößerung 126:1). Werkfoto: RAU

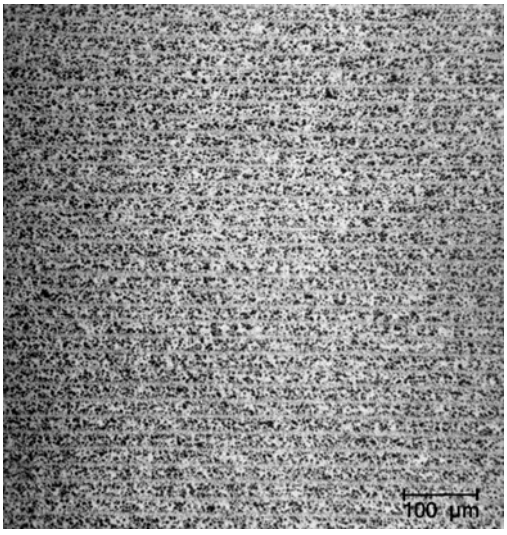


Abb. 9.20 Inneroxidierter Mehrschichtverbundwerkstoff AgCdO10 (Vergrößerung 120:1). Werkfoto: RAU

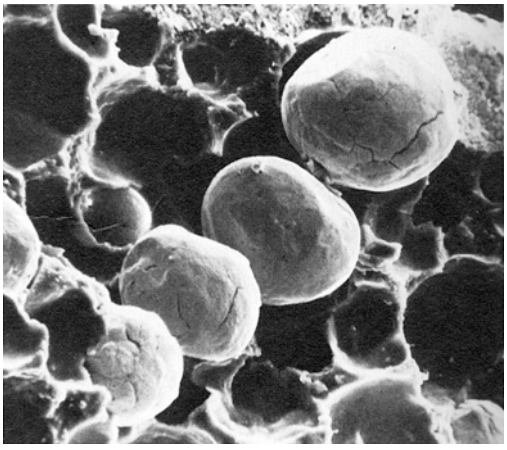


Abb. 9.21 Metallische Kugeln in einer Kunststoffmatrix (Kugeldurchmesser etwa 50 µm). Werkfoto: RAU

Festigkeitszunahme ein (*Dispersionshärtung*). Für elektrische Kontakte benutzt man einen Silber-Cadmium-Verbundwerkstoff. Abbildung 9.20 zeigt das Schliffbild des Teilchenverbundwerkstoffs AgCdO10, hergestellt durch *innere Oxidation*.

Wegen der guten Hochtemperatureigenschaften finden disperionsgehärtete Legierungen Anwendung beim Herstellen von Turbinenschaufeln oder bei Geräten in der Glasherstellung. Mit Kunststoff-Metall-Verbundwerkstoffen können *leitende* Elastomere hergestellt werden: Man bettet metallisch leitende Kohlenstoff- oder Silberkugeln (etwa 50 µm Durchmesser) in Silikonkautschuk, Polyurethan oder Neopren. Abbildung 9.21 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt. Sehr wichtige Anwendungen sind *Druckfühler* und Bauelemente mit *lokaler* Leitfähigkeit gemäß Abb. 9.22a, z. B. für *Folientastaturen*. Wird der Druck auf einen solchen Verbundwerkstoff größer, dann vergrößern sich auch die metallischen Berührungsflächen. Abbildung 9.23 zeigt die Druckabhängigkeit des elektrischen Widerstands. Bei der lokalisierten Leitfähigkeit (Abb. 9.22b) erzeugt man nur an der Stelle des Drucks eine Leitfähigkeit des Materials.

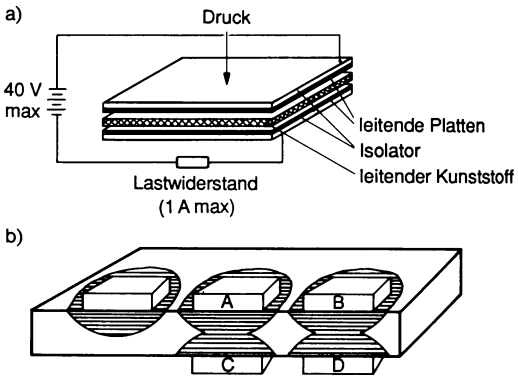


Abb. 9.22 **a**) Druckfühler mit leitfähigem Kunststoff, schematisch, und **b**) lokalisierte Leitfähigkeit in leitfähigem Kunststoff (nach RAU)

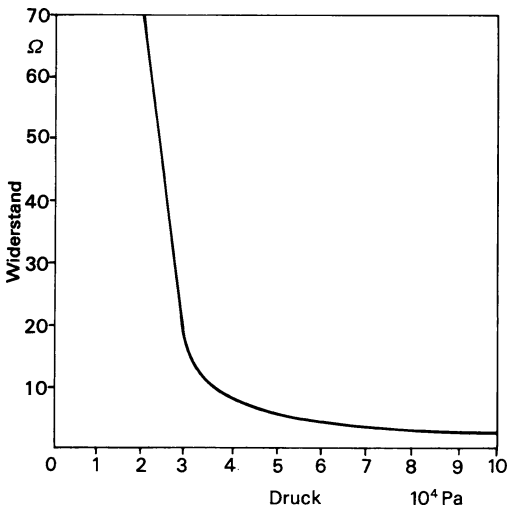


Abb. 9.23 Druckabhängigkeit des elektrischen Widerstandes eines leitfähigen Kunststoffes

Zur Zeit ist es möglich, auf einer Fläche von $1\,\mathrm{cm}^2$ etwa 50 unabhängige Schalter unterzubringen.

Durchdringungsverbundwerkstoffe

Diese Werkstoffgruppe wird bei Hochleistungskontakten eingesetzt. Die hochschmelzende Komponente ist beispielsweise ein Wolframgerüst, das mit Kupfer oder Silber getränkt ist. Die Verdampfung des niedrig schmelzenden Kupfers kühlt das höher schmelzende Wolframgerüst, sodass dieser Durchdringungsverbundwerkstoff sogar abbrandfester ist als reines Wolfram. Als Schweißelektrode findet Wolfram getränkt mit Thoriumoxid oder anderen Oxiden Einsatz. Für wartungsfreie Gleitlager verwendet man poröse Sinterwerkstoffe (z. B. PbSn 10), die mit Öl oder einem anderen Gleitmittel getränkt sind. Sind die Geschwindigkeiten nicht allzu groß, so reicht das in den Poren befindliche Gleitmittel zur Schmierung aus.

Faserverbundwerkstoffe

Dies sind Werkstoffe, bei denen kontinuierliche (Endlosfasern) oder diskontinuierliche (Kurzfasern) metallische oder nichtmetallische Fasern in eine metallische oder nichtmetallische Matrix eingebettet sind. Die faserverstärkten Polymerwerkstoffe sind in Abschn. 9.1.5 und die Filament-Supraleiter in Abschn. 9.2.4 beschrieben. Die Fasern können vorgefertigt sein oder während der Herstellung des Verbundwerkstoffs entstehen (z. B. thermisch durch gerichtete eutektische Erstarrung oder mechanisch durch Strecken von Teilchen beim Strangpressen).

Die festigkeitssteigernde Wirkung der Faserverbundwerkstoffe beruht nur bedingt auf der Behinderung von Versetzungsbewegungen. In größerem Maß wird die Fähigkeit der hochfesten Fasern, einen Teil der Kräfte bzw. Spannungen zu übernehmen, ausgenutzt. Bei paralleler Einlagerung der Fasern und ausreichender Bindung zwischen Faser und Matrix gilt, dass die Dehnung der Faser und der Matrix gleich ist. Dann ist die Gesamtspannung des Verbundwerkstoffes gleich der Summe aus den Spannungen der Matrix und der Faser:

$$\sigma_{\mathrm{ges}} = \sigma_{\mathrm{m}} V_{\mathrm{m}} + \sigma_{\mathrm{f}} V_{\mathrm{f}} \,.$$

Die Größe σ_{m} bzw. σ_{f} ist die Spannung der Matrix bzw. der Faser und V_{m} bzw. V_{f} der Vo-

lumenanteil der Matrix bzw. der Faser. Auf diese Weise ist es möglich, die Spannungs-Dehnungs-Kurve des Faserverbundwerkstoffes aus den entsprechenden Kurven des Faser- bzw. des Matrixmaterials zusammenzusetzen. Analog gilt für den Elastizitätsmodul

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{m}} V_{\text{m}} + E_{\text{f}} V_{\text{f}} .$$

Die höchsten Zugfestigkeitswerte (etwa $30\,000\ \text{N/mm}^2$) werden von einkristallinen Fasern (Whiskers) erreicht. Abbildung 9.24 zeigt Saphir-Whiskers vergrößert. Ein wichtiges Einsatzfeld von Faserverbundwerkstoffen ist der Leichtbau in Fahr- und Flugzeugen, wo eine große Festigkeit und Steifigkeit bei geringem Gewicht gefordert werden. Zur Anwendung kommen z. B. Aluminiumlegierungen mit Bor-, SiC- oder C-Fasern.



Abb. 9.24 Saphir (Al_2O_3)-Whiskers. Werkfoto: RAU

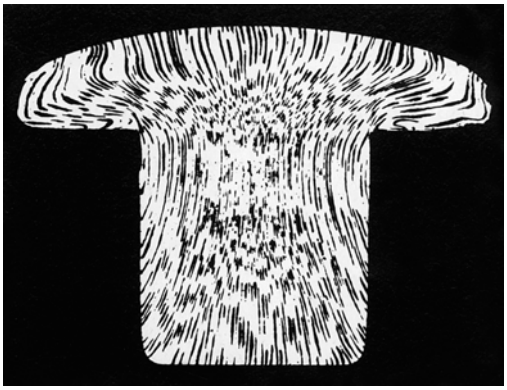


Abb. 9.25 Kontaktniet aus Faserverbundwerkstoff Ag-Ni20. Werkfoto: RAU

Ein kostengünstiger Faserverbundwerkstoff für elektrische Kontakte ist der Silber-Nickel- bzw. der Silber-Kohlenstoff-Faserverbundwerkstoff, dargestellt in Abb. 9.25. Dieser Werkstoff wird durch Bündeln von Manteldrähten hergestellt. Durch die Anzahl der Manteldrähte und die Bündelungsvorgänge können die erforderlichen Faserdurchmesser eingestellt werden (zwischen $5 \cdot 10^{-8}$ m und 10^{-4} m). Aus solchen Verbundwerkstoffen stellt man Kontaktteile nach konventionellen Herstellungsverfahren, z. B. durch Pressen, Walzen und Löten, her.

9.1.6.2 Formgedächtnis-Legierungen

Formgedächtnis-Legierungen (*Memory-Legierungen*) zeigen eine *temperaturabhängige Formänderung*. Dieser Formgedächtnis-Effekt beruht auf einer *martensitischen Phasenumwandlung* zwischen den geordneten Gitterstrukturen der Hochtemperaturphase (*Austenit*) und der Niedertemperaturphase (*Martensit*). Wegen der geringen inneren Spannungen ist diese Phasenumwandlung nahezu vollständig reversibel. Memory-Legierungen zeigen außer dem Formgedächtnis-Effekt noch weitere Sondereigenschaften, wie z. B. hohes *Dämpfungsvermögen* und *superelastisches*

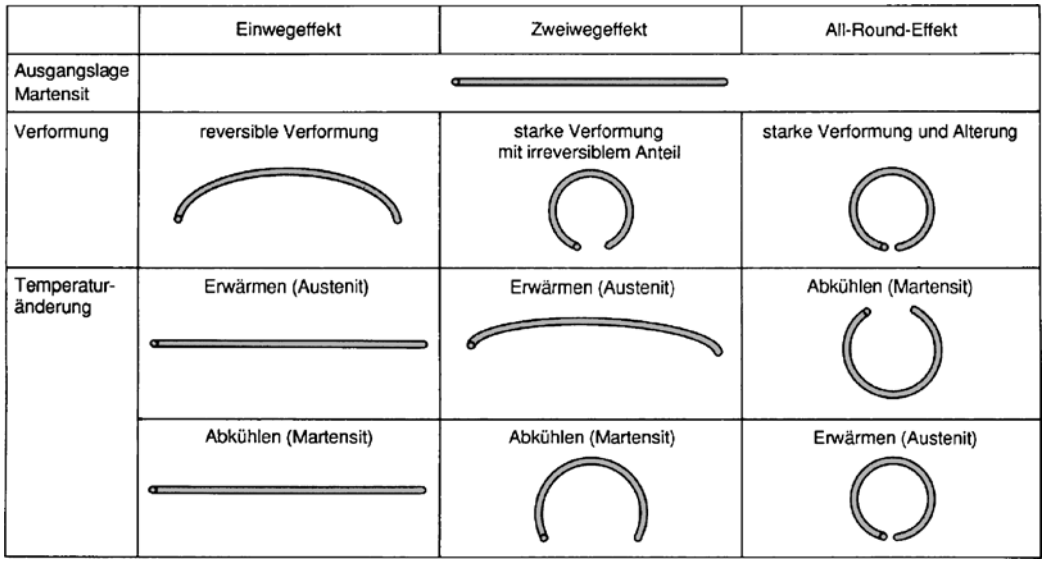


Abb. 9.26 Formgedächtnis-Legierungen

Verhalten. In Abb. 9.26 sind die drei möglichen Arten des Formgedächtnis-Effektes zusammengestellt:

- *Einwegeffekt*
  Martensitisches Ausgangsmaterial wird reversibel verformt, z. B. durch Verschieben von *Zwillingsgrenzen*. Nach der Erwärmung über die austenitische Umwandlungstemperatur stellt sich die unverformte Ausgangslage wieder ein. Eine weitere Formänderung nach der Abkühlung ist nicht möglich.
- *Zweiwegeffekt*
  Martensitisches Ausgangsmaterial wird über den reversiblen Anteil hinaus zusätzlich durch *Versetzungsbewegung*, d. h. *irreversibel*, verformt. Bei Erwärmung über die austenitische Umwandlungstemperatur hinaus entsteht eine bestimmte Hochtemperaturform und bei Abkühlung eine entsprechende Niedertemperaturform. Diese Umwandlung kann nahezu beliebig oft wiederholt werden.
- *All-Round-Effekt*
  Diese Erscheinung tritt nur bei speziellen NiTi-Legierungen auf. Martensitisches Ausgangsmaterial wird verformt und bei 400 °C bis 500 °C getempert. Die Abkühlung und die anschließende Erwärmung haben eine völlige Formumkehr zur Folge. Diese Umwandlung kann nahezu beliebig oft wiederholt werden.

Abbildung 9.27 zeigt eine Druckfeder und einen Biegestreifen mit Zweiwegeffekt aus einer Cu-Zn-Al-Legierung. In Tabelle 9.4 sind

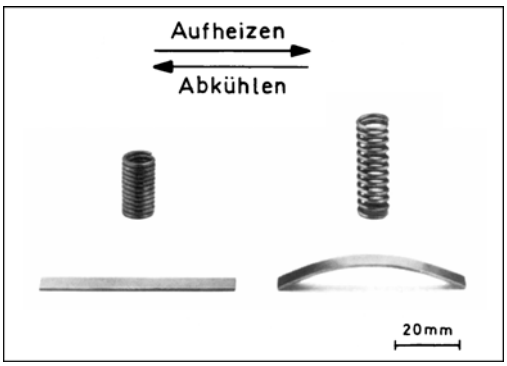


Abb. 9.27 Druckfeder und Biegestreifen mit Zweiwegeffekt aus einer Cu-Zn-Al-Legierung. Werkfoto: RAU

Tabelle 9.4 Eigenschaften von Memory-Legierungen

Eigenschaft	Legierung		
	NiTi	Cu-Zn-Al	Cu-Al-Ni
Dichte in g/cm^3	6,4 bis 6,5	7,8 bis 8,0	7,1 bis 7,2
elektrische Leitfähigkeit in 10^6 S/m	1 bis 1,5	8 bis 13	7 bis 9
maximale A_s-Temperatur in °C	120	120	170
maximaler Einwegeffekt in %	8	4	5
maximaler Zweiwegeffekt in %	5	1	1,2
Überhitzbarkeit in °C	bis 400	bis 160	bis 300
Zugfestigkeit in N/mm^2	800 bis 1000	400 bis 700	700 bis 800
Bruchdehnung in %	40 bis 50	10 bis 15	5 bis 6

die Werkstoffeigenschaften der drei heute technisch anwendbaren Memory-Legierungen NiTi, Cu-Zn-Al und Cu-Al-Ni zusammengestellt. Sie weisen folgende Besonderheiten auf:

- großes Arbeitsvermögen je Volumeneinheit;
- vollständige Formänderung innerhalb eines kleinen Temperaturbereichs;
- unterschiedliche Bewegungsarten möglich, z. B. Drücken, Ziehen, Biegen, Drehen;
- Beschränkung der Formänderung auf bestimmte Bereiche des Bauelements.

Einsatzmöglichkeiten gibt es in der Elektrotechnik zum Anzeigen, Messen und Regeln, in der Wärme- und Installationstechnik sowie im Apparate-, Maschinen- und Automobilbau. Eine bemerkenswerte Anwendung ist eine Wärmekraftmaschine, bei der die Formänderung der Memory-Legierungen über eine Kurbelwelle in eine Drehbewegung umgesetzt wird. Auch in der Medizintechnik sind Einsatzmöglichkeiten gegeben, z. B. Zusammenfügen von gebrochenen Knochen durch spreizbare Nägel oder Heilung von Rückgratverkrümmungen durch einen Stab aus einer Memory-Legierung, der sich bei einer Abkühlungsbehandlung streckt.

9.1.7 Flüssigkristalle

9.1.7.1 Aufbau und Struktur

Flüssigkristalle werden von lang gestreckten Molekülen meist aromatischer Verbindungen gebildet. Sie befinden sich in einem *Zwischenzustand* (*Mesophase*) zwischen dem festen, kristallinen, anisotropen Zustand eines Festkörperkristalls und dem beweglichen, flüssigen, isotropen Zustand einer Flüssigkeit. In Flüssigkristallen sind zwei unterschiedliche Ordnungsstrukturen möglich: einerseits die von Festkörpern her übliche regelmäßige Anordnung der Massenmittelpunkte (in diesem Fall Molekülschwerpunkte) und andererseits die Ordnungsmöglichkeiten in Bezug auf die Achse der Moleküle. Je nach Ordnungsstruktur unterscheidet man *nematische* (*fadenförmige*), *cholesterinische* (von Cholesterin abstammend) und *smektische* (*seifenartige*) Flüssigkristalle. Abbildung 9.28 zeigt die Ordnungsstruktur, die chemische Zusammensetzung und die Anwendungsbereiche ausgewählter Flüssigkristalle.

Bei den nematischen Flüssigkristallen sind die Molekülschwerpunkte keiner Ordnung unterworfen, nur die lang gestreckten Achsen der organischen Moleküle sind parallel ausgerichtet. Die cholesterinischen Flüssigkristalle

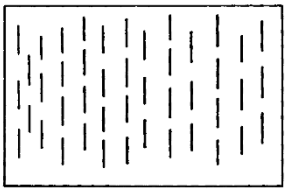
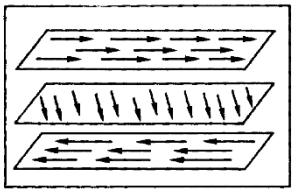
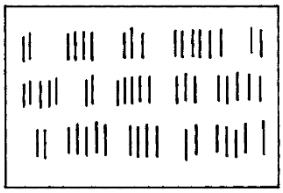
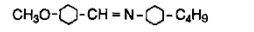
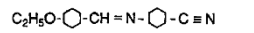
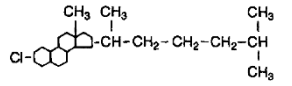
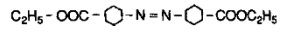
Bezeichnung	nematische Flüssigkristalle (fadenförmig)	cholesterische Flüssigkristalle (von Cholesterin)	smektische Flüssigkristalle (seifenartig)
Ordnung	 Längsachsen parallel	 Helix konstanter Ganghöhe	 Molekülschichten (Längsachsen parallel)
Substanzen	 (4 - Methoxybenzyliden - 4´- butylanilin; MBBA)  (p - Ethoxybenzyliden - 4´- aminobenzonitril; PEAB) (p - Azoxyanisol; PAA)	 (Cholesterylchlorid; CC)	 (4,4´- Dicarbethoxyazobenzol)
Anwendungen	Molekülspektroskopie, Anzeigetechnik	Temperaturanzeige, Thermotopographie, Farbanzeige	—

Abb. 9.28 Flüssigkristalle

weisen *verdrillte* nematische Strukturen auf, d. h., die Vorzugsrichtung der lang gestreckten Molekülachsen ändert sich von Ebene zu Ebene schraubenförmig. Es entsteht eine *Helix* mit konstanter Ganghöhe (teilweise in der Größenordnung der Wellenlänge des sichtbaren Lichts). Smektische Flüssigkristalle zeigen noch einen Teil der Ordnung der Molekülschwerpunkte. Diese sind in bestimmten Ebenen angeordnet; die Molekülachsen sind in der Regel parallel.

9.1.7.2 Eigenschaften

Die Flüssigkristalle weisen ein besonderes Verhalten in ihren mechanischen, optischen und insbesondere elektrooptischen Eigenschaften auf.

Mechanische Eigenschaften

Flüssigkristalle haben eine von der Substanz und der Temperatur abhängige *Viskosität,* die wegen der Orientierung der Molekülachsen stark anisotrop ist; bei Strömung in Orientierungsrichtung ist sie gering und senkrecht dazu sehr groß. Eine weitere Besonderheit ist die *Orientierungselastizität.* Durch eine äußere Störung (z. B. durch ein elektrisches Feld) können die Molekülachsen verschoben werden; nach dem Aufheben dieser Störung stellt sich der frühere Zustand wieder ein.

Optische Eigenschaften

Besonders cholesterinische Flüssigkristalle zeigen eine *Doppelbrechung,* die bis 100-mal größer ist als die von Quarz. Eine weitere Eigenschaft ist die Möglichkeit der *selektiven Totalreflexion*, wenn die Ganghöhe der Helix in der Größenordnung der Wellenlänge von Licht liegt. Für die reflektierte Wellenlänge gilt $\lambda_r = p\,\overline{n}$ mit p als Ganghöhe der Helix und $\overline{n}$ als mittlerer Brechungsindex des Flüssigkristalls. Die Ganghöhe ist abhängig von Druck und Temperaturänderungen sowie beeinflussbar durch elektrische und magnetische Felder. Somit ist eine *elektrisch gesteuerte Farbumschaltung* möglich.

Elektrooptische Eigenschaften

Besonders wichtige elektrooptische Effekte sind außer den erwähnten Farbeffekten die *Streu-* und *Orientierungseffekte*. Ohne elektrisches Feld sind die Flüssigkristalle nicht streuend und transparent; beim Anlegen eines elektrischen Feldes tritt Streuung auf und der Flüssigkristall wird milchig trüb. Die Orientierungseffekte beschreiben die Vorgänge bei der Umorientierung homogener Schichten. Eine Werkstoffkenngröße ist hierbei die *Permittivitätszahl*. Ist diese in Molekülachsenrichtungen größer als in senkrechter Richtung, dann liegt eine *positive Anisotropie* vor, im umgekehrten Fall eine *negative*. Im ersten Fall richten sich die Molekülachsen parallel zum elektrischen Feld aus, im zweiten Fall senkrecht zum elektrischen Feld. Durch Ein- und Ausschalten eines elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes können die Moleküle um 90° gedreht werden, sodass sich ihre optischen Eigenschaften ändern (*Schadt-Helfrich-Drehzelle*, Abb. 6.125).

9.1.7.3 Anwendungsbereiche

Wie Abb. 9.28 zeigt, finden vor allem nematische und cholesterinische Flüssigkristalle Anwendung. Aus der Vielzahl der Anwendungsbereiche seien die *Thermotopografie*, die *Molekülspektroskopie* und das große Gebiet der *Anzeigetechnik* angeführt.

Thermotopografie

Wenn die Ganghöhe der Helix eines cholesterinischen Flüssigkristalls temperaturabhängig ist, wechselt der Flüssigkristall in bestimmten Temperaturbereichen die Farbe. Dadurch wird eine Temperaturmessung auf Oberflächen möglich. Es kommen Flüssigkristallschichten zum Einsatz, die 20 µm dick sind. Zur Ausschaltung der Reflexion an der Oberfläche sind sie mit einem schwarzen Lack (oder einer schwarzen Folie) überzogen. Auf diese Weise können Temperaturunterschiede von bis zu 0,007 K (meist bis 0,1 K) gemessen werden und die Ansprechzeiten 1/30 s gestatten eine dynamische Beobachtung.
Solche Wärmebilder finden Einsatz in der *zerstörungsfreien Werkstoffprüfung*. Beispielsweise können dadurch Materialeinschlüsse, Klebe- und Schweißfehler sowie Werkstoffermüdungen festgestellt und der Temperaturverlauf in elektronischen Bauelementen verfolgt werden. In der *Medizin* erlaubt die Thermotopografie Rückschlüsse auf Durchblutungsverläufe sowie die Diagnose von Tumoren. In der *Optik* können die Schwingungsanteile von Infrarotlasern sichtbar gemacht werden.

Molekülspektroskopie

Da die Flüssigkristalle ihre eigene Orientierungsrichtung anderen Molekülen aufzwingen, kann in der Molekülspektroskopie eine hohe Auflösung erzielt werden. Die Moleküle werden ausgerichtet, die statistische, räumlich isotrope Bewegung unterdrückt und damit die Linienbreiten der Molekülspektren vermindert. Flüssigkristalle werden deshalb in fast allen spektroskopischen Untersuchungsverfahren eingesetzt, z. B. in der Fluoreszenz (UV)-, Infrarot (IR)-, Kernresonanz (NMR)-, Elektronenspinresonanz (ESR)- und Mößbauer-Spektroskopie sowie bei der Gaschromatografie.

Anzeigetechnik

Dieser Bereich ist das zur Zeit bedeutendste technische Anwendungsfeld für Flüssigkristalle (prinzipieller Aufbau, s. Abschn. 6.4.2.4, Abb. 6.125 und Abb. 6.126). Die *Flüssigkristallanzeige* (LCD, Liquid Crystal Display) hat folgende Vorzüge:

- *geringer Stromleistungsbedarf* (2 µW/cm^2 bis 100 µW/cm^2, Batteriebetrieb möglich);

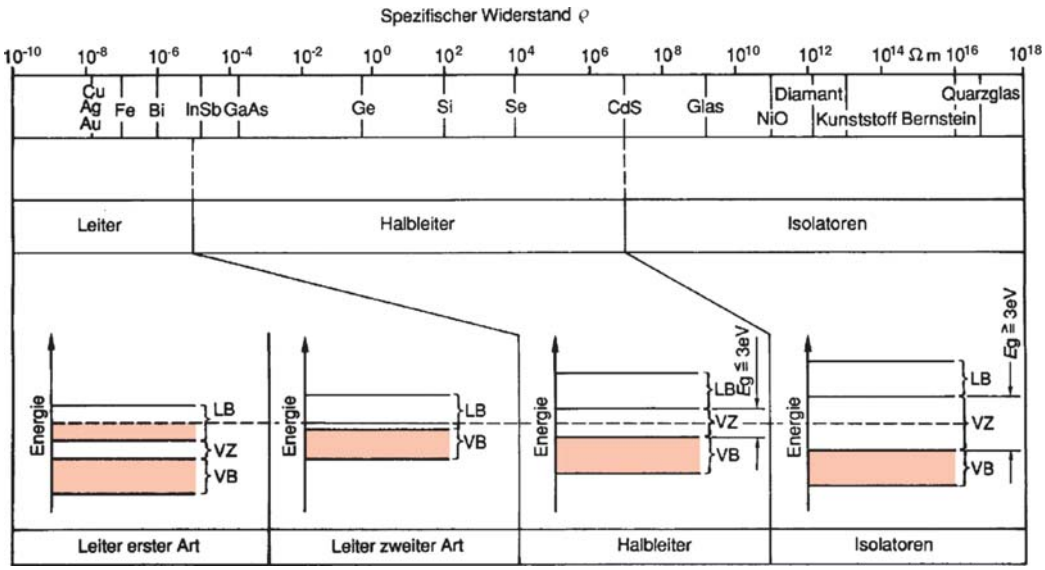


Abb. 9.29 Spezifischer elektrischer Widerstand und Bandstrukturen der Festkörper. Die mit Elektronen besetzten Energiezustände sind rot gekennzeichnet. VB: Valenzband, LB: Leitungsband, VZ: Verbotene Zone

- *kleine Betriebsspannungen* (3 V bis 100 V; kombinierbar mit integrierten Schaltungen);
- *sehr kleine Stromdichte* (10^{-8} A/mm^2 je Bildpunkt; großflächige Anzeigen möglich);
- *mehrfarbige Anzeigen*;
- *Speicherung von Informationen* durch Mischung geeigneter Flüssigkristalle sowie
- *großer Helligkeitsbereich* und *großer Kontrast*, da kein Eigenlicht abgestrahlt wird.

Nachteilig ist, dass die Anzeige als nicht selbstleuchtende Anzeige im Dunkeln mit Fremdlicht betrieben werden muss.

9.2 Elektronen in Festkörpern

Der spezifische Widerstand oder Resistivität ϱ von Festkörpern variiert von $10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ bis $10^{17}\,\Omega\,\mathrm{m}$ um 25 Zehnerpotenzen und ist daher die physikalische Größe mit dem größten Wertebereich. Anhand der Resistivität erfolgt üblicherweise eine Einteilung der Stoffe nach Abb. 9.29 in

- *Leiter* mit $\varrho < 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}$,
- *Halbleiter* mit $10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m} < \varrho < 10^{7}\,\Omega\,\mathrm{m}$ und
- *Isolatoren* mit $\varrho > 10^{7}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

Der spezifische Widerstand einzelner Werkstoffe zeigt eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Temperatur (Abb. 4.7), dem Druck und anderen Parametern. Beispielsweise wird die Resistivität von reinem Germanium von 45 Ω cm auf etwa $10^{-2}\,\Omega\,\mathrm{cm}$ vermindert, wenn nur ein Fremdatom einer Million Germaniumatome zugefügt wird. Die Deutung dieser Eigenschaften erfordert eine genauere Kenntnis der elektronischen Struktur der Festkörper.

9.2.1 Energiebänder-Modell

Modell gebundener Elektronen

In Abschn. 8.1.2 ist dargelegt, dass sich Elektronen, die an isolierte Atome gebunden sind, nur auf diskreten Energieniveaus aufhalten können. Abbildung 9.30 zeigt ein sehr vereinfachtes Schema der *Energiezustände*. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen um die Kerne wird durch das *Quadrat der Wel-*

lenfunktion $|\Psi|^2$ beschrieben. Die Lösung der *Schrödinger-Gleichung* liefert für Ψ räumliche stehende Wellen. Bilden zwei Atome ein Molekül, dann überlappen sich die Wellenfunktionen der beiden Atome. Die Wechselwirkung der beteiligten Elektronen führt dazu, dass ursprünglich gleichartige Energieniveaus der Einzelatome in jeweils zwei eng benachbarte Energieniveaus aufspalten. Dieser Vorgang ist analog zur Entstehung der zwei Eigenfrequenzen bei der Kopplung von zwei gleichartigen schwingenden Systemen (Abschn. 5.1.5).

Abbildung 9.30 verdeutlicht die Aufspaltung der Energieniveaus in zwei, drei (bei drei wechselwirkenden Systemen) und N (bei N Atomen im Festkörper) eng benachbarte Energieniveaus. Im Festkörper liegen die N Energiezustände so eng beieinander, dass sie nicht getrennt werden können, sondern zu einem breiten *Energieband* verschmelzen. Diese erlaubten Energiebänder sind in Abb. 9.30 schraffiert gezeichnet.

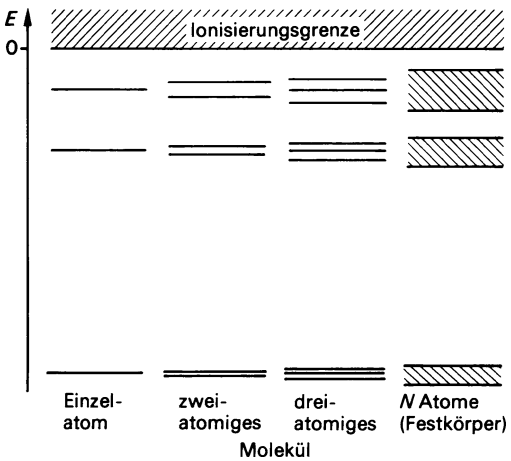


Abb. 9.30 Erlaubte Energiezustände der Elektronen im Atom, Molekül und Festkörper

Elektronen halten sich in Festkörpern innerhalb erlaubter Energiebänder auf, die durch verbotene Zonen voneinander getrennt sind.

Elektronen hoch liegender Energieniveaus haben einen großen mittleren Abstand vom Kern. Infolge der intensiven Wechselwirkung mit den Nachbarelektronen spalten die oberen Energieniveaus stärker auf als die unteren. Dadurch werden die hoch liegenden Energiebänder breiter als die tief liegenden. Diese Verbreiterung der Energiebänder kann so weit führen, dass sie sich überlappen (Leiter zweiter Art, Abb. 9.29).

Die Frage, ob ein Festkörper ein Leiter oder Nichtleiter ist, hängt von der Besetzung der Bänder mit Elektronen ab. Ist beispielsweise ein Band vollständig gefüllt, können die Elektronen dieses Bandes nicht am Stromtransport teilnehmen. Ein fließender Strom bedeutet nämlich, dass die Elektronen bei der Bewegung durch den Festkörper kinetische Energie aufnehmen, also energetisch auf eine höhere Stufe gehoben werden. In einem vollbesetzten Band, in dem keine höheren Energieniveaus frei sind, ist dies aber nicht möglich. Daraus folgt:

Elektrische Leiter sind solche Festkörper, bei denen ein Energieband nur teilweise besetzt ist.

Das oberste vollständig gefüllte Band heißt *Valenzband*. Das darüber liegende entweder teilweise gefüllte oder auch leere Band wird als *Leitungsband* bezeichnet. Bei den klassischen *Leitern erster Art* (Elemente der Gruppe 1 (I A) und 11 (I B) des Periodensystems) ist nach Abb. 9.29 das Leitungsband halb gefüllt. Dies ist verständlich bei Betrachtung der Elektronenkonfiguration im Einzelatom.

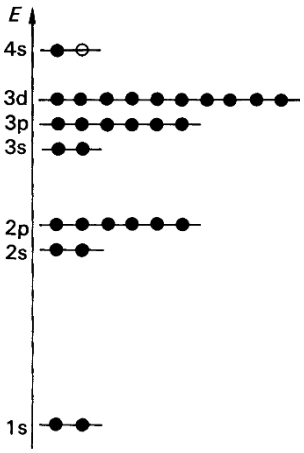


Abb. 9.31 Anordnung der Elektronen im Kupferatom

Abbildung 9.31 zeigt die Anordnung bei einem Kupferatom, bei dem das oberste 4s-Energieniveau, das nach dem *Pauli-Prinzip* zwei Elektronen mit entgegengesetzter Spinrichtung aufnehmen könnte, von nur einem Elektron besetzt ist. Bei der Vereinigung der Kupferatome zum Festkörper bleibt das zugehörige 4 s-Band halb besetzt. Andere Metalle (z. B. die Erdalkalimetalle) haben zwar ein voll besetztes oberstes Energieband, durch Überlappung mit einem darüberliegenden leeren Leitungsband entsteht aber letztlich wieder ein breites teilweise gefülltes Band (Leiter zweiter Art, Abb. 9.29).

Bei den *Halbleitern* und *Isolatoren* ist das leere Leitungsband vom gefüllten Valenzband durch eine mehr oder weniger breite *verbotene Zone* (VZ) getrennt. Die Breite E_g dieses *Energiegaps* ist maßgebend für die elektrische Leitfähigkeit. Substanzen mit $E_g \lesssim 3$ eV werden nach Abb. 9.29 zu den Halbleitern, solche mit $E_g \gtrsim 3$ eV zu den Isolatoren gerechnet.

Modell freier Elektronen

Die Entstehung der Bandstruktur kann man auch verstehen, wenn die Elektronen näherungsweise als frei bewegliche Teilchen betrachtet werden. Nach der Quantentheorie wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen im Kristall durch das Quadrat der Wellenfunktion $|\Psi|^2$ beschrieben. Hierbei hängt die Wellenlänge λ dieser *Materiewelle* durch die *De-Broglie-Beziehung* nach (6.147) mit dem Impuls p der Elektronen zusammen: $\lambda = h/p$. h ist die Planck'sche Konstante. Mit der Wellenzahl $k = 2\pi\lambda$ und $\hbar = h/(2\pi)$ ergibt sich

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \,. \tag{9.6}$$

Diese Gleichung vermittelt zwischen der Größe p des Teilchenbildes und λ bzw. k des Wellenbildes. Die kinetische Energie der Elektronen hängt mit dem Impuls p bzw. der Wellenzahl k zusammen:

$$E = \frac{p^2}{2\,m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\,m} \,. \tag{9.7}$$

Die Größe E über k aufgetragen ergibt also eine Parabel, wie sie in Abb. 9.32a dargestellt ist. Während ein wirklich freies Elektron praktisch jeden beliebigen Zustand (gekennzeichnet durch ein Wertepaar E und k) auf der Pa-

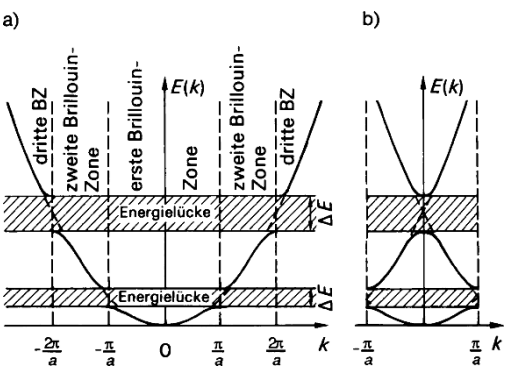


Abb. 9.32 Energiebandstruktur **a**) im erweiterten und **b**) reduzierten Zonenschema

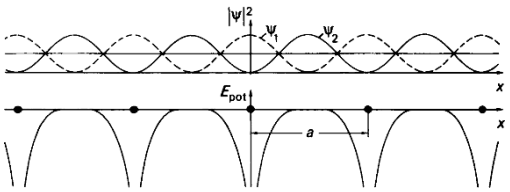


Abb. 9.33 Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ stehender Elektronenwellen mit $\lambda = 2\,a$ und potentielle Energie E_{pot} der Elektronen im Feld der Atomrümpfe

rabel einnehmen kann, ergeben sich für Elektronen in Kristallen bestimmte Energiebereiche auf der Parabel, die *verboten* sind. Breitet sich eine Elektronenwelle längs einer Atomkette mit der Gitterkonstanten a aus, dann wird die Welle an den Atomen reflektiert, sobald die Wellenlänge λ der Materiewelle die *Bragg'sche Reflexionsbedingung* (6.129) erfüllt:

$$\lambda_n = \frac{2\,a}{n}\,, \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Diesen Wellenlängen entsprechen die Wellenzahlen

$$k_n = \frac{2\,\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{a} n\,. \tag{9.8}$$

Durch Überlagerung der laufenden mit den reflektierten Wellen entstehen stehende Elektronenwellen mit ortsfesten Knoten und Bäuchen. Abbildung 9.33 zeigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ für zwei Elektronenwellen mit jeweils derselben Wellenlänge $\lambda_1 = 2a$:

$$\Psi_1 \sim \cos k_1\, x = \cos \frac{\pi}{a} x\,,$$

$$\Psi_2 \sim \sin\, k_1\, x = \sin \frac{\pi}{a} x\,.$$

Bei der Welle Ψ_1 besteht eine große Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Elektronen nahe den Atomrümpfen sind und durch die niedrige potentielle Energie eine Absenkung der Gesamtenergie im Vergleich zu freien Elektronen erfahren. Die Elektronen, die durch die Welle Ψ_2 beschrieben werden, halten sich vorwiegend zwischen den Atomrümpfen auf und haben daher eine höhere Energie. Daraus folgt: Elektronen mit der Wellenzahl $k_1 = \pm\pi/a$ haben nicht die Energie $E_1 = \hbar^2\, k_1^2/(2m)$ der freien Elektronen, sondern je nach Art der Wellenfunktion eine größere oder kleinere Energie. Die $E(k)$-Parabel in Abb. 9.32a bekommt daher an der Stelle $k_1 = \pm\pi/a$ eine Unstetigkeitsstelle, an der für einen k-Wert zwei Energiewerte existieren, die durch eine verbotene Zone oder Energielücke voneinander getrennt sind. Weitere Energielücken ergeben sich für die stehenden Wellen der höheren Wellenzahlen nach (9.8): $k_n = \pm(\pi/a)n$. Das $E(k)$-Diagramm wird gemäß Abb. 9.32a in *Brillouin-Zonen* (L. Brillouin, 1889 bis 1969) eingeteilt. Wegen der Periodizität im k-Raum können die Brillouin-Zonen höherer Ordnung des *erweiterten Zonenschemas* nach dem Muster von Abb. 9.32b in die erste Zone geklappt werden. Bei diesem *reduzierten Zonenschema* liegen alle $E(k)$-Kurven in der ersten Brillouin-Zone.

9.2.2 Metalle

Die meisten Eigenschaften der Metalle lassen sich anhand des *Modells des freien Elektronengases* verstehen. Dieses wurde von A. Sommerfeld (1868 bis 1951) vorgeschlagen und von E. Fermi (1901 bis 1954) erweitert. Es beschreibt die Leitungselektronen der Metalle so wie die frei beweglichen Moleküle eines Gases, vernachlässigt also die Wechselwirkung der Elektronen mit den ortsfesten Atomkernen und damit auch das Auftreten von Energielücken.

Befinden sich die Elektronen in einem Würfel der Kantenlänge L, dann ist ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch das Quadrat der

Wellenfunktion Ψ gegeben, die als Lösung aus der *Schrödinger-Gleichung* (8.18) folgt. Für freie Elektronen lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial z^2}\right)=E_k\psi_k\ .$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind ebene Wellen der Form

$$\psi_k\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\ .$$

Hierbei gibt die Richtung des *Wellenzahlenvektors* $\boldsymbol{k}$ die Laufrichtung der Welle an. Zweckmäßigerweise wird verlangt, dass die Wellenfunktionen in x-, y- und z-Richtung periodische Randbedingungen erfüllen, d. h., es soll gelten $\psi(x+L,y,z)=\psi(x,y,z)$ und Entsprechendes für die y- und z-Richtung. Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn die Komponenten des k-Vektors den Bedingungen

$$k_x=0\ ,\ \pm\frac{2\,\pi}{L}\ ,\ \pm\frac{4\,\pi}{L}\cdots$$

genügen. Entsprechendes gilt für k_y und k_z.
Der Impuls des Elektrons hängt nach (9.6) mit dem Wellenzahlenvektor gemäß $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ zusammen. Die Energie der Teilchen ist nach (9.7)

$$E_k=\frac{\hbar^2}{2\,m}k^2=\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\ .$$

Die Energie ist gequantelt, da die Komponenten des Wellenzahlvektors diskrete Werte annehmen. Im k-Raum, der nach Abb. 9.34 von den Komponenten k_x, k_y und k_z aufgespannt wird, ist eine Fläche konstanter Energie eine Kugel.
Da die Komponenten des Wellenzahlvektors in ganzzahligen Vielfachen von $2\,\pi/L$ gequantelt sind, ist in jedem Volumenelement des k-Raums von der Größe $(2\,\pi/L)^3$ Platz für jeweils zwei Elektronenzustände. Die Zahl Zwei rührt vom Pauli-Prinzip, das zulässt, dass ein

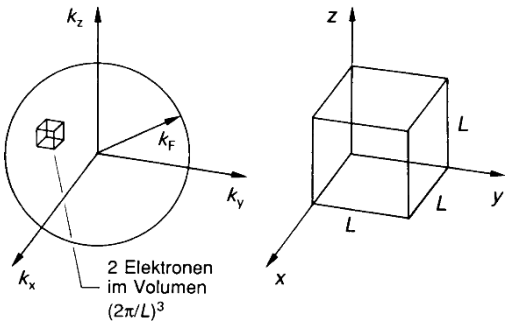


Abb. 9.34 Fermi-Kugel im k-Raum; Kristall im Ortsraum

Zustand, der in allen Quantenzahlen k_x, k_y und k_z übereinstimmt, von zwei Elektronen mit entgegengesetzten Spinrichtungen besetzt werden kann. Befinden sich N Elektronen im Kristall mit dem Volumen $V=L^3$, dann werden alle möglichen Energiezustände von unten herauf besetzt, bis alle N Teilchen untergebracht sind. Das höchste besetzte Energieniveau wird *Fermi-Niveau* genannt. Die zugehörige Energiefläche der *Fermi-Energie* E_F im k-Raum von Abb. 9.34 ist eine Kugel mit dem Radius k_F. Wenn das Elementarvolumen $(2\,\pi)^3/V$ im k-Raum für zwei Teilchen Platz bietet, dann gilt für das Volumen $4/3(\pi\,k_\mathrm{F}^3)$ der Fermi-Kugel von N Teilchen

$$\frac{4}{3}\pi\,k_\mathrm{F}^3=\frac{N}{2}\frac{(2\,\pi)^3}{V}\ .$$

Daraus folgt für die Wellenzahl an der Oberfläche der Fermi-Kugel

$$k_\mathrm{F}=\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}\ . \qquad (9.9)$$

Die Fermi-Energie ist nach (9.7)

$$E_\mathrm{F}=\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(3\,\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}\ . \qquad (9.10)$$

Diejenigen Elektronen, deren Zustände an der Oberfläche der Fermi-Kugel liegen, haben die maximale Geschwindigkeit v_F. Mit $p_F = mv_F = \hbar k_F$ ergibt sich

$$v_F = \frac{\hbar}{m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} . \qquad (9.11)$$

Alle Parameter des Fermi-Niveaus hängen von der Konzentration $n = N/V$ der freien Elektronen ab. Tabelle 9.5 zeigt die nach (9.9) bis (9.11) berechneten Werte für einige Metalle. Die Elektronenzahldichten werden experimentell mit Hilfe des *Hall-Effekts* bestimmt (Abschn. 4.4.3.2).

Für bestimmte Fragestellungen ist die Kenntnis der Anzahl dN von Zuständen im Energieintervall zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ wichtig. Im k-Raum liegen diese Zustände innerhalb einer Kugelschale mit dem Radius k und der Dicke dk. Die Anzahl der möglichen Zustände ist

$$\mathrm{d}N = 2\frac{4\pi k^2\,\mathrm{d}k}{(2\pi)^3/V} .$$

Mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und

$$\mathrm{d}k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\mathrm{d}E$$

resultiert

$$\mathrm{d}N = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}\,\mathrm{d}E .$$

Die *Zustandsdichte* $D(E)$, d. h. die Anzahl der Zustände je Volumeneinheit und Energieintervall, ist $D(E) = (\mathrm{d}N/\mathrm{d}E)\,(1/V)$ oder

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} . \qquad (9.12)$$

Die bisherigen Erläuterungen gelten streng genommen nur für $T = 0$. Nur am absoluten Nullpunkt besetzen die Elektronen alle Energieniveaus von null bis E_F. Bei endlicher Temperatur nimmt die kinetische Energie des Elektronengases zu, sodass einige Energieniveaus oberhalb der Fermi-Kante besetzt werden und eine gleiche Anzahl unterhalb leer bleibt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Energiezustand E mit Elektronen besetzt ist, wird beschrieben durch die *Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion*

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-E_F)/(kT)} + 1} . \qquad (9.13)$$

Tabelle 9.5 Parameter des Fermi-Niveaus verschiedener Metalle

Element	Elektronenkonzentration n in 10^{22} cm^{-3}	Wellenzahl k_F in 10^8 cm^{-1}	Fermi-Energie E_F in eV	Fermi-Geschwindigkeit v_F in 10^8 cm/s
Li	4,6	1,1	4,7	1,3
Na	2,5	0,90	3,1	1,1
K	1,34	0,73	2,1	0,85
Cu	8,50	1,35	7,0	1,56
Ag	5,76	1,19	5,5	1,38
Au	5,90	1,20	5,5	1,39

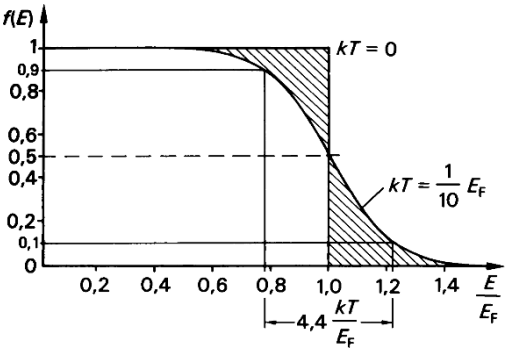


Abb. 9.35 Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion (k: Boltzmann-Konstante)

Die Fermi-Dirac-Statistik ist anwendbar auf Teilchen mit halbzahligem Spin, zu denen die Elektronen gehören. Abbildung 9.35 zeigt die Wahrscheinlichkeitsfunktion für zwei verschiedene Temperaturen. Bei $T = 0$ sind alle Zustände unterhalb der Fermi-Energie E_F besetzt, oberhalb E_F leer: $f(E) = 1$ für $0 \leqq E < E_F$, $f(E) = 0$ für $E > E_F$. Bei endlicher Temperatur sind entsprechend den schraffierten Flächen Zustände unterhalb der Fermi-Energie leer und oberhalb besetzt. Die Besetzungswahrscheinlichkeit nimmt von 90% auf 10% ab innerhalb eines Energiebereiches von

$$\Delta E \approx 4{,}4kT\,. \qquad (9.14)$$

Die bei tiefen Temperaturen scharfe Fermi-Kante weicht also mit zunehmender Temperatur immer mehr auf.

Beispiel

9.2-1 Wie breit ist der Energiebereich, in dem die Fermi-Dirac-Verteilung von Natrium bei Raumtemperatur (300 K) von 90% auf 10% abnimmt?

Lösung

Nach Tabelle 9.5 ist $E_F = 3{,}1$ eV. Mit $k = 8{,}62 \cdot 10^{-5}$ eV/K ist $kT = 0{,}0259$ eV und nach (9.14) $\Delta E \approx 4{,}4kT = 0{,}114$ eV. Bezogen auf E_F ist die relative Breite der Übergangszone $\Delta E/E_F = 3{,}7\%$.
Der Übergang ist also auch bei Raumtemperatur noch verhältnismäßig scharf.

Die Dichte der besetzten Energiezustände ist das Produkt aus Zustandsdichte und Verteilungsfunktion $D(E) \cdot f(E)$. Abbildung 9.36 zeigt den Verlauf in Abhängigkeit von der Energie für Kupfer bei der verhältnismäßig hohen Temperatur $T = 1200$ K ($kT/E_F \approx 1/70$).

Molare Wärmekapazität des Elektronengases

Nach dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik (Abschn. 3.2.2) sollten die freien Elektronen einen merklichen Beitrag zur spezifischen Wärmekapazität der Metalle liefern. Jedes frei bewegliche Elektron hat drei Freiheitsgrade und somit die mittlere thermische Energie $\overline{E}_{kin} = (3/2)kT$. Da jedes Atom praktisch ein freies Elektron mitbringt, sollte nach den Erläuterungen in Abschn. 3.3.3 der Beitrag des Elektronengases zur molaren Wärmekapazität $C_{m,el} = (3/2)R_m$ betragen. Tatsächlich ist aber der Beitrag der Elektronen bei Zimmertemperatur lediglich ungefähr 1/100 des erwarteten Wertes.

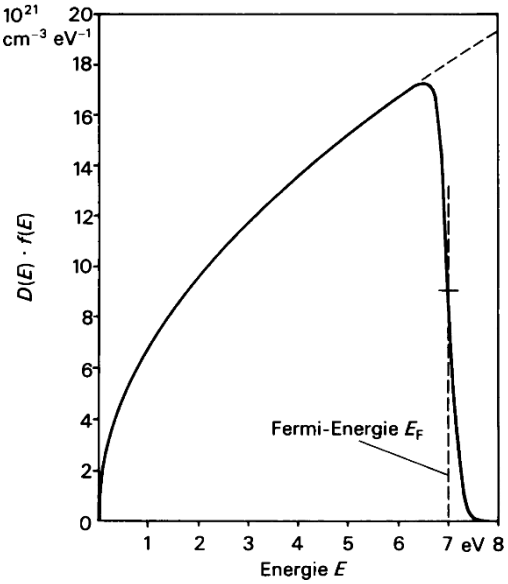


Abb. 9.36 Dichte der besetzten Energiezustände in Kupfer bei $T = 1200$K

Die Erklärung dieser Beobachtung ist mit Hilfe der Fermi-Dirac-Statistik möglich. Wird das Elektronengas von $T = 0$ aus erwärmt, dann nehmen nach Abb. 9.35 und Abb. 9.36 nicht alle Elektronen thermische Energie auf, wie dies klassisch erwartet wird, sondern nur die Elektronen, die innerhalb des schmalen Streifens von einigen kT Breite bei $E = E_F$ angesiedelt sind. Von der Gesamtzahl N der Elektronen kann also nur ein Bruchteil der Größenordnung $\Delta N/N \approx kT/E_F = T/T_F$ zur Wärmekapazität beitragen.

$$T_F = \frac{E_F}{k} \tag{9.15}$$

ist die *Fermi-Temperatur*.
Die innere Energie dieser ΔN Elektronen ist mithin näherungsweise

$$U_{el} = \Delta N \cdot \frac{3}{2} kT \approx \frac{3}{2} N \frac{T}{T_F} kT \,.$$

Der Beitrag zur molaren Wärmekapazität ist nach (3.55) $C_{m,el} \approx 3\,R_m(T/T_F)$. Eine exakte Analyse liefert den Ausdruck

$$C_{m,el} = \frac{1}{2}\pi^2 R_m \frac{T}{T_F} \,. \tag{9.16}$$

Der Beitrag der Elektronen zur molaren Wärmekapazität der Metalle hängt linear von der Temperatur ab.

Diese Aussage stimmt mit den experimentellen Befunden überein. Da bei tiefen Temperaturen der Beitrag der Gitterschwingungen zur Wärmekapazität nach dem *Debye'schen Gesetz* $C_{m,\,Gitter} = AT^3$ (Abschn. 9.3.1.2) abfällt, überwiegt bei genügend tiefen Temperaturen der Beitrag der Elektronen zur spezifischen bzw. molaren Wärmekapazität.

Elektrische Leitung

Die Elektronen eines Metalls bewegen sich infolge der Wärmebewegung statistisch verteilt in alle Raumrichtungen, sodass ihr mittlerer Geschwindigkeitsvektor null ist:

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{N}\frac{\hbar}{m}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{k}_i = 0 \,.$$

In einem elektrischen Feld der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ wirkt auf jedes Elektron die Kraft $-e\boldsymbol{E}$, sodass alle Elektronen beschleunigt werden. Der regellosen Bewegung wird jetzt eine *gemeinsame Driftbewegung* mit der (mittleren) *Driftgeschwindigkeit* $\boldsymbol{v}_d$ überlagert.
Ohne Reibungseffekte würden die Elektronen immer schneller werden. Tatsächlich finden aber im Kristall Stoßprozesse statt, die dafür sorgen, dass sich nach einer bestimmten Zeit eine konstante Driftgeschwindigkeit einstellt (bei konstanter Feldstärke). Die Elektronen werden vorwiegend durch Gitterschwingungen (Phononen, Abschn. 9.3.1) und an Störungen des Gitters (z. B. Gitterbaufehler, Verunreinigungen, Korngrenzen) gestreut. Die mittlere Beschleunigung beträgt

$$\frac{d\boldsymbol{v}_d}{dt} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m} - \frac{\boldsymbol{v}_d}{\tau} \,. \tag{9.17}$$

Das Glied $-e\boldsymbol{E}/m$ beschreibt die Geschwindigkeitszunahme durch das angelegte elektrische Feld; das Glied $-v_d/\tau$ berücksichtigt die Reibungsvorgänge im Gitter. Dabei geht man wie bei der inneren Reibung laminar strömender Flüssigkeiten davon aus, dass die Reibungskraft proportional zur Strömungsgeschwindigkeit ist. Die Zeitkonstante τ heißt *Relaxationszeit*.
Im zeitlich konstanten Feld (Gleichstromverhalten) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$ ergibt die Integration von (9.17)

$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}_{d,0}(1 - e^{-t/\tau}) \,, \tag{9.18}$$

dargestellt in Abb. 9.37. Im stationären Zustand ($t \to \infty$, $dv_d/dt = 0$) nimmt die Driftgeschwindigkeit den konstanten Wert

$$\boldsymbol{v}_{d,0} = -\frac{e}{m}\tau\,\boldsymbol{E}_0 = -\mu\,\boldsymbol{E}_0 \tag{9.19}$$

an. Die stationäre Driftgeschwindigkeit ist proportional zur Feldstärke $\boldsymbol{E}_0$. Die Proportionalitätskonstante

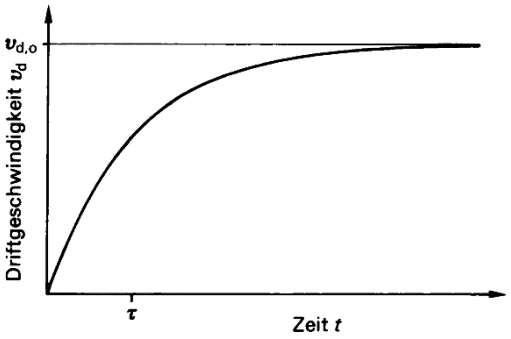


Abb. 9.37 Abhängigkeit der Driftgeschwindigkeit von der Zeit im Fall des Gleichstroms

$$\mu = \frac{e}{m}\tau \tag{9.20}$$

ist die *Beweglichkeit*. Die Driftgeschwindigkeit $v_{d,0}$ hängt mit der elektrischen Stromdichte j zusammen gemäß

$$j = -e\,n\,v_{d,0} \tag{9.21}$$

mit $n = N/V$ als der Konzentration der freien Elektronen. Mit (9.19) resultiert hieraus

$$j = \frac{e^2}{m} n\,\tau\,E_0 = \varkappa E_0 \,. \tag{9.22}$$

Dies ist das *Ohm'sche Gesetz* (Abschn. 4.1.5), das besagt, dass die Stromdichte proportional zur elektrischen Feldstärke ist; die Proportionalitätskonstante $\varkappa$ ist die *elektrische Leitfähigkeit*. Für einen Leiter mit konstantem Querschnitt ergibt sich hieraus die bekannte Form $I = U/R$.

Aus (9.20) und (9.22) folgt die für die Praxis wichtige Verknüpfung zwischen elektrischer Leitfähigkeit $\varkappa$ und Beweglichkeit μ:

$$\varkappa = e\,n\,\mu \,. \tag{9.23}$$

Beispiel

9.2-2 Wie groß ist die Beweglichkeit μ von Kupfer bei Raumtemperatur?

Lösung

Die elektrische Leitfähigkeit von reinem Kupfer ist $\varkappa = 5{,}9 \cdot 10^5\ \Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Die Konzentration der freien Elektronen ist nach Tabelle 9.5 $n \approx 8{,}5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{cm}^{-3}$. Somit ist nach (9.23) die Beweglichkeit

$$\mu = \frac{\varkappa}{e\,n} \approx 43\ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Vs}} \,.$$

Die Relaxationszeit τ kann aus (9.22) bestimmt werden:

$$\tau = \frac{\varkappa\, m}{e^2\, n} \,. \tag{9.24}$$

Da an den Streuprozessen nur die Elektronen teilnehmen, die an der Oberfläche der Fermi-Kugel sitzen, ist deren Geschwindigkeit etwa die Fermi-Geschwindigkeit v_F (9.11). Innerhalb der Relaxationszeit τ legen die Elektronen die *mittlere freie Weglänge* l zurück:

$$l = v_F\,\tau \,. \tag{9.25}$$

Beispiel

9.2-3 Wie groß ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen in Kupfer bei Raumtemperatur?

Lösung

Mit $\varkappa = 5{,}9 \cdot 10^5\ \Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$ und $n \approx 8{,}5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{cm}^{-3}$ ist die Relaxationszeit nach (9.24) $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-14}$ s. Die Fermi-Geschwindigkeit ist nach (9.11) bzw. Tabelle 9.5 $v_F = 1{,}56 \cdot 10^6$ m/s. Demnach beträgt die mittlere freie Weglänge $l = v_F\tau = 3{,}9 \cdot 10^{-8}$ m.

Im Vergleich hierzu ist der Abstand zwischen nächsten Nachbarn im Kupfergitter nach Tabelle 9.1 $2{,}55 \cdot 10^{-10}$ m.

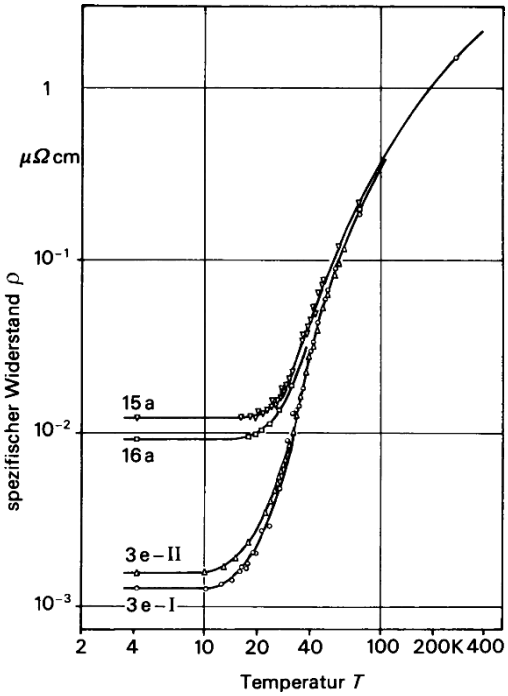


Abb. 9.38 Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands von Kupfer-Einkristallen unterschiedlicher Reinheit (nach Saeger)

Das Beispiel zeigt, dass die Elektronen in Metallen zwischen zwei Zusammenstößen im Mittel einen Weg von etwa hundert Atomabständen zurücklegen.

Mit abnehmender Temperatur steigt i. Allg. die Leitfähigkeit von Metallen, weil die Streuung der Elektronen am schwingenden Gitter zurückgeht. Bei sehr tiefen Temperaturen dominiert die temperaturunabhängige Streuung an Gitterfehlern (Verunreinigungen). Für den spezifischen Widerstand gilt die *Matthiessen'sche Regel* (F. Matthiessen, 1830 bis 1906):

$$\varrho(T) = \varrho_{\mathrm{R}} + \varrho_{\mathrm{G}}(T)\,. \tag{9.26}$$

Hierbei ist ϱ_{R} der temperaturunabhängige *Restwiderstand*, der sich für $T \to 0$ einstellt, und $\varrho_{\mathrm{G}}(T)$ der temperaturabhängige Anteil der Gitterschwingungen. Abbildung 9.38 zeigt den typischen Verlauf des spezifischen Widerstandes in Abhängigkeit von der Temperatur. Ein Maß für die Reinheit einer Substanz ist das *Widerstandsverhältnis*

$$r = \frac{\varrho(4{,}2\ \mathrm{K})}{\varrho(293\ \mathrm{K})}\,,$$

das typischerweise in der Größenordnung von 10^{-3} bis 10^{-6} liegt. Es kann durch Legieren sowie mechanische Verformung stark beeinflusst und bis in die Größenordnung von eins gebracht werden. Der Ohm'sche Widerstand solcher Werkstoffe hängt kaum von der Temperatur ab. Sie sind deshalb zur Herstellung von *Normalwiderständen* geeignet.

Wie eingangs erwähnt, wird beim Modell des freien Elektronengases das Auftreten von Energiebändern mit verbotenen Zonen nicht berücksichtigt. Die Kontur der *Fermi-Fläche* realer Metalle weicht mehr oder weniger von der in Abb. 9.34 dargestellten idealen Kugelgestalt ab. Bei Na und K sind die Abweichungen kleiner als 0,15%, bei anderen Metallen dagegen zum Teil erheblich größer. Abbildung 9.39 zeigt als Beispiel die experimentell bestimmte Fermi-Fläche von Zinn. Ihre Form bestimmt die elektronischen Eigenschaften der Festkörper, da nur diejenigen Elektronen durch äußere Felder beeinflusst werden können, die sich nahe der Fermi-Fläche bewegen.

9.2.3 Halbleiter

Halbleiter haben einen spezifischen elektrischen Widerstand im Bereich $10^{-3}\,\Omega\,\mathrm{cm}$ bis $10^{9}\,\Omega\,\mathrm{cm}$. Die Werte liegen also zwischen denjenigen der Metalle und der Isolatoren (Abb. 9.29). Der spezifische elektrische Widerstand von Halbleitern ist im Unterschied zu Leitern und Isolatoren stark von der Dotierung mit Fremdatomen, der Temperatur sowie dem Lichteinfall abhängig.

Die Elementhalbleiter aus der IV. Gruppe des Periodensystems kristallisieren in der *Dia-*

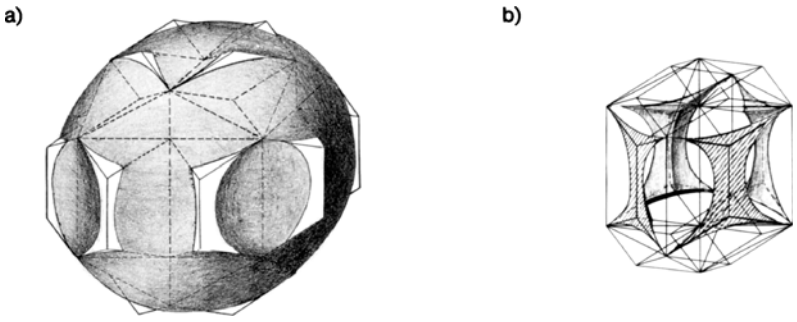


Abb. 9.39 Fermi-Fläche von Zinn (nach Hering und Lück): **a**) Fläche in der dritten Brillouin-Zone des erweiterten Zonenschemas, **b**) reduziertes Zonenschema

mantstruktur, bei der jedes Atom vier nächste Nachbarn hat, die an den Ecken eines regelmäßigen Tetraders angeordnet sind. Weitere Halbleiter mit tetraedrischem Gitter ergeben sich nach H. J. Welker (1912 bis 1981), indem Verbindungen zwischen Elementen aus verschiedenen Gruppen des Periodensystems hergestellt werden, sodass die mittlere Anzahl der Valenzelektronen (vier) erhalten bleibt (Tabelle 9.6). Von besonderer Bedeutung für die Optoelektronik sind *Mischkristalle* auf der Basis der III-V-Halbleiter, bei denen die Breite der verbotenen Zone in bestimmten Grenzen beliebig einstellbar ist. Beispiele hierfür sind

- ternäre Mischkristalle $Ga_xAl_{1-x}As$ und
- quaternäre Mischkristalle $In_xGa_{1-x}As_yP_{1-y}$.

9.2.3.1 Eigenleitung

Die *Elementhalbleiter* der IV. Gruppe haben jeweils vier Valenzelektronen, die mit Elektronen der Nachbaratome Elektronenpaarbindungen eingehen. Am absoluten Nullpunkt ist keine elektrische Leitung möglich, da keine freien Ladungsträger zur Verfügung stehen. Im Bänderschema von Abb. 9.29 ist das oberste Valenzband vollständig besetzt, das darüberliegende Leitungsband ist leer.

Durch Energiezufuhr, z. B. durch Temperaturerhöhung oder Lichteinfall, können einzelne Bindungen gelöst werden. Dies hat zur Folge, dass freie Elektronen im Kristall zur Verfügung stehen. Im Bändermodell von Abb. 9.40 entspricht diesem Vorgang das Anheben von Elektronen aus dem Valenzband (VB) ins Leitungsband (LB). Die fehlenden Elektronen im Valenzband werden *Defektelektronen* oder *Löcher* genannt. Sie verhalten sich im See der negativen Elektronen wie *positive Teilchen*. Da freie Elektronen und Löcher immer nur paarweise erzeugt werden können, gilt für die Dichten der Elektronen n und der Löcher p

$$n = p \,. \tag{9.27}$$

Wird an den Kristall eine Spannung angelegt, dann fließen die freien Elektronen zur Anode. Gebundene Elektronen in der Nachbarschaft von Löchern können durch Platzwechsel in ein Loch springen (*hopping-conductivity*); hierbei

Tabelle 9.6 Halbleitende Verbindungen

Gruppen des Periodensystems zur Kombination der Elemente	Beispiele
IV	Si, Ge, Sn (grau)
IV–IV	SiC
III–V	GaAs, InSb
II–VI	ZnTe, CdSe, HgS

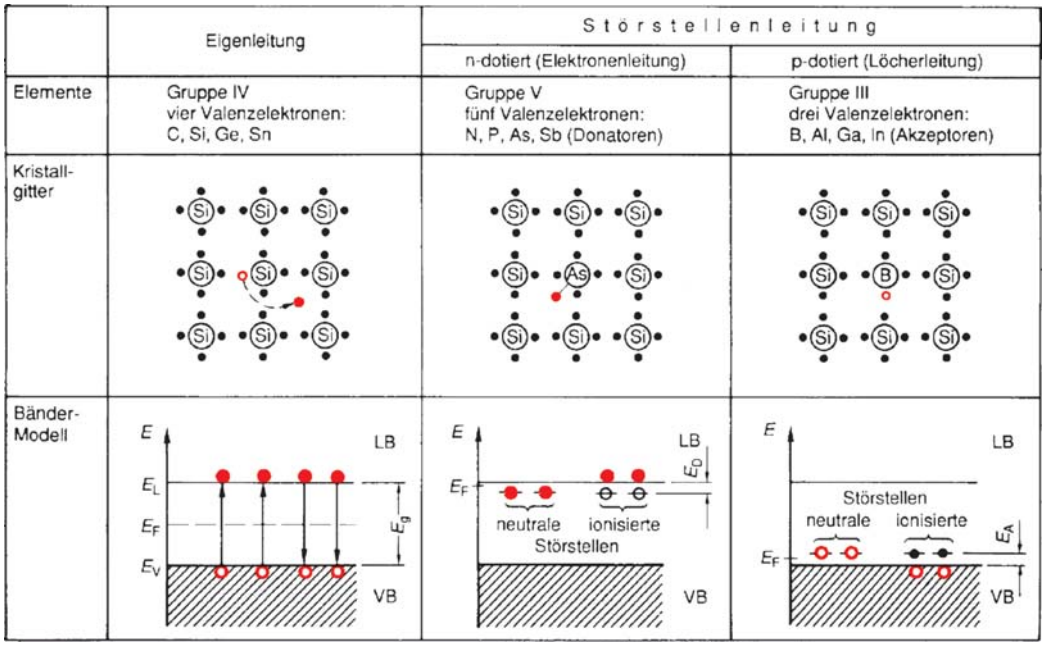


Abb. 9.40 Leitungsmechanismen in Halbleitern

wandert das Loch in Richtung Kathode. Der Gesamtstrom in einem Halbleiter lässt sich daher als Summe aus einem Elektronenstrom und einem Löcherstrom bilden. Für die elektrische Leitfähigkeit eines Halbleiters gilt in Erweiterung von (9.23)

$$\varkappa = e\,(n\,\mu_\mathrm{n} + p\,\mu_\mathrm{p})\,. \tag{9.28}$$

Die Beweglichkeiten von Elektronen μ_n und Löchern μ_p technisch wichtiger Halbleiter sind in Tabelle 9.7 angegeben. Sie zeigen bei reinen Halbleitern eine geringe Temperaturabhängigkeit:

$$\mu(T) = \mu_0 (T/T_0)^{-3/2}\,. \tag{9.29}$$

Die Berechnung der Ladungsträgerdichten n und p geschieht mit Hilfe der Fermi-Dirac-Statistik (Abschn. 9.2.2).

Abbildung 9.41 zeigt die Zustandsdichte im Leitungs- und Valenzband, die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion und die Dichte der Ladungsträger, die sich als Produkt aus Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlich-

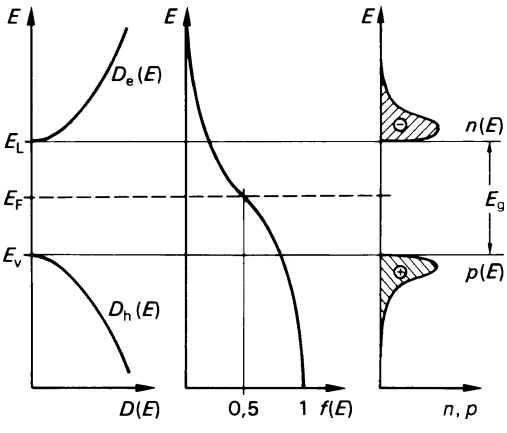


Abb. 9.41 Zustandsdichte $D(E)$, Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ und Trägerdichte $n(E)$ sowie $p(E)$ eines reinen Halbleiters

Tabelle 9.7 Eigenschaften der Halbleiter Ge, Si und GaAs. (Die Zahlenwerte gelten für $T = 300$ K)

Kristallstruktur	Ge Diamant	Si Diamant	GaAs Zinkblende
Gitterkonstante a in 10^{-10} m	5,65771	5,43043	5,65325
linearer Ausdehnungskoeffizient α in 10^{-6} K^{-1}	5,90	2,56	6,86
spezifische Wärmekapazität c in kJ/(kg K)	0,31	0,70	0,35
Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m K)	64	145	46
Schmelzpunkt ϑ_s in °C	937	1 415	1 238
Atomdichte N/V in 10^{22} cm^{-3}	4,42	5,0	4,42
Dichte ϱ in kg/m^3	5 326,7	2 328	5 320
Molmasse M in g/mol	72,60	28,09	144,63
Bandgap E_g in eV	0,660	1,11	1,43
intrinsische Trägerdichte n_i in cm^{-3}	$2{,}33 \cdot 10^{13}$	$1{,}02 \cdot 10^{10}$	$2{,}00 \cdot 10^{6}$
Effektive Zustandsdichte			
im Leitungsband N_L in cm^{-3}	$1{,}24 \cdot 10^{19}$	$2{,}85 \cdot 10^{19}$	$4{,}55 \cdot 10^{17}$
im Valenzband N_V in cm^{-3}	$5{,}35 \cdot 10^{18}$	$1{,}62 \cdot 10^{19}$	$9{,}32 \cdot 10^{18}$
relative Dielektrizitätszahl	16	11,8	12,9
Beweglichkeit μ_n in cm^2/(V s)	3 900	1 350	8 500
μ_p in cm^2/(V s)	1 900	480	435

keit ergibt:

$$n(E) = D_e(E) f(E) ,$$
$$p(E) = D_h(E)(1 - f(E)) .$$

Das Fermi-Niveau liegt bei tiefen Temperaturen etwa in der Mitte der verbotenen Zone. Für die Dichte der Elektronen im Leitungsband gilt

$$n = \int_{E_L}^{\infty} D_e(E) f(E) \, dE .$$

Die Zustandsdichte $D_e(E)$ wird nach (9.12) berechnet; hierbei muss aber anstatt der Masse des freien Elektrons eine *effektive Zustandsdichtemasse* m_d eingesetzt werden. Die Fermi-Dirac-Funktion nach (9.13) beträgt für $E - E_F \gg kT$

$$f(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}} .$$

Damit lässt sich obiges Integral geschlossen lösen:

$$n(T) = N_L e^{-\frac{E_L - F_F}{kT}} .$$

Die Größe

$$N_L = 2 \left(\frac{2\pi m_d kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

ist die *effektive Zustandsdichte* im Leitungsband. Sie ist in Tabelle 9.7 angegeben. Die gleiche Rechnung ergibt für die Löcherdichte im Valenzband

$$p(T) = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

mit N_V als der effektiven Zustandsdichte des Valenzbandes.
Die Dichte der freien Elektronen und Löcher in reinen Halbleitern wird auch als *intrinsische*

Trägerdichte n_i bezeichnet. Es gilt $n_i = n = p$ und mit obigen Beziehungen

$$n_i(T) = \sqrt{N_L N_V}\, e^{-\frac{E_g}{2kT}} = n_{i0}\, T^{3/2}\, e^{-\frac{E_g}{2kT}} . \tag{9.30}$$

Die mit Hilfe von (9.30) bestimmten Trägerdichten sind für die Halbleiter Ge, Si und GaAs in Tabelle 9.7 zusammengestellt. Aus diesen Daten folgt für den temperaturunabhängigen Faktor n_{i0} in (9.30) für

- Germanium $n_{i0} = 1{,}57 \cdot 10^{15}\ \mathrm{cm^{-3}\,K^{-3/2}}$,
- Silicium $n_{i0} = 4{,}14 \cdot 10^{15}\ \mathrm{cm^{-3}\,K^{-3/2}}$,
- Galliumarsenid $n_{i0} = 3{,}95 \cdot 10^{15}\ \mathrm{cm^{-3}\,K^{-3/2}}$.

Das Produkt von freier Elektronen- und Löcherdichte ist bei gegebener Temperatur eine Konstante, unabhängig von der Dotierung. Es gilt

$$n\,p = n_i^2(T) = n_{i0}^2\, T^3\, e^{-\frac{E_g}{kT}} . \tag{9.31}$$

Beispiel

9.2-4 Wie groß ist der spezifische Widerstand von reinem Germanium bei $T_1 = 300$ K und $T_2 = 200$ K?

Lösung

Nach (9.28) gilt

$$\varrho = \frac{1}{e\, n_i(\mu_n + \mu_p)} .$$

Bei $T_1 = 300$ K ist nach Tabelle 9.7 $n_i = 2{,}33 \cdot 10^{13}\ \mathrm{cm^{-3}}$ und $\mu_n + \mu_p = 5\,800\ \mathrm{cm^2/(V\,s)}$. Damit ergibt sich $\varrho(300\ \mathrm{K}) = 46\ \Omega\,\mathrm{cm}$.
Bei $T_2 = 200$ K ist die Trägerdichte

$$n_i(T_2) = n_{i0} T_2^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT_2}} = 2{,}15 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm^{-3}}$$

und die Beweglichkeit nach (9.29)

$$\mu(T_2) = \mu(T_1)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-3/2} = 10\,655\ \mathrm{cm^2/(V\,s)} .$$

Somit beträgt der spezifische Widerstand $\varrho(200\ \mathrm{K}) = 2{,}72 \cdot 10^4\ \Omega\,\mathrm{cm}$.

Bei dieser Rechnung wurde vereinfachend vorausgesetzt, dass die Breite der verbotenen Zone konstant ist. Tatsächlich hängt E_g von der Temperatur ab.
Die große Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Halbleitern liegt in der exponentiellen Abhängigkeit der Trägerdichte von der Temperatur begründet. Mit Hilfe von (9.28) bis (9.30) folgt

$$R(T) \approx R_0\, e^{\frac{E_g}{2kT}} . \tag{9.32}$$

Der Widerstand steigt mit abnehmender Temperatur an. Aus diesem Grund sind Halbleiterwiderstände besonders gut geeignet als *Temperatursensoren* zur Messung tiefer Temperaturen (NTC-Widerstand, Abb. 4.6).

9.2.3.2 Störstellenleitung

Der spezifische Widerstand von Halbleitern kann erheblich verändert werden durch den Einbau von *Fremdatomen*. Wird beispielsweise Silicium mit Atomen aus der V. Gruppe des Periodensystems *dotiert*, dann bringt nach Abb. 9.40 jedes Störatom ein Elektron mit, das keine Bindung mit nächsten Nachbarn eingeht und durch geringe Energiezufuhr von seinem Atom abgetrennt werden kann. Im Bänderschema sind diese Elektronen energetisch dicht unter der Leitungsbandkante angesiedelt. Die Ionisierungsenergien E_D einiger *Donatoren* (*Elektronenspender*) sind in Tabelle 9.8 für die Halbleiter Silicium und Germanium zusammengestellt. Aus den Zahlenwerten ist ersichtlich, dass bereits bei Raumtemperatur praktisch alle Störstellen ionisiert sind. In diesem Fall beruht die elektrische Leitung vorwiegend auf dem Transport der nega-

Tabelle 9.8 Ionisationsenergie E_D von Donatoren und E_A von Akzeptoren in Silicium und Germanium

Störstelle	Ionisierungsenergie E_D bzw. E_A in meV	
	Silicium	Germanium
Donatoren		
P	44	12,76
As	49	14,04
Sb	39	10,19
Akzeptoren		
B	45	10,4
Al	57	10,2
Ga	65	10,8
In	160	11

tiven Elektronen (*Majoritätsträger*). Der Halbleiter wird deshalb als *n-leitend* oder als *n-Typ* bezeichnet.

Dotiert man mit Elementen aus der III. Gruppe, so fehlt an jedem Störatom ein Elektron zur Bindung. Bereits durch geringe Energiezufuhr kann dieses lokalisierte Loch von einem Elektron eines Nachbaratoms ausgefüllt werden. Dadurch wandert das Loch ins Valenzband und kann als freies Loch am Ladungstransport teilnehmen. Die elektrische Leitung beruht also vorwiegend auf der Wanderung der positiven Löcher, man spricht deshalb von *p-Leitung* und von *p-Typ*-Halbleitern. Da die Störstellen aus der III. Gruppe Elektronen aus dem Valenzband aufnehmen, werden sie als *Akzeptoren* bezeichnet. Die Ionisationsenergie E_A der wichtigsten Akzeptoren sind in Tabelle 9.8 zusammengestellt.

Am absoluten Nullpunkt sind alle Störstellen neutral. Der spezifische Widerstand des Halbleiters ist wie bei der Eigenleitung unendlich groß. Mit steigender Temperatur werden die Störstellen ionisiert, und die Dichte der freien Ladungsträger nimmt rasch zu. Solange erst ein Teil der Störstellen ionisiert ist, spricht man von *Störstellenreserve*. Die Trägerdichte wird wie bei der Eigenleitung mit Hilfe der Fermi-Dirac-Statistik berechnet. Abbildung 9.42 zeigt die Verteilungsfunktion der Elektronen bei tiefen Temperaturen. Die Fermi-Energie E_F liegt dabei in der Mitte zwischen den Störstellenniveaus und den benachbarten Bandkanten.

Ist bei n-Dotierung die Konzentration der Donatoratome n_D, dann ergibt sich für die Konzentration der freien Elektronen

$$n(T) = \sqrt{\frac{n_D N_L}{2}}\, e^{-\frac{E_D}{2kT}} . \qquad (9.33)$$

Der Ausdruck ist analog zu (9.30) für die Eigenleitung. E_D spielt in diesem Fall die Rolle der Bandlücke (Bandgap). Bei p-Typ-Halbleitern gilt entsprechend mit der Akzeptoren-Konzentration n_A

$$p(T) = \sqrt{\frac{n_A N_V}{2}}\, e^{-\frac{E_A}{2kT}} . \qquad (9.34)$$

Abbildung 9.43 zeigt den Verlauf der Trägerdichte bei n-Typ-Silicium in Abhängigkeit von der Temperatur. Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte der freien Ladungs-

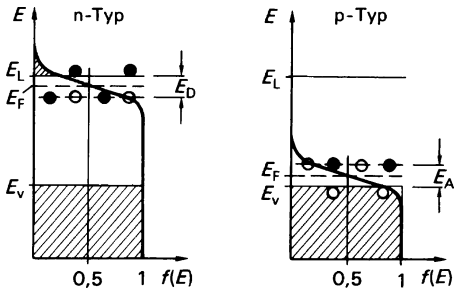


Abb. 9.42 Fermi-Dirac-Verteilung in n- und p-Halbleitern bei tiefen Temperaturen. Die schraffierten Gebiete entsprechen den besetzten Elektronenzuständen

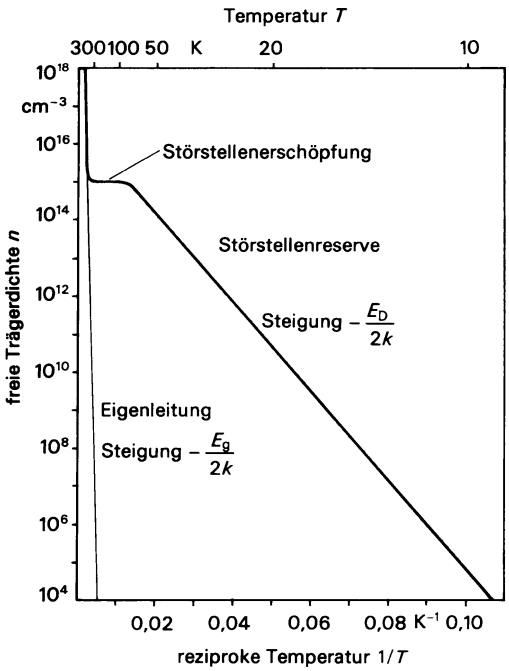


Abb. 9.43 Ladungsträgerdichte in n-Typ-Silicium in Abhängigkeit von der Temperatur. Dotierung: Phosphor, $n_D = 10^{15}$ cm^{-3}

träger rasch zu und geht schließlich in ein waagrechtes Plateau über, wenn im Zustand der *Störstellenerschöpfung* alle Störstellen ionisiert sind. Ein weiterer Temperaturanstieg verursacht eine erneute Zunahme der Trägerdichte, wenn die Eigenleitungsdichte $n_i(T)$ größer wird als die Störstellenkonzentration. Im Bereich der Störstellenerschöpfung gilt bei n-Dotierung

$$n = \frac{n_D}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_D}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

und bei p-Dotierung

$$p = \frac{n_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_A}{2}\right)^2 + n_i^2}\,.$$

Bereits bei mäßiger Dotierung gilt i. Allg. $n_D \gg n_i$ oder $n_A \gg n_i$. Demnach ist die

Tabelle 9.9 Halbleitereigenschaften im Zustand der Störstellenerschöpfung (bei Raumtemperatur; $n_D \gg n_i$ bzw. $n_A \gg n_i$)

	n-Typ	p-Typ
Majoritätsträgerdichte	$n = n_D$	$p = n_A$
Minoritätsträgerdichte	$p = n_i^2/n_D$	$n = n_i^2/n_A$
elektrische Leitfähigkeit	$\varkappa = e\,\mu_n\,n_D$	$\varkappa = e\,\mu_p\,n_A$

Majoritätsträgerdichte n bzw. p gleich der *Dotierungs-Konzentration*. Die Minoritätsträgerdichte folgt unmittelbar aus (9.31). Tabelle 9.9 gibt die Beziehungen für n, p und $\varkappa$ wieder. Die Beweglichkeit nimmt mit steigender Dotierung etwas ab und wird temperaturunabhänig.

9.2.3.3 pn-Übergang

Das Grundelement der meisten Halbleiterbauelemente ist der *pn-Übergang*, in dem nach Abb. 9.44a p- und n-leitendes Material aneinanderstoßen. Abbildung 9.44b zeigt den Dotierungsverlauf eines *unsymmetrischen abrupten* pn-Übergangs in Silicium mit der Akzeptorkonzentration $n_A = 1 \cdot 10^{16}$ cm^{-3} im p-Gebiet und der Donatorkonzentration $n_D = 2 \cdot 10^{16}$ cm^{-3} im n-Gebiet. Die Ladungsträgerkonzentrationen sind in Abb. 9.44c dargestellt. Weit weg vom Übergang sind die Majoritätsdichten identisch mit den Störstellenkonzentrationen. Die Minoritätsdichten sind nach (9.31) berechnet. Infolge des großen Konzentrationsunterschieds *diffundieren* Elektronen aus dem n- ins p-Gebiet und Löcher vom p- ins n-Gebiet. Die Übergangszone verarmt an beweglichen Ladungsträgern. Die minimale Ladungsträgerkonzentration in Silicium ist $(n + p)_{min} = 2n_i = 2{,}04 \cdot 10^{10}$ cm^{-3}.
Durch den Abzug der Löcher aus dem p-Gebiet entsteht an dessen Rand durch die *ionisierten*

Akzeptoren, die nicht mehr durch die entsprechende Anzahl von Löchern kompensiert werden, eine *negative Raumladungszone*. Ebenso entsteht im n-Gebiet durch die *positiven Donatorrümpfe* eine *positive Raumladungszone*. Abbildung 9.44d zeigt den Verlauf der Raumladungsdichte ϱ. Aufgrund der Ladungsneutralität gilt für die Breiten d_n und d_p

$$d_n n_D = d_p n_A \,. \tag{9.35}$$

Wegen der positiven und negativen Raumladungszone entstehen ähnlich wie beim Plattenkondensator ein Potentialgefälle und ein elektrisches Feld zwischen dem n- und p-Gebiet. Abbildung 9.44e zeigt den Potentialverlauf, der mit Hilfe der *Poisson-Gleichung* berechnet werden kann und parabolisch vom Ort abhängt. Die Potentialdifferenz U_d zwischen n- und p-Gebiet wird *Diffusionsspannung* genannt, weil sie infolge der Diffusion der beweglichen Ladungsträger entsteht. Abbildung 9.44f zeigt den Verlauf der elektrischen Feldstärke, die dem Gradienten des Potentials φ entspricht (Abschn. 4.3.4: $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi$ (4.103)).

Der Betrag der Diffusionsspannung kann aus thermodynamischen Überlegungen berechnet werden. Nach Abschn. 3.2.3 ist das Verhältnis der Elektronendichte im p-Gebiet zu der im n-Gebiet gegeben durch den *Boltzmann-Faktor* (Boltzmann-Näherung der Fermi-Dirac-Verteilung)

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{n_i^2}{n_A n_D} = e^{-eU_d/(kT)} \,.$$

Daraus folgt für die Diffusionsspannung

$$U_d = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_A\, n_D}{n_i^2} \,. \tag{9.36}$$

Die Größe $kT/e = U_T$ wird oft als *Temperaturspannung* bezeichnet. Bei Raumtemperatur (300 K) beträgt sie $U_T = 25{,}9\,\text{mV}$. Eine ge-

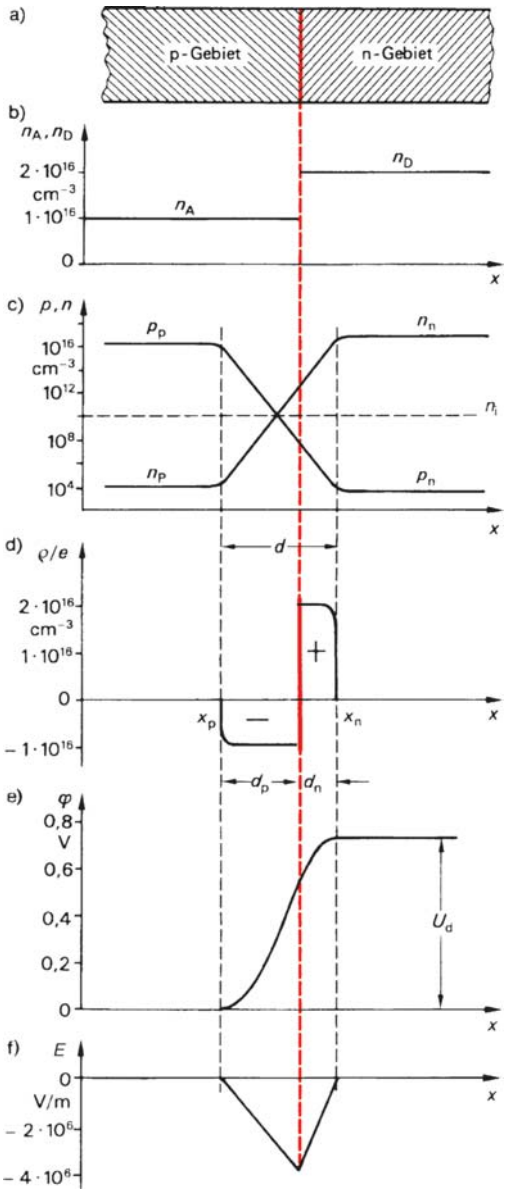


Abb. 9.44 pn-Übergang: **a)** p- und n-leitendes Silicium in Kontakt, **b)** Störstellenkonzentration, **c)** Dichteverlauf der beweglichen Ladungsträger, **d)** Raumladungsgebiete, **e)** Potentialverlauf (U_d Diffusionsspannung), **f)** elektrische Feldstärke

naue Analyse des Potentialverlaufs ergibt für die Breite der Raumladungszone

$$d = d_\mathrm{n} + d_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\,U_\mathrm{d}}{e} \cdot \frac{n_\mathrm{A} + n_\mathrm{D}}{n_\mathrm{A} n_\mathrm{D}}}\ . \tag{9.37}$$

Beispiel

9.2-5 Für einen pn-Übergang in Silicium mit $n_\mathrm{D} = 2 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und $n_\mathrm{A} = 1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$ sollen die Diffusionsspannung U_d und die Breite der Raumladungszone berechnet werden.

Lösung

Nach (9.36) ist

$$U_\mathrm{d} = 25{,}9\ \mathrm{mV} \cdot \ln \frac{2 \cdot 10^{32}\ \mathrm{cm}^{-6}}{1{,}04 \cdot 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-6}} = 0{,}73\ \mathrm{V}\ .$$

Die Breite der Raumladungszone ist nach (9.37) mit $\varepsilon_\mathrm{r} = 11{,}8$ $d = 0{,}38\ \mu\mathrm{m}$. Auf die beiden Teilgebiete entfallen nach (9.35) $d_\mathrm{p} = 0{,}25\ \mu\mathrm{m}$ und $d_\mathrm{n} = 0{,}13\ \mu\mathrm{m}$.

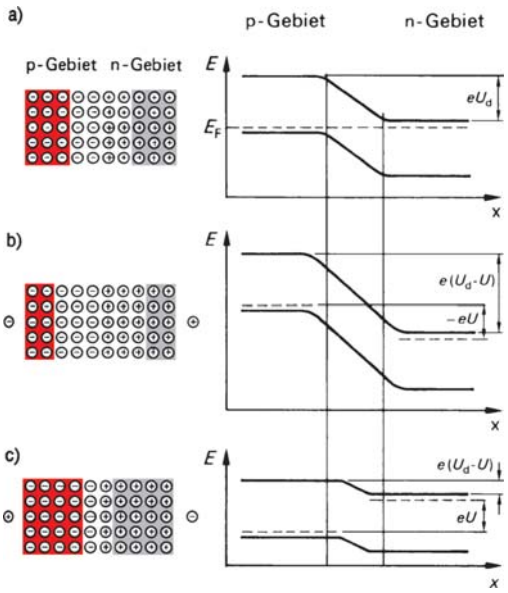


Abb. 9.45 Verteilung der Ladungsträger und Bändermodell beim pn-Übergang **a**) ohne äußere Spannung, **b**) Spannung in Sperrrichtung ($U < 0$) und **c**) Spannung in Flussrichtung ($U > 0$)

Abbildung 9.45a zeigt links anschaulich die Verteilung der Ladungsträger in einem pn-Übergang. Die Kreise stellen die ortsfesten ionisierten Akzeptoren und Donatoren dar. Der graue Bereich symbolisiert das Gebiet der beweglichen Elektronen, der rote das der Löcher. Die Bänderdarstellung rechts zeichnet sich dadurch aus, dass im thermodynamischen Gleichgewicht ohne äußere Spannung das *Fermi-Niveau* in allen Bereichen auf gleicher Höhe liegt. Die Bandkanten verschieben sich zwischen dem n- und p-Gebiet um den Energiebetrag eU_d.

Legt man nach Abb. 9.45b eine *Sperrspannung* an ($U < 0$), dann werden die beweglichen Elektronen zum Pluspol und die Löcher zum Minuspol gezogen. Dadurch verbreitert sich die Raumladungszone (in (9.37) wird U_d ersetzt durch $U_\mathrm{d} + |U|$). Es fließt nur noch ein geringer *Sperrstrom*, der darauf beruht, dass Minoritäten an den Übergang diffundieren und dort von dem starken elektrischen Feld auf die andere Seite befördert werden. Bei großen Sperrspannungen sättigt der Strom und geht in den *Sperrsättigungsstrom* I_S über.

Abbildung 9.45c zeigt die Verhältnisse im pn-Übergang unter der Wirkung einer Spannung in *Flussrichtung* ($U > 0$). Die angelegte Spannung baut die Diffusionsspannung ab, sodass die Bandverbiegung kleiner wird. Die Breite der Raumladungszone wird verringert (in (9.37) wird U_d ersetzt durch $U_\mathrm{d} - U$); die beweglichen Ladungsträger reichern sich in der Verarmungszone an und dringen ins benachbarte Gebiet ein, wo sie mit den dortigen Majoritäten rekombinieren. Der fließende Strom nimmt mit wachsender Spannung stark zu. Nach W. Shockley (1910 bis 1989) gilt für die Abhängigkeit des Stroms von der Spannung

$$I = I_\mathrm{S}\left(\mathrm{e}^{eU/(kT)} - 1\right)\ . \tag{9.38}$$

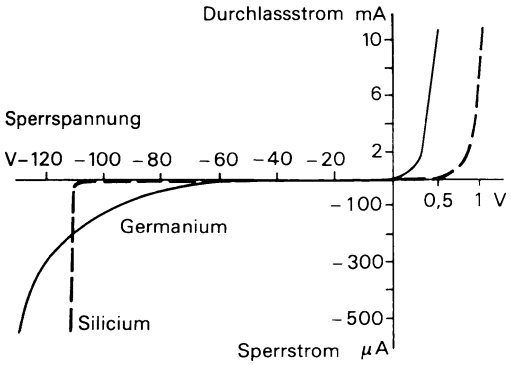


Abb. 9.46 Diodenkennlinien von Silicium und Germanium

Abbildung 9.46 zeigt typische Kennlinien für Ge- und Si-Dioden. Der Sperrsättigungsstrom I_S ist bei Raumtemperatur in der Größenordnung von 1 nA für Si und 1 μA für Ge. Er ist sehr stark temperaturabhängig gemäß

$$I_S \sim e^{-E_g/(kT)} .$$

In Sperrrichtung kann es zu einem *Durchbruch* kommen. Dies beruht zum einen auf dem *Zener-Effekt* (C. M. Zener, 1905 bis 1993). Hierbei werden nach Abb. 9.47a infolge der großen Feldstärke im Innern des Übergangs Elektronen aus dem Valenzband des p-Materials waagrecht über die verbotene Zone ins Leitungsband des n-Materials gezogen (*tunneln*). Der Zener-Effekt tritt bevorzugt bei stark dotierten Dioden auf und kann dort schon bei wenigen Volt Sperrspannung einsetzen. Der zweite Mechanismus, der zum Durchbruch führt, ist in Abb. 9.47b angedeutet. Ein Elektron bewegt sich bei großer elektrischer Feldstärke so schnell, dass es bei einem Zusammenstoß mit dem Gitter einen Teil seiner Energie abgeben und ein neues freies Elektron-Loch-Paar erzeugen kann. Diese Ladungsträger werden in gleicher Weise beschleunigt und können ihrerseits neue freie Paare schaffen, sodass der Strom *lawinenartig* anwächst.

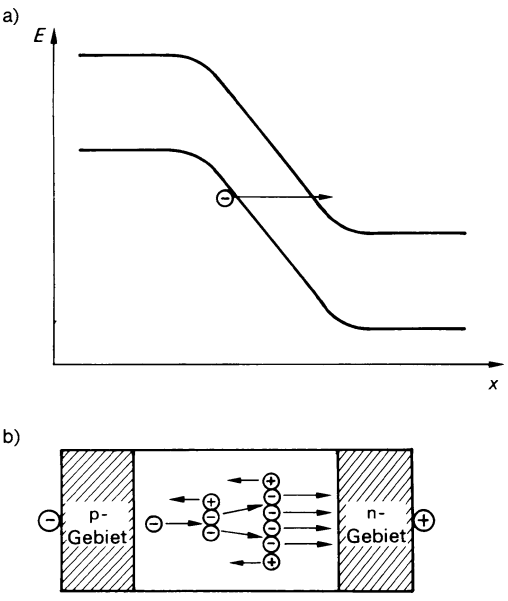


Abb. 9.47 Durchbruch des pn-Übergangs: **a**) Zener-Effekt, **b**) Lawinenmultiplikation

Beide Effekte weisen eine gegenläufige Temperaturabhängigkeit der Durchbruchspannung U_Z (Z-Spannung) auf. Bei Si-Dioden mit U_Z = 5,6 V lässt sich die beste Temperaturkonstanz der Durchbruchspannung erzielen. In Abb. 9.48 sind die in der Technik wichtigsten Diodentypen (Aufbau, Kennlinien, Funktionsweise und Anwendungen) zusammengestellt.

9.2.3.4 Transistor

Transistoren gehören zu den wichtigsten elektronischen Bauelementen. Sie werden zum Verstärken und Schalten elektrischer Signale verwendet. Man unterscheidet *bipolare* und *unipolare* Transistoren. Letztere werden auch *Feldeffekttransistoren* genannt, die wiederum in *Sperrschicht-* bzw. *MOS-Feldeffekttransistoren* unterteilt werden. Eine Übersicht über den Aufbau, die Kennlinien und die Anwendungsbereiche vermittelt Abb. 9.49.

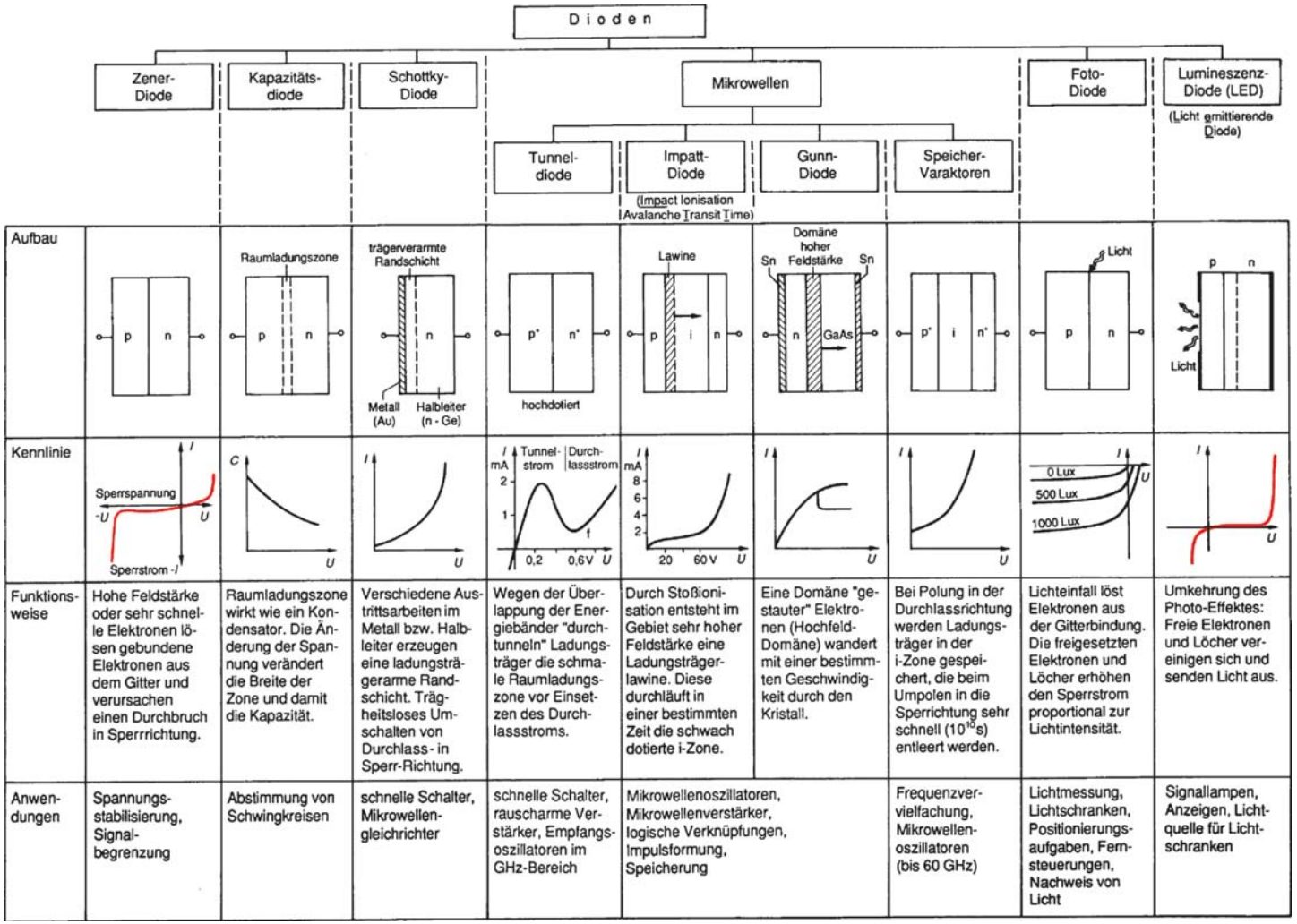


Abb. 9.48 Eigenschaften der wichtigsten Dioden

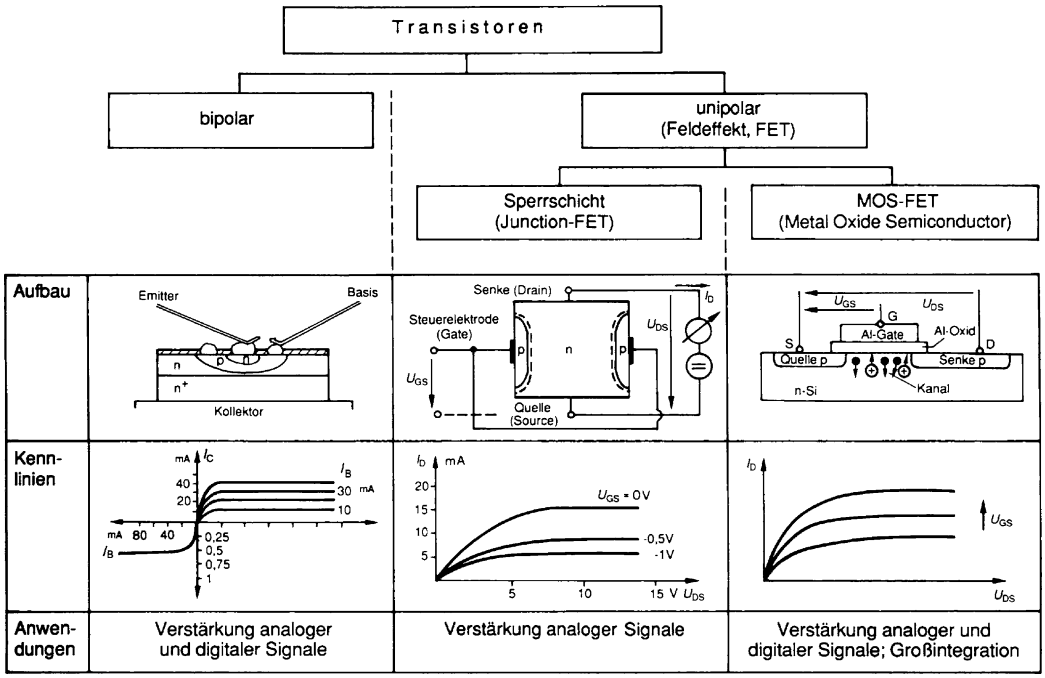


Abb. 9.49 Aufbau und Eigenschaften von Transistoren

Der bipolare Transistor arbeitet im Unterschied zum Feldeffekttransistor mit Ladungsträgern beider Polaritäten (Elektronen und Löcher). Er besteht aus zwei hintereinander geschalteten pn-Übergängen. Je nach Dotierung werden npn- und pnp-Transistoren unterschieden. Abbildung 9.50a zeigt die *Schaltzeichen* der Transistoren, Abb. 9.50b die drei Zonen unterschiedlicher Dotierung, Abb. 9.50c die Wirkungsweise eines npn-Transistors und Abb. 9.50d die *Basis-Schaltung* eines npn-Transistors. Die Beschaltung des pnp-Transistors ist im Prinzip gleich, lediglich die Polaritäten sind vertauscht. Für den bipolaren Transistor sind je nach Zuordnung von *Basis, Emitter* und *Kollektor* zum Eingang oder zum Ausgang drei Schaltungsarten möglich. Der Schaltungstyp trägt den Namen des Transistorteils, der sowohl am Eingang als auch am Ausgang liegt. Aus diesem Grund unterscheidet man zwischen *Basis-, Emitter-* und *Kollektorschaltung*.

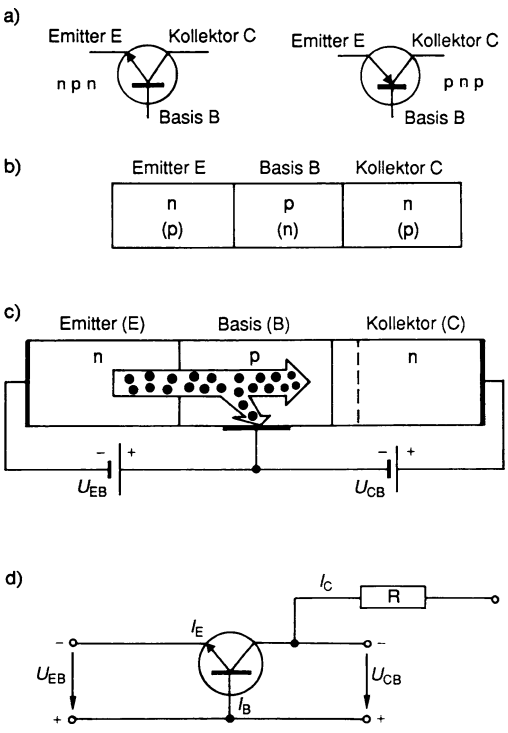


Abb. 9.50 Wirkungsweise des Transistors

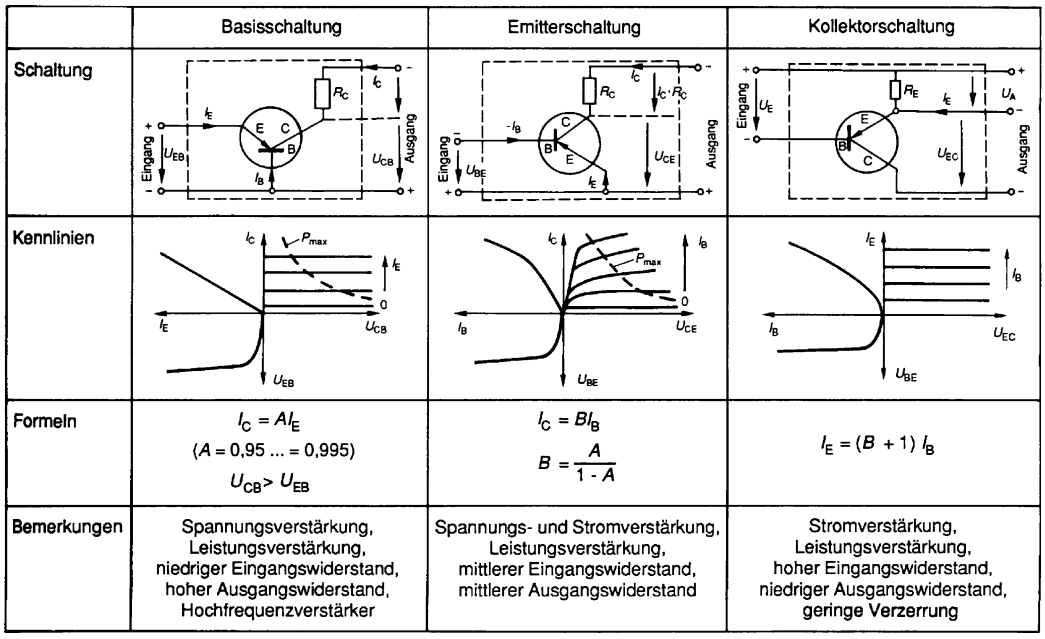


Abb. 9.51 Grundschaltungen und Kennlinien von Transistoren

Bei der Basisschaltung (Abb. 9.50c und d) wird an den *Emitter-Basis-Übergang* eine Spannung U_{EB} (kleiner 1 V) in Durchlassrichtung gelegt, am *Basis-Kollektor-Übergang* liegt die Sperrspannung U_{CB}. Die Elektronen fließen vom Emitter zur Basis. Dort teilt sich der Strom in einen geringen *Basisstrom* I_B und einen hohen *Kollektorstrom* I_C auf. Die Basiszone ist sehr dünn, sodass der Kollektorstrom beinahe so groß ist wie der Emitterstrom. Der *Stromverstärkungsfaktor*

$$A = \left| \frac{I_C}{I_E} \right| \tag{9.39}$$

der Basisschaltung ist annähernd eins, genauer 0,95 bis 0,995. Der Verstärkungseffekt beruht darauf, dass praktisch derselbe Strom am Eingang bei einem niedrigen Eingangswiderstand (Durchlassrichtung) eine kleine Spannung U_{EB} am Ausgang wegen des hohen Ausgangswiderstands (Sperrrichtung) eine große Spannung U_{CB} hervorruft. Der Transistor dient in diesem Fall zur *Spannungsverstärkung* (100- bis 1000-fach) und zur *Leistungsverstärkung* (20 dB bis 30 dB). Die *Transistorkennlinien* in Abb. 9.51 zeigen für die Basisschaltung die Kollektorstromstärke I_C in Abhängigkeit von der Kollektor-Basis-Spannung U_{CB} für unterschiedliche Emitterströme I_E. Der Verstärkungseffekt wird daraus ersichtlich.

Abbildung 9.51 zeigt auch die Kennlinien, gleichungsmäßigen Zusammenhänge und Anwendungsgebiete der anderen Transistorschaltungen. Die Kennlinien beschreiben die Abhängigkeiten der wichtigsten Kenngrößen eines Transistors. Sie werden meist in vier Quadranten dargestellt. Der erste Quadrant beschreibt die Ausgangskennlinie ($-U_{CB}$ für die Basis-, $-U_{CE}$ für die Emitter- und $-U_{EC}$ für die Kollektorschaltung). Der zweite Quadrant zeigt den Verlauf der Stromverstärkungskennlinie und der dritte Quadrant die Eingangskennlinien. Im vierten

Quadranten kann der Verlauf der Spannungs-Rückwirkungskennlinien dargestellt werden. Da diese jedoch aus den Kurven der übrigen Kennlinien ermittelt werden können, werden sie meist nicht gesondert aufgeführt.

Am häufigsten wird die *Emitterschaltung* eingesetzt. Die Stromverstärkung in der Emitterschaltung ist das Verhältnis von Kollektorstrom zu Basisstrom: $B = |I_C/I_B|$. Mit $I_B = I_E - I_C$ und (9.42) folgt

$$B = \frac{A}{1-A} \,. \tag{9.40}$$

Für die genannten A-Werte von 0,95 bis 0,995 ergeben sich B-Werte von 20 bis 200. Die Emitterschaltung liefert also sowohl eine Spannungs- als auch eine Stromverstärkung und damit auch eine Leistungsverstärkung. Sie ist also eine universell einsetzbare Schaltung zum Verstärken von Spannungen, Strömen und Leistungen.

Die *Kollektorschaltung* hat einen hohen Ein- und einen niedrigen Ausgangswiderstand. Sie wird vor allem als *Impedanzwandlerstufe* sowie in Gegentaktendstufen eingesetzt. Sie erzeugt keine Spannungsverstärkung, jedoch eine Stromverstärkung wie die Emitterschaltung.

Im Unterschied zum bipolaren Transistor sind beim *Feldeffekt-Transistor* (FET) nur Ladungsträger einer Sorte, also Elektronen oder Löcher, beteiligt. Beim *Sperrschicht-FET* (Abb. 9.49) liegt an einem n-leitenden Bereich eine Gleichspannung, sodass die Elektronen von der *Quelle* (*source*) zur *Senke* (*drain*) fließen. Die Breite des Kanals wird von zwei seitlichen p-Zonen und der anliegenden sperrenden *Steuerspannung* (*Gate-Spannung*) gesteuert. Wird die Steuerspannung erhöht, dann werden die Raumladungszonen, gekennzeichnet durch gestrichelte Linien in Abb. 9.49, breiter und verengen die Strombahn. Dies bedeutet, dass die Spannung am Gate durch die Änderung des elektrischen Feldes im pn-Übergang die Stromstärke zwischen Source und Drain steuert.

Ein besonders wichtiger Transistor ist der *MOS-FET* (metal oxide semiconductor-FET). Die Steuerspannung beeinflusst die Leitfähigkeit einer dünnen Oberflächenschicht im Halbleiterkristall (Abb. 9.49). Beim Anreicherungstyp fließt ohne Steuerspannung kein Strom zwischen Quelle und Senke. Eine negative Steuerspannung verdrängt die Elektronen in das Kristallinnere, sodass eine oberflächennahe schmale p-leitende Schicht entsteht. Je nach Anwendungsfall gibt es *p-MOS* oder *n-MOS*-Feldeffekttransistoren mit einem Aluminium- bzw. Silicium-Gate. In der *C MOS*-Technik (komplementäre MOS-

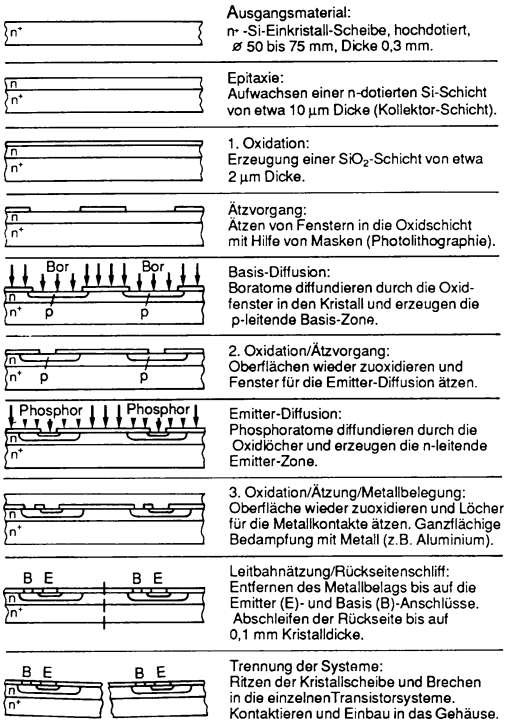


Abb. 9.52 Herstellungsgang für zwei nebeneinander liegende Planar-Transistor-Systeme

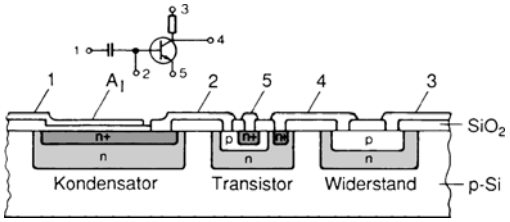


Abb. 9.53 Integrierte Schaltung von Transistor, Kondensator und Widerstand

Technik) wirken sowohl p-MOS- als auch n-MOS-Transistoren zusammen.

Eine Vielzahl von Transistoren oder andere Bauelemente können in einem einzigen Fertigungsprozess auf einem einkristallinen Siliciumplättchen (*Chip*) hergestellt werden. Abbildung 9.52 zeigt die einzelnen Fertigungsschritte dieser *Planartechnik* zur Herstellung zweier Transistoren. In *integrierten Schaltkreisen* (IC, Integrated Circuit) sind eine große Anzahl von Halbleiterbauelementen gleichzeitig herstellbar. Abbildung 9.53 zeigt eine integrierte Schaltung mit einem Kondensator, einem Transistor und einem Widerstand. Durch *Großintegration* (SLSI, Super Large Scale Integration) kann man über 1 Mio. Bauelemente auf einem Chip unterbringen. Auf diese Weise lassen sich die Herstellungskosten je Element beträchtlich senken und eine hohe Zuverlässigkeit bei gleichzeitig geringem Leistungsverbrauch garantieren.

9.2.4 Supraleitung

Als 1908 dem holländischen Physiker H. Kamerlingh-Onnes (1853 bis 1926) die Verflüssigung des Heliums bei 4,2 K gelang, machte er die überraschende Entdeckung, dass der Widerstand von Quecksilber bei dieser Temperatur unmessbar klein wird. Er nannte diese Erscheinung *Supraleitfähigkeit*. Seitdem stellte man bei sehr vielen Metallen und Legierungen sowie Halbleitern unterhalb einer jeweils charakteristischen *Sprungtemperatur* T_c Supraleitung fest. Ein Supraleiter hat außer der Erscheinung des verschwindend geringen Widerstandes ($R = 0$) eine zweite wichtige Eigenschaft: Aus dem Innern eines Supraleiters wird immer ein Magnetfeld verdrängt, d. h., ein Supraleiter ist auch ein *idealer Diamagnet* ($B_i = 0$, $\chi_m = -1$). Dieser zweite Effekt wird nach ihren Entdeckern *Meißner-Ochsenfeld-Effekt* genannt (F. W. Meissner, 1882 bis 1974, R. Ochsenfeld, 1901 bis 1993). Modellhaft wird angenommen, dass in einer dünnen Oberflächenschicht des Supraleiters sehr große Oberflächenströme, sogenannte Suprastöme zirkulieren, die ein äußeres Magnetfeld abschirmen.

Der supraleitende Zustand wird oberhalb einer *kritischen magnetischen Flussdichte* B_c zerstört. Diese hängt mit der Sprungtemperatur T_c zusammen und zeigt eine parabolische Temperaturabhängigkeit. In guter Näherung kann der Zusammenhang durch

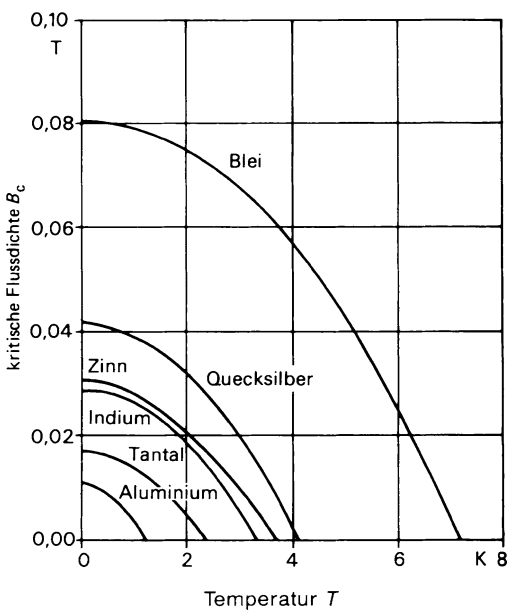


Abb. 9.54 Abhängigkeit der kritischen Flussdichte von der Temperatur für einige supraleitende Metalle

$$B_c = B_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right) \qquad (9.41)$$

beschrieben werden. Hierin ist T_c die materialspezifische Sprungtemperatur und B_0 die kritische Flussdichte für $T = 0$. Abbildung 9.54 zeigt die Abhängigkeit der kritischen Flussdichte von der Temperatur für einige Metalle. Bei den *Supraleitern erster Art* tritt der Wechsel von der supraleitenden in die normalleitende Phase sprunghaft ein, wie Abb. 9.55a erkennen lässt, während bei den *Supraleitern zweiter Art* ein kontinuierlicher Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand stattfindet, verdeutlicht in Abb. 9.55b. Oberhalb einer kritischen magnetischen Flussdichte B_{c1} beginnt ein Eindringen des magnetischen Flusses, jedoch bei nach wie vor unmessbar kleinem Widerstand. Dies geschieht quantisiert in Form von normalleitenden magnetischen Flussschläuchen, die eine regelmäßige Struktur bilden. Der Wert eines solchen magnetischen *Flussquants* beträgt

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{V\,s}\,. \qquad (9.42)$$

Die Größe h ist das Planck'sche Wirkungsquantum und e die Elementarladung. Die normalleitenden Flussschläuche bilden auf der Oberfläche des Supraleiters regelmäßige Gittermuster, die 1966 erstmals durch H. Träuble (1932 bis 1976) und U. Essmann (geb. 1937) sichtbar gemacht wurden. Abbildung 9.56 zeigt eine solche Struktur. Die Anordnungs- und Gitterfehler dieser Flussschläuche entsprechen den Versetzungen von Metallgittern (Abschn. 9.1.3, Abb. 9.11).

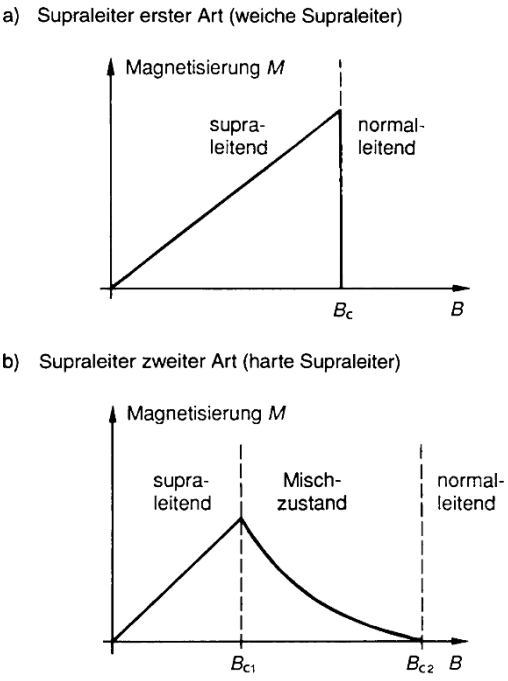


Abb. 9.55 Magnetisierungsverlauf in Supraleitern

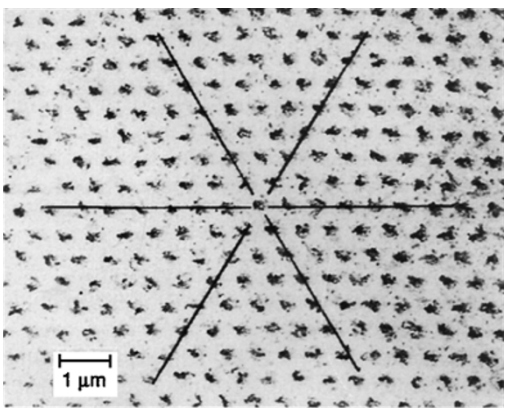


Abb. 9.56 Flussliniengitter einer Folie aus Pb 3,6% In bei $T = 1{,}2$ K und $B = 0{,}007$ T (nach Eßmann und Träuble)

Abbildung 9.57 zeigt den allmählichen Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand bei einer 0,1 mm dicken Bleifolie. In Abb. 9.57a beträgt die äußere magnetische Flussdichte $B_a = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ T, es sind zylinderförmige magnetische Bereiche sichtbar, die

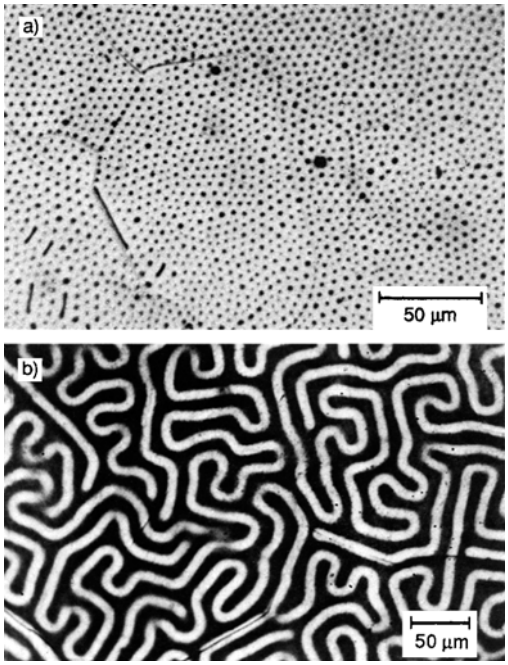


Abb. 9.57 Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand bei Blei (*weiß*: supraleitend, *schwarz*: normalleitend) bei **a**) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ T und **b**) $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ T (nach Eßmann und Träuble)

etwa 50 Flussquanten umfassen. Mit zunehmender magnetischer Flussdichte gehen sie bei $B_a = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ T (Abb. 9.57b) in mäanderförmige magnetische Bereiche über. Nach dem Überschreiten der oberen kritischen magnetischen Flussdichte B_{c2} ist der Werkstoff vollständig normalleitend geworden. Technisch bedeutsam ist, dass die Werte von B_{c2} oft um mehrere Zehnerpotenzen höher liegen als die von B_{c1}.

In Tabelle 9.10 sind die wichtigsten supraleitenden Elemente und Verbindungen mit ihren Sprungtemperaturen T_c und ihren kritischen magnetischen Flussdichten B_c bzw. B_{c2} aufgeführt. Es wurde empirisch ermittelt, dass nur Metalle mit einer Valenzelektronenanzahl zwischen 2 und 8 supraleitend werden; hierbei weisen die Elemente mit 3, 5 und 7 Valenzelektronen die höchsten Sprungtemperaturen auf.

In Tabelle 9.10 hat die Verbindung Nb_3Ge die höchste kritische Temperatur von $T_c = 23$ K und die Verbindung $PbMo_6S_8$ die höchste kritische magnetische Flussdichte $B_{c2} = 45$ T.

Die angegebenen Grenzwerte werden weit übertroffen durch keramische Werkstoffe, die erstmals 1986 von J. G. Bednorz (geb. 1950) und K. A. Müller (geb. 1927) beschrieben wurden. Es handelt sich hierbei um Keramiken mit Perowskit-Struktur auf der Basis von Kupferoxid in Verbindung mit Erdalkalimetallen und seltenen Erden wie beispielsweise La-Ba-Cu-O, La-Sr-Cu-O und Y-Ba-Cu-O. Es wurden Sprungtemperaturen T_c von weit über 100 K gemessen und kritische Flussdichten (bei $T = 4{,}2$ K) von $B_c > 350$ T. Diese *Hochtemperatur-Supraleiter* benötigen zur Herbeiführung des supraleitenden Zustands nicht mehr das teuere flüssige Helium, sondern sie werden bereits bei der Siedetemperatur des flüssigen Stickstoffs ($T = 77$ K) supraleitend. Somit versprechen diese neuen Werkstoffe sensationelle technische Anwendungen.

Die physikalische Deutung der Supraleitung gelang J. Bardeen (1908 bis 1991), L. N. Cooper (geb. 1930) und J. R. Shrieffer (geb. 1931) erstmals im Jahr 1957. Die nach ihnen benannte *BCS-Theorie* geht davon aus, dass jeweils zwei Elektronen mit entgegengesetztem Eigendrehimpuls (Spin) und Impuls ein sogenanntes *Cooper-Paar* bilden. Die Kopplung der beiden das Cooper-Paar bildenden Leitungselektronen erfolgt über die Deformation des Atomgitters. Durch die elektrische Wechselwirkung verzerrt ein Elektron das lokale Atomgitter. Ist diese Deformationsenergie größer als die thermischen oder magnetischen Einflüsse auf das Gitter, so wirkt sich diese Deformation bindend auf ein zweites Elektron aus, das damit an das erste Elektron gekoppelt ist und einen gemeinsamen Energiezustand einnimmt. Bei Cooper-Paaren ist der *Gesamt-*

Tabelle 9.10 Kritische Temperatur T_c und kritische Flussdichte B_c supraleitender Elemente und Verbindungen

Supraleiter erster Art		
Stoffe	T_c in K	B_0 in T
Al	1,19	0,0099
Hg	4,15	0,0412
In	3,4	0,0293
Pb	7,2	0,0803
Sn	3,72	0,0309
Th	1,37	0,0162
Tl	2,39	0,0171

Supraleiter zweiter Art		
Stoffe	T_c in K	B_{c2} in T
Nb	9,2	0,27
Ta	4,39	0,18
V	5,3	0,34
Zn	0,9	0,0053
Bi_3Ba	5,69	0,074
Bi_3Sr	5,62	0,053
Mo_3Re	9,8	0,053
Nb_3Au	11	–
$NbSn_2$	2,6	0,062

Supraleiter zweiter Art		
Stoffe	T_c in K	B_{c2} in T
MoRe	12,6	
Nb_3Al	18	32
Nb_3Ge	23	30
Nb_3Sn	18	20
NbTi	10,6	11,8
NbZr	10,8	11
$PbMo_6S_8$	15	60
V_3Ga	14,5	23
V_3Si	17,1	23

Hochtemperatur-Supraleiter		
Stoffe	T_c in K	B_{c2} in T
$YBa_2Cu_3O_{7-x}$	93	110 bis 240
$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$	85	60 bis 250
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10+x}$	110	40 bis 250
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$	133	108
$Te_2Ca_2Ba_2Cu_3O_x$	135	100 bis 200

spin bzw. *-impuls null*. Aus diesem Grund sind sie nicht dem Pauli-Prinzip unterworfen, sodass alle Cooper-Paare den tiefstmöglichen quantenmechanischen Energiezustand einnehmen können. Die Cooper-Paare unterliegen nicht mehr der Fermi-Dirac-Statistik (Abschn. 9.2.1), sondern der *Bose-Einstein-Statistik* wechselwirkungsfreier Teilchen. Die Cooper-Paare treten nicht mehr mit dem Atomgitter in störende Wechselwirkung, weshalb sie sich auch widerstandslos durch den Supraleiter bewegen können. Die Existenz von Cooper-Paaren konnte bei der Bestimmung des Wertes eines Flussquantes bestätigt werden. Nach (9.42) wird das Flussquant durch Teilchen mit doppelter Elementarladung gebildet.

Eine wichtige technische Bedeutung haben die Supraleiter zweiter und dritter Art (*Hochfeld-supraleiter*) sowie künftig die keramischen Supraleiter mit den kritischen Größen

- kritische Temperatur T_c,
- kritische magnetische Flussdichte B_{c2} und
- kritische Stromdichte j_c.

Diese Größen sind voneinander abhängig und beschreiben in Abb. 9.58 einen Bereich, innerhalb dessen Supraleitung möglich ist.

Fließt durch einen Supraleiter zweiter Art ein Transportstrom I_T, dann übt dieser auf die Flussschläuche eine *Lorentz-Kraft* $I_T B$ aus, die zu einer Wanderung der Schläuche und damit verbunden zu einer Wärmeentwicklung führt, sodass die Supraleitfähigkeit verloren geht. Durch *Anheften* (*Pinnen*) dieser Flussschläuche in ihrer gegenwärtigen Lage können supraleitende Materialien verhältnismäßig hohe Stromdichten tragen (für NbTi zwi-

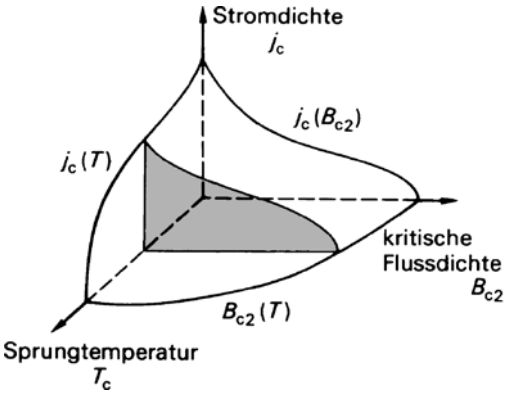


Abb. 9.58 Verlauf der kritischen Größen Sprungtemperatur, kritische Flussdichte und Stromdichte (schematisch)

schen $2 \cdot 10^5$ A/cm^2 und $6 \cdot 10^5$ A/cm^2). Versetzungen, Ausscheidungen und Korngrenzen wirken in Supraleitern 2. Art (harte Supraleiter) als *Pinning-Zentren* für die Flussschläuche. Für keramische Hochtemperatur-Supraleiter wurden bei $T = 77$ K ebenfalls kritische Stromdichten von über 10^5 A/cm^2 gemessen.

Die Supraleitung kann in unterschiedlicher Weise technisch genutzt werden. Widerstandslose supraleitende Kabel dienen zur verlustfreien Stromleitung hoher Leistung ($P > 2$ GW). Das bedeutendste technische Einsatzfeld liegt heute im Bau *supraleitender Magnete* hoher magnetischer Flussdichten ($B > 10$ T). Sie werden in der Festkörper-, Hochenergie- und Plasmaphysik eingesetzt. Ferner dienen sie zum Trennen und Abscheiden magnetischer Substanzen. Die Verdrängung des magnetischen Feldes in einem Supraleiter wird bei *elektrodynamischen Schwebeverfahren* ausgenutzt. Diese Schwebetechnik ermöglicht die Entwicklung von reibungsfreien magnetischen Lagern (z. B. für Kompasse oder Zentrifugen). Der Bau von *Synchrongeneratoren* mit einer supraleitenden Erregerwicklung ist bereits verwirklicht worden. In jüngster Zeit werden supraleitende Magnete in der *Medizintechnik* bei der Kernspin-Tomographie verwendet.

Als supraleitende Werkstoffe werden vor allem NbTi und Nb_3Sn eingesetzt. NbTi hat eine Sprungtemperatur von 9 K und ist (bei 4,2 K) bis $B_{c2} = 11{,}5$ T supraleitend. Durch wiederholtes Kaltverformen und anschließende Wärmebehandlung werden als Pinning-Zentren Ausscheidungen mit einem Durchmesser in der Größe der Flussschläuche (etwa 10^{-8} m) erzeugt, und zwar in einer Dichte von etwa 10^{15} cm^{-1}. Wird der Strom oder das Magnetfeld im Supraleiter geändert, dann kann es zur Wanderung der Flussschläuche kommen, sodass die supraleitenden Drähte teilweise normalleitend werden. Die auftretende Wärme muss schnell abgegeben werden können, um zu verhindern, dass die Drähte vollständig normalleitend werden. Aus diesem Grund werden dünne Filamente mit einem Durchmesser von 5 µm bis 50 µm in eine Kupfermatrix eingebettet. Abbildung 9.59 zeigt den Querschliff eines *NbTi-Filament-Verbundleiters* mit etwa 10 000 Filamenten. Die maximale Stromstärke dieses Verbundleiters beträgt bei 4,2 K 1400 A bei 9 T bzw. 5200 A bei 5 T.

Zur Übung

Ü 9.2-1 Die Dichte von Eisen beträgt 7850 kg/m^3. Wie groß ist die Fermi-Energie E_F unter der Voraussetzung, dass jedes Eisenatom ein freies Elektron im Kristall zur Verfügung stellt?

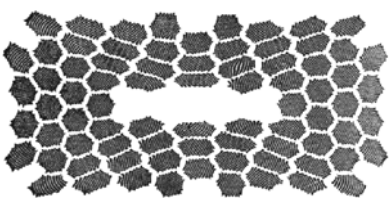


Abb. 9.59 Schliffbild eines NbTi-Multifilamentleiters mit etwa 10 000 Filamenten zu je 25 µm Durchmesser und Cu/CuNi-Mischmatrix (1 400 A bei 9 T). Werkfoto: VAC

Ü 9.2-2 Die Fermi-Energie von Na ist nach Tabelle 9.5 $E_F = 3{,}1$ eV. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Energieniveaus $E_1 = 3{,}05$ eV und $E_2 = 3{,}15$ eV besetzt sind bei den Temperaturen $T_1 = 300$ K und $T_2 = 600$ K?

Ü 9.2-3 Wie groß ist der Beitrag der Elektronen $C_{m,el}$ zur molaren Wärmekapazität $C_m = 28$ J/(mol K) von Natrium bei 20 °C?

Ü 9.2-4 Wie groß ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen in Eisen bei Raumtemperatur, wenn der spezifische Widerstand $\varrho = 10^{-5}\,\Omega$ cm beträgt? (weitere Daten s. Ü 9.2-1).

Ü 9.2-5 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an der Leitungsbandkante des Halbleiters Silicium bei Raumtemperatur (300 K) Elektronen zu finden? Folgende Fälle sollen untersucht werden: a) Das Fermi-Niveau befinde sich in der Mitte der verbotenen Zone (Eigenleitung), b) Das Fermi-Niveau befinde sich $\Delta E = 20$ meV unterhalb der Leitungsbandkante (n-Halbleiter). c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Halbleiter nach b), an der Valenzbandkante Löcher zu finden?

Ü 9.2-6 Wie groß ist der spezifische Widerstand von eigenleitendem Germanium bei $T = 600$ K?

Ü 9.2-7 An einer Si-Probe der Länge $l = 2$ cm und des Querschnitts $A = 1\,\text{cm}^2$ mit der Dotierungskonzentration $n_D = 10^{15}\,\text{cm}^{-3}$ (Sb) wird der Widerstand $R = 10\,\Omega$ gemessen. Wie groß ist die Beweglichkeit der Majoritätsträger?

Ü 9.2-8 Ein mit P dotierter Si-Kristall soll als Temperaturfühler eingesetzt werden. Bei $T_1 = 77$ K beträgt der elektrische Widerstand des Bauelements $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$. a) Wie groß ist der Widerstand R_2 bei der Temperatur $T_2 = 50$ K, wenn die Beweglichkeit als konstant angesehen werden kann? b) Wie groß ist der Temperaturkoeffizient $\text{d}R/\text{d}T$ des Ohm'schen Widerstands bei $T_1 = 77$ K?

Ü 9.2-9 Zur Herstellung einer Ge-Diode wird eine schwach p-dotierte Scheibe mit dem spezifischen Widerstand $\varrho = 5\,\Omega$ cm als Ausgangsmaterial benutzt. In diesem Kristall wird durch Eindiffusion von Phosphor eine n-Zone erzeugt. a) Wie groß muss die Donatorenkonzentration n_D sein, damit die Diffusionsspannung $U_d = 0{,}3$ V ist? b) Wie viel g Phosphor sind in 1 cm^3 der n-Schicht verteilt?

Ü 9.2-10 Wie breit ist die Raumladungszone eines pn-Übergangs in Silicium mit $n_D = 10^{17}\,\text{cm}^{-3}$ und $n_A = 10^{15}\,\text{cm}^{-3}$ a) in spannungslosem Zustand, b) mit einer Sperrspannung $U_R = -10$ V, c) mit einer Flussspannung von $U_F = 0{,}5$ V?

9.3 Thermodynamik fester Körper

9.3.1 Gitterschwingungen

9.3.1.1 Schwingende Gitterbausteine und Phononen

Im Kristallgitter eines Festkörpers befinden sich regelmäßig angeordnete Gitterbausteine, die elastisch miteinander gekoppelt sind. Diese führen thermische Schwingungen um ihre Ruhelagen aus. Wird ein Gitterbaustein von außen angeregt, beispielsweise durch Stoß eines Gasmoleküls, Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung (Photonenstoß) oder Neutronenbestrahlung, dann wird sich die damit verknüpfte Auslenkung über die elastische Kopplung auf die Nachbarn übertragen und als Welle durch das Kristallgitter laufen. Abbildung 9.60 zeigt die Auslenkung der Teilchen bei einer transversalen Gitterwelle.

Durch viele Experimente, z. B. durch Röntgen- und Neutronenstreuung an Kristallen, wurde festgestellt, dass die Energie in einer Gitterschwingung *gequantelt* ist. Analog zum *Photon*, dem Energiequant der elektromagnetischen Wellen, werden die Quanten der Gitterwellen als *Phononen* bezeichnet. Die Energie eines Phonons ist nach (6.135)

$$E_{\text{Phonon}} = hf = \hbar\omega \tag{9.43}$$

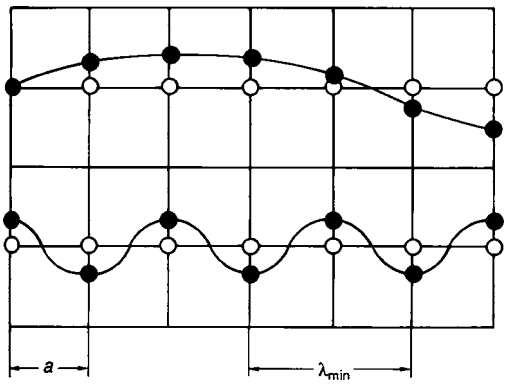


Abb. 9.60 Transversale Gitterwellen

mit f und ω als Frequenz bzw. Kreisfrequenz der Schwingung, h als der Planck'schen Konstanten und $\hbar = h/(2\pi)$. Die Phononen haben wie die Photonen einen Impuls p_{Phonon}, der nach der De-Broglie-Beziehung (Abschn. 6.5.5) mit der Wellenlänge λ bzw. der Wellenzahl k zusammenhängt. Es gilt

$$p_{\text{Phonon}} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \,. \qquad (9.44)$$

Gitterschwingungen können also als Teilchen aufgefasst werden, die sich mit der Schallgeschwindigkeit c_s durch den Kristall bewegen, dabei untereinander sowie mit anderen Teilchen (z. B. Elektronen, Neutronen, Photonen) zusammenstoßen und Energie und Impuls austauschen.

Als einfaches Beispiel sei nach Abb. 9.61 eine *lineare Kette* aus gleichartigen Atomen der Masse m betrachtet, in der eine Longitudinalwelle läuft. Der äquidistante Abstand (Gitterkonstante) zwischen den Atomen sei a, die Federkonstante, die das lineare Kraftgesetz der Wechselwirkungskraft nächster Nachbarn beschreibt, k_F. Dieses gekoppelte Schwingungssystem (Abschn. 5.1.5) zeigt folgende Abhängigkeit der Kreisfrequenz von den obigen Parametern:

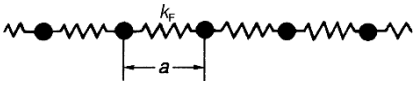


Abb. 9.61 Lineare Atomkette

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_F}{m}(1 - \cos ka)} \,. \qquad (9.45)$$

Es ergibt sich kein bestimmter Wert für die Frequenz sondern ein *Phononspektrum*, in dem die Frequenz von der Wellenlänge λ bzw. der Wellenzahl k abhängt. Der Zusammenhang zwischen ω und k wird als *Dispersionsrelation* bezeichnet und ist in Abb. 9.62a dargestellt. Alle praktisch vorkommenden Wellenzahlen liegen innerhalb der *ersten Brillouin-Zone* (Abschn. 9.2.1):

$$-\frac{\pi}{a} \leqq k \leqq +\frac{\pi}{a} \,.$$

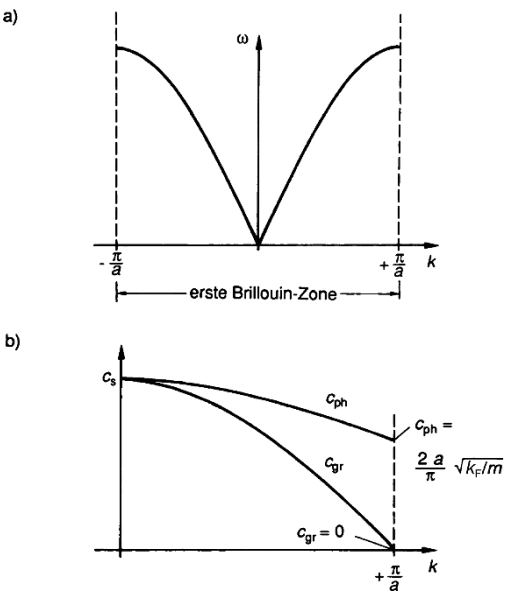


Abb. 9.62 Gitterwellen einer linearen Atomkette: **a)** Dispersionsrelation der Phononen, **b)** Schallgeschwindigkeit

Die Vorzeichen der k-Vektoren geben die Laufrichtung der Welle an. Die maximale Wellenzahl

$$k_{\max} = \frac{\pi}{a} \tag{9.46}$$

entspricht der minimalen Wellenlänge

$$\lambda_{\min} = 2\,a\,, \tag{9.47}$$

die sich nach Abb. 9.60 dadurch auszeichnet, dass benachbarte Atome gegenphasig schwingen. Die Geschwindigkeit der Phononen entspricht der *Gruppengeschwindigkeit* der Gitterwelle. Nach (5.223) ist diese $c_{\mathrm{gr}} = \mathrm{d}\omega/(\mathrm{d}k)$. Mit $\omega(k)$ aus (9.45) folgt

$$c_{\mathrm{gr}} = a\sqrt{\frac{k_{\mathrm{F}}}{2m}}\,\frac{\sin ka}{\sqrt{1-\cos ka}}\,. \tag{9.48}$$

Die *Phasengeschwindigkeit* der Welle beträgt nach (5.204) $c_{\mathrm{ph}} = \lambda f = \omega/k$ und mit 9.45)

$$c_{\mathrm{ph}} = \sqrt{\frac{2k_{\mathrm{F}}}{m}}\,\frac{\sqrt{1-\cos ka}}{k}\,. \tag{9.49}$$

Die Funktionen (9.48) und (9.49) sind in Abb. 9.62b dargestellt. Bei $k = 0$ ist die Phasengeschwindigkeit gleich der Gruppengeschwindigkeit

$$c_{\mathrm{ph}}(k=0) = c_{\mathrm{gr}}(k=0) = a\sqrt{\frac{k_{\mathrm{F}}}{m}}\,. \tag{9.50}$$

Für sehr lange Wellen ($\lambda \gg a$) gibt es also keine Dispersion. Am Rand der Brillouin-Zone ist

$$c_{\mathrm{ph}}\left(k=\frac{\pi}{a}\right) = \frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{k_{\mathrm{F}}}{m}}\,,$$
$$c_{\mathrm{gr}}\left(k=\frac{\pi}{a}\right) = 0\,. \tag{9.51}$$

Die verschwindende Gruppengeschwindigkeit ist ein Ausdruck dafür, dass die Wellen mit $k = \pm\pi/a$ *stehende Wellen* sind (Abschn. 9.2.1).
Ist Δa die Auslenkung eines Teilchens aus der Gleichgewichtslage, dann ist $\varepsilon = \Delta a/a$ die Dehnung, die nach Abschn. 2.3.1 bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes mit der Spannung σ und dem Elastizitätsmodul E verknüpft ist: $\sigma = E\varepsilon$. Für die Spannung gilt

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{a^2} = E\,\frac{\Delta a}{a}\,.$$

Die Kraft F, die auf ein Teilchen wirkt, ist nach Hooke der Verschiebung Δa proportional: $F = k_{\mathrm{F}}\,\Delta\,a$. Daraus folgt eine Beziehung zwischen Federkonstante k_{F} und E-Modul E:

$$k_{\mathrm{F}} = a\,E\,. \tag{9.52}$$

Wird (9.52) in (9.50) eingesetzt, dann ergibt sich für den Grenzfall langer Wellen (tiefe Frequenzen) die maximale Schallgeschwindigkeit $c_{\mathrm{s,max}}$ der Longitudinalwellen

$$c_{\mathrm{s,\,max}} = \sqrt{\frac{a^3E}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,. \tag{9.53}$$

Diese Gleichung ist identisch mit (5.197) aus der Kontinuumstheorie.
Die größte Eigenfrequenz ist nach (9.45) für $k = \pi/a$

$$\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{k_{\mathrm{F}}}{m}}\,.$$

Mit (9.52) resultiert

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a\,E}{m}}\,. \qquad (9.54)$$

Beispiel

9.3-1 Wie groß ist die maximale Schallgeschwindigkeit und die maximale Eigenfrequenz von Eisenatomen in einem Eisenstab, der zu Longitudinalschwingungen angeregt wird? (Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$, Gitterkonstante $a = 2{,}9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, Molmasse $M = 55{,}85\,\mathrm{kg/kmol}$, Dichte $\varrho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$.)

Lösung

Nach (9.53) ist die maximale Schallgeschwindigkeit $c_{\mathrm{s,max}} = \sqrt{E/\varrho} = 5048\,\mathrm{m/s}$. Die maximale Eigenfrequenz ist nach (9.54)

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{aE}{m}}\,.$$

Mit $m = M/N_{\mathrm{A}} = 9{,}27 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ ergibt sich $f_{\max} = 7{,}96\,\mathrm{GHz}$.

Befinden sich zwei oder mehr Atome in der Elementarzelle, dann ergeben sich je nach Schwingungstyp verschiedene Dispersionsrelationen, wie sie in Abb. 9.63a für Germanium dargestellt sind. Man unterscheidet *akustische* und *optische* Phononen, die jeweils noch in *longitudinale* und *transversale* unterteilt sind. Folgende Abkürzungen sind üblich:

- TA: transversal akustisch,
- LA: longitudinal akustisch,
- LO: longitudinal optisch,
- TO: transversal optisch.

Bei den akustischen Phononen schwingen nach Abb. 9.63b die beiden verschiedenen Teilchensorten *gleichphasig*, bei den optischen Phononen nach Abb. 9.63c *gegenphasig*. Falls die beiden Atome unterschiedliche Ladung tragen (z. B. NaCl), erfährt der Kristall durch die optischen Phononen eine starke *Polarisation*. Dieser Schwingungstyp kann daher sehr effektiv durch elektromagnetische Wellen (Licht) angeregt werden.

Abbildung 9.63a verdeutlicht, dass zwischen den akustischen und optischen Phononenästen eine *Frequenzlücke* (schraffiert) existiert. Der Kristall hat in diesem Frequenzintervall keine Eigenschwingungen. Wellen mit solchen Frequenzen (für Ge $6{,}65 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ bis $7{,}33 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$) werden stark gedämpft. Während bei Germanium in anderen Raumrichtungen, wie z. B. [100], die Frequenzlücke nicht auftritt, ist sie bei Kristallen, die zwei Atome unterschiedlicher Masse in der Elementarzelle haben, immer vorhanden.

Beispiel

9.3-2 Die Gitterschwingungen mit $\boldsymbol{k} = \frac{\pi}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ haben in Germanium die Frequenzen $f_{\mathrm{TA}} = 1{,}90\,\mathrm{THz}$, $f_{\mathrm{LA}} = 6{,}65\,\mathrm{THz}$, $f_{\mathrm{LO}} = 7{,}33\,\mathrm{THz}$, $f_{\mathrm{TO}} = 8{,}68\,\mathrm{THz}$. a) Wie groß sind die zugehörigen Phononenenergien? b) Wie groß sind die Impulse der Phononen, wenn in Ge die Gitterkonstante $a = 5{,}65 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ beträgt? c) Welchen Impuls hat ein Photon mit der gleichen Energie wie das LA-Phonon?

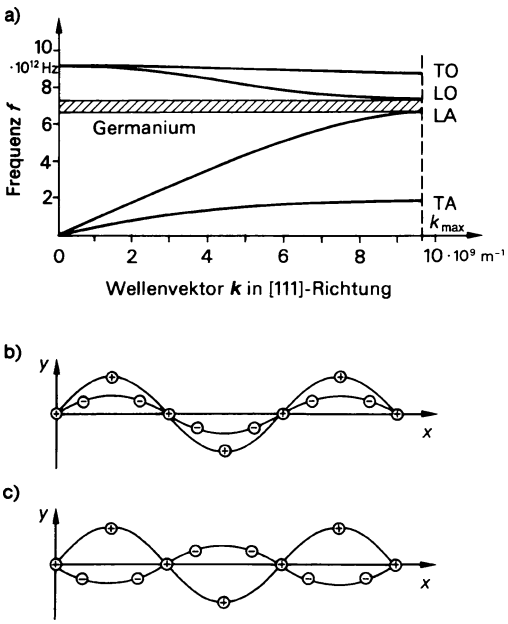


Abb. 9.63 Phononen in Kristallen mit zwei Atomen in der Elementarzelle: **a**) Dispersionsrelation von Germanium, **b**) akustische und **c**) optische Phononen

Lösung

a) Für die Phononenenergien gilt nach (9.43) $E_{\text{Phonon}} = hf$. Man errechnet $E_{\text{TA}} = 7{,}85$ meV, $E_{\text{LA}} = 27{,}5$ meV, $E_{\text{LO}} = 30{,}3$ meV und $E_{\text{TO}} = 35{,}9$ meV.

b) Der Impuls ist nach (9.44) $p_{\text{Phonon}} = \hbar k$. Mit $|\boldsymbol{k}| = (\pi/a)\sqrt{3}$ erhält man $p_{\text{LA}} = 1{,}02 \cdot 10^{-24}$ Ns.

c) Der Impuls eines Photons ist nach (6.118) $p_{\text{Photon}} = (hf)/c$. Mit $hf = E_{\text{LA}} = 27{,}5$ meV ergibt sich $p_{\text{Photon}} = 1{,}47 \cdot 10^{-29}$ Ns $\ll p_{\text{Phonon}}$.

Praktisch kann der Photonenimpuls im Vergleich zum Phononenimpuls immer vernachlässigt werden.

9.3.1.2 Molare und spezifische Wärmekapazität

Jeder schwingungsfähige Gitterbaustein eines Festkörpers hat drei Freiheitsgrade. Da sich die Schwingungsenergie gleichmäßig auf die kinetische und potentielle Energie verteilt, hat jedes Atom im Festkörper die mittlere Energie $\overline{E} = 2(3/2)kT = 3\,kT$. Die innere Energie eines Systems aus N Teilchen ist also $U = 3\,N\,k\,T$ und die molare Wärmekapazität nach der *Dulong-Petit'schen Regel* (Abschn. 3.3.3)

$$C_{\text{m}} = \frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = 3R_{\text{m}}\,.$$

Die tatsächlich gemessene molare Wärmekapazität weicht indessen von diesem Wert stark ab und zwar umso mehr, je fester die Gitterbindung, je leichter die Gitterbausteine und je tiefer die Temperatur ist. *Einstein* forderte deshalb 1907, dass die Schwingungsenergie der Gitterbausteine in ganzzahligen Vielfachen von hf gequantelt sein muss. Unter der Annahme, dass N-Oszillatoren mit drei Freiheitsgraden unabhängig voneinander mit derselben Frequenz schwingen, ergibt sich für die Gesamtenergie unter Berücksichtigung der *Boltzmann'schen Verteilungsfunktion* (Abschn. 3.2.3)

$$U = 3\frac{N\,hf}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1}\,. \tag{9.55}$$

Für hohe Temperaturen ($kT \gg hf$) beträgt die innere Energie

$$U \approx 3\,N\,k\,T = 3\,\nu\,R_{\text{m}}\,T\,. \tag{9.56}$$

Die molare Wärmekapazität befolgt damit die Dulong-Petit'sche Regel. Für niedrige Temperaturen ($kT \ll hf$) wird die Energie im Wesentlichen von der Exponentialfunktion bestimmt und ist viel kleiner, als nach der Dulong-Petit'schen Regel zu erwarten ist. Insbesondere für $T = 0$ K resultiert $C_{\text{m}} = 0$. Es gilt

$$U = 3\,N\,hf\mathrm{e}^{-\frac{hf}{kT}} \tag{9.57}$$

und für die molare Wärmekapazität

$$C_{\text{m}} = 3\,R_{\text{m}}\left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{hf}{kT}}\,. \tag{9.58}$$

Die Grenze für den Übergang von (9.56) in (9.57) liegt bei der *Einstein-Temperatur*

$$T_{\text{E}} = \frac{hf}{k}\,. \tag{9.59}$$

Genaue Messungen des Temperaturverlaufs der spezifischen Wärmekapazität in Festkörpern haben ergeben, dass die Einstein'sche Formel zu geringe Wärmekapazitäten voraussagt, weil sie auf der Annahme beruht, dass es nur eine einzige Frequenz der Gitterschwingungen (die eines Gitterbausteins) gibt. Ein

Gitter hat aber genau so viele Schwingungszustände wie Gitterbausteine (Abschn. 5.1.5). Nach P. Debye (1884 bis 1966) ist der Energiegehalt eines Festkörpers in den stehenden Wellen der N Gitterschwingungen gespeichert. Er berechnete die Gesamtenergie bei drei Freiheitsgraden zu

$$U = 9\,N\,k\,T\frac{T^3}{T_\mathrm{D}^3}\int_0^{z_\mathrm{D}}\frac{z^3\,\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z-1} \qquad (9.60)$$

mit $z = (h f)/(k T)$ und $z_\mathrm{D} = T_\mathrm{D}/T$. T_D ist die *Debye-Temperatur*:

$$T_\mathrm{D} = \frac{h f_\mathrm{gr}}{k}\,. \qquad (9.61)$$

Die Größe f_gr ist die *Debye'sche Grenzfrequenz*, die in der Nähe der Maximalfrequenz (9.54) der elastischen Schwingungen des Kristalls liegt. Tabelle 9.11 zeigt die Debye-Temperaturen einiger Festkörper.

Für den Fall $T \gg T_\mathrm{D}$ ergibt (9.60) wieder $U \approx 3\,N\,k\,T$ und für die molare Wärmekapazität $C_\mathrm{m} = 3\,R_\mathrm{m}$ (Dulong-Petit). Bei $T \ll T_\mathrm{D}$ resultiert

$$U = \frac{3}{5}\pi^4\,N\,k\,T\frac{T^3}{T_\mathrm{D}^3} \quad \text{und} \qquad (9.62)$$

$$C_\mathrm{m} = \frac{12}{5}\pi^4 R_\mathrm{m}\frac{T^3}{T_\mathrm{D}^3}\,. \qquad (9.63)$$

Tabelle 9.11 Debye-Temperatur T_D einiger Stoffe

Stoff	T_D in K	Stoff	T_D in K
Pb	88	Mg	405
Na	172	Al	428
Ag	226	LiF	740
NaCl	281	Diamant	1 860
Cu	345		

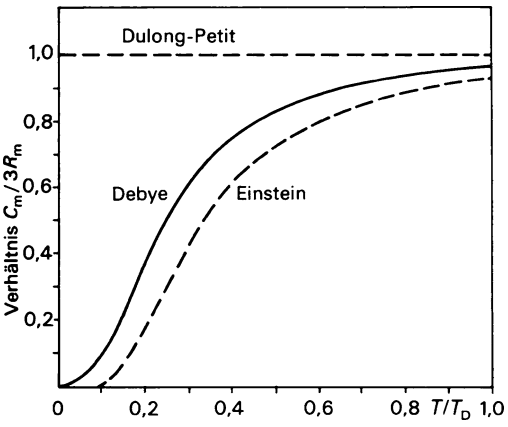


Abb. 9.64 Molare Wärmekapazität der Festkörper nach den Theorien von Einstein, Debye und Dulong-Petit

Für $T \to 0$ geht die molare bzw. spezifische Wärmekapazität mit T^3 gegen null. Die Debye'sche Beschreibung ist wesentlich genauer als die Einstein'sche. Noch vorhandene Unterschiede zum Experiment rühren von der bei *Debye* nicht berücksichtigten Dispersion der Gitterwellen her. Abbildung 9.64 zeigt die molare Wärmekapazität in Abhängigkeit von der Temperatur nach dem Einstein'schen bzw. dem Debye'schen Ansatz.

9.3.1.3 Wärmeleitfähigkeit

Isolatoren

Zwar breiten sich die Phononen im Festkörper mit Schallgeschwindigkeit aus, jedoch ist der durch sie bewirkte Wärmetransport deutlich langsamer. Dies rührt daher, dass die Phononen untereinander und mit Verunreinigungen zusammenstoßen und ihre Richtungen dauernd ändern. Ihnen wird, ähnlich wie den Gasmolekülen und Elektronen, eine *mittlere freie Phononenweglänge* l_ph zugeordnet. Abbildung 9.65 zeigt schematisch den Querschnitt eines Festkörpers, an dem eine konstante Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_2$ an-

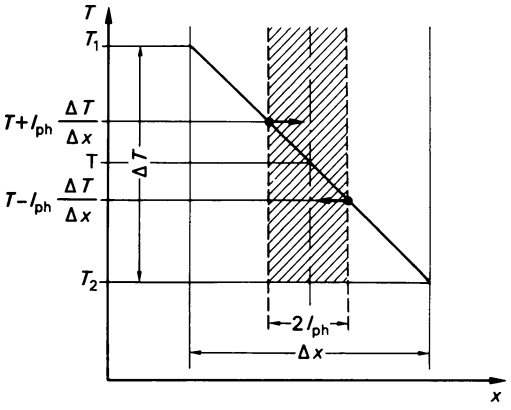


Abb. 9.65 Temperaturverteilung in einem Festkörper

liegt. Die je Flächen und Zeiteinheit transportierte Wärme, die *Wärmestromdichte* j_q beträgt

$$j_q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \,. \tag{9.64}$$

Hierbei ist λ die Wärmleitfähigkeit in W/(m K) (Abschn. 3.5.1).

Der Zusammenhang zwischen der Wärmeleitfähigkeit und der Phononenbewegung lässt sich berechnen. Wenn in der Mitte des Festkörpers die Temperatur T herrscht, dann liegt links und rechts im Abstand $\pm l_{ph}$ ein Bereich, in dem kein Phononenzusammenstoß stattfindet. Die von links kommenden Phononen haben die Energie

$$E_{T1} = \frac{3}{2} k \left(T + l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x} \right)$$

und die von rechts kommenden

$$E_{T2} = \frac{3}{2} k \left(T - l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \,.$$

Ist die Dichte der Phononen $n_{ph} = N_{ph}/V$ und ihre Geschwindigkeit c_s, dann ist die mittlere Phononenstromdichte in positiver bzw. negativer x-Richtung $1/6(n_{ph} c_s)$. Für die Energiestromdichte im Mittelpunkt gilt bei der Temperatur T:

Energiestromdichte von links:

$$\frac{1}{6} n_{ph} c_s \frac{3}{2} k \left(T + l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x} \right)$$

Energiestromdichte von rechts:

$$\frac{1}{6} n_{ph} c_s \frac{3}{2} k \left(T - l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) .$$

Die Differenz der Energiestromdichten ist gleich der Wärmestromdichte

$$j_q = \frac{1}{2} n_{ph} \, k \, c_s \, l_{ph} \frac{\Delta T}{\Delta x} \,. \tag{9.65}$$

Durch Vergleich mit (9.64) folgt für die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{1}{2} n_{ph} \, k \, c_s \, l_{ph} \,. \tag{9.66}$$

Da bei drei Freiheitsgraden die innere Energie $U = 3 \, k \, T \, n_{ph} \, V$ beträgt, folgt für die spezifische Wärmekapazität (Abschn. 3.3.3)

$$c = \frac{1}{m} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = 3 \frac{n_{ph} k}{\varrho}$$

mit der Dichte $\varrho = m/V$ oder

$$n_{ph} = \frac{1}{3} \frac{c \varrho}{k} \,. \tag{9.67}$$

Hieraus ergibt sich die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{1}{3} \varrho \, c \, c_s \, l_{ph} \,. \tag{9.68}$$

Mit dieser Gleichung ist es möglich, durch Messen von λ die mittlere freie Weglänge l_{ph} zu berechnen. Bei tiefen Temperaturen ($T \ll T_D$) ist die mittlere freie Weglänge der Phononen

l_{ph} so groß, dass sie in der Größenordnung der Kristalldimensionen liegt und demnach konstant ist. Da entsprechend den vorgenannten Ausführungen in diesem Bereich die spezifische Wärmekapazität c proportional zu T^3 ist, gilt auch für die Wärmeleitfähigkeit $\lambda \sim T^3$. Bei hohen Temperaturen ($T \gg T_D$) ist die spezifische Wärmekapazität c konstant. Die Wärmeleitfähigkeit fällt mit steigender Temperatur wegen der zunehmenden Phononen-Stoßwahrscheinlichkeit gemäß $\lambda \sim 1/T$.

Beispiel

9.3-3 Wie groß ist die mittlere freie Weglänge l_{ph} der Phononen in Porzellan bei Raumtemperatur? Folgende Daten sind bekannt: Dichte $\varrho = 2{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, spezifische Wärmekapazität $c = 840\ \mathrm{J/(kg\,K)}$, Schallgeschwindigkeit $c_s = 4\,880\ \mathrm{m/s}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1\ \mathrm{W/(m\,K)}$.

Lösung

Nach (9.68) gilt für die mittlere freie Weglänge $l_{ph} = 3\lambda/(\varrho\, c\, c_s)$. Mit obigen Werten ergibt sich $l_{ph} = 3{,}05 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$. Diese Strecke entspricht etwa dem Wert einer Gitterkonstanten.

Metalle

In Metallen kann Wärme nicht nur durch Phononen, sondern auch durch die freien Elektronen übertragen werden. Die Wärmeleitfähigkeit aufgrund des Energietransports der Elektronen wird durch (9.68) beschrieben; hierbei wird für c die spezifische Wärmekapazität der Elektronen aus (9.16) eingesetzt. Mit der Molmasse M gilt

$$c_{el} = \frac{C_{m,el}}{M} = \frac{1}{2}\pi^2 \frac{R_m}{M}\frac{T}{T_F}\ .$$

Anstelle der Schallgeschwindigkeit c_s steht die Fermi-Geschwindigkeit v_F und anstatt der mittleren freien Weglänge der Phononen die entsprechende Größe $l = v_F\,\tau$ nach (9.25) für die Elektronen. Folglich resultiert für die Wärmeleitfähigkeit der Elektronen

$$\lambda_{el} = \frac{1}{6}\pi^2\, v_F^2 \frac{T}{T_F}\,\tau\frac{R_m\varrho}{M}\ .$$

Mit $E_F = \frac{1}{2}mv_F^2 = k\,T_F$ und

$$\frac{R_m\varrho}{M} = \frac{N}{V}k = n\,k$$

ergibt sich

$$\lambda_{el} = \frac{1}{3}\pi^2\frac{n}{m}k^2\,\tau\,T\ . \tag{9.69}$$

Die Größe $n = N/V$ ist die Elektronenzahldichte. In reinen Metallen ist die Wärmeleitfähigkeit durch die Elektronen stets ein bis zwei Größenordnungen größer als durch Gitterschwingungen. Es gilt daher für die Wärmeleitfähigkeit des Festkörpers $\lambda \approx \lambda_{el}$. Für die elektrische Leitfähigkeit gilt nach (9.24) $\varkappa = n\,e^2\,\tau/m$. Somit ist das Verhältnis von Wärme- zu elektrischer Leitfähigkeit

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2 T\ .$$

Bei konstanter Temperatur ist für alle Metalle die Wärmeleitfähigkeit λ proportional zur elektrischen Leitfähigkeit $\varkappa$:

$$\lambda = L\,T\,\varkappa\ . \tag{9.70}$$

Dies ist das *Wiedemann-Franz'sche Gesetz* (G. H. Wiedemann, 1826 bis 1899; R. Franz, 1827 bis 1902). Die Konstante

$$L = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2 \tag{9.71}$$

wird *Lorenz'sche Zahl* (L. Lorenz, 1829 bis 1891) genannt und beträgt $L = 2{,}45 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{V^2/K^2}$. Aus der Proportionalität

von λ und $\varkappa$ folgt, dass gute elektrische Leiter auch gute Wärmeleiter und umgekehrt schlechte elektrische Leiter auch schlechte Wärmeleiter sind.

Beispiel

9.3-4 Die spezifische elektrische Leitfähigkeit von Kupfer ist bei Raumtemperatur $\varkappa = 5{,}9 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$, die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 384\ \mathrm{W/(m\,K)}$. a) Wie groß ist die Lorenz-Zahl L in Kupfer? b) Wie groß ist die mittlere freie Weglänge l der Elektronen?

Lösung

a) Nach (9.70) ist die Lorenz-Zahl $L = \lambda/(T\varkappa) = 2{,}22 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{V^2/K^2}$ in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert von (9.71).

b) Nach (9.69) ist die Relaxationszeit

$$\tau = \frac{3\lambda m}{\pi^2 n k^2 T}\,.$$

Mit $n \approx 8{,}5 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$ ergibt sich $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{s}$. Die mittlere freie Weglänge ist nach (9.25) $l = v_\mathrm{F}\tau = 3{,}4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$. Dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit dem Resultat von Beispiel 9.2-3 überein.

9.3.2 Effekte im Zusammenhang mit Wärmefluss und elektrischem Strom

Im Zusammenhang mit einem Wärmestrom Φ, einem elektrischen Strom I und einem Magnetfeld H können drei unterschiedliche Effekte auftreten. Bei den *thermoelektrischen Effekten* bedingt ein Wärmestrom Φ eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ oder umgekehrt eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ einen Wärmestrom Φ. Bei den *thermomagnetischen Erscheinungen* erzeugen ein Wärmefluss und ein Magnetfeld H entweder eine Potential- oder eine Temperaturdifferenz, und bei den *galvanomagnetischen Effekten* erzeugen ein elektrischer Strom und ein Magnetfeld eine Potential- oder eine Temperaturdifferenz.

9.3.2.1 Galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte

In Abb. 9.66 sind die galvano- und thermomagnetischen Effekte zusammengestellt. Galvanomagnetische Effekte sind alle Erscheinungen, die bei einem stromdurchflossenen Leiter auftreten können, der sich in einem Magnetfeld befindet. In der vorliegenden Betrachtung stehen Strom I und Magnetfeld H senkrecht aufeinander. Das Auftreten einer Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung wird als *Hall-Effekt* bezeichnet (Abschn. 4.4.3.2). Zusätzlich zur Hall-Spannung liegt eine transversale Temperaturdifferenz ΔT vor; dies ist der *Ettingshausen-Effekt* (A. v. Ettingshausen, 1850 bis 1932). Diese Erscheinung kann wie auch der Hall-Effekt durch die Wirkung der *Lorentz-Kraft* (Abschn. 4.4.3.2) erklärt werden. Aus diesem Grund ist die Temperaturdifferenz ΔT proportional zur Stromstärke I und zum Magnetfeld H. Das Auftreten einer longitudinalen Temperaturdifferenz ΔT wird als *Nernst-Effekt* bezeichnet (W. H. Nernst, 1864 bis 1941). Infolge der Ablenkung der Strombahnen im Magnetfeld beobachtet man eine Widerstandszunahme und damit eine Potentialdifferenz in longitudinaler Richtung. Dies ist der *Thomson-Effekt* (W. Thomson, 1824 bis 1907).

Bei den thermomagnetischen Effekten fließt ein Wärmestrom Φ und es wirkt ein homogenes Magnetfeld (im Bild transversal). Unter diesen Bedingungen kann entweder eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ oder eine Temperaturdifferenz ΔT gemessen werden. Der *Ettingshausen-Nernst-Effekt* ist die Umkehrung des Ettingshausen-Effekts. Fließt ein Wärmestrom Φ senkrecht zum Magnetfeld H, dann wird eine transversale Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ gemessen. Diese Erscheinung ist das thermische Analogon zum Hall-Effekt. Wird eine longitudinale Potentialdifferenz entlang

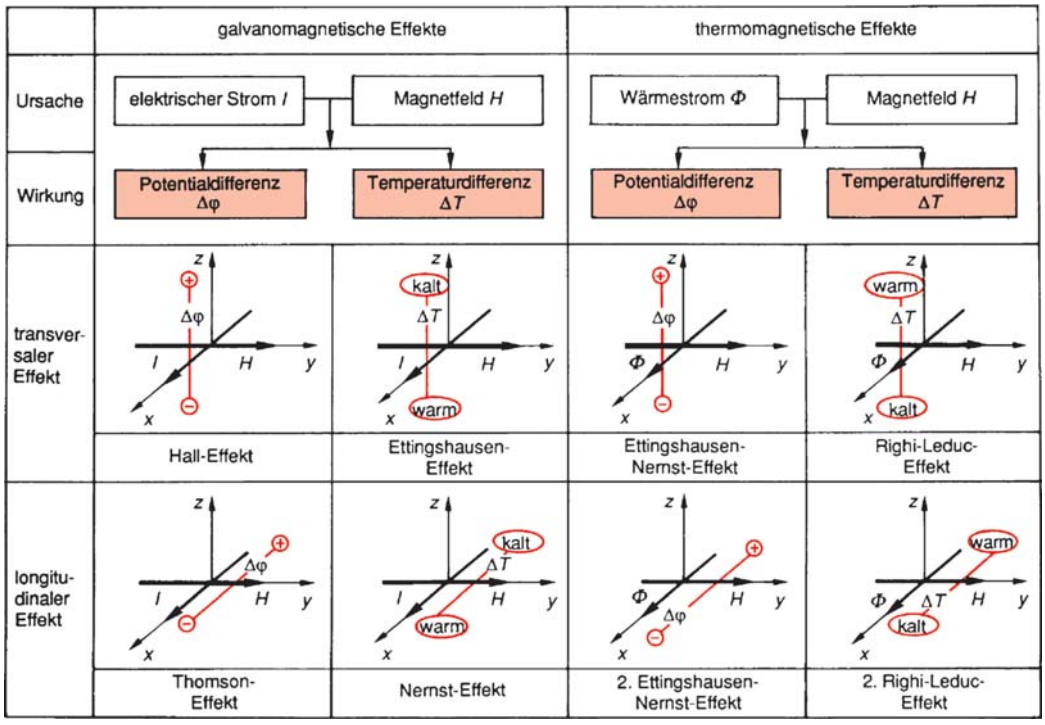


Abb. 9.66 Galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte

des Wärmestromes gemessen (*Thermokraft*), so ist dies der *zweite Ettingshausen-Nernst-Effekt*. Bei einem Wärmefluss Φ und einem transversalen homogenen Magnetfeld H tritt eine senkrecht zu beiden Größen stehende Temperaturdifferenz auf; dabei handelt es sich um den *Righi-Leduc-Effekt* (A. Righi, 1850 bis 1920; S. A. Leduc, 1856 bis 1937). Liegt die beobachtete Differenz in Richtung des Wärmestroms, so wird diese Erscheinung *zweiter Righi-Leduc-* oder *Maggi-Righi-Effekt* genannt.

9.3.2.2 Thermoelektrische Effekte

Fließt durch einen Festkörper ein Wärmestrom Φ, so kann eine Potentialdifferenz in Stromrichtung auftreten. Diese Erscheinung nennt man *Seebeck-Effekt* (T. J. Seebeck, 1770 bis 1831). Den umgekehrten Effekt, bei dem durch Anlegen einer Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ ein Temperaturunterschied ΔT gemessen wird, nennt man *Peltier-Effekt* (J. C. A. Peltier, 1785 bis 1845). Abbildung 9.67 verdeutlicht die Vorgänge.

Wenn sich zwei Metalle mit *unterschiedlichen Fermi-Grenzen* gemäß Abb. 9.68a berühren,

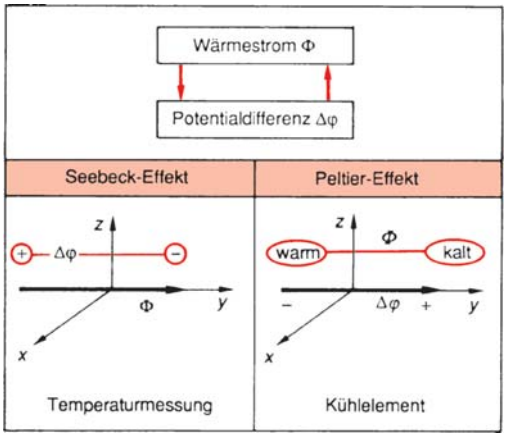


Abb. 9.67 Thermoelektrische Effekte

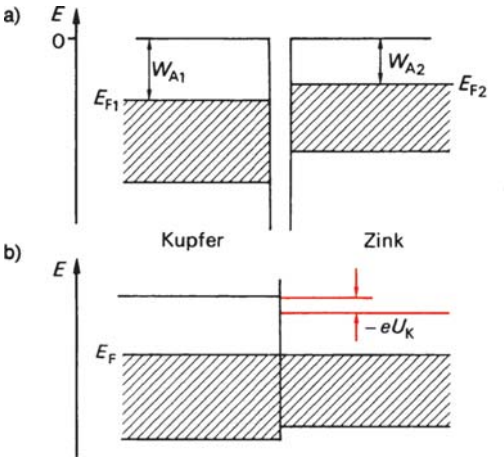


Abb. 9.68 Entstehung eines Kontaktpotentials

erfolgt durch einen Diffusionsstrom ein Ausgleich dieser Niveaus. Das eine Metall (z. B. Zn) mit dem höheren Fermi-Niveau E_{F2} (geringere Austrittsarbeit W_{A2}) gibt Elektronen an das andere Metall (z. B. Cu) mit niedrigerem Fermi-Niveau E_{F1} ab (höhere Austrittsarbeit W_{A1}). Der dabei fließende *Diffusionsstrom* baut eine entgegengesetzt wirkende *Kontaktspannung* U_K auf, sodass der Diffusionsstrom aussetzt, wenn die Fermi-Niveaus in beiden Bereichen auf gleicher Höhe liegen (Abb. 9.68b).

Werden verschiedene Metalle an beiden Enden fest verbunden, z. B. durch Löten oder Schweißen, und diese Enden unterschiedlichen Temperaturen $T_1 < T_2$ ausgesetzt, dann wird eine *Thermospannung* U_{th} messbar, die proportional zum Temperaturunterschied ΔT ist. Die Ursache ist, dass mit einer Temperaturänderung stets eine Umverteilung der Elektronen auf die verschiedenen Energieniveaus erfolgt (Abschn. 9.2.2), sodass die Fermi-Energie verschoben wird. Messglieder, die diesen Effekt ausnutzen, werden *Thermoelemente* genannt. Sie sind zur Temperaturmessung besonders gut geeignet, weil sie eine geringe Wärmekapazität bei einer hohen Empfindlichkeit haben und die Temperaturwerte in Form von elektrischen Signalen direkt zu Steuer- und Regelzwecken weiterverarbeitet werden können. Die Änderung der Thermospannung mit der Temperatur wird *Thermokraft* genannt; diese liegt im Bereich 10^{-5} V/K. Tabelle 9.12 zeigt die *thermoelektrische Spannungsreihe*. Das links stehende Metall ist an der kälteren Lötstelle gegenüber einem rechts stehenden thermoelektrisch positiv.

In der Technik werden vor allem die *Thermopaare* NiCr–Ni (bis 1000 °*C*), Eisen–Konstantan (bis 700 °C), Kupfer–Konstantan (bis 400 °C) und Platin/Rhodium–Platin (bis 1 300 °C) verwendet. Die Thermospannungen und die Toleranzen sind für diese Thermopaare nach DIN 43 722 genormt (Tabelle 9.12). Für Temperaturen bis 2000 °*C* werden Thermopaare aus Iridium/Rhenium-Iridium eingesetzt. Auch Halbleiterwerkstoffe (z. B. Zinkantimonid-Bleitellurid) finden wegen ihrer großen Thermokräfte ($\approx$ 200 µV/K) Verwendung (bis 600 °C).

Die Umkehrung des Seebeck-Effektes ist der Peltier-Effekt (Abb. 9.67). Wird ein Strom durch die Thermopaare geschickt, kühlt sich eine Lötstelle ab und die andere erwärmt sich. *Peltier-Elemente* (z. B. Wismuttellurid) werden in der Technik in Kühlschränken oder Wärmepumpen eingesetzt oder dienen zur Kühlung von integrierten Schaltkreisen und Halbleiterlasern. Das derzeit kleinste Peltier-Element (0,6 mm × 0,6 mm) verwendet man als Kühlelement auf elektronischen Schaltkarten. Peltier-Kaskaden finden in Kühlsystemen mit Wärmeübertragern Anwendung.

9.3.3 Piezoelektrizität

Bestimmte Materialien erzeugen bei einer äußeren Krafteinwirkung eine elektrische Spannung. Dieser Effekt wird *piezoelektrischer Effekt* (*Piezoeffekt*) genannt (gr. piezo: ich drücke). Er wurde 1880 von den Brüdern P. Curie (1859 bis 1906) und P. J. Curie (1855

Tabelle 9.12 Werkstoffe für Thermopaare und ihre Eigenschaften nach DIN IEC 60 584/1

Thermopaar	NiCr–Ni	Eisen–Konstantan (100Fe–45Ni55Cu)	Kupfer–Konstantan (100Cu–45Ni55Cu)	Platin/Rhodium–Platin (90Pt10Rh–100Pt)
Eigenschaften				
spezifischer Widerstand ϱ bei 20 °C in $\Omega\,mm^2/m$	0,72 bis 0,27	0,49 bis 0,11	0,49 bis 0,017	0,062 bis 0,034
Temperatur in °C	Thermospannungen in mV			
−200	−5,89	−8,15	−5,70	
−100	−3,55	−4,75	−3,40	
0	0	0	0	0
100	4,10	5,37	4,25	0,645
200	8,14	10,95	9,20	1,44
300	12,21	16,56	14,90	2,32
400	16,40	22,16	21,00	3,26
500	20,64	27,85	27,41	4,23
600	24,90	33,67	34,31	5,24
700	29,13	39,72		6,27
800	33,28	46,22		7,35
900	37,33	53,14		8,45
1000	41,27			9,59
1100	45,11			10,75
1200	48,83			11,95
1300	52,40			13,16
1400				14,37
1500				15,58
1600				16,77
1700				17,94

bis 1941) bei einigen Kristallen entdeckt. Die Eigenschaft wird z. B. an Seignettesalz, Quarz, Weinsäure, Turmalin und Zinkblende festgestellt. Auch der *inverse piezoelektrische Effekt*, d. h. die Geometrieänderung eines Kristalls bei Anlegen einer äußeren Spannung, ist bekannt. Abbildung 9.69 zeigt für den direkten und den inversen piezoelektrischen Effekt die drei technisch nutzbaren Vorgänge.

- *Längs-Effekt*:
  Die Krafteinwirkung $\boldsymbol{F}$ erzeugt eine Polarisation $\boldsymbol{P}$ und damit eine Spannung U in gleicher Richtung.
- *Quer-Effekt*:
  Die Krafteinwirkung $\boldsymbol{F}$ erzeugt eine transversale Polarisation $\boldsymbol{P}$ und damit eine Querspannung U.
- *Scher-Effekt*:
  Die Krafteinwirkung $\boldsymbol{F}$ erzeugt eine diagonal wirkende Polarisation $\boldsymbol{P}$ und damit eine Querspannung U.

Der piezoelektrische Effekt tritt in Werkstoffen auf, die eine *Perowskit-Struktur* gemäß Abb. 9.70 aufweisen. Die chemische Zusammensetzung ist ein zweiwertiges Element A^{2+} (z. B. Barium oder Blei), ein vierwertiges Ele-

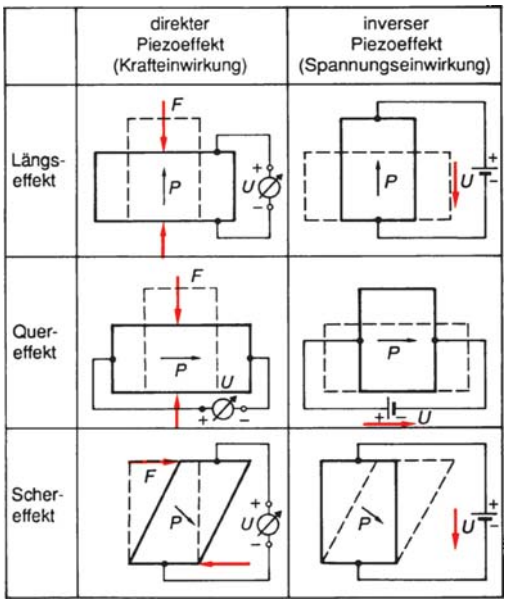


Abb. 9.69 Piezoelektrizität

ment B^{4+} (z. B. Titan, Zirkon oder Zinn) und Sauerstoff O_3^{2-}. Diese Verbindungen sind oberhalb der *ferroelektrischen Curie-Temperatur* (Abschn. 4.4.4.2) kubisch. Unterhalb dieser Temperatur verzerrt sich die Elementarzelle zu einer tetragonalen Struktur. Hierbei verschieben sich auch die Abstände zwischen den positiven und den negativen Ladungen, sodass ein *elektrisches Dipolmoment* entsteht. Die benachbarten Elementarzellen ordnen sich entsprechend um, es tritt eine *spontane Polarisation* $\boldsymbol{P}$ auf.

Die gebräuchlichsten Materialien sind Bariumtitanat und Bleizirkontitanat, die als Sinterkörper hergestellt werden. Die vermischten und vermahlenen Rohstoffe werden einem Kalzinierungsbrand unterzogen, das Granulat presst man zu Rohkörpern und sintert bei 1 200 °C. Anschließend werden die Oberflächen sehr genau geschliffen, die Metallelektroden aufgebracht und eine remanente Polarisation in der gewünschten Vorzugsrichtung erzeugt. *Piezo-Sinterkörper* haben folgende Vorteile:

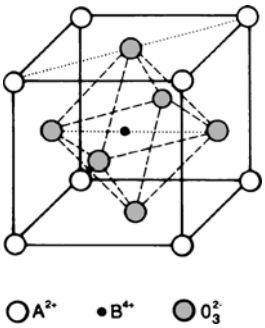


Abb. 9.70 Perowskit-Struktur piezoelektrischer Verbindungen

- Beliebige Formgebung durch die Sintertechnologie,
- beliebige Wahl der Polarisationsrichtung,
- große Permittivitätszahl ($\varepsilon_r \approx 1\,000$),
- großer Energiewandlungsfaktor (25% bis 50%) sowie
- gute Korrosionsbeständigkeit.

Bei Bariumtitanat-Sinterkörpern liegt die Curie-Temperatur und damit die Grenze für den piezoelektrischen Einsatz bereits bei $T_C = 120\,°C$. Für höhere Temperaturen ist Bleizirkonattitanat, ein Zweistoffsystem mit der Zusammensetzung $Pb[Ti_{1-x}Zr_x]O_3$ ($x \approx 0{,}5$) geeignet. Durch Wahl des Mischungsverhältnisses Titan zu Zirkon lassen sich die physikalischen Eigenschaften variieren.

Piezokeramische Bauteile werden in vielen Bereichen eingesetzt. Eine Übersicht vermittelt Abb. 9.71.

Zur Übung

Ü 9.3-1 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von langwelligen Longitudinalwellen in einem Eisenstab ist $c_s = 5\,048$ m/s. a) Wie groß ist der Elastizitätsmodul von Eisen, wenn die Dichte $\varrho = 7\,850\,\text{kg/m}^3$ beträgt? b) Wie groß ist die Federkonstante k_F im Eisengitter?

Ü 9.3-2 In Silicium haben Phononen mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k} = 1{,}64\frac{\pi}{a}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ die Energien $E_{TO} = 58{,}2$ meV und $E_{TA} = 18{,}2$ meV. Wie groß sind a) die Frequenzen der Gitterschwingungen, b) die Phononenimpulse

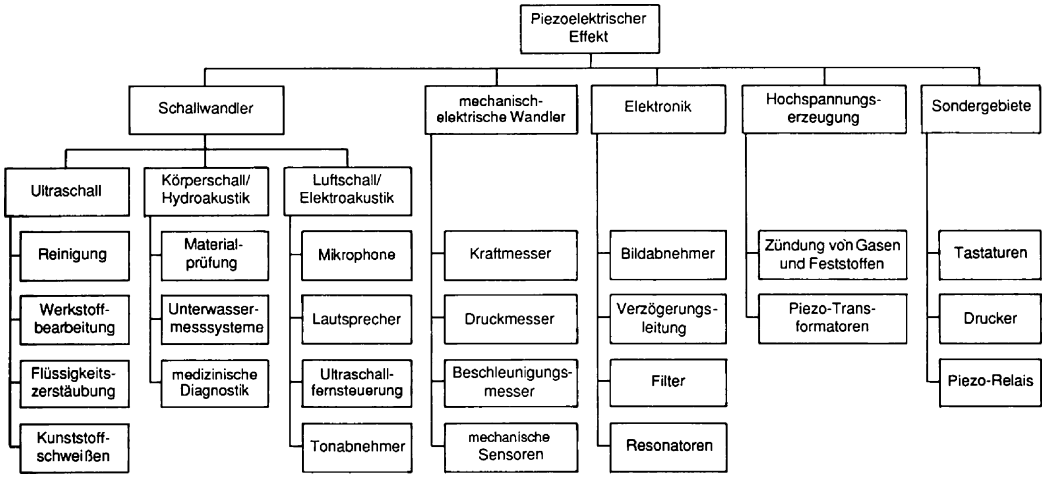


Abb. 9.71 Anwendungen des piezoelektrischen Effektes

Ü 9.3-3 Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität von Diamant bei 20 °C nach der Debye'schen Theorie? Wie groß ist die relative Abweichung zum gemessenen Wert $c = 0{,}502\ \mathrm{kJ/(kg\,K)}$?

Ü 9.3-4 Wie groß ist die mittlere freie Weglänge von Phononen in Quarzglas? ($\varrho = 2{,}2\ \mathrm{kg/dm^3}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1{,}36\ \mathrm{W/(K\,m)}$, Schallgeschwindigkeit $c_s = 5\,400\ \mathrm{m/s}$, spezifische Wärmekapazität $c = 170\ \mathrm{J/(kg\,K)}$.)

Ü 9.3-5 Der spezifische elektrische Widerstand von Silber bei 20 °C ist $\varrho = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$. Wie groß ist näherungsweise die Wärmeleitfähigkeit λ?

9.4 Optoelektronische Halbleiter-Bauelemente

Die *Optoelektronik* ist ein Teilgebiet der Elektronik, das sich mit Erscheinungen befasst, die bei der Umwandlung von elektrischer Energie in optische und umgekehrt auftreten. Das wichtigste Bauelement ist der Halbleiter-pn-Übergang, der als Lichtsender und auch als -empfänger eingesetzt werden kann. Optoelektronische Bauteile werden u. a. in der Anzeigetechnik, Messtechnik, Elektronik, Datenverarbeitung sowie Energietechnik eingesetzt.

9.4.1 Strahlungsquellen

9.4.1.1 Lumineszenzdioden

Alle *Lumineszenz-* oder *Leuchtdioden* (Light Emitting Diode, LED) bestehen aus einem pn-Übergang (Abschn. 9.2.3.3). Abbildung 9.72 zeigt die Bandstruktur eines pn-Übergangs, der in Flussrichtung betrieben wird. Bei der Flussspannung U_F wird die Diffusionsspannung so weit abgebaut, dass die Elektronen des n-Gebietes über die kleine Barriere leicht ins p-Gebiet diffundieren können; umgekehrt fließen Löcher aus dem p- ins n-Gebiet. In der

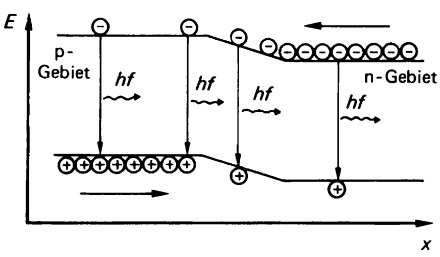


Abb. 9.72 Leuchtdiode, in Flussrichtung betrieben (schematisch)

Nähe des Übergangs *rekombinieren* die Elektronen mit den Löchern und geben dabei Energie von der Größenordnung E_g ab. Bei der *strahlenden Rekombination* wird diese Energie in Form von Photonen der Energie $hf \approx E_g$ ausgesandt. Dies bedeutet, dass eine LED näherungsweise monochromatisches Licht aussendet, dessen Wellenlänge λ_g nach (6.136) und (6.137) von der Breite der verbotenen Zone E_g abhängt:

$$\lambda_g = \frac{h\,c}{E_g} = \frac{1{,}24\,\mu\text{m eV}}{E_g}\,. \qquad (9.72)$$

Abbildung 9.73 zeigt Spektren verschieden farbiger Leuchtdioden. Die Linienbreite liegt in der Größenordnung von $\Delta\lambda \approx 40$ nm. Sie hängt im Wesentlichen von der Temperatur ab und nimmt mit steigender thermischer Energie der Ladungsträger zu.

Die Farbe der LED ist nach (9.72) direkt von der Breite der verbotenen Zone E_g abhängig. Sie kann also durch die Wahl des Halbleiters bestimmt werden. Besonders zu erwähnen sind *Mischkristalle* auf der Basis von GaAs und GaP in der Zusammensetzung $GaAs_xP_{1-x}$. Je nach Mischungsverhältnis kann das Bandgap zwischen 2,24 eV ($x = 0$) und 1,43 eV ($x = 1$) und damit die Farbe zwischen grün und IR eingestellt werden. Tabelle 9.13 zeigt eine Zusammenstellung der Daten gebräuchlicher Leuchtdioden. Weißlicht-LEDs bestehen aus blau emittierenden InGaN-LEDs, deren kurzwelliges Licht durch Beschichtung mit Leuchtstoffen (z. B. YAG:Ce) bis ins Rote transformiert wird.

Tabelle 9.13 Materialien für Lumineszenzdioden

Material: Dotierstoff	Farbe	Wellenlänge λ in nm
GaAs:Si	IR	930
$GaAs_{0,6}P_{0,4}$, AlGaInP	rot	650
$GaAs_{0,15}P_{0,85}$, AlGaInP	gelb	590
GaP:N, InGaN	grün	570
GaN, InGaN/AlGaN	blau	470

Da jedes Elektron, das vom externen Anschluss ins n-Gebiet strömt, irgendwann einmal mit einem Loch rekombinieren muss, ist die Anzahl der generierten Photonen so groß wie die Anzahl der injizierten Elektronen (falls keine strahlungslosen Übergänge stattfinden). Daraus folgt, dass die abgegebene Strahlungsleistung im Idealfall proportional zum Flussstrom sein muss.

Der Aufbau einer GaAsP-LED ist schematisch in Abb. 9.74 gezeigt. Auf einem einkristallinen *Substrat* wird der Mischkristall durch *Flüssig-* oder *Gasphasenepitaxie* abgeschieden. Nach rückwärts ausgesandte Photonen werden nur

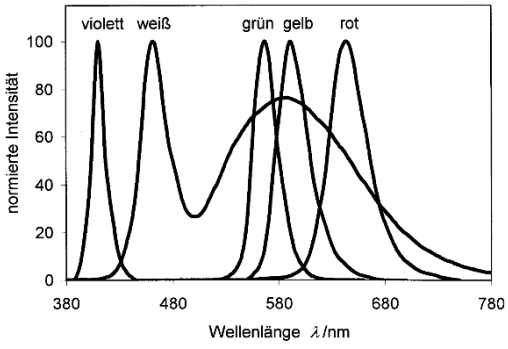


Abb. 9.73 Spektren verschiedener Lumineszenzdioden

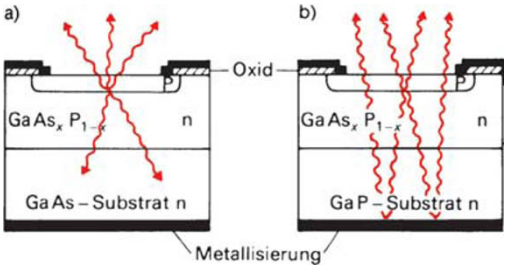


Abb. 9.74 Aufbau einer GaAsP-LED auf **a**) absorbierendem GaAs-Substrat, **b**) transparentem GaP-Substrat

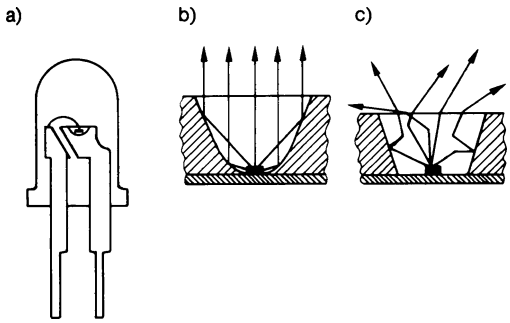


Abb. 9.75 Bauformen von Lumineszenzdioden:
a) Chip in Kunststoffgehäuse vergossen,
b) Reflektorwanne mit transparentem Kunststoff, (Diode erhält starke Richtcharakteristik),
c) Reflektorwanne mit diffus streuendem Kunststoff (Diode strahlt breit ab; für Displays geeignet)

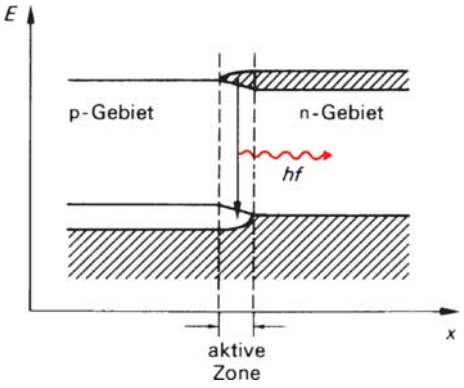


Abb. 9.76 Bänderschema einer Laserdiode bei Betrieb in Flussrichtung. Die schraffierten Gebiete sind mit Elektronen besetzt

im GaAs-Substrat absorbiert, da nur dort die Energie der Lichtquanten ausreicht, um ein Elektron vom Valenz- ins Leitungsband zu heben (Abschn. 9.4.2). Je nach Anwendungszweck setzt man die Chips in verschiedene Gehäuseformen; Abb. 9.75 zeigt einige Beispiele. Lumineszenzdioden sind sehr zuverlässig. Im normalen Betrieb sind *Lebensdauern* von etwa 10^6 h zu erwarten. Die Lebensdauer ist dabei so definiert, dass bis zum Ende die Strahlungsleistung der LED auf die Hälfte des Neuwerts abgenommen hat.

9.4.1.2 Halbleiterlaser

Die *Laserdiode* ist ein pn-Übergang mit sehr großer Dotierungskonzentration, d. h. n_D bzw. n_A beträgt etwa 10^{19} cm^{-3}. Derart hoch dotierte Halbleiter nennt man *entartet*. Das Bänderschema von Abb. 9.76 zeigt, dass die Elektronen im n-Material das Leitungsband, die Löcher im p-Material das Valenzband auffüllen. Wird die Diode in Flussrichtung betrieben, so stellt sich bei einer bestimmten Flussspannung das Bänderschema so ein, wie es in Abb. 9.76 gezeigt ist. Im Übergangsbereich zwischen p- und n-Halbleiter, der *aktiven Zone*, sind energetisch hoch liegende Zustände im Leitungsband mit Elektronen besetzt, tief liegende im Valenzband sind leer. Es liegt also eine *Besetzungsinversion* vor, die nach den Ausführungen in Abschn. 6.5.4 die Grundvoraussetzung für die *stimulierte Emission* des Lasers ist.

Die zweite Laserbedingung, die *Rückkopplung* der Lichtwellen an Resonatorspiegeln, wird bei den Laserdioden folgendermaßen erfüllt: Nach Abb. 9.77 bildet man den Laserkristall als Quader aus (Länge etwa 200 µm bis 500 µm, Breite etwa 100 µm bis 250 µm). Die spiegelnden Endflächen sind *Spaltflächen* des Kristalls, die völlig eben und planparallel sind. Infolge der großen Brechungszahl von Halbleitern ist

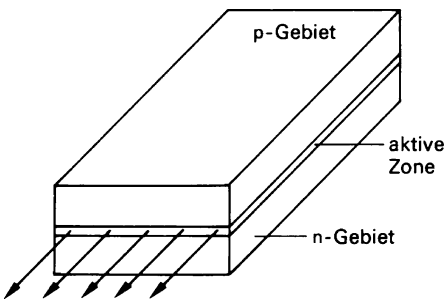


Abb. 9.77 Aufbau einer Laserdiode

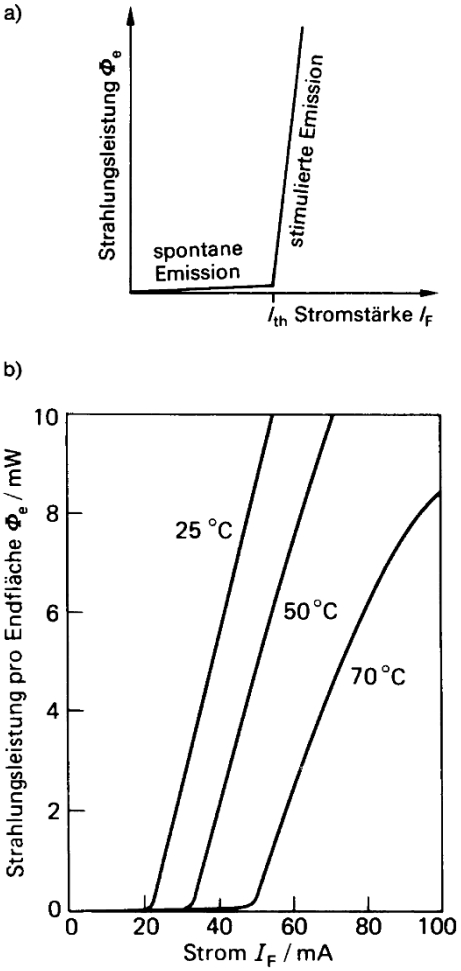


Abb. 9.78 Kennlinie eines Halbleiterlasers: **a**) Prinzip, **b**) Messkurven für einen InGaAsP-Laser mit $\lambda = 1{,}3\,\mu\text{m}$

die Reflexion so stark, dass keine externen Spiegel erforderlich sind.

Mit zunehmendem Strom steigt nach Abb. 9.78 die Ausgangsleistung wie bei einer LED an. In diesem Bereich der *spontanen Emission* ist die Strahlungsleistung verhältnismäßig niedrig. Wenn der optische Gewinn (gain) die Verluste übertrifft, setzt bei einem bestimmten *Schwellstrom* I_{th} (threshold) der Laserbetrieb ein. Im Bereich der *stimulierten Emission* nimmt die Strahlungsleistung extrem zu.

Der Schwellstrom ist temperaturabhängig; er nimmt mit steigender Temperatur zu gemäß

$$I_{th} = I_0\, e^{T/T_0}\,. \tag{9.73}$$

Für die *charakteristische Temperatur* T_0 hat man empirisch folgende Werte gefunden:

- GaAlAs-Laser: 120 K bis 230 K,
- InGaAsP-Laser: 60 K bis 80 K.

Die Wellenlänge der Laserstrahlung hängt wie bei der LED vom Bandgap E_g des Halbleiters ab. Tabelle 9.14 zeigt eine Zusammenstellung häufig verwendeter Lasermaterialien. Mit den quaternären Halbleitern lässt sich der für die optische Nachrichtentechnik wichtige Spektralbereich von 1,3 µm bis 1,6 µm erfassen, in dem die Glasfasern die besten Übertragungseigenschaften haben.

Abbildung 9.79 zeigt das Emissionsspektrum eines InGaAsP-Lasers bei $\lambda = 1{,}3\,\mu\text{m}$. Die Breite der gestrichelten Einhüllenden ist typischerweise $\Delta\lambda \approx 4\,\text{nm}$, also etwa zehnmal

Tabelle 9.14 Materialien für Halbleiter-Laser

Material	Wellenlängenbereich in µm	Anwendungen
ternäre Mischkristalle $Ga_xAl_{1-x}As$	0,69 bis 0,87	optische Datenspeicher, optische Nachrichtentechnik, Materialbearbeitung
quaternäre Mischkristalle $In_xGa_{1-x}As_yP_{1-y}$	0,92 bis 1,65	optische Nachrichtentechnik
Bleisalze, z. B. $Pb_xSn_{1-x}Se$	4 bis 40	Umweltmesstechnik, Absorptionsmessungen im mittleren IR

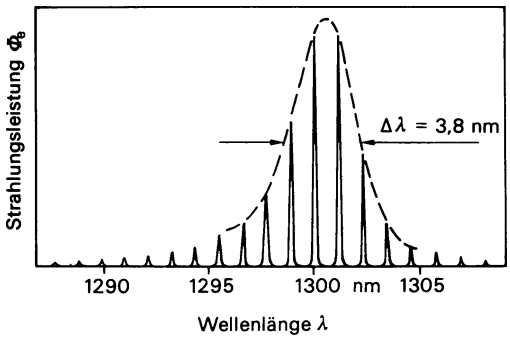


Abb. 9.79 Emissionsspektrum eines InGaAsP-Lasers

schmaler als typische LED-Linienbreiten. Das Spektrum besteht aus mehreren sehr scharfen Linien, den *longitudinalen Schwingungsmoden* des Lasers. Im Laser können sich nur solche stehenden Wellen aufbauen, bei denen die Länge L des Lasers ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist (Abschn. 5.2.4.2):

$$\overline{n}\,L = m\frac{\lambda}{2}\,, \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{9.74}$$

$\overline{n}$ ist der Brechungsindex des Kristalls. Durch geeignete Dimensionierung des Lasers kann erreicht werden, dass nur eine Longitudinalmode schwingt. Ein solcher *Monomode-Laser* ist extrem schmalbandig (Tabelle 6.9).

Aus Abb. 9.80 geht der Aufbau eines *Lasermoduls* mit einem InGaAsP-Laser für die optische Nachrichtentechnik hervor. Der Laser sitzt auf einem *Peltier-Kühler*. Die Strahlung wird in eine *Glasfaser* eingekoppelt, die direkt vor einer Spiegelfläche montiert ist. Die Strahlung, die die hintere Spiegelfläche verlässt, fällt auf eine *Monitor-Fotodiode*, über die der Flussstrom des Lasers so geregelt werden kann, dass eine konstante Ausgangsleistung zur Verfügung steht.

Ausgereifte Laserstrukturen lassen Lebensdauern von 10^5 h bis 10^6 h erwarten und kommen damit annähernd an die Lebensdauern von LEDs heran.

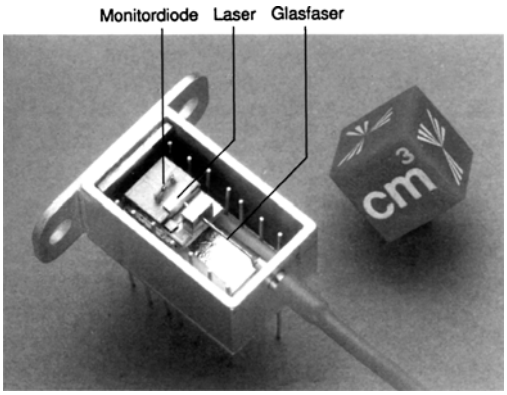


Abb. 9.80 Laser-Modul für die optische Nachrichtenübertragung. Werkfoto: SEL Alcatel

9.4.2 Empfänger

9.4.2.1 Absorption elektromagnetischer Strahlung

Aus der Vielzahl von Detektoren für elektromagnetische Strahlung zeigt Tabelle 9.15 eine Zusammenstellung der Detektoren, die auf dem *Fotoeffekt* beruhen. Beim *äußeren* Fotoeffekt wird ein Elektron durch ein auftreffendes Photon vollständig aus dem Festkörper entfernt. Das Photon muss als Mindestenergie die Austrittsarbeit des betreffenden Materials haben (Abschn. 6.5.1.1). Im Folgenden sind ausschließlich Detektoren beschrieben, die auf dem *inneren* Fotoeffekt von Halbleitern beruhen. Hierbei wird durch ein auftreffendes Photon ein Elektron aus seiner Bindung gerissen und im Kristall beweglich, den es aber nicht verlässt. Im Bänderschema wird bei der Absorption eines Photons ein Elektron vom Valenz- ins Leitungsband gehoben, also ein freies Elektron-Loch-Paar erzeugt. Damit dieser Vorgang ablaufen kann, muss die Photonenenergie $E_{\mathrm{ph}} = hf$ mindestens so groß sein wie die Breite der verbotenen Zone:

$$E_{\mathrm{ph}} \geqq E_{\mathrm{g}}\,. \tag{9.75}$$

Für die Wellenlänge gilt mit (9.72)

Tabelle 9.15 Detektoren auf der Grundlage des Fotoeffekts

äußerer Fotoeffekt	innerer Fotoeffekt
nicht verstärkend	
Fotokatode (Vakuum-Fotozelle)	Fotowiderstand, Fotodiode, Fotoelement
verstärkend	
Fotomultiplier (PM), (Sekundärelektronen-vervielfacher, SEV), Bildverstärkerröhre (Bildwandler)	Fotolawinendiode, (Avalanche-Foto-Diode, APD), Fototransistor, Fotothyristor

$$\lambda \leqq \frac{h\,c}{E_g} = \frac{1{,}24\ \mu\mathrm{m\,eV}}{E_g}\ . \qquad (9.76)$$

Diese Schwellenbedingung zeigt sich im Verlauf des *Absorptionskoeffizienten* α, der für einige Halbleiter in Abb. 9.81 dargestellt ist. Der Absorptionskoeffizient (Absorptionskonstante) α ist folgendermaßen definiert: Fällt auf einen Kristall der Dicke d Strahlung der Leistung Φ_0, dann ist die durchgelassene Strahlungsleistung Φ gegeben durch

$$\Phi = \Phi_0\, \mathrm{e}^{-\alpha\, d}\ . \qquad (9.77)$$

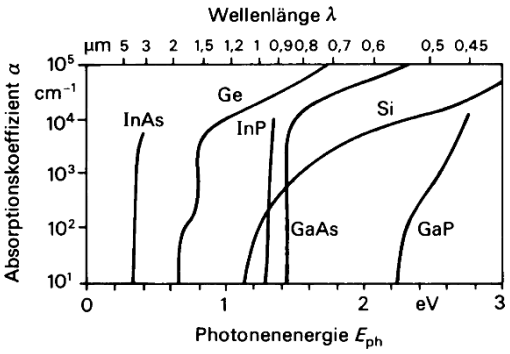


Abb. 9.81 Absorptionskoeffizienten verschiedener Halbleiter

Beispiel

9.4-1 Wie dick muss ein Siliciumkristall mindestens sein, damit er Licht der Wellenlänge $\lambda = 700$ nm so absorbiert, dass nur noch 1/1 000 der auffallenden Strahlungsleistung durchgelassen wird?

Lösung

Nach Abb. 9.81 ist der Absorptionskoeffizient $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^{-1}$. Die erforderliche Schichtdicke ist nach (9.77) $d = 1/\alpha \ln(\Phi_0/\Phi) = 27{,}6\ \mu\mathrm{m}$.

9.4.2.2 Fotowiderstand

Beim Fotowiderstand oder *Fotoleiter* wird die Tatsache genutzt, dass der Ohm'sche Widerstand des Bauteils von der Bestrahlung abhängt. Nach (9.28) gilt für die elektrische Leitfähigkeit $\varkappa = e\,(n\,\mu_\mathrm{n} + p\,\mu_\mathrm{p})$. Werden zusätzlich zu den bereits im Material vorhandenen Ladungsträgern durch absorbierte Photonen weitere geschaffen, dann nimmt die Leitfähigkeit zu bzw. vermindert sich der Widerstand. Die Widerstandsänderung kann in einer elektrischen Schaltung in eine Spannungsänderung verwandelt und nachgewiesen werden.
Für verschiedene Wellenlängenbereiche wurden unterschiedliche Detektoren entwickelt, deren *Detektivität* D^* in Abb. 9.82 dargestellt ist. Die Detektivität ist eine Größe, die gestattet, die Leistungsfähigkeit verschiedener Detektoren miteinander zu vergleichen:

$$D^* = \frac{U_\mathrm{S}/U_\mathrm{N}}{\Phi_\mathrm{e}}\sqrt{A\,\Delta f}\ . \qquad (9.78)$$

In dieser Definitionsgleichung ist $U_\mathrm{S}/U_\mathrm{N}$ das Verhältnis von Signal- zu Rauschspannung (Signal/Noise), Φ_e die eingestrahlte Leistung, A die Detektoroberfläche und Δf die Bandbreite der Nachweiselektronik. Im sichtbaren Bereich ist CdS das wichtigste Material, im nahen IR die Halbleiter PbS, InAs und InSb. Der wichtigste *Störstellenfotoleiter* ist Germanium mit verschiedenen Dotierstoffen. Bei-

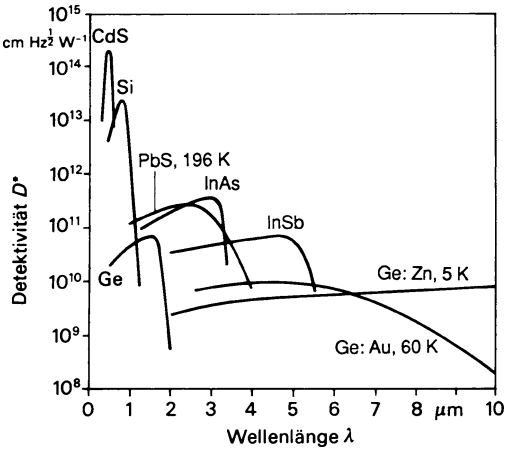


Abb. 9.82 Detektivität verschiedener Fotoleiter

spielsweise ist Ge:Zn bis etwa 40 µm Wellenlänge verwendbar. Aufgrund ihres einfachen Aufbaus und der einfachen Nachweiselektronik werden Fotoleiter häufig eingesetzt. Sie sind meist nicht sehr schnell. So hat beispielsweise PbS, das für die Wellenlängen der optischen Nachrichtentechnik 1,3 µm bis 1,6 µm bestens geeignet wäre, eine Zeitkonstante von etwa 500 µs und ist daher viel zu langsam, um schnell modulierte Signale nachweisen zu können.

9.4.2.3 Fotodioden

Wird ein pn-Übergang (Abschn. 9.2.3.3) dem Licht ausgesetzt, dann werden die in der Raumladungszone erzeugten freien Elektron-Loch-Paare nach Abb. 9.83 sofort getrennt durch das eingebaute elektrische Feld (Diffusionsspannung U_d). Die Elektronen bewegen sich zur n-, die Löcher zur p-Seite des Übergangs. Diese *Ladungstrennung* geht vonstatten ohne äußere Spannung, sie kann aber durch Anlegen einer Spannung beeinflusst werden.

Wird die Diode mit offenen Enden betrieben bzw. mit einem sehr hochohmigen Lastwiderstand, dann lädt sich die p-Seite positiv, die n-Seite negativ auf. Die Diffusionsspannung wird abgebaut und an den Enden ist die

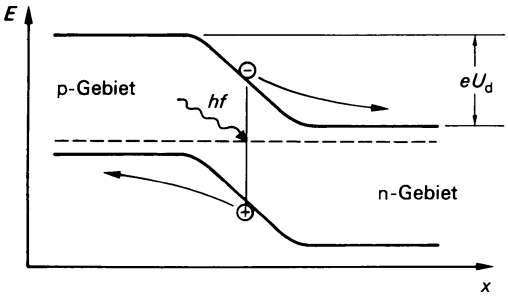


Abb. 9.83 Bänderschema einer Fotodiode ohne äußere Spannung

Leerlauffotospannung U_L abgreifbar. Die maximale Leerlaufspannung ist zwangsläufig immer kleiner als die Diffusionsspannung, sodass gilt $U_L < U_d$ bzw. $U_L < E_g/e$. Dioden mit großem Bandabstand E_g liefern eine große Leerlaufspannung U_L.

Werden die Enden der Diode kurzgeschlossen, dann fließt im äußeren Stromkreis der *Fotostrom* (Kurzschlussstrom) I_F, der die Richtung eines *Sperrstroms* hat. Zum Fotostrom tragen nicht nur die Ladungsträger bei, die innerhalb der Raumladungszone erzeugt werden. Auch Ladungsträger, die als Minoritäten außerhalb entstehen und im Lauf ihrer Lebensdauer an den Übergang *diffundieren*, werden durch das elektrische Feld auf die andere Seite gezogen und tragen zum Fotostrom bei. Der Fotostrom hängt *linear* von der absorbierten Strahlungsleistung Φ_e ab. Falls jedes absorbierte Photon ein Elektron-Loch-Paar erzeugt, das zum Fotostrom beiträgt, ist die *Quantenausbeute* $\eta = 1$ und der Fotostrom beträgt $I_F = (\Phi_e e)/(hf)$.

In der Praxis gelangen nicht alle erzeugten Ladungsträger an den Übergang. Somit tragen nicht alle zum Fotostrom bei; die wellenlängenabhängige Quantenausbeute ist kleiner als eins: $\eta(\lambda) < 1$. Der Fotostrom ist daher

$$I_F = \frac{\Phi_e e}{hf}\eta(\lambda)\,. \tag{9.79}$$

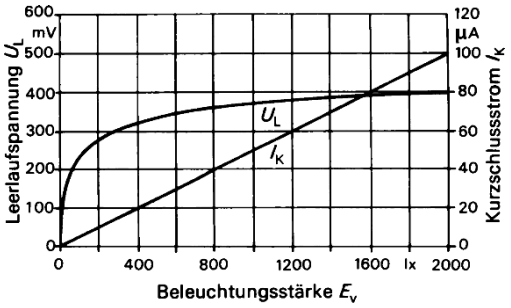


Abb. 9.84 Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom einer Silicium-Fotodiode (Fotoelement)

Abbildung 9.84 zeigt den linearen Zusammenhang zwischen Fotostrom (Kurzschlussstrom) und Beleuchtungsstärke einer Silicium-Fotodiode.

Die *Empfindlichkeit* S (Sensitivity) einer Fotodiode ist definiert als Verhältnis von Fotostrom I_F zu absorbierter Strahlungsleistung Φ_e: $S = I_F/\Phi_e$. Mit (9.79) beträgt die Empfindlichkeit

$$S(\lambda) = \frac{e}{hf}\eta(\lambda)$$

oder mit (6.116) und (6.117)

$$S(\lambda) = \frac{e}{hc}\lambda\,\eta(\lambda) = \frac{\lambda}{1{,}24\,\mu\mathrm{m}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{W}}\,\eta(\lambda)\,. \qquad (9.80)$$

Abbildung 9.85 zeigt die Empfindlichkeit einer Si-Fotodiode in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Gestrichelt eingezeichnet ist der Verlauf der Empfindlichkeit einer idealen Diode mit der Quantenausbeute $\eta = 100\%$. Die gemessene Kurve liegt generell tiefer, verläuft aber bei kurzen Wellenlängen etwa parallel zur theoretischen Kurve. Der steile Abfall auf der langwelligen Seite kommt daher, dass die Photonen nicht mehr genügend Energie haben, um Elektronen über die verbotene Zone zu heben. Die Forderung der grundlegenden

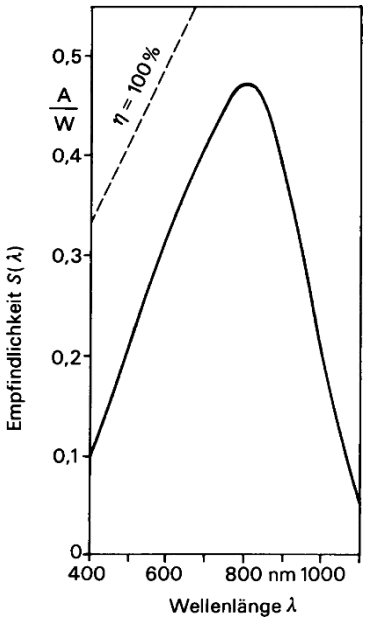


Abb. 9.85 Spektrale Empfindlichkeit einer Si-Fotodiode (gestrichelt die theoretische Empfindlichkeit bei $\eta = 100\%$ Quantenausbeute)

Gleichung (9.76) kann somit nicht mehr erfüllt werden.

Beispiel

9.4-2 Wie groß ist die Quantenausbeute η der Fotodiode von Abb. 9.85 bei der Wellenlänge $\lambda = 800$ nm?

Lösung

Nach (9.80) ist die Quantenausbeute

$$\eta(\lambda) = \frac{S(\lambda)\,1{,}24\,\mu\mathrm{m}}{\lambda}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}\,.$$

Aus Abb. 9.85 ermittelt man $S(800\,\mathrm{nm}) = 0{,}47$ A/W. Demnach beträgt die Quantenausbeute $\eta(800\,\mathrm{nm}) = 73\%$. Von jeweils 100 absorbierten Photonen tragen also 73 Elektron-Loch-Paare zum Fotostrom bei.

Die Kennlinie einer Fotodiode geht aus der bekannten Diodenkennlinie nach (9.38) hervor, indem man vom Gesamtstrom den lichtinduzierten Fotostrom abzieht:

$$I = I_S\left(\mathrm{e}^{\frac{eU}{kT}} - 1\right) - I_F\,. \qquad (9.81)$$

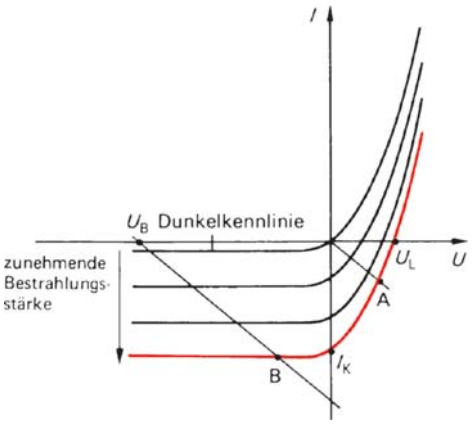


Abb. 9.86 Kennlinien einer Fotodiode

Abbildung 9.86 zeigt eine Kennlinienschar mit der Bestrahlungsstärke als Parameter. Im Leerlauf ($I = 0$) ist an den Enden die *Leerlaufspannung* U_L abgreifbar, für die aus (9.81) folgt

$$U_L = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_F}{I_S} + 1\right) . \qquad (9.82)$$

I_S ist der *Sperrsättigungsstrom* (Dunkelstrom). Da der Fotostrom linear von der Beleuchtungsstärke abhängt, nimmt die Leerlaufspannung, wie Abb. 9.84 zeigt, logarithmisch zu. Im Kurzschlussbetrieb ($U = 0$) fließt der *Kurzschlussstrom* I_K, der nach (9.81) mit dem Fotostrom identisch ist: $I_K = -I_F$.

Je nach äußerer Schaltung unterscheidet man die Betriebszustände *Elementbetrieb* und *Diodenbetrieb*. Im Elementbetrieb wird die Diode ohne äußere Spannungsquelle direkt an einen Lastwiderstand R_L (Verbraucher) angeschlossen. Die Diode arbeitet als *Stromgenerator* im vierten Quadranten der Kennlinie von Abb. 9.86 und wird als *Fotoelement* bzw. *Solarzelle* bezeichnet. Beide sind im Prinzip gleich; die Solarzelle ist aber für große Leistungen ausgelegt (Abschn. 9.4.2.5) und speziell für das Sonnenspektrum optimiert. Der Arbeitspunkt A in Abb. 9.86 ist der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden $I = -U/R_L$ und der Diodenkennlinie. Die Leistung, die der Zelle entnommen werden kann, ist $P(A) = U(A) \cdot |I(A)|$ und hängt von der Lage des Arbeitspunktes A ab. Durch Variation von R_L kann die abgegebene Leistung optimiert werden.

Beim Diodenbetrieb wird die Diode (Fotodiode im engeren Sinn) mit einem Lastwiderstand R_L in Reihe an eine Batterie angeschlossen, wobei die Batteriespannung U_B in Sperrrichtung anliegt. Der Arbeitspunkt B in Abb. 9.86 ist der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden $I = (U_B - U)/R_L$ mit der Kennlinie. Bei Änderung der Beleuchtungsstärke ändert sich nach (9.79) und (9.81) der Strom (Abb. 9.83), sodass am Lastwiderstand eine Spannung IR_L abgreifbar ist, die der Beleuchtungsstärke proportional ist.

Infolge der linearen Abhängigkeit der Ausgangsspannung von der Strahlungsleistung ist die Fotodiode ein hervorragendes Instrument zur Messung von Strahlungsleistungen. Fotodioden reagieren schneller als Fotoleiter und sind deshalb geeignet, schnell modulierte Signale, wie sie etwa in der optischen Nachrichtentechnik vorkommen, zu detektieren. Die *Grenzfrequenz* hängt im Wesentlichen davon ab, wie schnell Ladungsträger, die außerhalb der Raumladungszone erzeugt werden, an dieselbe herandiffundieren. Die Schaltzeiten handelsüblicher Silicium-Fotodioden betragen einige Mikrosekunden.

Für Fotodioden im sichtbaren Spektralbereich und für das nahe IR verwendet man Silicium. Die Empfindlichkeitskurve von Abb. 9.85 zeigt, dass die Si-Fotodiode sehr gut geeignet ist, die Strahlung von GaAs-Emittern nachzuweisen. Für die Wellenlängen 1,3 µm bis 1,6 µm (optische Nachrichtentechnik) sind Ge-Fotodioden geeignet. Vorteilhafter sind Dioden aus ternären Halbleitern, wie beispielsweise InGaAs.

Für das fernere IR werden InAs, InSb und dotiertes Germanium verwendet (Abb. 9.82).

Pin-Fotodiode

Pin-Dioden haben zwischen p- und n-Zone eine verhältnismäßig dicke (im Bereich von etwa 1 µm bis etwa 300 µm) eigenleitende (*intrinsic*) Schicht, die sehr hochohmig ist. Die angelegte Sperrspannung fällt praktisch über der i-Zone ab, sodass in der i-Zone eine große Feldstärke vorliegt. Die Photonen werden vorwiegend in der dicken i-Schicht absorbiert, erzeugen also dort Elektron-Loch-Paare, die sofort durch das elektrische Feld getrennt werden. Dadurch fallen die langsamen Diffusionsprozesse der einfachen pn-Dioden weg. Pin-Dioden reagieren schnell und können bis in den GHz-Bereich eingesetzt werden. Durch das große Sammelvolumen wird ihre Empfindlichkeit gegenüber normalen pn-Übergängen weiter ins IR ausgedehnt.
Abbildung 9.87 zeigt einen Baustein mit einem Pin-FET-Empfänger für die optische Nachrichtenübertragung. Das optische Signal fällt von der Glasfaser auf eine Pin-Diode und wird im nachgeschalteten Verstärker mit einem FET am Eingang verstärkt.
Sehr großflächige Pin-Dioden mit i-Zonen von einigen Millimetern Dicke werden als Detektoren für *Röntgenstrahlung* (Si) und *Gammastrahlung* (Ge) verwendet.

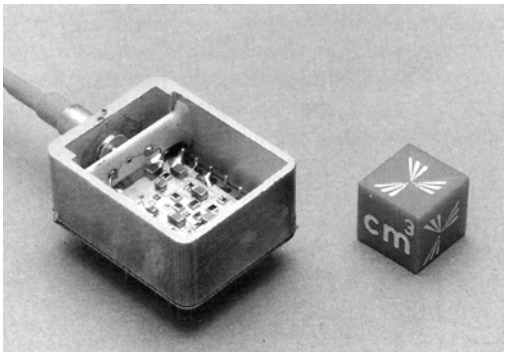


Abb. 9.87 Pin-FET-Modul für die optische Nachrichtentechnik. Werkfoto: SEL Alcatel

Lawinen-Fotodiode

Lawinen-Fotodioden (Avalanche Foto Diode, APD) werden mit einer Sperrspannung knapp unterhalb der Durchbruchspannung betrieben. Infolge der großen Feldstärke werden freie Ladungsträger so schnell, dass sie durch *Stoßionisation* weitere Elektron-Loch-Paare erzeugen können und ein lawinenartiger Anstieg der Anzahl der Ladungsträger eintritt (Abb. 9.47b). Die *innere Verstärkung* wird durch einen *Multiplikationsfaktor M* beschrieben. Typische Werte sind für

- Si-APD: $M = 100$ bis maximal 10^4,
- Ge-APD: $M = 40$ bis maximal 200.

Ein großer Verstärkungsfaktor bedeutet, dass durch ein Photon eine große Ladungsträgerlawine ausgelöst wird. Je größer die Lawine ist, umso länger dauert es aber, bis alle Ladungsträger den Übergang überquert haben. Große Verstärkung und hohe Grenzfrequenz lassen sich daher nicht gleichzeitig realisieren. In der Praxis wird ein *Verstärkungs-Bandbreite-Produkt* angegeben, das typischerweise folgende Werte aufweist:

- Si-APD: $M\Delta f \approx 200$ GHz,
- Ge-APD: $M\Delta f \approx 20$ GHz.

Hat beispielsweise eine APD ein Verstärkungs-Bandbreite-Produkt von 160 GHz, dann ist bei einer Bandbreite von $\Delta f = 2$ GHz der Multiplikationsfaktor $M = 80$. Bei hohen Frequenzen wird die APD der Pin-Diode häufig vorgezogen wegen der internen Verstärkung.

9.4.2.4 Fototransistor

Der Fototransistor ist wie die APD ein Detektor mit innerer Verstärkung. Abbildung 9.88a zeigt den Aufbau eines Bipolartransistors. Der Basis-Kollektor-Übergang ist großflächig ausgeführt und in Sperrrichtung gepolt. Durch

Photonenabsorption erzeugte Elektron-Loch-Paare werden getrennt. Die Löcher fließen durch die Basis zum Emitter, die Elektronen zum Kollektor. Die Spannung am flussgepolten Emitter-Basis-Übergang nimmt leicht zu und somit der Emitter- bzw. Kollektorstrom. Der Kollektorstrom beträgt näherungsweise

$$I_C = (1 + B)I_F \,, \tag{9.83}$$

ist also um den Stromverstärkungsfaktor B in Emitterschaltung größer als der Fotostrom I_F. Typische Werte für die Stromverstärkung liegen bei $B = 100$ bis $B = 1\,000$.

Das Ausgangskennlinienfeld von Abb. 9.88b unterscheidet sich nicht grundlegend von dem eines normalen Transistors. Lediglich ist anstelle des Basisstroms als Parameter die Beleuchtungsstärke E_v aufgetragen. Am Basisanschluss kann die Verstärkung eingestellt werden. Meist ist er aber gar nicht herausgeführt. Fototransistoren reagieren erheblich langsamer als Fotodioden und werden deshalb nur bis zu Frequenzen von etwa 100 kHz verwendet. Fototransistoren verwendet man in Lichtschranken, Lochkartenlesern, Optokopplern und Fotometern. Außer den bipolaren Transistoren gibt es auch Foto-Feldeffekttransistoren.

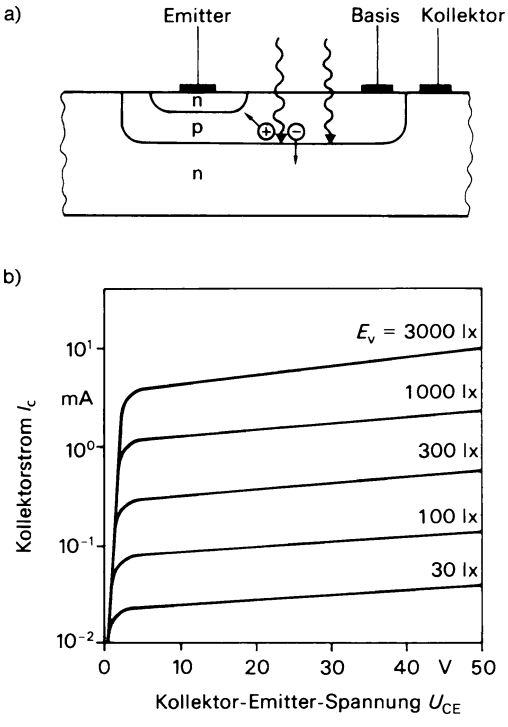


Abb. 9.88 Bipolarer Fototransistor: **a**) Aufbau, **b**) Kennlinien

9.4.2.5 Solarzellen

Die Solarzelle ist grundsätzlich eine Fotodiode mit großer Fläche (Abb. 9.89). Durch absorbierte Photonen gebildete Elektron-Loch-Paare werden infolge des eingebauten elektrischen Feldes getrennt. Dabei werden die Elektronen zum n-Kontakt, die Löcher zum p-Kontakt befördert (Abb. 9.83). Die Deckfläche der Solarzelle ist mit einem Gitter dünner Kontaktfinger versehen, die den erzeugten Fotostrom ableiten. Wegen des hohen Reflexionsgrades der Halbleiter muss die Oberfläche der Zelle stets mit einer reflexvermindernden Schicht versehen werden. Da der Absorptionskoeffizient beim Halbleiter Silicium nur langsam mit der Photonenenergie ansteigt (Abb. 9.81), benötigen Si-Solarzellen eine Dicke von 200 µm bis 300 µm. Solarzellen aus GaAs kommen dagegen mit Dicken von 1 µm bis 2 µm aus.

Im Kurzschlussbetrieb fließt durch die Solarzelle ein Fotostrom I_K, der proportional ist zur eingestrahlten Leistung Φ_e:

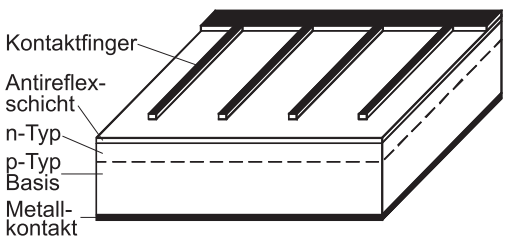


Abb. 9.89 Schematischer Aufbau einer Solarzelle

$$I_K \sim \Phi_e = E_e A \tag{9.84}$$

Bei gegebener Bestrahlungsstärke E_e steigt der Strom und damit die produzierte elektrische Leistung proportional zur Fläche A.
Im Leerlaufbetrieb ist nach (9.82) an den Kontakten der Solarzelle die Leerlaufspannung

$$U_L = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_K}{I_S} + 1\right) \approx \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_K}{I_S}\right) \tag{9.85}$$

abgreifbar, die logarithmisch von der Strahlungsleistung abhängt (Abb. 9.84).
Zeichnet man – anders als in Abb. 9.86 – die Kennlinie der Solarzelle im ersten Quadranten, so gilt für die Strom-Spannungs-Kennlinie (Abb. 9.90) einer idealen Solarzelle

$$I = I_K - I_S \left[\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1\right] . \tag{9.86}$$

Ist der Lastwiderstand im Außenkreis R_L, dann definiert der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden $I = U/R_L$ mit der Kennlinie den Arbeitspunkt. Der *optimale Lastwiderstand* liegt vor, wenn die Fläche des weißen Rechtecks maximal ist, nämlich

$$P_m = I_m U_m . \tag{9.87}$$

Der zugehörige Arbeitspunkt ist in Abb. 9.90 mit MPP (***Maximum Power Point***) gekennzeichnet. Da sich die Kennlinie mit der Sonneneinstrahlung verändert, muss für effektiven Betrieb der Lastwiderstand durch eine elektronische Schaltung so angepasst werden, dass stets im Punkt maximaler Leistung gearbeitet wird. Ein erster Schätzwert für den optimalen Lastwiderstand ist

$$R_{L,\,opt} \approx \frac{U_L}{I_K} . \tag{9.88}$$

Das Verhältnis der weißen Rechteckfläche in Abb. 9.90 zur größten denkbaren Rechteckfläche, gebildet durch den Kurzschlussstrom I_K und die Leerlaufspannung U_L, wird als *Füllfaktor* bezeichnet:

$$F_F = \frac{I_m U_m}{I_K U_L} = \frac{P_m}{I_K U_L} . \tag{9.89}$$

Der Füllfaktor ist ein Maß für die Güte der Zelle. Er beträgt 70% bis 85%.

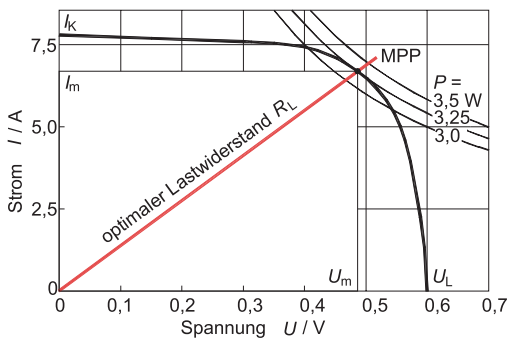


Abb. 9.90 Strom-Spannungs-Kennlinie einer Si-Solarzelle bei Standard-Testbedingungen (STC). Zellengröße 15 cm × 15 cm. Die Hyperbeln sind Kurven konstanter Leistung $P = U \cdot I$

Beispiel

9.4-3 Wie groß ist der Füllfaktor der Zelle in Abb. 9.90?

Lösung

Aus dem Diagramm wird entnommen: U_L = 0,6 V, U_m = 0,49 V, I_K = 7,6 A, I_m = 6,7 A. Damit ist der Füllfaktor F_F = 72%.

Der *Wirkungsgrad* einer Solarzelle ist definiert als Verhältnis der maximal entnehmba-

ren elektrischen Leistung P_m zur eingestrahlten optischen Leistung Φ_e:

$$\eta = \frac{P_m}{\Phi_e} = \frac{I_K U_L F_F}{E_e A} \,. \qquad (9.90)$$

Trotz großer Anstrengungen ist der Wirkungsgrad handelsüblicher Solarzellen nicht höher als etwa 15%. Die wichtigsten Verlustmechanismen sind in Tabelle 9.16 zusammengestellt. Entscheidend für die optischen Verluste ist die in Abb. 9.91 dargestellte *spektrale Bestrahlungsstärke* $E_{e,\lambda}$ des Sonnenlichts. Außerhalb der Lufthülle (AM0, **A**ir **M**ass Zero) entspricht die Verteilung etwa der eines schwarzen Strahlers mit $T = 5960\,\mathrm{K}$ (Abschn. 6.5.3). Die integrale Bestrahlungsstärke

$$E_e = \int_0^\infty E_{e,\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = 1353\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

wird als *Solarkonstante* bezeichnet. Je nach Einstrahlwinkel und Weglänge der Strahlen durch die Atmosphäre wird die Bestrahlungsstärke infolge von Absorption an Luftmolekülen verringert. Wird die Lufthülle senkrecht durchstrahlt, spricht man von *AM1-Verhältnissen* (***A**ir **M**ass **O**ne*). Bei AM2 legen die Strahlen den doppelten Weg zurück

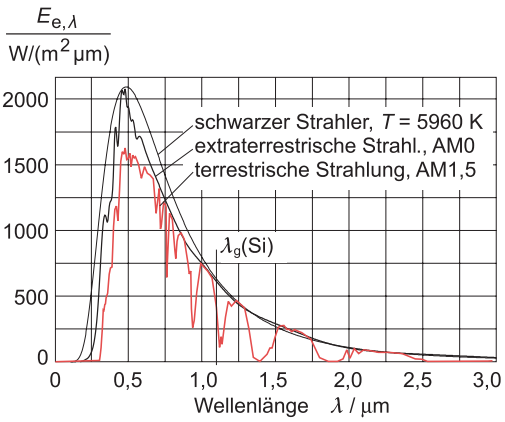


Abb. 9.91 Spektrale Bestrahlungsstärke des Sonnenlichts außerhalb der Atmosphäre (AM0) und auf der Erdoberfläche (AM1,5). λ_g ist die Grenzwellenlänge für Absorption in Silicium

Tabelle 9.16 Verluste in Si-Solarzellen

optische Verluste	elektrische Verluste
Reflexion an der Oberfläche ≈ 3%	Interne Zellenverluste infolge des Serienwiderstands des Zellenmaterials und der Kontaktfinger ≈ 1%
Abschattung durch Kontaktfinger ≈ 3%	Rekombination von Ladungsträgern in Basis und Emitter ≈ 22%
Photonen mit überschüssiger Energie ≈ 32%	
Photonen mit ungenügender Energie ≈ 24%	

usw. Als Standard zur Messung des Wirkungsgrades wurde das AM1,5-Spektrum mit $E_e = 1\,000\,\mathrm{W/m^2}$ festgelegt (STC, ***S**tandard **T**est **C**onditions*).

Der ganze Teil des Spektrums, der rechts von der Grenzwellenlänge λ_g liegt, wird nicht absorbiert, weil die Photonenenergie nicht ausreicht, um ein Elektron-Loch-Paar zu bilden. Strahlung mit $\lambda < \lambda_g$ wird zwar absorbiert, aber die überschüssige Energie $E_{ph} - E_g$ wird in der Solarzelle in Wärme verwandelt.

Die größten elektrischen Verluste entstehen durch Rekombination der Ladungsträger an der Grenzfläche zwischen der p-dotierten Basis und der metallisierten Rückseite (Abb. 9.89). Die Rekombination wird stark reduziert, wenn der Halbleiter passiviert wird durch eine dünne Schicht aus SiO_2 oder SiN. Da diese Schicht elektrisch isoliert, müssen viele punktförmige Kontakte durch die Schicht hergestellt werden. Ein kleines Gebiet mit hoher p-Dotierung erzeugt ein elektrisches Feld, das die Elektronen von den Kontakten fern hält (*local back surface field*). In der Forschung sucht man nach preisgünstigen Verfahren, um

diese Tausende von Punktkontakten an der Zellenrückseite herzustellen. Wenn dieses Problem gelöst ist, sollten Si-Solarzellen in der Massenproduktion mit Wirkungsgraden von etwa 20% möglich sein.
Das nach wie vor wichtigste Material zum Bau von Solarzellen ist Silicium. Wegen der hohen Materialkosten wird intensiv nach Alternativen gesucht (Tabelle 9.17).

Tabelle 9.17 Wirkungsgrade verschiedener Solarzellen aus industrieller Fertigung

Material	Technologie	Wirkungsgrad
Si	einkristallin	16% bis 18%
	polykristallin	14% bis 16%
	polykr. Band	11% bis 16%
	Dünnschicht	7% bis 8%
CdTe	Dünnschicht	9% bis 10%
$Cu(In,Ga)\cdot(S,Se)_2$	Dünnschicht	9% bis 12%

Zur Übung

Ü 9.4-1 Bei einem GaAlAs-Laser ist der Schwellstrom bei 0 °C $I_{th,0} = 38{,}6$ mA und bei 70 °C $I_{th,70} = 60{,}8$ mA. a) Wie groß ist die charakteristische Temperatur T_0? b) Wie groß ist der Schwellstrom $I_{th,20}$ bei 20 °C?

Ü 9.4-2 Wie groß ist der Modenabstand longitudinaler Moden bei einem InGaAsP-Laser der Wellenlänge $\lambda = 1{,}3\,\mu$m, wenn der Laserresonator $L = 500\,\mu$m lang ist? Der Brechungsindex ist $\overline{n} = 3{,}31$; die Dispersion sei vernachlässigt.

Ü 9.4-3 Ab welcher Wellenlänge λ_g wird InSb (Bandgap $E_g = 0{,}18$ eV) transparent?

Ü 9.4-4 Eine InGaAs-Fotodiode hat bei $\lambda = 1{,}3\,\mu$m die Empfindlichkeit $S = 0{,}6$ A/W. a) Wie groß ist ihre Quantenausbeute η? b) Von einem 1,3 µm-Laser trifft die Strahlungsleistung $\Phi_e = 0{,}5$ mW auf die Diode. Wie groß ist der Kurzschlussstrom I_K?

Ü 9.4-5 Eine Si-Fotodiode hat den Sperrsättigungsstrom $I_S = 10$ pA. Ihre Empfindlichkeit $S(\lambda)$ wird durch Abb. 9.85 beschrieben. Wie groß ist die Leerlaufspannung, wenn die Strahlungsleistung $\Phi_e = 5\,\mu$W eines HeNe-Lasers ($\lambda = 633$ nm) auf die Diode fällt?

Kapitel 10
Spezielle Relativitätstheorie

10

10

10 Spezielle Relativitätstheorie

10.1 Relativität des Bezugssystems 867
10.2 Lorentz-Transformation 870
10.3 Relativistische Effekte 872
10.3.1 Längenkontraktion 872
10.3.2 Zeitdilatation 872
10.3.3 Relativistische Addition der Geschwindigkeiten 874
10.4 Relativistische Dynamik 875
10.5 Spezielle Relativitätstheorie in der Elektrodynamik 878
10.5.1 Elektrodynamische Kraft 878
10.5.2 Doppler-Effekt des Lichtes 880

10 Spezielle Relativitätstheorie

Die Relativitätstheorie, von A. Einstein (1879 bis 1955) entwickelt, besteht aus der *Speziellen Relativitätstheorie* (1905 veröffentlicht) und der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (1916 veröffentlicht). Die Spezielle Relativitätstheorie befasst sich mit Fragen der Definition von Raum und Zeit in Systemen, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden relativ zueinander beschleunigte Systeme sowie der Einfluss von Gravitationsfeldern auf Maßstäbe und Uhren untersucht. So betrachtet ist die Spezielle Relativitätstheorie ein Spezialfall der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Weil die Spezielle Relativitätstheorie mathematisch einfacher und ihre Ergebnisse für die ingenieurmäßigen Anwendungen wichtiger sind, wird auf eine ausführliche Erörterung der Allgemeinen Relativitätstheorie verzichtet. *Relativistische Effekte* treten nur bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit auf. Da man es im täglichen Umgang mit physikalischen Systemen nicht mit solchen sehr schnell ablaufenden Vorgängen zu tun hat, sind die relativistischen Korrekturen an der klassischen Physik kaum wahrnehmbar. Dies hat auch zur Folge, dass die relativistischen Effekte den alltäglichen Erfahrungen zu widersprechen scheinen. In der *Elementarteilchenphysik* (Abschn. 8.9) aber kann wegen der sehr schnellen Abläufe nur *relativistische Mechanik* und *relativistische Elektrodynamik* betrieben werden. Dies hat beispielsweise auch für den Ingenieur beim Bau von Beschleunigern Konsequenzen. Wichtig ist festzustellen, dass die Relativitätstheorie in allen Bereichen der Physik gültig ist, sodass relativistische Effekte von den Elementarteilchen bis zum Universum nachweisbar sind.

10.1 Relativität des Bezugssystems

In Abschn. 2.4.1 sind die als *Galilei-Transformation* bezeichneten Gleichungen (Abb. 2.21) für *Inertialsysteme* beschrieben. Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen das *Trägheitsgesetz* gilt, nach dem sich Körper ohne Krafteinwirkung entweder in Ruhe befinden oder geradlinig gleichförmig bewegen. Die *Galilei-Transformation* erlaubt die Umrechnung der Bewegungsgleichungen von einem Inertialsystem S in ein anderes Inertialsystem S′, das sich relativ zu S mit einer konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt. Daraus resultiert das *Relativitätsprinzip* der klassischen Mechanik:

> Die Gesetze der klassischen Mechanik gelten unverändert in Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit konstan-

ter Geschwindigkeit bewegen. Es gibt kein bevorzugtes Bezugssystem und keine Möglichkeit, eine Geschwindigkeit absolut zu messen.

Die Galilei-Transformation fordert bei einer Geschwindigkeitsüberlagerung die Addition bzw. Subtraktion von Relativgeschwindigkeiten. Dies sei anhand von Abb. 10.1 erläutert. In Abb. 10.1a befindet sich ein Geschütz auf einem Wagen. Bewegt sich der Wagen mit einer Geschwindigkeit $v = 50\,\text{km/h}$ relativ zur ruhenden Wand und wird auf die Wand ein Geschoss mit der Geschwindigkeit $u = 100\,\text{km/h}$ abgefeuert, so beträgt die Geschossgeschwindigkeit relativ zur Wand $v_{\text{rel}} = u + v = 150\,\text{km/h}$. Bewegt sich der Wagen mit einer Relativgeschwindigkeit $v = -50\,\text{km/h}$ von der Wand weg, dann trifft das Geschoss an der Wand mit der Relativgeschwindigkeit $v_{\text{rel}} = u - v = 50\,\text{km/h}$ auf.
Die Addition bzw. Subtraktion der Geschwindigkeiten nach der Galilei-Transformation gelten für Bewegungen mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit c nicht mehr. Sendet ein Stern 1 Licht aus gemäß Abb. 10.1b und bewegt sich ein Gestirn 2 mit $v = 100\,000\,\text{km/s}$ auf diesen Stern 1 zu oder mit derselben Geschwindigkeit vom Stern 1 weg, dann beträgt in beiden Fällen

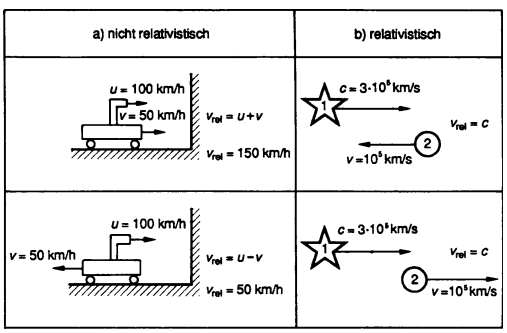


Abb. 10.1 Geschwindigkeitsüberlagerung

die Geschwindigkeit des Lichts relativ zum zweiten Stern $v_{\text{rel}} = c$. Dieser experimentelle Befund ist ein Grundprinzip der Relativitätstheorie:

Licht breitet sich unabhängig von der Relativbewegung zwischen Lichtquelle und Beobachter in allen Systemen mit der konstanten Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8\,\text{m/s}$ aus.

Dieses Postulat der *Speziellen Relativitätstheorie* beruht auf 1887 durchgeführten Messungen von A. A. Michelson (1852 bis 1931) und E. W. Morley (1838 bis 1923), die mit Hilfe des Michelson-Interferometers (Abschn. 6.4.1.3, Abb. 6.81) experimentell nachwiesen, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Relativbewegung ist.
Wie in Abb. 10.2 dargestellt, führt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu einem Widerspruch zur Galilei-Transformation. Um ihn aufzulösen, müssen die Raum-Zeit-Maßstäbe neu berechnet werden. Dies besorgt die *Lorentz-Transformation*. Die entsprechenden Gleichungen wurden bereits 1899 von H. A. Lorentz (1853 bis 1928) aufgestellt, allerdings lediglich bezogen auf die *Maxwell'schen Gleichungen* in elektromagnetischen Feldern (Abschn. 4.5.5) und fälschlicherweise unter der Annahme abgeleitet, dass sie aus der Wechselwirkung eines im Raum absolut ruhenden *Äthers* mit elektrischen und magnetischen Feldern herrührt. *Einstein* zog aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit den Schluss, dass der Äther als Übertragungsmedium für elektromagnetische Wellen nicht existiert.
Dies bedeutet, dass alle Bewegungen relativ zu irgendeinem System stattfinden (daher der Name *Relativitätstheorie*). Die Lorentz-Transformation sollte nicht nur elektrodynamische Vorgänge betreffen, sondern alle mate-

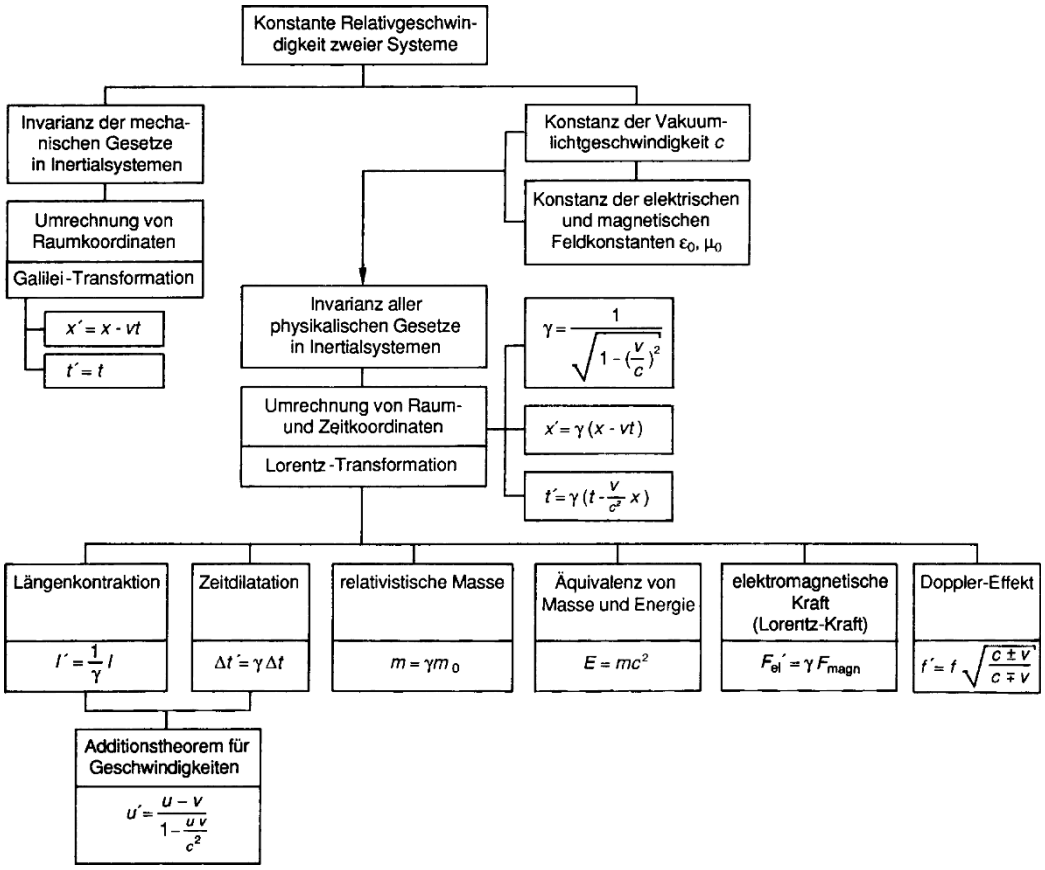


Abb. 10.2 Postulate der speziellen Relativitätstheorie und Folgerungen

riebehafteten Systeme. Folgende Folgerungen lassen sich der Lorentz-Transformation entnehmen (Abb. 10.2):

- *Längenkontraktion*
  Ein relativ zu einem Beobachter sich bewegender Körper erscheint verkürzt.
- *Zeitdilatation*
  Die Zeit verläuft in einem System, das relativ zu einem Beobachter bewegt wird, langsamer.
- *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*
  Hiermit wird sichergestellt, dass bei Geschwindigkeitsüberlagerungen die Relativgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigt.
- *Massenzunahme*
  Die Masse eines Körpers nimmt mit seiner Geschwindigkeit zu.
- *Äquivalenz von Masse und Energie*
  Mit dieser Äquivalenzbeziehung werden die Erhaltungssätze für die Materie einerseits und für die Energie andererseits zu einem einzigen Erhaltungsprinzip zusammengeführt. Zu den bekannten Energieformen kommt die zusätzliche Energie der Ruhemasse.
- *Elektromagnetische Kraft*
  Durch die Relativbewegung von Ladungen entsteht eine mit der elektrostatischen Kraft verbundene magnetische Kraft (*Lorentz-Kraft*).

– *Doppler-Effekt*
  Die Relativbewegung von Quelle und Beobachter führt zu einem relativistischen Doppler-Effekt.

10.2 Lorentz-Transformation

Bewegt sich ein System $S'(x', y', z', t')$ mit der konstanten Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zum System S (x, y, z, t), dann lautet die *Lorentz-Transformation*, die die Koordinaten der Systeme S und S′ ineinander umrechnet (unter Berücksichtigung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c),

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{bzw.} \quad x' = \gamma(x - vt) \tag{10.1}$$

$$y = y' \quad \text{bzw.} \quad y' = y \tag{10.2}$$

$$z = z' \quad \text{bzw.} \quad z' = z \tag{10.3}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad \text{bzw.} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \tag{10.4}$$

Hierbei ist γ der *relativistische Faktor*:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{10.5}$$

Beim Vergleich mit der Galilei-Transformation (Abb. 2.21) kann man feststellen, dass die Ortskoordinaten x, y, z bzw. x', y', z' durch den relativistischen Faktor γ korrigiert werden. Für den Fall $c \to \infty$ wird $\gamma = 1$, und die Lorentz-Transformation geht in die Galilei-Transformation über. Relativistische Effekte treten deshalb auf, weil die Lichtgeschwindigkeit endlich ist, sodass sich Signale nicht unendlich rasch ausbreiten können. Der relativistische Faktor γ stellt sicher, dass die Lichtgeschwindigkeit c die höchste Teilchengeschwindigkeit darstellt, da für $v > c$ der relativistische Faktor γ imaginär wird. Wie aus (10.4) ersichtlich, ist die Zeit für jeden Beobachter verschieden. Die Zeit t' des Beobachters in S′ hängt von der Zeit t des Beobachters in S, von dessen Koordinate x und der Relativgeschwindigkeit der Systeme ab.

Die Lorentz-Transformation kann man durch *Minkowski-Diagramme* (H. Minkowski, 1864 bis 1909) grafisch veranschaulichen. Dabei beschränkt man sich auf eindimensionale Bewegungen (z. B. in x-Richtung), sodass sich ein Intertialsystem S durch ein zweidimensionales Koordinatensystem darstellen lässt. Die Zeit t wird als Ordinate und die x-Koordinate als Abszisse gezeichnet, wie es Abb. 10.3 zeigt. Üblicherweise wird die x-Achse in der Einheit *Lichtsekunde* (Ls) unterteilt, d. h. in Strecken, die vom Licht in einer Sekunde durchlaufen werden (1 Lichtsekunde = $3 \cdot 10^8$ m). Die Bahnkurve eines Lichtstrahls (*Lichtlinie*) ist in diesem Diagramm die Winkelhalbierende

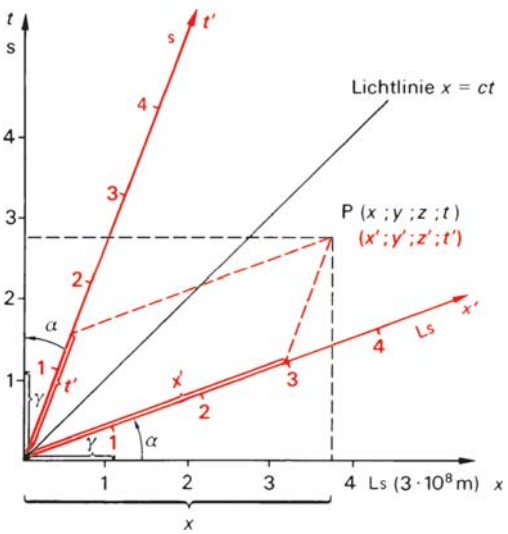


Abb. 10.3 Grafische Darstellung der Lorentz-Transformation im Minkowski-Diagramm

$x = c\,t$. Ein Punkt P mit den Koordinaten x und t (y = konst., z = konst.) wird *Weltpunkt des Ereignisses* oder *Ereignis* genannt. Die Bewegungen von Teilchen sind als Linien darstellbar, die man als *Weltlinien* des bewegten Teilchens bezeichnet.

Für ein zweites Inertialsystem S′, das sich mit der Geschwindigkeit v ($v < c$) entlang der x-Achse bewegt und denselben Ursprung hat, kann die t'-Achse ($x' = 0$) folgendermaßen berechnet werden: Aus der Lorentz-Transformation (10.1) resultiert für $x' = 0$ der Ausdruck $x = v\,t$. Die Gleichung für die x'-Achse lautet ($t' = 0$ für (10.4)) $x = (c^2/v)t$. In Abb. 10.3 ist das Koordinatensystem für x' und t' eingezeichnet. Der Maßstabsfaktor für die x'-Achse ist wegen $x = \gamma\,x'$ der relativistische Faktor γ und für die t'-Achse wegen $t = \gamma\,t'$ ebenfalls. Die Winkel zwischen x- und x'-Achse sowie zwischen t'- und t-Achse sind ebenfalls gleich (α).

Beispiel

10.2-1 Zwei Inertialsysteme S und S′ bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}75\,c$ relativ zueinander. Bestimmt werden sollen a) die Gleichung für die x'-und t'-Achse und ihre Darstellung im Minkowski-Diagramm, b) die Maßstäbe für die x'-und t'-Achse, c) die Lorentz-Transformation. d) Gegeben sind folgende Ereignisse:

in S′: P′ (2; 0; 0; 0) und Q′ (2; 0; 0; 1) am gleichen Ort,
in S: R (−1; 0; 0; 2) und T (1; 0; 0; 2) zur selben Zeit.

Die Ereignisse in den jeweils anderen Bezugssystemen sollen errechnet und in das Minkowski-Diagramm eingezeichnet werden.

Lösung

a) Für die t'-Achse gilt $x = vt - 0{,}75\,c\,t$ und für die x'-Achse $x = (c^2/v)t = 4/3(ct)$. Da im Minkowski-Diagramm $c = 1$ gesetzt wird, gilt für die t'-Achse $x = 0{,}75\,t$ und für die x'-Achse $x = 4/3(t)$ gemäß Abb. 10.4.

b) Der Maßstabsfaktor für die x'- und die t'-Achse ist der relativistische Faktor γ. Er errechnet sich nach (10.5) zu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}75)^2}} = 1{,}51\,.$$

Dies bedeutet, dass die Koordinate $x' = 1$ bei $x = \gamma$ liegt und entsprechend $t' = 1$ bei $t = \gamma$. Demnach sind die Einheiten auf der x'- und t'-Achse um das 1,51-fache größer als auf der x- und t-Achse.

c) Die Lorentz-Transformation lautet nach (10.1) bis (10.4)

$$x = 1{,}51(x' + 0{,}75\,c\,t') \quad \text{bzw.}$$
$$x' = 1{,}51(x - 0{,}75\,c\,t)\,,$$
$$y = y' \quad \text{bzw.} \quad y' = y\,,$$
$$z = z' \quad \text{bzw.} \quad z' = z\,,$$
$$t = 1{,}51(t' + 0{,}75\,x'/c) \quad \text{bzw.}$$
$$t' = 1{,}51(t - 0{,}75\,x/c)\,.$$

d) Nach der Lorentz-Transformation werden die Ereignisse umgerechnet:
P′ (2; 0; 0; 0): Nach (10.1) resultiert $x = 1{,}51\,x' = 1{,}51 \cdot 2\,\text{Ls} = 3{,}02\,\text{Ls}$.

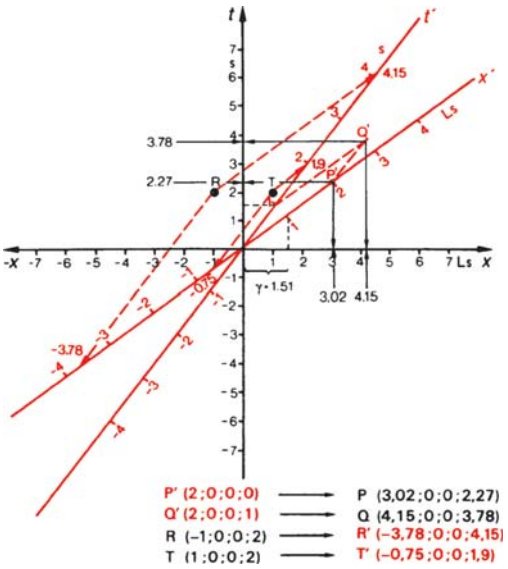


Abb. 10.4 Minkowski-Diagramm für Beispiel 10.2-1

Nach (10.4) ergibt sich $t = \gamma 0{,}75\, x'/c = 1{,}51 \cdot 0{,}75 \cdot 2\ \text{s} = 2{,}27\ \text{s}$. Das Ergebnis ist also P (3,02; 0; 0; 2,27).
Für Q′(2; 0; 0; 1) ermittelt man

$$x = 1{,}51(x' + 0{,}75\, c\, t')$$
$$= 1{,}51(2 + 0{,}75 \cdot 1)\ \text{Ls} = 4{,}15\ \text{Ls}\ ;$$

$t = 1{,}51(1 + 0{,}75 \cdot 2)\ \text{s} = 3{,}78\ \text{s}$. Das Ergebnis lautet demnach Q (4,15; 0; 0; 3,78). Die beiden Ereignisse P′ und Q′, die in S′ am gleichen Ort eintreten, finden in S an verschiedenen Orten statt.
Für R (−1; 0; 0; 2) gilt

$$x' = 1{,}51(-1 - 0{,}75 \cdot 2)\ \text{Ls} = -3{,}775\ \text{Ls}\ ;$$
$$t' = 1{,}51(2 - 0{,}75 \cdot (-1))\ \text{s} = 4{,}15\ \text{s}\ .$$

Damit ist R′ (−3,78; 0; 0; 4,15).
Für T (1; 0; 0; 2) wird

$$x' = 1{,}51(1 - 0{,}75 \cdot 2)\ \text{Ls} = -0{,}755\ \text{Ls}\ ;$$
$$t' = 1{,}51(2 - 0{,}75 \cdot 1)\ \text{s} = 1{,}89\ \text{s}\ .$$

Damit ist T′ (−0,755; 0; 0; 1,89). Die beiden Ereignisse R und T, die in S gleichzeitig stattfinden, treten in S′ zu verschiedenen Zeiten auf. Abbildung 10.4 zeigt das Minkowski-Diagramm für dieses Beispiel.

10.3 Relativistische Effekte

10.3.1 Längenkontraktion

Im System S ist der Abstand zweier Punkte, die auf einer zur x-Achse parallelen Strecke liegen, $l = x_2 - x_1$. Im System S′, das sich längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt, wird der Abstand $l' = x_2' - x_1'$ gemessen. Die Abstände transformieren sich nach der Lorentz-Transformation (10.1) gemäß

$$l = x_2 - x_1 = \gamma\left(x_2' + vt'\right) - \gamma\left(x_1' + vt'\right)\ ,$$
$$l = \gamma x_2' + \gamma v t' - \gamma x_1' - \gamma v t'\ ,$$
$$l = \gamma\left(x_2' - x_1'\right) = \gamma l' \qquad \text{oder}$$

$$l' = \frac{1}{\gamma} l = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\ l\ . \qquad (10.6)$$

Für alle Körper, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, verkürzen sich die Längen des anderen Körpers in dieser Richtung um den Faktor $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$. Senkrecht zur Bewegungsrichtung liegende Strecken erscheinen nicht verkürzt. Dieser Effekt heißt *Längenkontraktion*.

Die Längenkontraktion ist unabhängig von der Zeit t'. Sie ist auch aus dem *Minkowski-Diagramm* Abb. 10.5 ersichtlich. Für die Zahlenwerte des Beispiels 10.2-1 erscheint eine Strecke, die im System S die Länge $x = 3\ \text{Ls} = 3 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m}$ hat, im System S′ auf ungefähr $x' = 2\ \text{Ls} = 2 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m}$ verkürzt. Umgekehrt wird auch die Strecke $x' = 3\ \text{Ls}$ in S′ auf $x = 2\ \text{Ls}$ in S verkürzt.

10.3.2 Zeitdilatation

Nach der Lorentz-Transformation gilt für die Zeitdifferenz in relativ zueinander bewegten Systemen nach (10.4)

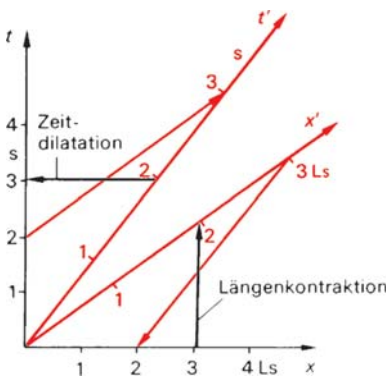


Abb. 10.5 Längenkontraktion und Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{v x_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v x_1}{c^2}\right) .$$

Daraus folgt

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right) . \qquad (10.7)$$

Wenn für einen ruhenden Beobachter in S die Ereignisse gleichzeitig stattfinden, so ist $\Delta t = 0$. Nach (10.7) sind für den bewegten Beobachter in S′ die Ereignisse *nicht gleichzeitig*. Welches der beiden Ereignisse der Beobachter früher oder später sieht, hängt vom Wert der Koordinaten x_2 und x_1 ab, da die Differenz $x_2 - x_1$ das Vorzeichen bestimmt. Finden zwei Ereignisse am gleichen Ort statt ($x_2 = x_1$, d. h. $x_2 - x_1 = 0$), dann gilt für (10.7)

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} . \qquad (10.8)$$

Bewegen sich zwei Beobachter mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander, dann erscheint das Zeitintervall $\Delta t'$ des Systems S′ vom System S aus betrachtet größer zu sein und umgekehrt. Dieser Effekt wird *Zeitdilatation* genannt.

Die Zeitdilatation ist ebenfalls im Minkowski-Diagramm (Abb. 10.5) zu erkennen. Liegt beispielsweise im System S′ zwischen zwei Ereignissen die Zeitspanne $\Delta t' = 2\,\text{s}$, so erscheint diese einem Beobachter in S als $\Delta t = 3\,\text{s}$ und umgekehrt.

Die Zeitdilatation hat zur Folge, dass für zwei gegeneinander bewegte Beobachter jeder feststellt, dass die Uhr des anderen nachgeht (*Uhrenparadoxon*). Dies wurde beim deutschen Spacelab-Flug D-1 im Experiment *Navex* bestätigt. Es stellte sich heraus, dass die Borduhr im Raumschiff, das sich mit etwa 28 000 km/h um die Erde bewegte, je Tag um etwa 25,5 µs langsamer lief als die Vergleichsuhr der Bodenstation. Wenn nach der Zeitdilatation die Uhren im System S′ langsamer als im System S laufen, ist es denkbar, dass bei Zwillingen, von denen einer sich bei einem Raumflug sehr schnell relativ zur Erde bewegt, er seinen Bruder bei der Rückkehr um Jahre gealtert vorfindet (*Zwillingsparadoxon*).

Die Längenkontraktion und die Zeitdilatation wurden durch Experimente mit Elementarteilchen bestätigt. In etwa 30 km Höhe entstehen μ-Mesonen, die eine Zerfallsdauer von etwa $t_Z = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$ aufweisen. Sie haben eine Geschwindigkeit in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ($v \approx c$). Ohne relativistische Effekte können die μ-Mesonen nur den Weg $c\,t_Z = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 600\,\text{m}$ zurücklegen. Dennoch werden die μ-Mesonen auf der Erdoberfläche nachgewiesen (30 km entfernt). Dies kann sowohl durch die Längenkontraktion, als auch durch die Zeitdilatation erklärt werden. Wegen der Mesonengeschwindigkeit von $v = 0{,}9998\,c_0$ beträgt der relativistische Faktor $\gamma = 50$. Aufgrund der Längenkontraktion erscheint dem bewegten μ-Meson der Weg von 30 km tatsächlich auf $l' = 30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}02\,\text{m} = 600\,\text{m}$ verkürzt. Verwendet man (10.8) für die Zeitdilatation, so erscheint die Zerfallszeit von der Erde aus auf $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}/0{,}02\,\text{s} = 10^{-4}\,\text{s}$ gedehnt, sodass die μ-Mesonen im Koordinatensystem der Erde den Weg $c\,\Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}\,\text{km} = 30\,\text{km}$ zurücklegen können.

Beispiel

10.3-1 Ein Raumfahrer besteigt im Alter von dreißig Jahren ein sehr schnelles Raumschiff. Während er nach seiner Zeitmessung fünf Jahre später wieder heimkehrt, ist sein Zwillingsbruder bereits sechzig Jahre alt. Wie schnell muss der Raumfahrer fliegen, um diesen Zeitunterschied zu erzeugen? Wie groß ist die Zeitdilatation bei der Geschwindigkeit $v = 3\,000\,\text{m/s}$?

Lösung

Für die Zeitdilatation gilt nach (10.8) $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Für $\Delta t' = 30$ Jahre und $\Delta t = 5$ Jahre gilt: 30 a $= \gamma \cdot 5$ a oder $\gamma = 30/5 = 6$. Daraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 6$$

und somit $v/c = \sqrt{25/36} \approx 0{,}986$ oder $v \approx 0{,}986\, c$.
Für $v = 3\,000$ m/s ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} \approx 1 \,,$$

sodass dieser Effekt nicht beobachtet wird.
Das Zwillingsparadoxon ist nicht umkehrbar. Es könnte argumentiert werden, dass aus Symmetriegründen vom Standpunkt des fahrenden Astronauten aus der zurückbleibende Bruder jünger sein sollte. Dieser Schluss ist nicht zulässig, weil das Problem an sich nicht symmetrisch ist. Während der Zwilling auf der Erde in einem Inertialsystem bleibt, steigt der Astronaut von einem System, das sich von der Erde wegbewegt auf ein System um, das sich auf die Erde zubewegt. Wegen dieses Wechsels des Bezugssystems kann der fahrende Astronaut nicht so argumentieren wie sein ruhender Zwilling.

10.3.3 Relativistische Addition der Geschwindigkeiten

In einem System S′, das sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zum System S bewegt, laufe ein Punkt mit der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} .$$

Seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ im System S ergibt sich aus der Lorentz-Transformation ((10.1) bis (10.4)). Demnach ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \gamma\, \mathrm{d}x' + \gamma v\, \mathrm{d}t' \,, \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}y' \,, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{d}z' \,, \\ \mathrm{d}t &= \gamma\, \mathrm{d}t' + \gamma \frac{v}{c^2}\, \mathrm{d}x' \,. \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeitskomponente u_x gilt

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma\, \mathrm{d}x' + \gamma v\, \mathrm{d}t'}{\gamma\, \mathrm{d}t' + \gamma \frac{v}{c^2}\, \mathrm{d}x'}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x' + v\, \mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\, \mathrm{d}x'} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \,.$$

Mit $u'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ ergibt sich

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \,.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich für die y-Komponente

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$$

und Entsprechendes für die z-Komponente der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$. Der komplette Satz der Transformationsformeln lautet

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \qquad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \,, \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \,, \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \,. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Für kleine Systemgeschwindigkeiten ($v \ll c$) gehen (10.9) in die klassische Form der Galilei-Transformation von Abb. 2.21 in Abschn. 2.4.1 über.

Beispiel

10.3-2 Im System S bewegen sich zwei Teilchen längs der x-Achse mit den Geschwindigkeiten $u_{1x} = 0{,}9\,c$ und $u_{2x} = -0{,}9\,c$ aufeinander zu. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Teilchens 1 relativ zum Teilchen 2?

Lösung

Das Teilchen 2 ruhe im System S′ ($u'_{2x} = 0$), das sich seinerseits mit $v = -0{,}9\,c$ längs der x-Achse des Systems S bewegt. Die Geschwindigkeit u'_{1x} des Teilchens 1 im System S′ und damit relativ zu Teilchen 2 ist nach (10.9)

$$u'_{1x} = \frac{u_{1x} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_{1x}} = \frac{0{,}9\,c + 0{,}9\,c}{1 + \dfrac{0{,}9\,c}{c^2}\cdot 0{,}9\,c}$$
$$= \frac{1{,}80}{1{,}81}\,c = 0{,}9945\,c\,.$$

Nach der klassischen Galilei-Transformation wäre die Relativgeschwindigkeit die 1,8-fache Lichtgeschwindigkeit. Tatsächlich ist nach (10.9) durch Geschwindigkeitsaddition keine Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit erhältlich, solange $u \le c$ und $v \le c$ ist.

10.4 Relativistische Dynamik

Der Stoß zweier Körper in einem abgeschlossenen System verläuft unter *Erhaltung des Gesamtimpulses*. Da in diesem Fall nur wechselseitige Einflüsse und keine Einwirkung von dritten Körpern oder Koordinatensystemen auftreten, gilt der Impulserhaltungssatz auch in relativistischen Systemen. Wie sich sofort zeigt, ist dies allerdings nur möglich, wenn die Masse eines Körpers *nicht konstant* ist, sondern von seiner *Geschwindigkeit* abhängt.

Im Folgenden sei zur Berechnung der relativistischen Masse ein unelastischer Stoß zweier Körper mit Kopplung betrachtet (Abschn. 2.7.3). Die Massen m der Körper seien gleich groß, ein Körper ruhe vor dem Stoß. Es wird zwischen der Masse des ruhenden Körpers $m(0)$ und der des bewegten Körpers $m(v)$ unterschieden. Zunächst wird der Stoß im Koordinatensystem S beschrieben, in dem der Körper 1 die Geschwindigkeit $u_1 = v$ (in x-Richtung) hat, der Körper 2 ist in Ruhe ($u_2 = 0$). Dann lautet der Impulserhaltungssatz

$$m(v)v = [m(v) + m(0)]u\,. \qquad (1)$$

u ist die gemeinsame Endgeschwindigkeit der Körper. Der gleiche Vorgang kann auch im System S′ beschrieben werden, das sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt. In diesem System sind die Geschwindigkeiten $u'_1 = 0$ und $u'_2 = -v$. Der Stoß läuft völlig gleichartig wie im System S ab. Die gemeinsame Endgeschwindigkeit ist in diesem Fall $-u$. Die beiden Endgeschwindigkeiten sind durch (10.9) miteinander verknüpft. Mit $u_x = u$ und $u'_x = -u$ resultiert aus (10.9)

$$u = \frac{-u + v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}\,. \qquad (2)$$

Gleichung (2) liefert für den klassischen Grenzfall $v \ll c$ das Ergebnis $u = v/2$. Aus (1) und (2) folgt

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Die Masse $m(0) = m_0$ wird als *Ruhemasse* des Körpers bezeichnet. Damit gilt für die Masse eines Körpers mit der Geschwindigkeit v

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\, m_0\,. \qquad (10.10)$$

Ein Körper mit der Ruhemasse m_0, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem bewegt, erfährt einen *relativistischen Massenzuwachs*.

Abbildung 10.6 zeigt den Massenzuwachs und die Längenkontraktion in Abhängigkeit von v/c. Es ist ersichtlich, dass ein Körper mit der Masse m_0 niemals Lichtgeschwindigkeit erreichen kann, weil er damit eine unendlich große Masse bekäme und zu seiner Beschleunigung eine unendlich große Beschleunigungsarbeit erforderlich wäre.
Nach (10.10) gilt für den *relativistischen Impuls*

$$\boldsymbol{p} = m(v)\boldsymbol{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v} \,. \tag{10.11}$$

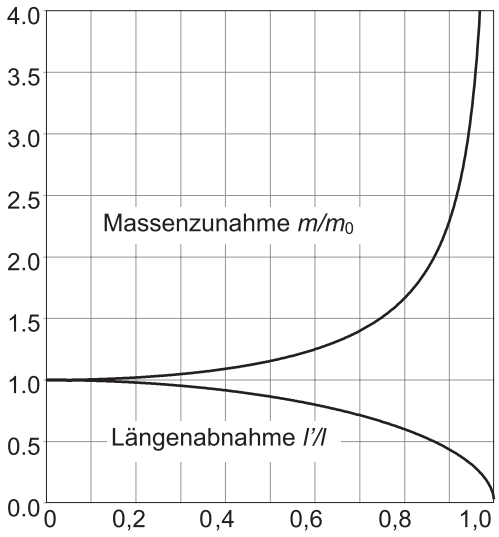


Abb. 10.6 Längenabnahme und Massenzunahme nach der Lorentz-Transformation in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses v/c

Für die *relativistische Kraft* $\boldsymbol{F}$ ergibt sich wegen $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ ((2.24) in Abschn. 2.3.2)

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) . \tag{10.12}$$

Findet eine Relativbewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v in x-Richtung statt, dann ergibt sich aus (10.12) für die Kraftkomponente in x-Richtung

$$F_\mathrm{x} = \frac{m_0 a_\mathrm{x}}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} = m_0\gamma^3 a_\mathrm{x} \,. \tag{10.13}$$

Die Größe a_x ist die Beschleunigungskomponente in x-Richtung. Für die Kraftkomponenten in y- und z-Richtung bleibt der Faktor $\sqrt{1-(v/c)^2}$ in (10.12) konstant, sodass gilt

$$F_\mathrm{y} = \frac{m_0 a_\mathrm{y}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0\gamma a_\mathrm{y} \,, \tag{10.14}$$

$$F_\mathrm{z} = \frac{m_0 a_\mathrm{z}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0\gamma a_\mathrm{z} \,. \tag{10.15}$$

Aus (10.13) bis (10.15) folgt, dass die Beschleunigung, die eine bestimmte Kraft hervorruft, davon abhängt, ob sie parallel oder senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit wirkt. Insbesondere ist i. Allg. die Beschleunigung nicht parallel zur Kraft.

Beispiel

10.4-1 Ein Elektron der Ruhemasse $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg wird durch ein elektrisches Feld

$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $E_0 = 10^5$ V/m beschleunigt. Wie lautet der Vektor $\boldsymbol{a}$ der Beschleunigung, wenn das Teilchen im betrachteten Zeitpunkt a) ruht und b) die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ hat?

Lösung

Die Kraft beträgt immer

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{E}\, e = 1{,}602 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Der relativistische Faktor ist $\gamma = 1$ für $v = 0$. Damit ist nach (10.13) bis (10.15) $a_x = F_x/m_0 = 1{,}759 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m/s^2}$ und $a_y = 1{,}759 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m/s^2}$. Der Beschleunigungsvektor lautet

$$\boldsymbol{a} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_0 = 1{,}759 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m/s^2}$; er ist parallel zum Kraftvektor.

b) Der relativistische Faktor ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1{,}155 .$$

Die Beschleunigungskomponenten sind daher $a_x = F_x/(m_0\gamma^3) = a_0/\gamma^3 = a_0/1{,}54$; $a_y = F_y/(m_0\gamma) = a_0/1{,}155$. Damit beträgt der Beschleunigungsvektor

$$\boldsymbol{a} = a_0 \begin{pmatrix} 0{,}650 \\ 0{,}866 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

er ist also nicht parallel zum Kraftvektor.

Wird ein Körper im System S in x-Richtung beschleunigt, dann muss folgende *Beschleunigungsarbeit* geleistet werden: Für die Verschiebung längs des Weges $\mathrm{d}x$ ist die Arbeit $\mathrm{d}W = F_x\,\mathrm{d}x$ erforderlich. Mit (10.13) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= m_0\gamma^3 a_x\,\mathrm{d}x = m_0\gamma^3 \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} v_x\,\mathrm{d}t \\ &= m_0\gamma^3 v_x\,\mathrm{d}v_x . \end{aligned}$$

Der Index „x“ wird im Folgenden weggelassen, da ohnehin nur x-Komponenten betrachtet werden. Die Gesamtarbeit bei der Beschleunigung von der Geschwindigkeit $v = 0$ auf v beträgt

$$W = \int_0^v \frac{m_0 v}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}v .$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$W = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} c^2 - m_0 c^2 .$$

Dieser Ausdruck wird wie in der klassischen Mechanik als *kinetische Energie* des Körpers interpretiert:

$$E_{\mathrm{kin}} = m\,c^2 - m_0\,c^2 . \qquad (10.16)$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ geht (10.16) in den klassischen Ausdruck für die kinetische Energie über:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 . \end{aligned}$$

Gleichung (10.16) zeigt, dass die von einer äußeren Kraft an einem Massenpunkt geleistete

Arbeit zu einer Massenänderung führt. Allgemein lässt sich zeigen, dass für alle Energieformen gilt:

> Jede Energiezufuhr ist mit einer Massenzunahme verknüpft.

Die einzelnen Glieder in (10.16) können folgendermaßen definiert werden:

$$E = mc^2 \tag{10.17}$$

ist die *Gesamtenergie* des Körpers,

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{10.18}$$

ist die *Ruheenergie*.
Die kinetische Energie ist die Differenz aus Gesamtenergie E und Ruheenergie E_0: $E_{\text{kin}} = E - E_0$. Diese Ergebnisse wurden von *Einstein* zum Prinzip der *Äquivalenz von Masse und Energie* verallgemeinert:

> Jeder Körper mit der Masse m hat die Energie $E = mc^2$.

Demzufolge stellt *Materie* eine *Energieform* dar; Energie ist in Materie und Materie ist in Energie umwandelbar. Diese Prozesse werden beispielsweise durch die *Paarerzeugung* (Elektron und Positron) und die *Annihilation* (Zerstrahlung von Materie und Antimaterie) eindrucksvoll bestätigt. Die Elementarteilchenphysik zeigt die völlige Symmetrie zwischen *Materie* und *Antimaterie* (Abschn. 8.9). In Abschn. 4.3.5.1 ist beschrieben, wie sich die Geschwindigkeit v geladener Teilchen beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz bei Anwendung der relativistischen Beziehungen ändert.
Zwischen Energie und Impuls eines Teilchens folgt durch Kombination von (10.11) und (10.17)

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \,. \tag{10.19}$$

Für das Photon mit der Ruhemasse $m_0 = 0$ ergibt sich hieraus $p = E/c$, oder, mit $E = hf$ nach (6.135), $p = hf/c = h/\lambda$. (6.138)

Beispiel

10.4-2 Bei der Annihilation eines Elektrons ($-e$) und eines Positrons ($+e$) verschwinden die beiden Teilchen und es entsteht γ-Strahlung. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes entstehen zwei Photonen, die in entgegengesetzter Richtung ausgesandt werden. Zu berechnen sind die Energie und die Wellenlänge jedes Photons.

Lösung

Der Impulserhaltungssatz lautet: $p_1 = p_2$ oder $hf_1/c = hf_2/c$ und schließlich $f_1 = f_2 = f$.
Der Energieerhaltungssatz lautet $2m_0c^2 = 2hf$.
Dies bedeutet, dass jedes Photon die Ruheenergie m_0c^2 des Elektrons bzw. Positrons hat, also $hf = 0{,}51$ MeV.
Die Wellenlänge beträgt $\lambda = h/(m_0c) = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m. Falls das Elektron-Positron-Paar bereits kinetische Energie hat, ist die Photonenenergie größer als 0,51 MeV und die Wellenlänge kleiner als 2,4 pm.

10.5 Spezielle Relativitätstheorie in der Elektrodynamik

10.5.1 Elektrodynamische Kraft

Die elektrostatische Kraft zwischen ruhenden Ladungen und die magnetische Kraft zwischen

bewegten Ladungen erhalten eine Verknüpfung durch die Relativitätstheorie. Es lässt sich zeigen, dass ein rein elektrisches Feld in einem System S von einem Beobachter in S′, das sich relativ zu S bewegt, als elektrisches und magnetisches Feld gesehen wird. Ebenso erhält ein rein magnetisches Feld durch Wechsel in ein bewegtes Koordinatensystem zusätzlich ein elektrisches Feld. Elektrische und magnetische Kräfte sind damit nur verschiedene Spielformen desselben physikalischen Phänomens, der *elektromagnetischen Wechselwirkung*. Je nach Wahl des Koordinatensystems ist die Wechselwirkung rein elektrisch, rein magnetisch oder gemischt.

Zur Illustration soll nach Abb. 10.7 die Kraft zwischen der Ladung Q und einem Leiter berechnet werden. Im System S ruht der Draht, die Elektronen fließen mit der Geschwindigkeit u nach rechts, die konventionelle Stromrichtung geht nach links. Die Ladung Q bewege sich mit der Geschwindigkeit u ebenfalls nach rechts. Der Draht ist insgesamt elektrisch neutral. Aufgrund der Lorentz-Kraft wird die Ladung Q durch das Magnetfeld des Stroms vom Draht abgestoßen.

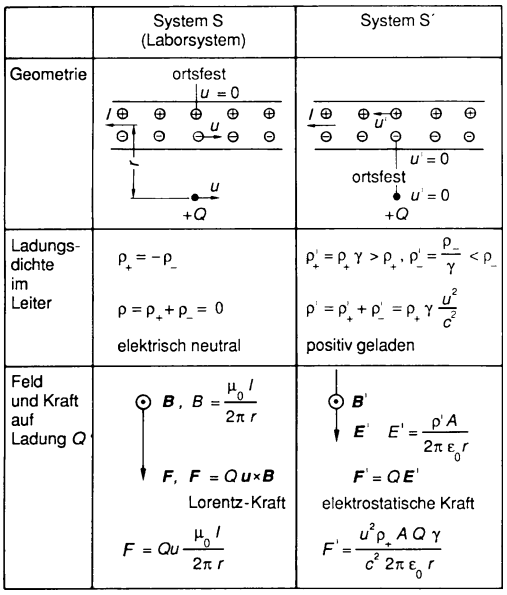


Abb. 10.7 Elektromagnetische Kraft

Das System S′ soll sich mit der Geschwindigkeit $v = u$ längs des Leiters nach rechts bewegen. In S′ ruhen die Ladung Q und die Elektronen des Leiters. Die positiven Ionen laufen dafür nach links mit der Geschwindigkeit $u' = -u$. Im Gegensatz zum System S ist in S′ der Draht aber elektrisch nicht neutral. Infolge der Längenkontraktion ist nämlich der Abstand zwischen den positiven Ionen kleiner, der Abstand zwischen den negativen Elektronen größer als im System S. Dadurch wird die Ladungsdichte $\rho'_+ > \rho'_-$, der Draht ist positiv geladen. Zusätzlich zum Magnetfeld entsteht ein radial nach außen gerichtetes elektrisches Feld, das die ruhende Ladung Q abstößt.

Vom Standpunkt der Relativitätstheorie ist klar, dass zumindest bei kleinen Geschwindigkeiten ($v \ll c$, $\gamma \approx 1$) die Wechselwirkungskraft unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein muss. Die beiden Ausdrücke für die Kraft, die in Abb. 10.7 angegeben sind, können also gleichgesetzt werden:

$$Qu\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{u^2\rho_+ AQ}{c^2 2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Mit $I = \rho_+ uA$ ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den elektrischen und magnetischen Feldkonstanten und der Lichtgeschwindigkeit:

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} . \tag{10.20}$$

Die rein magnetische Kraft (Lorentz-Kraft) F_{magn} im System S ist mit der rein elektrischen Kraft F'_{el} im System S′ verknüpft durch

$$F'_{\text{el}} = \gamma F_{\text{magn}} . \tag{10.21}$$

10.5.2 Doppler-Effekt des Lichtes

Beim Doppler-Effekt des Schalls (Abschn. 5.2.3) müssen mehrere Fälle unterschieden werden: Die Frequenzverschiebung ist jeweils anders für den Fall, dass der Beobachter im Übertragungsmedium Luft ruht und die Quelle bewegt wird oder dass die Quelle ruht und sich der Beobachter bewegt. *Einstein* folgerte aus dem Experiment von *Michelson* und *Morley*, dass für Licht kein Übertragungsmedium (Äther) existiert. Dies bedeutet, dass man beim Doppler-Effekt des Lichts nicht die oben erwähnten Fälle unterscheiden muss. Die Frequenzänderung hängt lediglich von der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter ab.

Eine einfache Ableitung der Doppler-Formel ist möglich mit der Lichtquantenvorstellung. Im System S werden Photonen der Energie $E = hf$ emittiert. Im System S′, das sich mit der Geschwindigkeit v vom System S entfernt, sitzt ein Beobachter, der die Energie $E' = hf'$ der Photonen registriert. Werden die Photonen zunächst als materielle Teilchen angesehen, dann ist ihre Energie bzw. ihr Impuls

$$\text{in S:}\quad E = m(u)c^2\,,\quad p = m(u)u\,,$$
$$\text{in S':}\quad E' = m(u')c^2\,,\quad p' = m(u')u'\,.$$

Die Geschwindigkeiten transformieren sich nach (10.9):

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}}\,.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach einigen Umformungen $E = (E' + vp')\gamma$. Wird jetzt speziell für Photonen $E = hf$, $E' = hf'$ und $p' = E'/c$ eingesetzt, dann ergibt sich $hf = hf'(1 + v/c)\gamma$ oder für die Frequenz im System S′

$$f' = f\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\,. \tag{10.22}$$

Wenn sich der Beobachter der Quelle nähert, gilt

$$f' = f\sqrt{\frac{c + v}{c - v}}\,. \tag{10.23}$$

Beispiel

10.5-1 Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 300$ m/s auf einen Radarsender der Frequenz $f = 9$ GHz zu. Wie groß ist die Frequenzänderung, die im Flugzeug gemessen wird?

Lösung

Da $v \ll c$ ist, kann (10.23) entwickelt werden: $f' \approx f(1 + v/c) = f(1 + 1 \cdot 10^{-6})$. Die relative Frequenzänderung beträgt $\Delta f/f = (f' - f)/f = f'/f - 1 = 10^{-6}$. Die absolute Frequenzänderung ist $\Delta f = 1$ kHz.

Gleichungen (10.22) und (10.23) beschreiben die Frequenzverschiebung beim *longitudinalen Doppler-Effekt*, bei dem der Beobachter sich längs der Lichtstrahlen bewegt. Bewegt sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu einem Lichtstrahl, dann wird der *transversale Doppler-Effekt* beobachtet. In diesem Fall beträgt die beobachtete Frequenz

$$f' = f\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,. \tag{10.24}$$

Dieser Ausdruck entspricht der Zeitdilatation von (10.8), nach der bewegte Uhren langsamer laufen. In der klassischen Wellenlehre gibt es keinen transversalen Doppler-Effekt.

Zur Übung

Ü 10-1 Ein Studierender der Ingenieurwissenschaften hat diesen Abschnitt des Buches studiert und findet die Lorentz-Kontraktion für eine Schlankheitskur geeignet. Wie groß müsste seine Geschwindigkeit sein, damit er ruhenden Betrachtern nur noch drei Viertel

so dick erscheint? Kann er sich, was den Massenzuwachs betrifft, darüber freuen?

Ü 10-2 Ein Proton der Ruhemasse m_{po} und der Geschwindigkeit $v = 0{,}75\,c$ stößt mit einem ruhenden Proton zusammen. Nach einem vollkommen unelastischen Stoß entsteht ein neues Teilchen der Ruhemasse m_0. Wie groß ist m_0, und welche Geschwindigkeit u hat das neue Teilchen (keine Energieabgabe nach außen)?

Ü 10-3 Ein *Einstein-Zug* der Länge $l' = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ und der Geschwindigkeit $v = 240\,000\,\mathrm{km/s}$ hat Türen im ersten und letzten Wagen, die sich bei Lichteinfall automatisch öffnen. In der Mitte des Zuges befindet sich ein Fahrgast A. Sobald die Zugmitte den am Bahnsteig stehenden Beobachter B passiert, wird im Zuginnern von A ein Lichtsignal ausgesandt. In welchen zeitlichen Abständen öffnen sich für A und B die Zugtüren? Wie weit von A entfernt müsste eine weitere lichtgesteuerte Zugtür angebracht werden, damit der Beobachter B am Bahnsteig ein gleichzeitiges Öffnen beider Türen feststellt?

Ü 10-4 Ein Autofahrer fährt mit $v = 100\,\mathrm{km/h}$ auf ein Verkehrsradargerät zu. Der am Auto reflektierte Radarstrahl wird mit einem Detektor unmittelbar neben dem Sender nachgewiesen. Wie groß ist die Frequenz f_{E} des Empfangssignals, wenn das Sendesignal die Frequenz $f_{\mathrm{S}} = 9\,\mathrm{GHz}$ hat? Wie groß ist die Schwebungsfrequenz, wenn die beiden Signale überlagert werden?

Ü 10-5 Um wie viel verringert sich die Masse eines Kernreaktors in einem Jahr, wenn ohne Unterbrechung die konstante Leistung $P = 500\,\mathrm{MW}$ abgegeben wird?

Ü 10-6 Wie groß ist die Masse eines Elektrons, das auf die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = 30\,\mathrm{GeV}$ beschleunigt wird und wie groß ist seine Geschwindigkeit?

Kapitel 11
Anhang

11

11 Anhang 885
11.1 Lösungen der Übungsaufgaben 885
11.2 Nobelpreisträger der Physik 973

11

11 Anhang

11.1 Lösungen der Übungsaufgaben

1. Einführung

Ü 1.3-1: Die für die Aufgabe relevanten Gleichungen sind in Tab. 1.6 zusammengestellt.

a) Der wahrscheinlichste Wert der Schwingungsdauer T ist der arithmetische Mittelwert

$$\overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i = 1{,}2116\ \text{s}\ .$$

b) Die minimale Fehlersumme beträgt

$$FS_{\min} = \sum_{i=1}^{N} T_i^2 - N\,\overline{T}^2 = 0{,}007136\ \text{s}^2\ .$$

Daraus folgt für die Standardabweichung des Messverfahrens

$$s_T = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N-1}} = 0{,}0172\ \text{s}\ .$$

c) Die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts beträgt

$$s_{\overline{T}} = \Delta\overline{T} = \frac{s_T}{\sqrt{N}} = 0{,}00345\ \text{s}\ .$$

d) Wenn eine statistische Sicherheit von 95% verlangt wird, beträgt der t-Faktor nach der Interpolationsformel von Tab 1.7 für $n_W = N - 1 = 24$ Wiederholungen $t_{0,95} = 2{,}08$. Damit wird die Messunsicherheit $u_z = \Delta\overline{T}\,t_{0,95} = 0{,}0072$ s. Das Endergebnis lautet somit $T_{0,95} = (1{,}2116 \pm 0{,}0072)$s.

Ü 1.3-2:

a) Der wahrscheinlichste Wert der Wärmeleitfähigkeit λ berechnet sich aus den Mittelwerten der Messgrößen:

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{\Phi}\,\overline{s}}{\overline{a}\,\overline{b}\,\left(\overline{T}_2 - \overline{T}_1\right)} = 0{,}575\ \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\ .$$

b) Die Standardabweichung des Mittelwerts der Wärmeleitfähigkeit beträgt

$$\Delta\overline{\lambda} = s_{\overline{\lambda}} = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\Phi}\Delta\overline{\Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\Delta\overline{s}\right)^2\\ &+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial a}\Delta\overline{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b}\Delta\overline{b}\right)^2\\ &+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T_2}\Delta\overline{T}_2\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T_1}\Delta\overline{T}_1\right)^2\end{aligned}}$$

Die Ableitungen sind:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\Phi} = \frac{s}{a\,b\,(T_2 - T_1)} = \frac{\lambda}{\Phi}$$
$$= 0{,}03592\ \text{m}^{-1}\,\text{K}^{-1}\ ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s} = \frac{\Phi}{a\,b\,(T_2 - T_1)} = \frac{\lambda}{s}$$
$$= 7{,}1829\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}\ ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} = -\frac{\Phi\,s}{a^2\,b\,(T_2 - T_1)} = -\frac{\lambda}{a}$$
$$= -1{,}1493\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}\ ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b} = -\frac{\Phi\,s}{a\,b^2\,(T_2 - T_1)} = -\frac{\lambda}{b}$$
$$= -1{,}2519\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}\ ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial T_2} = -\frac{\Phi\,s}{a\,b\,(T_2 - T_1)^2} = -\frac{\lambda}{T_2 - T_1}$$
$$= -0{,}06385\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}$$

und

$$\frac{\partial\lambda}{\partial T_1} = +\frac{\Phi\,s}{a\,b\,(T_2 - T_1)^2} = \frac{\lambda}{T_2 - T_1}$$
$$= 0{,}06385\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-2}}\ .$$

Damit ergibt sich $\Delta\overline{\lambda} = s_{\overline{\lambda}} = 0{,}0122\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$.

c) Der absolute Größtfehler der Wärmeleitung ist

$$\Delta\overline{\lambda}_{\max} = \left|\frac{\partial\lambda}{\partial\Phi}\right| \Delta\overline{\Phi} + \left|\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right| \Delta\overline{s} + \left|\frac{\partial\lambda}{\partial a}\right| \Delta\overline{a} +$$
$$+ \left|\frac{\partial\lambda}{\partial b}\right| \Delta\overline{b} + \left|\frac{\partial\lambda}{\partial T_2}\right| \Delta\overline{T}_2 + \left|\frac{\partial\lambda}{\partial T_1}\right| \Delta\overline{T}_1\ .$$

Mit den bereits berechneten Ableitungen ergibt sich

$$\Delta\overline{\lambda}_{\max} = 0{,}0259\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}\ .$$

Der relative Größtfehler beträgt

$$\frac{\Delta\overline{\lambda}_{\max}}{\overline{\lambda}} = 4{,}5\%\ .$$

Ü 1.3-3: Die Funktion $U_{\mathrm{th}} = a_1\vartheta + a_2\vartheta^2$ wird im Folgenden geschrieben als $y = a_1 x + a_2 x^2$. Die Bedingung, dass die Fehlersumme minimal wird, $FS = \sum (y_i - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 = \mathrm{Min!}$, führt zu folgenden Normalgleichungen:

$$a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \qquad (1)$$
$$a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i\ . \qquad (2)$$

Die Koeffizienten-Determinante ist

$$\Delta = \sum x_i^2 \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^3\right)^2\ .$$

Die gesuchten Koeffizienten werden damit

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^3}{\Delta}$$
$$= 3{,}919 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{mV}}{^\circ\mathrm{C}} \qquad \text{und}$$
$$a_2 = \frac{\sum x_i^2 \sum x_i^2 y_i - \sum x_i y_i \sum x_i^3}{\Delta}$$
$$= 3{,}338 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{mV}}{^\circ\mathrm{C}^2}\ .$$

Die Standardabweichung der y-Werte wird in Anlehnung an (1.7) berechnet gemäß

$$s_y = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2}{N-2}}$$
$$= 6{,}037 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mV}\ .$$

Der Fehler in a_1 rührt her von den Fehlern der Messgrößen y_i. Daher gilt nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (1.12)

$$s_{a_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial a_1}{\partial y_1} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_2} s_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_N} s_y\right)^2}$$

oder $\quad s_{a_1} = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^4}{\Delta}}\ .$

In gleicher Weise folgt für die Standardabweichung von a_2:

$$s_{a_2} = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}\ .$$

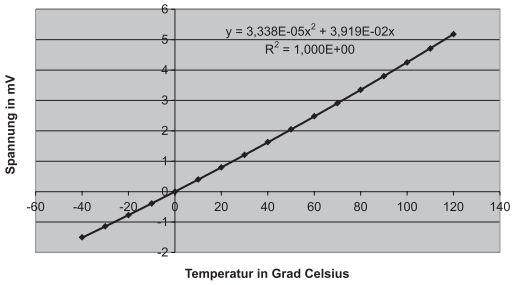
Mit unseren Werten ergibt sich
$s_{a_1} = 6{,}24 \cdot 10^{-5}$ mV/°C
und $s_{a_2} = 6{,}58 \cdot 10^{-7}$ mV/°C^2.
Der t-Faktor ist nach Tab.1.7 für $n_W = N - 2 = 15$ Wiederholungsmessungen $t_{0,68} = 1{,}04$.
Damit wird die Messunsicherheit

$$u_{z,a_1} = t_{0,68} \frac{s_{a_1}}{\sqrt{N}} = 1{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mV}}{\text{°C}}$$

und

$$u_{z,a_2} = t_{0,68} \frac{s_{a_2}}{\sqrt{N}} = 1{,}7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{mV}}{\text{°C}^2} .$$

Die zu bestimmenden Konstanten lauten somit: $a_1 = (39{,}191 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-3}$mV/°C und $a_2 = (33{,}38 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-6}$mV/°C^2.



Ü 1.3-4: Die Heizleistung y wird in Abhängigkeit von der Temperatur x mit einer linearen Funktion beschrieben: $y = a_0 + a_1 x$. Mit den in Abb. 1.8 angegebenen Beziehungen ist die Koeffizienten-Determinante

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 ,$$

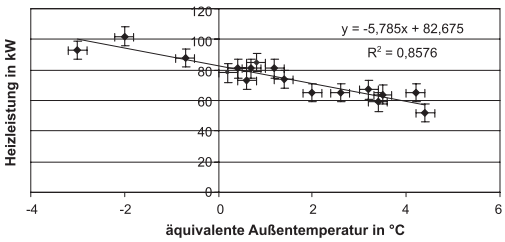
der Ordinatenabschnitt

$$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

und die Geradensteigung

$$a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} .$$

Es ergeben sich folgende Werte in Abhängigkeit von der Außenlufttemperatur bzw. der äquivalenten Außentemperatur:

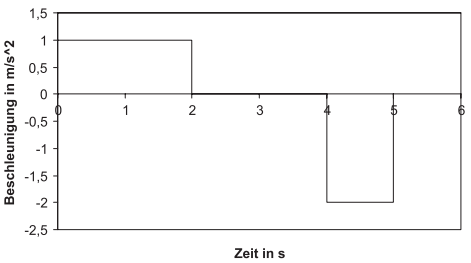


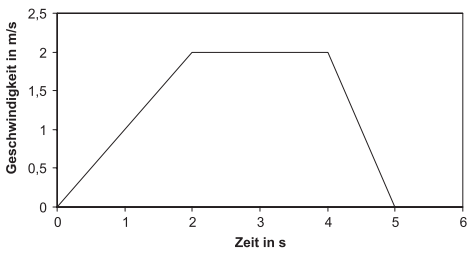
	Außenlufttemperatur	äquivalente Außentemperatur
a)	Koeffizienten der linearen Regression	
	$a_0 = 84{,}07$ kW	$a_0 = 82{,}68$ kW
	$a_1 = -3{,}20$ kW/°C	$a_1 = -5{,}79$ kW/°C
b)	Korrelationskoeffizient nach (1.21b)	
	$r = 0{,}45$	$r = 0{,}93$
	kein linearer Zusammenhang	enger Zusammenhang
c)	Standardabweichungen	
	$s_y = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N-2}}$, $s_{a_0} = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}$, $s_{a_1} = s_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$	
	$s_{a_0} = 5{,}52$ kW	$s_{a_0} = 1{,}48$ kW
	$s_{a_1} = 1{,}63$ kW/°C	$s_{a_1} = 0{,}61$ kW/°C
d)	Der t-Faktor bei $n_W = N - 2 = 15$ Wiederholungsmessungen beträgt nach Tab. 1.7 $t_{0,68} = 1{,}04$. Damit wird die Messunsicherheit $u_{z,a} = t_{0,68} \frac{s_a}{\sqrt{N}}$	
	$a_0 = (84{,}07 \pm 1{,}39)$kW	$a_0 = (82{,}68 \pm 0{,}37)$kW
	$a_1 = (-3{,}20 \pm 0{,}41)$kW/°C	$a_1 = (-5{,}79 \pm 0{,}15)$kW/°C

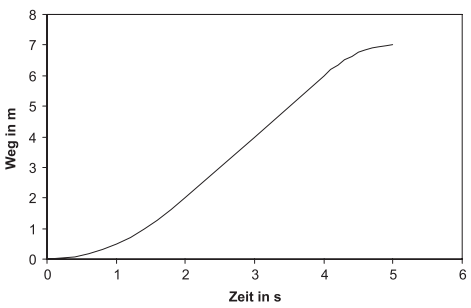
2. Mechanik

Ü 2.2-1:

a)







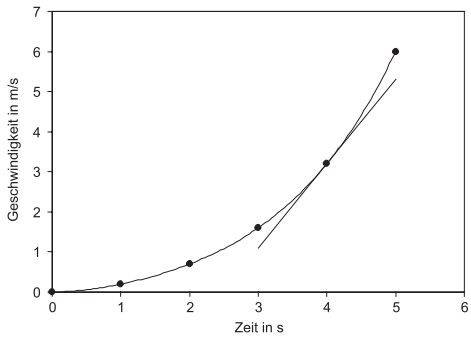
b) Die Geschwindigkeit hängt im Falle der konstanten Beschleunigung linear von der Zeit ab: $v = a\,t = 1\ \mathrm{m\,s^{-2}}\ t$ für $0 \le t \le 2$ s. Für 2 s $< t <$ 4 s bleibt die Geschwindigkeit konstant $v = 2$ m/s. Für 4 s $\le t \le$ 5 s liegt ein Bremsvorgang vor. Die Geschwindigkeit variiert gemäß $v(t) = v_0 - a\,(t - t_0) = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\,(t - 4\ \mathrm{s})$. Die maximale Geschwindigkeit ist $v_{\max} = 2$ m/s.

c) Am Ende des Vorgangs ist $v(5\ \mathrm{s}) = 0$. Dies sieht man auch aus dem $a(t)$-Diagramm. Die Gesamtfläche ist null.

d) Der Weg entspricht der Fläche im $v(t)$-Diagramm. Für $0 \le t \le 2$ s gilt $s(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\ t^2$. Für 2 s $< t <$ 4 s gilt $s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) = 2\ \mathrm{m} + 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (t - 2\ \mathrm{s})$. Für 4 s $\le t \le$ 5 s gilt $s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 = 6\ \mathrm{m} + 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (t - 4\ \mathrm{s}) - 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}(t - 4\ \mathrm{s})^2$. Der insgesamt zurückgelegte Weg ist $s(5\ \mathrm{s}) = 7$ m. Er entspricht der Gesamtfläche unter der $v(t)$-Kurve.

Ü 2.2-2:

a)



b) Durch punktweises Bestimmen der Steigung entsteht die $a(t)$-Kurve:



Die Steigung des $v(t)$-Diagramms zur Zeit $t_1 = 4$ s beträgt $a = 2{,}1\ \mathrm{m/s^2}$. Die Tangente ist im Diagramm eingezeichnet.

c) Werden im $v(t)$-Diagramm die Punkte durch Geraden verbunden und die Flächen der Trapeze unter diesem Polygonzug ermittelt, so ergibt sich ein Weg von $s(5\ \mathrm{s}) = 8{,}7$ m, der allerdings etwas zu groß

ist. Nach Aufzeichnen auf Millimeterpapier und manuellem Auszählen der Karos wurde eine Fläche von $s(5\,\mathrm{s}) \approx 8{,}2\,\mathrm{m}$ ermittelt. Mit Hilfe von Excel wurde an die Messpunkte ein Polynom vierten Grades angepasst, das folgendermaßen lautet: $v(t) = 8{,}333 \cdot 10^{-3} t^4 - 3{,}333 \cdot 10^{-2} t^3 + 1{,}917 \cdot 10^{-1} t^2 + 3{,}333 \cdot 10^{-2} t$. Durch Integration dieses Ausdrucks folgt für den Weg $s(5\,\mathrm{s}) = 8{,}4\,\mathrm{m}$.

Ü 2.2-3: Die Wurfparabel für den waagrechten Wurf entsteht durch Überlagerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung und einer Fallbewegung mit konstanter Beschleunigung in y-Richtung. Entsprechend lautet der Vektor der Beschleunigung

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \text{ der Geschwindigkeit } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

und der Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ h - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$.

Die Fallzeit t_F bestimmt sich aus der Forderung, dass die y-Komponente des Ortsvektors null wird: $y(t_\mathrm{F}) = 0 = h - \frac{1}{2} g t_\mathrm{F}^2$. Daraus folgt $t_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}391\,\mathrm{s}$.

In dieser Zeit wurde in x-Richtung der Weg $s = 0{,}40\,\mathrm{m} = v_0 t_\mathrm{F}$ zurück gelegt. Dies ergibt die Geschwindigkeit $v_0 = 1{,}02\,\mathrm{m/s}$.

Ü 2.2-4: Im Fall konstanter Winkelbeschleunigung (-verzögerung, $\alpha < 0$) gilt für die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ und für den Drehwinkel $\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$. Am Ende des Bremsvorganges (Zeitpunkt t_f) gilt $\omega(t_\mathrm{f}) = 0 = \omega_0 + \alpha t_\mathrm{f}$ und $N \cdot 2\pi = \omega_0 t_\mathrm{f} + \frac{1}{2} \alpha t_\mathrm{f}^2$. Die Auflösung der beiden Gleichungen für die beiden Unbekannten α und t_f liefert

a) $\alpha = -\dfrac{\omega_0^2}{4N\pi} = -\dfrac{\pi n_0^2}{N} = -34{,}2\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$ und

b) $t_\mathrm{f} = -\dfrac{\omega_0}{\alpha} = \dfrac{2N}{n_0} = 4{,}29\,\mathrm{s}$.

Ü 2.2-5:

a) Bei gleichmäßiger Beschleunigung wächst die Geschwindigkeit mit der Zeit linear an: $v(t) = v_1 + a\,t$ und $v_2 = v_1 + a\,\Delta t$. Der zurück gelegte Weg Δs in der Zeit Δt kann am einfachsten aus der mittleren Geschwindigkeit berechnet werden:

$$\Delta s = \bar{v}\,\Delta t = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t\,.$$

Daraus folgt für die Zeitspanne

$$\Delta t = \frac{2\,\Delta s}{v_1 + v_2} = 66{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

b) Die Tangentialbeschleunigung ist

$$a_\mathrm{tan} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 0{,}293\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

c) Mit dem in Tab. 2.1 dargestellten Zusammenhang zwischen Tangentialbeschleunigung und Winkelbeschleunigung ergibt sich

$$\alpha = \frac{a_\mathrm{tan}}{r} = 1{,}46 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

d) Die Zentripetalbeschleunigung ist

$$a_\mathrm{zp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}\,.$$

Damit wird

$$a_{\mathrm{zp},1} = \frac{v_1^2}{r} = 0{,}0347\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \text{und}$$

$$a_{\mathrm{zp},2} = \frac{v_2^2}{r} = 0{,}386\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ü 2.2-6:

a) Die Winkelgeschwindigkeit folgt aus der Periodendauer gemäß

$$\omega_\mathrm{E} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{E}} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Der Vektor $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}$ verläuft parallel zur Erdachse (Drehachse) von Süden nach Norden.

c) Die Umfangsgeschwindigkeit ist das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Abstand r von der Drehachse:

$$v = r\,\omega = R\omega\cos\varphi\,.$$

Für den Äquator gilt $v(0) = 465\,\text{m/s}$. In Stuttgart ist $v(48°\,41') = 307\,\text{m/s}$.

d) Die Zentripetalbeschleunigung ist

$$a_{zp} = r\,\omega^2 = R\,\omega^2\,\cos\varphi\,.$$

Am Äquator gilt $a_{zp}(0) = 0{,}0339\,\text{m/s}^2$, in Stuttgart $a_{zp}(48°\,41') = 0{,}0224\,\text{m/s}^2$.

Ü 2.3-1:

a) An den beiden Körpern zieht jeweils ihre Gewichtskraft $m_1 g$ bzw. $m_2 g$ nach unten. Der Faden erfährt also zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte. Die resultierende Kraft ist $F_{res} = F_{G,2} - F_{G,1} = (m_2 - m_1)\,g$. Diese Kraft beschleunigt das gesamte System. Also gilt nach Newton: $F_{res} = m_{ges}\,a$ oder $(m_2 - m_1)\,g = (m_2 + m_1)\,a$. Daraus folgt

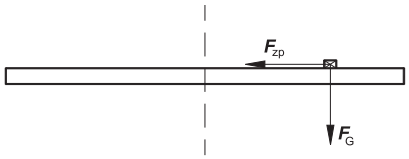
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,g\,.$$

b) Zur Bestimmung der Fadenkraft wird beispielsweise Körper 1 betrachtet. An ihm greift nach oben die Fadenkraft F_F an und nach unten die Gewichtskraft $F_{G,1} = m_1 g$. Die resultierende Kraft wirkt nach oben und beschleunigt ihn mit der bereits bekannten Beschleunigung a. Demnach gilt nach Newton: $F_{res} = F_F - m_1 g = m_1 a$, oder $F_F = m_1(g+a)$. Wird a von oben eingesetzt, folgt für die Fadenkraft

$$F_F = \frac{2\,m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,g\,.$$

Ü 2.3-2:

a) Die Gewichtskraft F_G wirkt senkrecht nach unten. Der Radiergummi macht nur dann eine Kreisbewegung, wenn eine in Richtung Zentrum wirkende Kraft vorhanden ist, die Zentripetalkraft.



b) Die Haftreibungskraft F_H zwischen Gummi und Scheibe spielt hier die Rolle der Zentripetalkraft.

c) Stabilität ist gegeben für $F_H = m\,g\,\mu_H \geq m\,r_1\,\omega^2$. Wenn der Radierer rutschen soll, muss gelten

$$\omega > \sqrt{\frac{g\,\mu_H}{r_1}}\,.$$

Für die Grenzdrehzahl gilt

$$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\,\mu_H}{r_1}} = 1{,}58\,\text{s}^{-1} = 94{,}6\,\text{min}^{-1}\,.$$

d) Der Stabilitätsbereich ist gegeben durch

$$r \leq \frac{g\,\mu_H}{4\pi^2\,n_2^2} = 9{,}13\,\text{cm}\,.$$

Ü 2.3-3:

a) Wenn die Geschosse in den Holzklotz eindringen, gibt es jedes Mal eine große Kraftspitze. Ersetzt man nun die im zeitlichen Abstand $T = 1/6\,\text{s}$ auftretenden Kraftstöße durch eine gleichmäßige mittlere Kraft, so kann man sich vorstellen, dass diese mittlere Kraft jeweils in der Periodendauer T die Geschwindigkeit v eines Geschosses gleichmäßig auf null abbremst. Damit ist die mittlere Beschleunigung $a_m = \frac{v}{T}$ und die mittlere Kraft

$$F_{m1} = m\,a_m = \frac{m\,v}{T} = 120\,\text{N}\,.$$

b) Nach actio = reactio gilt für das Gewehr dasselbe wie für den Holzklotz, also ist $F_{m2} = F_{m1}$. Vektoriell gilt $\boldsymbol{F}_{m2} = -\boldsymbol{F}_{m1}$.

c) Wenn die Kugeln wieder mit einem Zehntel ihrer Geschwindigkeit abprallen, ist die mittlere Beschleunigung größer als in a), nämlich

$$a_\mathrm{m} = \frac{v + 0{,}1 \cdot v}{T} = 1{,}1\,\frac{v}{T}\,.$$

Die mittlere Kraft wird jetzt auch um 10 % größer als bei a), nämlich $F_\mathrm{m} = 132\ \mathrm{N}$.

Ü 2.3-4: Wenn der Körper nach Süden beschleunigt wird, wirkt die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{res} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$ ebenfalls nach Süden, bzw. in einem kartesischen x, y-Koordinatensystem in Richtung der negativen y-Achse. Ihr Betrag ist $F_\mathrm{res} = m\,a = 2\ \mathrm{N}$. In vektorieller Schreibweise gilt damit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2\ \mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\ \mathrm{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\ \mathrm{N} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \end{pmatrix}$$

$$\text{oder} \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} -2\ \mathrm{N} \\ -5\ \mathrm{N} \end{pmatrix}\,.$$

Der Betrag der Kraft ist

$$F_3 = |\boldsymbol{F}_3| = \sqrt{4 + 25}\ \mathrm{N} = 5{,}39\ \mathrm{N}\,.$$

Sie weist in den dritten Quadranten des Koordinatensystems. Der Winkel zur positiven x-Achse beträgt

$$\varphi = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}2^\circ + 180^\circ = 248{,}2^\circ\,.$$

Ü 2.3-5:

a) Im reibungsfreien Fall und ohne Berücksichtigung der Seiltrommel und der Seilmasse gelten die Ausführungen von Ü 2.3-1. Damit ist die Beschleunigung

$$a = \frac{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{M} - m_\mathrm{G}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{M} + m_\mathrm{G}}\,g = 0{,}723\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

b) Am Mitfahrer greifen zwei Kräfte an: die Gewichtskraft nach unten und die Kraft vom Kabinenboden auf seine Beine nach oben. Die resultierende Kraft ist verantwortlich für die Beschleunigung des Mitfahrers. Also gilt nach Newton:

$$F_\mathrm{res} = m_\mathrm{M} g - F_\mathrm{Boden} = m_\mathrm{M} a \quad \text{oder}$$

$$F_\mathrm{Boden} = m_\mathrm{M}(g - a) = 681{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

Nach actio = reactio drückt der Mitfahrer mit derselben Kraft auf den Boden. Wenn er auf einer Waage stünde, würde diese die Masse $m_\mathrm{scheinbar} = \dfrac{F_\mathrm{Boden}}{g} = 69{,}5\ \mathrm{kg}$ anzeigen.

c) Nach einer Fallhöhe von $h = 15\ \mathrm{m}$ hat die Kabine die Geschwindigkeit (Abb. 2.6) $v = \sqrt{2\,a\,h} = 4{,}66\ \mathrm{m/s}$. Um diese Geschwindigkeit innerhalb des Bremsweges $s = 20\ \mathrm{cm}$ auf null abzubremsen ist die mittlere Beschleunigung

$$a_\mathrm{m} = \frac{v^2}{2\,s} = 54{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nach oben erforderlich. Diese wird aufgebracht von der resultierenden Kraft aus Gewichtskraft nach unten und Bodenkraft nach oben:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{Boden} - m_\mathrm{M} g = m_\mathrm{M} a_\mathrm{m}\,.$$

Die mittlere Kraft in den Beinen ist die Gegenkraft zur Bodenkraft. Also gilt

$$F_\mathrm{m} = m_\mathrm{M}(g + a_\mathrm{m}) = m_\mathrm{M}\left(g + a\frac{h}{s}\right)$$

$$= 4\,802\ \mathrm{N}\,.$$

Dies ist das 6,5-fache seiner Gewichtskraft.

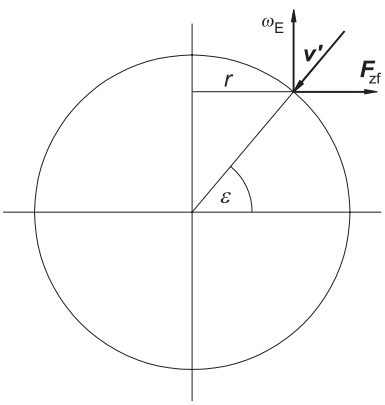
Ü 2.3-6: Die Resultierende aus Seil- und Gewichtskraft beschleunigt die Last nach oben: $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{Seil} - F_\mathrm{G} = m\,a$. Damit ist die Beschleunigung

$$a = \frac{F_\mathrm{Seil} - F_\mathrm{G}}{m}\,.$$

Mit $m = \dfrac{F_\mathrm{G}}{g}$ wird die maximale Beschleunigung

$$a_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max} - F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{G}/g} = \left(\frac{F_\mathrm{max}}{F_\mathrm{G}} - 1\right) g = 2{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ü 2.4-1: Die Zentrifugalkraft zieht senkrecht zur Erdachse nach außen und beträgt unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers (Ü 2.2-6) $F_{zf} = m\,r\,\omega^2 = m\,R\,\cos\varepsilon\,\omega_E^2 = 0{,}218$ N. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ des fallenden Körpers weist näherungsweise in Richtung Erdmittelpunkt (s. Ü. 2.4-3). Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_E$ liegt parallel zur Erdachse. Damit weist die Coriolis-Kraft $\boldsymbol{F}_C = 2m\,\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}_E$ nach Osten (in die Zeichenebene hinein). Sie beträgt $F_C = 2m\,v'\,\omega_E \sin(90° + \varepsilon) = 2m\,v'\,\omega_E \cos\varepsilon = 0{,}0937$ N.



Ü 2.4-2: Die Coriolis-Beschleunigung ist $\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_E \times \boldsymbol{v}'$; dabei ist $\boldsymbol{\omega}_E$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde und $\boldsymbol{v}'$ die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Erde.

Flug nach Norden: $\boldsymbol{v}'$ hat die Richtung eines Meridians. Die Coriolis-Beschleunigung $\boldsymbol{a}_C$ weist damit nach Westen. Der Betrag ist $a_C = 2\omega_E v'\,\sin\varepsilon$. Dieser Fall ist in Abb. 2.24 dargestellt.

Flug nach Süden: $\boldsymbol{a}_C$ weist in Richtung Osten, der Betrag ist wieder $a_C = 2\omega_E v'\,\sin\varepsilon$.

Flug nach Osten: $\boldsymbol{\omega}_E$ und $\boldsymbol{v}'$ stehen senkrecht aufeinander. Der Vektor $\boldsymbol{a}_C$ weist ins Erdinnere, er steht senkrecht auf der Erdachse. Der Betrag ist $a_C = 2\omega_E v'$.

Flug nach Westen: $\boldsymbol{\omega}_E$ und $\boldsymbol{v}'$ stehen senkrecht aufeinander. Der Vektor $\boldsymbol{a}_C$ steht senkrecht auf der Erdachse und weist nach außen. Der Betrag ist wieder $a_C = 2\omega_E v'$.

Ü 2.4-3:

a) Das Lot hängt in Richtung $\boldsymbol{g}_{eff}$ (Abb. 2.23). Für den Winkel β zwischen $\boldsymbol{g}_{eff}$ und $\boldsymbol{g}$ gilt nach dem Sinus-Satz

$$\frac{\sin\beta}{a_{zf}} = \frac{\sin\varepsilon}{g_{eff}}\,.$$

Damit ist

$$\sin\beta = \frac{a_{zf}}{g_{eff}}\sin\varepsilon = \frac{r_E\omega_E^2}{g_{eff}}\cos\varepsilon\sin\varepsilon$$

und $\beta = 0{,}0975\,°$.

b) Die Kugel wird nach Osten abgelenkt, wie in Ü 2.4-1 erläutert. Die Ablenkung kann folgendermaßen bestimmt werden: Während des Falls wirkt die Coriolis-Kraft in Richtung Osten (positive x-Richtung), wenn man vernachlässigt, dass sie sich ein klein wenig dreht. Ihr Betrag ist $F_C = 2m\,v'\,\omega_E\,\cos\varepsilon$. Für die Fallgeschwindigkeit gilt $v' = g\,t$. Damit erfährt der Körper eine Beschleunigung

$$a_C = \frac{F_C}{m} = 2\,g\,\omega_E\,\cos\varepsilon\cdot t$$

nach Osten, d. h. in x-Richtung. Die x-Ablenkung ergibt sich durch zweifache Integration: $v_x = g\,\omega_E\cos\varepsilon\,t^2$,

$$x = \frac{1}{3}g\,\omega_E\cos\varepsilon\,t^3\,.$$

Der Ortsvektor der Bahnkurve lautet somit

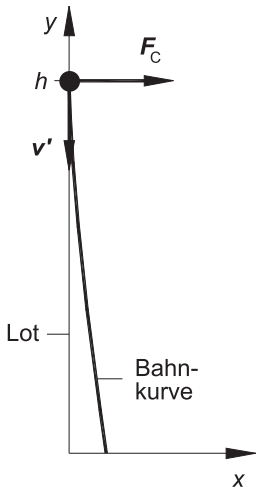
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}g\,\omega_E\cos\varepsilon\,t^3 \\ h - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{pmatrix}\,.$$

Am Ende des freien Falls ist die Ablenkung

$$x(t_F) = \frac{1}{3}g\,\omega_E\cos\varepsilon\,t_F^3 \approx 5\text{ mm}$$

mit der Fallzeit

$$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}19\text{ s}\,.$$



Ü 2.4-4: Die Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$, die von den beiden benachbarten Gliedern auf das betrachtete Kettenglied ausgeübt werden, verlaufen tangential zum Kreis (Abb. 2.25). Die Zentrifugalkraft greift am Schwerpunkt des Kettenglieds an und zieht radial nach außen. Nach D'Alembert besteht Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme aus $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ sowie der Zentrifugalkraft $\boldsymbol{F}_{zf}$ null ist: $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{zf} = 0$. Nach Abb. 2.25 bedeutet dies, dass die drei Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden müssen.
Der Winkel β zwischen den Kräften $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ ergibt sich aus der Kettengeometrie. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{d}{R} = \frac{F_{zf}}{F_1} \quad \text{oder}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{R}{d} F_{zf} = \frac{R^2}{d} m\,(2\,\pi\,n)^2 = 574\ \text{N}\ .$$

Ü 2.5-1:

a) Die Impulsänderung entspricht nach (2.46) dem Zeitintegral der Kraft oder der mittleren Kraft multipliziert mit der Zeitdauer der Einwirkung. Damit ist der Impuls am Ende der Kontaktzeit $p = F\,t = 0{,}5$ N s. Die Geschwindigkeit ist $v = p/m = 0{,}25$ m/s.

b) Die mittlere Beschleunigung ist $a_m = v/t = 50$ m/s^2.

Ü 2.5-2: Das Auto fährt einen Drittelskreis um den Mittelpunkt M. Die Geschwindigkeit zu Beginn der Kurvenfahrt sei

$$\boldsymbol{v}_1 = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

am Ende der Kurvenfahrt

$$\boldsymbol{v}_2 = v \begin{pmatrix} \cos 120° \\ \sin 120° \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\ .$$

Die Impulsänderung ist

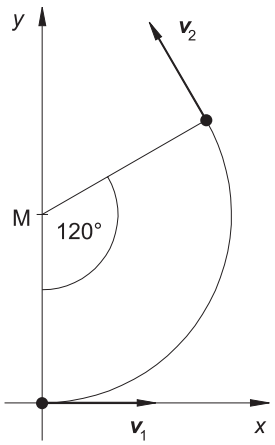
$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = m\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = m\,v \begin{pmatrix} -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\ .$$

Für den Betrag gilt

$$\Delta p = m\,v\sqrt{3} = 24{,}06 \cdot 10^3\ \text{N s}\ .$$

Der Winkel bezüglich der x-Achse ist

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + 180° = 150°\ .$$



Ü 2.5-3: Wenn der Koordinatennullpunkt in den Mittelpunkt der Erde gelegt wird, gilt nach (2.51) für den Ortsvektor des Schwerpunkts

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_M}{m_E + m_M}\,\boldsymbol{r}_{E,M}\ .$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte von Erde und Mond. Sein Abstand vom Erdmittelpunkt ist

$$R_S = \frac{m_M}{m_E + m_M} R_{E,M} = 0{,}01215 \cdot R_{E,M} = 4\,617\ \text{km} .$$

Der gemeinsame Schwerpunkt liegt mit $R_S = 4\,617\ \text{km} = 0{,}725 R_E$ also noch innerhalb der Erdkugel.

Ü 2.5-4: Unter der Voraussetzung, dass der Uran-Kern vor dem Zerfall in Ruhe ist, ist der Gesamtimpuls des Systems null. In Abwesenheit äußerer Kräfte gilt der Impulserhaltungssatz, d. h. es muss gelten: $\boldsymbol{p}_{Th} + \boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{p}_U = 0$ oder $\boldsymbol{p}_{Th} = -\boldsymbol{p}_\alpha$. Für die Geschwindigkeiten ergibt sich damit $\boldsymbol{v}_{Th}\, m_{Th} = -\boldsymbol{v}_\alpha\, m_\alpha$ oder

$$\boldsymbol{v}_{Th} = -\frac{m_\alpha}{m_{Th}} \boldsymbol{v}_\alpha = -\frac{4}{234} \boldsymbol{v}_\alpha .$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist

$$v_{Th} = 2{,}4 \cdot 10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Ü 2.5-5: Bei einem Start auf der Erdoberfläche gilt für die Brennschluss-Geschwindigkeit näherungsweise (Vernachlässigung der Höhenabhängigkeit von $\boldsymbol{g}$ sowie des Luftwiderstands) nach (2.60)

$$v(t_B) = v_{rel} \ln\left(\frac{m_{leer} + m_T}{m_{leer}}\right) - g_0\, t_B .$$

Die Masse des erforderlichen Treibstoffes wird damit

$$m_T = m_{leer}\left(\exp\left(\frac{v(t_B) + g_0\, t_B}{v_{rel}}\right) - 1\right) = 19{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg} = 19{,}6\ \text{t} .$$

Beim Start im Weltall fällt die Erdbeschleunigung g_0 weg und es verbleibt

$$m_T = m_{leer}\left(\exp\left(\frac{v(t_B)}{v_{rel}}\right) - 1\right) = 12{,}9\ \text{t} .$$

Ü 2.6-1:

a) Unter Vernachlässigung der Luftreibung folgt die Endgeschwindigkeit beim freien Fall unmittelbar aus dem Energieerhaltungssatz: $-\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$ oder $m\,g\,h = \frac{1}{2} m\, v_0^2$. Hieraus ergibt sich $v_0 = \sqrt{2g\,h}$.

b) Wenn die Kugel nachher wieder auf die Höhe h_1 steigt, muss analog zu a) die Startgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2g\,h_1} = \sqrt{2g\,h \cdot 0{,}9} = \sqrt{0{,}9}\, v_0 = 0{,}95\, v_0$ sein.

c) Die Impulsänderung ist $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0 = -0{,}95 \cdot m\,\boldsymbol{v}_0 - m\,\boldsymbol{v}_0 = -1{,}95 \cdot m\,\boldsymbol{v}_0$.

d) Die kinetische Energie beträgt vor dem Aufprall $E_{kin,0} = \frac{1}{2} m\, v_0^2$ und nach dem Aufprall

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m\, v_1^2 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 \cdot 0{,}9 .$$

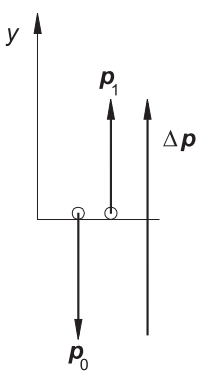
Der Verlust an mechanischer Energie ist damit

$$E_v = E_{kin,0} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} m\, v_0^2 (1 - 0{,}9) = 0{,}1 \cdot E_{kin,0} .$$

Es wurde demnach

$$f = \frac{E_v}{E_{kin,0}} = 10\%$$

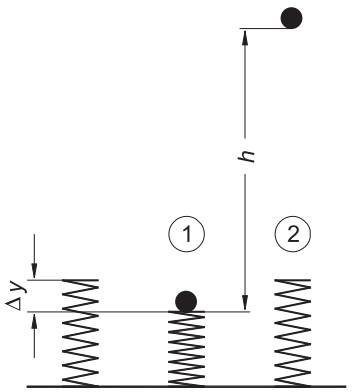
in nicht mechanische Energieformen umgesetzt.



Ü 2.6-2: Beim Zusammendrücken der Feder wird die Arbeit $W = \frac{1}{2}k\,(\Delta y)^2$ benötigt, die als potenzielle Energie im System steckt (Zustand 1). Wenn die Kugel ihre größte Höhe erreicht hat (Zustand 2), muss sie dieselbe potenzielle Energie besitzen, also ist $\frac{1}{2}k\,(\Delta y)^2 = m\,g\,h$. Daraus folgt für die Steighöhe

$$h = \frac{k\,(\Delta y)^2}{2m\,g} = 2{,}87\ \text{m}\ .$$

Bezüglich der ungespannten Feder ist die Steighöhe $h' = h - \Delta y = 2{,}72$ m.



Ü 2.6-3:

a) Nach Abb. 2.34 ist die erforderliche Arbeit $W_{12} = \frac{1}{2}\,k\,(l_2^2 - l_1^2)$. Sie entspricht der grauen Fläche im Kraft-Weg-Diagramm, die sich als Trapezfläche sehr einfach aus der mittleren Höhe $F_1 + \Delta F/2$ und der Breite Δl berechnen lässt:

$$W_{12} = \left(F_1 + \frac{\Delta F}{2}\right)\Delta l = 13\ \text{J}\ .$$

b) Die Gesamtenergie ist $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}\,k\,l_2^2$. Mit der Federsteifigkeit $k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{F_2}{l_2}$ folgt daraus

$$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}\,\frac{F_2^2}{k} = \frac{1}{2}\,\frac{(F_1 + \Delta F)^2}{\Delta F}\,\Delta l = 21{,}3\ \text{J}\ .$$

Ü 2.6-4: Die gesamte kinetische Energie wird in potenzielle Energie der gespannten Feder umgesetzt:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{elast}} = \int_0^s F(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Mit dem Kraftgesetz $F(x) = k\,x = k_1 x + k_2 x^3$ wird das Integral

$$E_{\text{kin}} = \int_0^s (k_1 x + k_2 x^3)\ \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{4}k_2 x^4\right)\Big|_0^s = \frac{1}{2}k_1 s^2 + \frac{1}{4}k_2 s^4\ .$$

Durch Auflösen der biquadratischen Gleichung

$$\frac{1}{4}k_2 s^4 + \frac{1}{2}k_1 s^2 - E_{\text{kin}} = 0$$

folgt für den Federweg

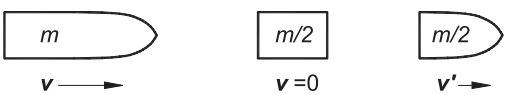
$$s^2 = -\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \frac{4E_{\text{kin}}}{k_2}}$$

$$= 2{,}606 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \quad \text{und} \quad s = 1{,}61\ \text{cm}\ .$$

Ü 2.7-1: Wegen der Abwesenheit äußerer Kräfte gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m\boldsymbol{v} = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}'.$$

Damit wird die Geschwindigkeit der weiter fliegenden Rakete $\boldsymbol{v}' = 2\boldsymbol{v}$.



Ihre kinetische Energie ist

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,\frac{m}{2}\,v'^2 = m\,v^2\ .$$

Die kinetische Energie zu Beginn der Bewegung ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\,v^2\ .$$

Der Differenzbetrag $\Delta E = E'_{\text{kin}} - E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\,v^2$ ist dem System zuzuführen (z. B. durch das Lösen gespannter Federn oder durch eine Sprengladung etc.).

Ü 2.7-2:

a) Beim unelastischen Stoß mit Kopplung folgt aus dem Impulserhaltungssatz für die gemeinsame Endgeschwindigkeit nach (2.88)

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2{,}45 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Der Verlust an kinetischer Energie ist nach (2.87)

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = 7\,855 \text{ J}$$

bzw. mit der Stoßzahl $\varepsilon = 0$ nach (2.90)

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = 7\,855 \text{ J} .$$

b) Beim elastischen Stoß gilt für die Endgeschwindigkeiten nach (2.85) und (2.86):

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1{,}91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

und

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 3{,}11 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

c) Das Vorzeichen der Geschwindigkeit v_2 wird umgedreht: $v_2 = -1{,}8$ m/s.
Damit ergibt sich

$$v' = 0{,}818 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \; \Delta W = 125{,}7 \text{ kJ} ,$$
$$v_1' = -1{,}36 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \; v_2' = 3{,}44 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Ü 2.7-3:

a) Für das System aus Holzklotz und Geschoss gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_1 v_1 = m v_\text{P} + m_1 v_1' .$$

Die Geschwindigkeit des austretenden Geschosses ergibt sich zu

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 - m v_\text{P}}{m_1} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Der Energieverlust beträgt nach (2.87)

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_\text{P}^2 = 298 \text{ J} .$$

Der Stoß ist nicht vollständig unelastisch. Nach (2.90) ist die Stoßzahl

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2\Delta W(m_1 + m)}{m_1 m v_1^2}} = 0{,}49 .$$

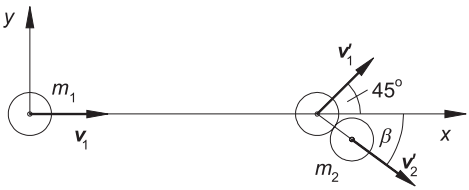
Ü 2.7-4:

a) Es gilt der Impulserhaltungssatz:
x-Richtung:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos 45° + m_2 v_2' \cos\beta , \qquad (1)$$

y-Richtung:

$$0 = m_1 v_1' \sin 45° - m_2 v_2' \sin\beta . \qquad (2)$$



Mit den angegebenen Zahlenwerten folgt aus (1)

$$v_2' \cos\beta = 2{,}879 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (1')$$

und aus (2)

$$v_2' \sin\beta = 2{,}121 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \qquad (2')$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich für den Winkel

$$\tan\beta = \frac{2{,}121 \text{ m/s}}{2{,}879 \text{ m/s}} = 0{,}737$$

und $\beta = 36{,}4°$.

Aus (1') oder (2') folgt die Geschwindigkeit

$$v_2' = 3{,}58 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Der Energieverlust ist

$$\Delta E = E_{\text{kin},1} - E'_{\text{kin},1} - E'_{\text{kin},2}$$

oder

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0{,}961 \text{ J} .$$

Ü 2.8-1:

a) Das Drehmoment der Gewichtskraft bezüglich Koordinatenursprung ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{G} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} \cdot m \,.$$

Der Vektor weist in z-Richtung (in die Zeichenebene hinein). Der Betrag ist konstant: $M = mgr \sin\beta = mgb$.

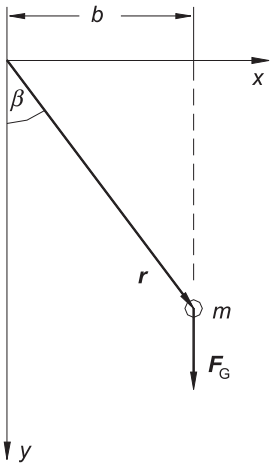
b) Der Drehimpuls ist $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m}$; mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}\, t$ ergibt sich $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} \cdot m\, t$.
Der Vektor $\boldsymbol{L}$ weist ebenfalls in z-Richtung, sein Betrag ist

$$L = mgr \sin\beta\, t = mgb\, t \,.$$

c) Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} \cdot m = \boldsymbol{M} \,,$$

erfüllt also den Drehimpulssatz.



Ü 2.8-2: Das Massenträgheitsmoment einer Punktmasse ist $J = m\,r^2$. Bei mehreren Massenpunkten gilt $J = \sum m_\mathrm{k}\, r_\mathrm{k}^2$. Für das Quadrat von Abb. 2.48 ergibt sich:

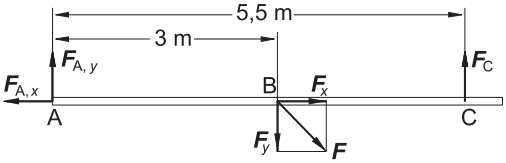
a) $J_\mathrm{A} = 4m \left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2m\,b^2$,

b) $J_\mathrm{B} = 2m\,b^2 + m\left(b\sqrt{2}\right)^2 = 4m\,b^2$,

c) $J_\mathrm{C} = 2m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = m\,b^2$,

d) $J_\mathrm{D} = 2m\,b^2$.

Ü 2.9-1: Zur Lösung werden die Gleichgewichtsbedingungen der Statik angewandt. Die Gleichung (2.117) für das Kräftegleichgewicht liefert für die x- und y-Komponenten zwei Gleichungen:



x-Richtung:

$$-F_{\mathrm{A},x} + F_x = 0 \quad \text{oder} \quad F_{\mathrm{A},x} = \frac{F}{\sqrt{2}} = 353{,}6\ \mathrm{N} \,.$$

y-Richtung:

$$F_{\mathrm{A},y} - F_y + F_\mathrm{C} = 0 \text{ oder } F_{\mathrm{A},y} - \frac{F}{\sqrt{2}} + F_\mathrm{C} = 0 \,.$$

Das Momentengleichgewicht nach (2.118) liefert bezüglich Punkt A:

$$F_\mathrm{C} \cdot 5{,}5\ \mathrm{m} - F_y \cdot 3\ \mathrm{m} = 0$$

oder

$$F_\mathrm{C} = \frac{F \cdot 3}{5{,}5 \cdot \sqrt{2}} = 192{,}8\ \mathrm{N} \,.$$

Damit wird

$$F_{\mathrm{A},y} = \frac{F}{\sqrt{2}} - F_\mathrm{C} = 160{,}7\ \mathrm{N} \,.$$

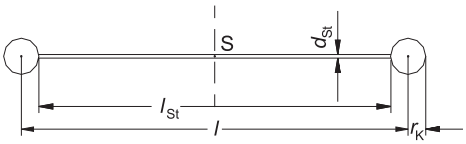
Die Kraft am Lager A beträgt somit

$$F_\mathrm{A} = \sqrt{F_{\mathrm{A},x}^2 + F_{\mathrm{A},y}^2} = 388{,}4\ \mathrm{N} \,.$$

Ü 2.9-2:

a) Wenn die Kugeln als Massenpunkte angenähert werden und die Stabmasse vernachlässigt wird, gilt

$$J_\mathrm{S} = 2\,m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1\ \mathrm{kg\,m^2} \,.$$



b) Das Massenträgheitsmoment des Stabes ist nach (2.60)

$$J_{St} = \frac{1}{12} m_{St} l_{St}^2 .$$

Zur Berechnung der Stablänge l_{St} muss zunächst der Kugelradius ermittelt werden. Es gilt für die Kugelmasse $m = \frac{4}{3}\pi r_K^3 \varrho$ und damit $r_K = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho}} = 39{,}3$ mm.
Die Stablänge ist damit $l_{St} = l - 2r_K = 0{,}9213$ m.
Mit der Stabmasse $m_{St} = \frac{\pi}{4} d_{St}^2 l_{St} \varrho = 0{,}568$ kg folgt für das Massenträgheitsmoment des Stabes $J_{St} = 0{,}04018\ \mathrm{kg\,m^2}$.
Das Massenträgheitsmoment einer Kugel bezüglich ihres Schwerpunkts ist nach Abb. 2.60 $J_K = \frac{2}{5} m r_K^2 = 1{,}237 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}$.
Das Massenträgheitsmoment beider Kugeln bezüglich Schwerpunkt S ergibt sich mithilfe des Steiner'schen Satzes (2.132), zu

$$J_{K,S} = 2\left(J_K + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m\right) = 1{,}002\ \mathrm{kg\,m^2} .$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment der Hantel beträgt somit

$$J_S = J_{K,S} + J_{St} = 1{,}043\ \mathrm{kg\,m^2} ,$$

ist also etwa 4% größer als der Näherungswert nach Teil a).

Ü 2.9-3:

a) Die Beschleunigung ist konstant, so dass die kinematische Beziehung (s. Abb. 2.6) $h = \frac{1}{2} a t^2$ gilt und damit $a = \frac{2h}{t^2} = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

b) Die Fadenkraft über dem Körper 1 ist

$$F_{F,1} = m_1(g + a) = 10{,}31\ \mathrm{N} .$$

Über dem Körper 2 ist die Fadenkraft

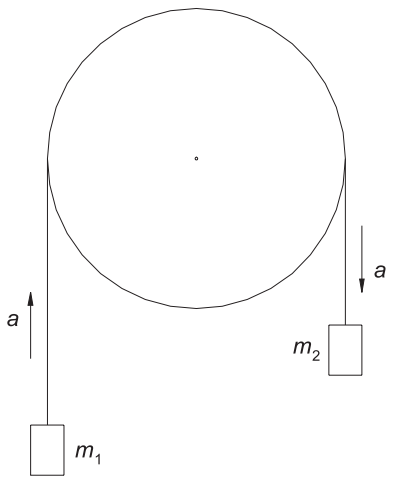
$$F_{F,2} = m_2(g - a) = 13{,}97\ \mathrm{N} .$$

c) Die beiden ungleichen Fadenkräfte üben auf das Rad ein Drehmoment aus vom Betrag

$$M = (F_{F,2} - F_{F,1})\, r = 1{,}097\ \mathrm{N\,m} .$$

In Analogie zum Newton'schen Grundgesetz $F = ma$ gilt für Drehbewegungen $M = J\alpha$ (Tab. 2.6). Das Massenträgheitsmoment des Rades ist folglich

$$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{M r}{a} = 0{,}658\ \mathrm{kg\,m^2} .$$



Ü 2.9-4: Die Zentrifugalkraft, die an einer Kugel angreift, ist nach (2.43)

$$F_{zf} = m\omega^2 R = m\omega^2 r \sin\vartheta .$$

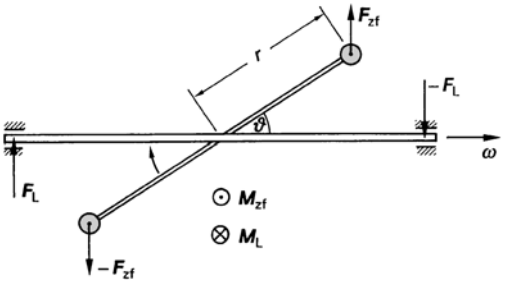
Das Drehmoment der beiden Zentrifugalkräfte (Kräftepaar) beträgt nach (2.116)

$$M_{zf} = s \cdot F_{zf} = 2r\cos\vartheta \cdot m\omega^2 r \sin\vartheta$$

oder nach trigonometrischer Umformung

$$M_{zf} = m\omega^2 r^2 \sin 2\vartheta .$$

Die Sinusfunktion des doppelten Winkels ist null für die Winkel $\vartheta = 0$ und 90°, sie ist maximal für $\vartheta = 45°$.



Lösungsvariante:

Der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{L}$ wird ermittelt als Produkt aus dem Trägheitstensor und der Winkelgeschwindigkeit. Für unseren Fall ergibt sich

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} J_{xz} \\ J_{yz} \\ J_{zz} \end{pmatrix} .$$

In einem raumfesten Koordinatensystem, das mit dem rotierenden körperfesten zur Zeit null übereinstimmen soll, nehmen die Zentrifugalmomente und das Trägheitsmoment folgende Werte an:

$$\begin{aligned} J_{xz} &= -2m\,r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \cos\omega\,t \\ &= -m\,r^2 \sin 2\vartheta \cdot \cos\omega\,t, \\ J_{yz} &= -2m\,r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \sin\omega\,t \\ &= -m\,r^2 \sin 2\vartheta \cdot \sin\omega\,t, \\ J_{zz} &= 2m\,r^2 \sin^2\vartheta . \end{aligned}$$

Damit wird der Vektor des Drehimpulses

$$\boldsymbol{L}(t) = m\,r^2\omega \begin{pmatrix} -\sin 2\vartheta \cdot \cos\omega\,t \\ -\sin 2\vartheta \cdot \sin\omega\,t \\ 2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} .$$

Nach dem Drehimpulssatz (2.111), gilt für das Drehmoment, das die Lager aufbringen muss

$$\boldsymbol{M}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\,r^2\omega^2 \sin 2\vartheta \begin{pmatrix} \sin\omega\,t \\ -\cos\omega\,t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses Drehmoment läuft mit der rotierenden Hantel um. Sein Betrag ist

$$|\boldsymbol{M}| = m\,r^2\omega^2 \sin 2\vartheta .$$

Ü 2.9-5: Für die Translationsenergie gilt nach (2.125) $E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2} m\,v_{\mathrm{S}}^2$. Der Zylinder rotiert um seinen Schwerpunkt. Dann ist die Rotationsenergie nach (2.130)

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J_{\mathrm{S}}\,\omega^2 .$$

Mit dem Massenträgheitsmoment des dünnwandigen Hohlzylinders $J_{\mathrm{S}} = mr^2$ nach (2.131) ergibt sich

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} m\,r^2\omega^2 .$$

Nun gilt für einen ohne Schlupf abrollenden Zylinder die *Abrollbedingung* $v_{\mathrm{S}} = \omega\,r$. Damit wird

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} m\,v_{\mathrm{S}}^2 \quad \text{und} \quad E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} .$$

Ü 2.9-6:

a) Das Grundgesetz der Drehbewegungen $M = J\,\alpha$ (Tab. 2.6) wird angewandt auf das Lager L. Das Drehmoment der Gewichtskraft ist $M_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{G}} r = mg\frac{l}{2}$.
Das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes bezogen auf das Stabende L ist nach dem Satz von Steiner (2.132),

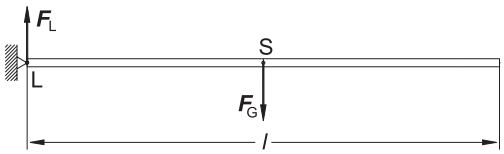
$$\begin{aligned} J_{\mathrm{L}} &= J_{\mathrm{S}} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\,l^2 + \frac{1}{4} m\,l^2 \\ &= \frac{1}{3} m\,l^2 . \end{aligned}$$

Damit wird die Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{M_{\mathrm{L}}}{J_{\mathrm{L}}} = \frac{3}{2}\frac{g}{l} = 8{,}18\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} .$$

Die Beschleunigung des Schwerpunkts entspricht der Tangentialbeschleunigung auf einem Kreis und beträgt nach Tab. 2.1

$$a_{\mathrm{S}} = \alpha\frac{l}{2} = \frac{3}{4} g = 7{,}36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} .$$



b) Am Stab greifen zwei Kräfte an: die Gewichtskraft im Schwerpunkt S und die Lagerkraft im Lager L. Nach dem Schwerpunktsatz (2.52), ist es unerheblich, wo die äußeren Kräfte F_a angreifen. Der Schwerpunkt wird auf jeden Fall beschleunigt gemäß

$$\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_L = m\,\boldsymbol{a}_S\ .$$

Für die Beträge gilt

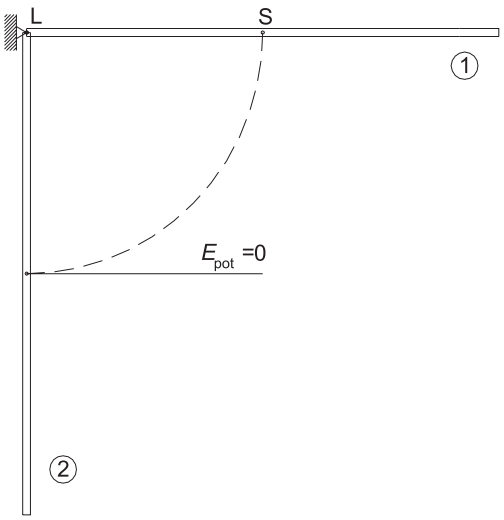
$$m\,g - F_L = m\frac{3}{4}g \quad \text{und}$$

$$F_L = \frac{1}{4}m\,g = 3{,}43\ \text{N}\ .$$

Lösungsvariante:
Das Grundgesetz der Drehbewegungen angewandt auf den Schwerpunkt lautet $M_S = J_S\alpha$. Nun ist $M_S = F_L\frac{l}{2}$ und $J_S = \frac{1}{12}m\,l^2$. Mit dem bereits bekannten Wert für die Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$ ergibt sich $F_L\frac{l}{2} = \frac{1}{12}m\,l^2\cdot\frac{3}{2}\frac{g}{l}$ oder $F_L = \frac{1}{4}m\,g$.

c) Die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Wird der Nullpunkt der potenziellen Energie willkürlich in den tiefsten Punkt des Schwerpunktes gelegt (s. Skizze), dann gilt $E_{pot,1} = E_{kin,2}$ oder

$$m\,g\frac{l}{2} = \frac{1}{2}J_L\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,m\,l^2\right)\omega^2.$$



Die kinetische Energie wurde hierbei als reine Rotationsenergie bezüglich L angesetzt. Für die Winkelgeschwindigkeit folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 4{,}04\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ .$$

Ü 2.9-7:

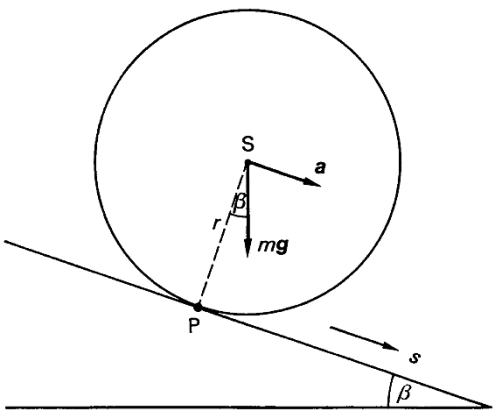
a) Die Beschleunigung ist konstant, so dass das Weg-Zeit-Gesetz $s = \frac{1}{2}a\,t^2$ (Abb. 2.6) gilt. Daraus folgt die Beschleunigung

$$a = \frac{2s}{t^2} = 1{,}45\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Winkelbeschleunigung des abrollenden Rades ist $\alpha = \frac{a}{r}$.
Wendet man das Grundgesetz der Drehbewegungen $M = J\,\alpha$ (Tab. 2.6) auf den *Momentanpol* P an, so ergibt sich

$$M_P = m\,g\,r\sin\beta = J_P\,\alpha \quad \text{und damit}$$

$$J_P = \frac{m\,g\,r\sin\beta}{a/r}\ .$$



Das Massenträgheitsmoment bezüglich P ist nach dem Steiner'schen Satz, (2.132), $J_P = J_S + m\,r^2$.
Damit wird das Massenträgheitsmoment bezüglich Schwerpunkt

$$J_S = \frac{m\,g\,r^2\sin\beta}{a} - m\,r^2$$

$$= m\,r^2\left(\frac{g\,\sin\beta}{a} - 1\right) = 0{,}601\ \text{kg m}^2\ .$$

b) Die Winkelbeschleunigung des Rades wird verursacht durch ein Drehmoment, das die Haftreibungskraft am Umfang des Rades erzeugt. Bezüglich Schwerpunkt S gilt $M_S = F_R r = J_S \alpha$.
Die Haftreibungskraft beträgt $F_R \leq \mu_H F_N = \mu_H m g \cos\beta$ (Abb. 2.20). Damit ist der erforderliche Haftreibungskoeffizient

$$\mu_H \geq \frac{J_S \alpha}{r m g \cos\beta} = \frac{J_S a}{r^2 m g \cos\beta}$$
$$= \tan\beta - \frac{a}{g\cos\beta} = 0{,}115 \,.$$

Ü 2.9-8:

a) Die beschleunigende Kraft ist die Reibungskraft $F_R = \mu m g$ zwischen Rad und Fußboden. Sie bewirkt eine konstante Beschleunigung $a = \frac{F_R}{m} = \mu g$. Damit steigt die Geschwindigkeit des Rades linear mit der Zeit an:

$$v(t) = a\, t = \mu g \cdot t \,. \qquad (1)$$

Bezüglich des Mittelpunkts S bewirkt die Reibungskraft ein konstantes Bremsmoment $M_S = F_R r = \mu m g r$, das die Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{M_S}{J_S} = \frac{\mu m g r}{J_S}$ zur Folge hat. Die Winkelgeschwindigkeit des Rades wird dadurch zeitlich mit einer linearen Funktion verringert:

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha\, t = \omega_0 - \frac{\mu m g\, r}{J_S} \cdot t \qquad (2)$$

So lange das Rad rutscht, sind Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ völlig entkoppelt. Sobald aber der Rutschvorgang abgeschlossen ist und damit eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit erfolgt, muss die *Abrollbedingung* $v = \omega r$ erfüllt sein. Damit gilt für den Zeitpunkt t_f:

$$\mu g\, t_f = \left(\omega_0 - \frac{\mu m g\, r}{J_S}\, t_f\right) r \,.$$

Durch Umformung folgt mit (2)

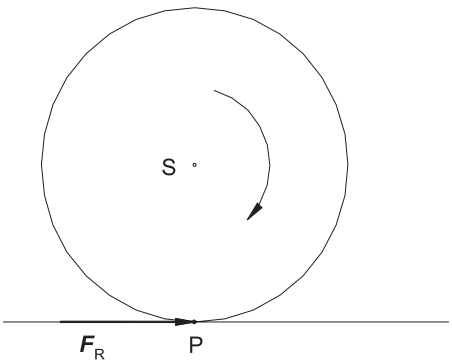
$$t_f = \frac{\omega_0 r}{\mu g \left(1 + \frac{m r^2}{J_S}\right)} \,.$$

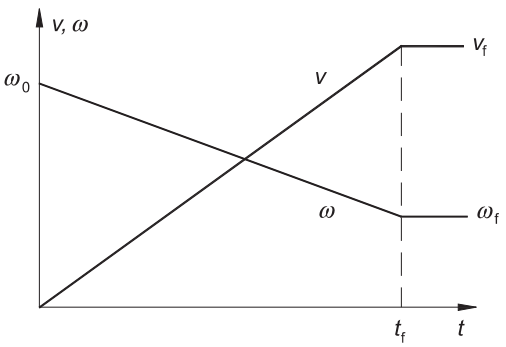
Mithilfe von (1) ergibt sich für die Endgeschwindigkeit

$$v_f = v(t_f) = \frac{\omega_0\, r}{1 + \frac{m r^2}{J_S}} = \frac{2\pi n_0 r}{1 + \frac{m r^2}{J_S}} = 17{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \,.$$

b) Die Rutschphase dauert

$$t_f = \frac{2\pi n_0 r}{\mu g \left(1 + \frac{m r^2}{J_S}\right)} = \frac{v_f}{\mu g} = 8{,}97\ \mathrm{s} \,.$$





Lösungsvariante:
Einen anderen Weg zur Lösung bietet der Drehimpulserhaltungssatz. Bezüglich eines beliebigen Punktes auf der Fahrbahn erzeugt die Reibungskraft kein Drehmoment und deshalb bleibt der Drehimpuls bezüglich dieses Punktes erhalten. Nun

kann der Drehimpuls eines starren Körpers zusammen gesetzt werden aus einem Drehimpuls um seinen Schwerpunkt sowie dem Bahndrehimpuls des Schwerpunkts, in dem die Gesamtmasse vereinigt ist:

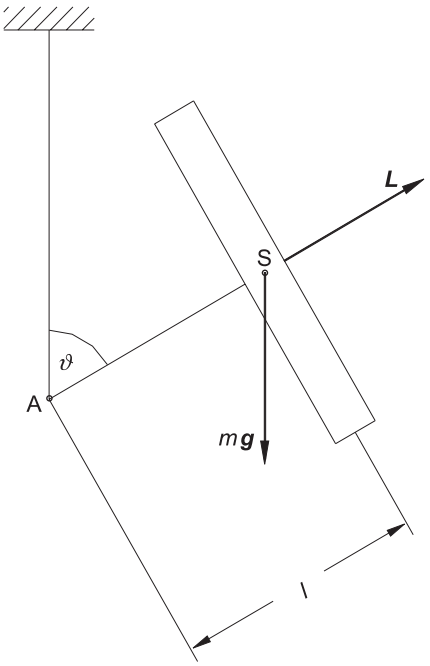
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_\mathrm{S} + m\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{S} \,.$$

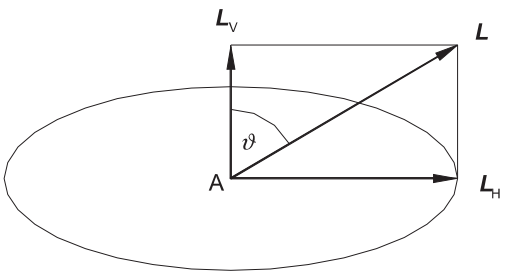
Vor dem Aufsetzen gilt $L = L_\mathrm{S} = J_\mathrm{S}\,\omega_0$. Nach Ablauf des Rutschvorgangs gilt $L = J_\mathrm{S}\,\omega_\mathrm{f} + m\,r\,v_\mathrm{f}$.
Mit der Abrollbedingung $v = \omega\,r$ folgt

$$J_\mathrm{S}\,\omega_0 = J_\mathrm{S}\frac{v_\mathrm{f}}{r} + m\,r\,v_\mathrm{f}$$

und daraus

$$v_\mathrm{f} = J_\mathrm{S} = \frac{r\omega_0}{1 + \frac{m\,r^2}{J_\mathrm{S}}} \,.$$





Ü 2.9-9: Bezüglich Aufhängepunkt A wirkt das Drehmoment der Gewichtskraft $M = m\,g\,l\sin\vartheta$. Der Vektor $\boldsymbol{M}$ steht senkrecht auf der Zeichenebene und weist in dieselbe hinein. Aufgrund des Drehmomentes ändert sich die Horizontalkomponente $L_\mathrm{H} = L\sin\vartheta$ des Drehimpulses L in der Zeitspanne $\mathrm{d}t$ um $\mathrm{d}L_\mathrm{H} = M\,\mathrm{d}t$.
Wie in Abb. 2.67c dargestellt ist, dreht sich dadurch der Vektor $\boldsymbol{L}_\mathrm{H}$ um den Winkel

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M\,\mathrm{d}t}{L\sin\vartheta} \,.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession wird damit

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,g\,l\sin\vartheta}{L\sin\vartheta} = \frac{m\,g\,l}{L} \,,$$

ist also nicht abhängig vom Winkel, den die Drehachse mit der Vertikalen einnimmt.

Ü 2.10-1: Ein Körper der Masse m erfährt im Abstand r vom Erdmittelpunkt die Anziehungskraft (Gewichtskraft)

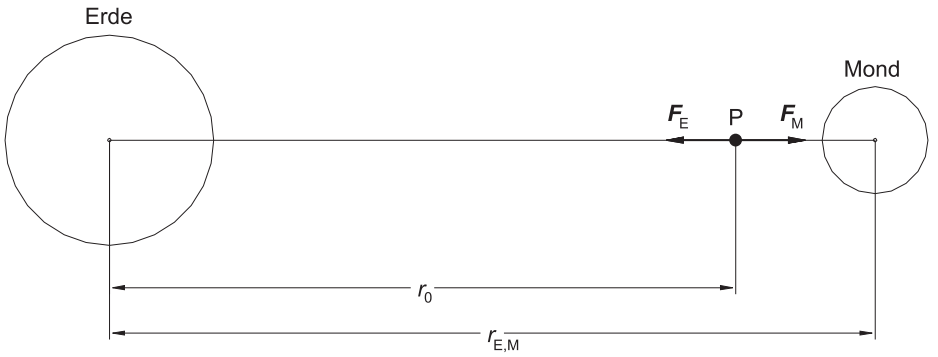
$$F_\mathrm{G} = G\frac{m \cdot m_\mathrm{E}}{r^2} \,.$$

Setzt man $F_\mathrm{G} = m\,g$, so folgt daraus für die Fallbeschleunigung $g(r) = G\frac{m_\mathrm{E}}{r^2}$ und mit (2.138) $g(r) = g\left(\frac{r_\mathrm{E}}{r}\right)^2$.
Wird der Abstand zwischen Schwerpunkt des Körpers und Schwerpunkt der Erde als $r = r_\mathrm{E} + h$ geschrieben, dann folgt für die Höhenabhängigkeit der Fallbeschleunigung

$$g_\mathrm{h} = \frac{G\,m_\mathrm{E}}{\left(r_\mathrm{E} + h\right)^2} = g\left(\frac{r_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E} + h}\right)^2 \,.$$

Aufgelöst nach der gesuchten Höhe ergibt sich mit dem Erdradius $r_\mathrm{E} = 6\,371$ km

$$h = r_\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{g}{g_\mathrm{h}}} - 1\right) = 2\,553\ \mathrm{km} \,.$$



Ü 2.10-2: Der neutrale Punkt P habe von der Erde aus den Abstand r_0. Die Anziehungskräfte F_E und F_M, die ein Körper der Masse m zur Erde bzw. zum Mond erfährt, sollen gleich sein:

$$G\frac{m \cdot m_E}{r_0^2} = G\frac{m \cdot m_M}{(r_{E,M} - r_0)^2} .$$

Aus dieser Bedingung folgt eine quadratische Gleichung für den gesuchten Abstand:

$$r_0^2\left(1 - \frac{m_M}{m_E}\right) - 2r_{E,M}\, r_0 + r_{E,M}^2 = 0 .$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert

$$r_0 = \frac{r_{E,M}}{1 \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_E}}} .$$

Nur die positive Lösung der Wurzel liefert einen Ort, der zwischen Erde und Mond liegt und zwar im Abstand $r_0 = 346\,000\,\text{km} \approx 54{,}3 \cdot r_E$. Die negative Lösung der Wurzel führt zu einem Punkt, der rechts vom Mond im Abstand $r_0 = 432\,000\,\text{km}$ liegt. Die Gravitationskräfte sind in diesem Punkt auch gleich, allerdings ziehen beide in Richtung Erde.

Ü 2.10-3:

a) Aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft

$$G\frac{m \cdot m_E}{(r_E + h)^2} = \frac{m\,v^2}{r_E + h}$$

folgt für die Bahngeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{G\,m_E}{r_E + h}} = 7{,}35 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Schreibt man die Gleichgewichtsbedingung als

$$G\frac{m \cdot m_E}{(r_E + h)^2} = m\,(r_E + h)\,\omega^2 = m\,(r_E + h)\frac{4\pi^2}{T^2} ,$$

so folgt für die Umlaufzeit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_E + h)^3}{G\,m_E}} = 6\,299\,\text{s} = 1\,\text{h}\,45\,\text{min} .$$

Diese Gleichung entspricht dem dritten Kepler'schen Gesetz, (2.139).

c) Der Satellit hat auf seiner Umlaufbahn die Energie

$$E_h = \frac{1}{2}m\,v^2 - G\frac{m \cdot m_E}{r_E + h} .$$

Vor dem Start auf der Erdoberfläche hat der Satellit die Energie

$$E_0 = \frac{1}{2}m\,v_0^2 - G\frac{m \cdot m_E}{r_E} .$$

Die aufzuwendende Arbeit, um den Satelliten auf seine Bahn zu bringen ist damit

$$W = E_h - E_0 = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) - G\,m\,m_E\left(\frac{1}{r_E + h} - \frac{1}{r_E}\right) .$$

Vernachlässigt man v_0^2 ($v_0^2 \ll v^2$), dann wird die spezifische Arbeit

$$w = \frac{W}{m} = \frac{1}{2}v^2 - G m_E \left(\frac{1}{r_E + h} - \frac{1}{r_E}\right)$$
$$= 27{,}04 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 8{,}49 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$
$$= 35{,}5 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} .$$

d) Der größte Teil der aufzuwendenden Arbeit entfällt auf die kinetische Energie. Der Bruchteil ist

$$f = \frac{W_{kin}}{W} = \frac{27\ \text{MJ/kg}}{35{,}5\ \text{MJ/kg}} = 76\% .$$

Ü 2.10-4: Die gesuchte Geschwindigkeit folgt aus dem Energieerhaltungssatz. Wird die potenzielle Energie nach (2.141) angesetzt, dann ist sie zu Beginn der Bewegung null ($r \to \infty$). Die kinetische Energie ist ebenfalls null ($v \to 0$). Damit gilt:

$$0 = E_{pot}(r) + E_{kin}(r) = -G\frac{m_M m_S}{r} + \frac{1}{2}m_M v^2 .$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich daraus zu $v(r) = \sqrt{\frac{2G m_S}{r}}$.
Für die verschiedenen Fälle sind die Ergebnisse:

a) $v(r_{SE}) = \sqrt{\frac{2G m_S}{r_{SE}}} = 42{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$,

b) $v\left(\frac{1}{2}r_{SE}\right) = \sqrt{2}\, v(r_{SE}) = 59{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$,

c) $v(r_S) = \sqrt{\frac{2G m_S}{r_S}} = 619\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Ü 2.10-5: Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz, (2.139), gilt für die Masse des Zentralkörpers Jupiter

$$m_J = \frac{4\pi^2 r_{Jo}^3}{G T_{Jo}^2} = 1{,}898 \cdot 10^{27}\ \text{kg} = 318 \cdot m_E .$$

Ü 2.11-1: Vereinfachend wird angenommen, dass die Stabachse senkrecht zur Drehachse steht. Dann ist die Zentrifugalkraft

$$F_{zf} = m r_S \omega^2 = m \frac{l}{2}(2\pi n)^2 = 2\pi^2 A l^2 \varrho n^2 .$$

Die Zugspannung an der Einspannstelle wird damit

$$\sigma = \frac{F_{zf}}{A} = 2\pi^2 l^2 \varrho n^2 .$$

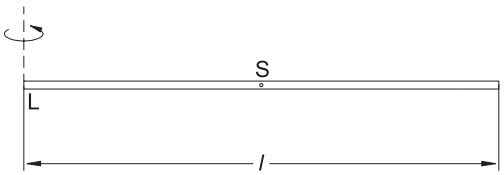
Mit der gegebenen Zugfestigkeit R_m und der Dichte von Stahl $\varrho = 7\,850\ \text{kg/m}^3$ folgt für die maximale Drehzahl

$$n_{max} = \frac{1}{l\varrho}\sqrt{\frac{R_m}{2\varrho}} = 35{,}9\ \text{s}^{-1} = 2\,156\ \text{min}^{-1} .$$

Mit diesem Ergebnis kann der Vollständigkeit halber die Zentrifugalbeschleunigung des Schwerpunkts berechnet werden:

$$a_{zf} = r_S \omega^2 = \frac{l}{2}(2\pi n)^2 = 38\,160\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3\,890\, g .$$

Daraus folgt, dass die Stabachse tatsächlich senkrecht auf der Drehachse steht. Die Abweichung infolge der Wirkung der Gewichtskraft ist nur 0,014°.



Ü 2.11-2:

a) Das Hooke'sche Gesetz (2.150), in der Sprache der Festigkeitslehre, lautet $\sigma = E\varepsilon$. Nun ist die Spannung $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2}$ und die Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{s}{l}$. Damit ergibt sich $\frac{F \cdot 4}{\pi d^2} = E\frac{s}{l}$ oder $F = \frac{E\pi d^2}{4l}s$. Durch Vergleich mit $F = k s$ folgt für die Federkonstante $k = \frac{E\pi d^2}{4l}$.

b) Aus obiger Gleichung folgt für den erforderlichen Durchmesser $d = \sqrt{\frac{4kl}{E\pi}} = 2{,}52$ mm.

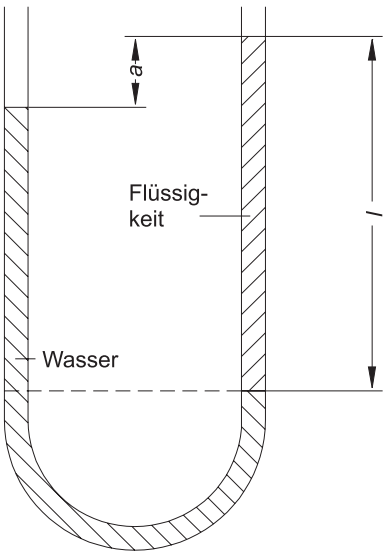
c) Nach (2.68) ist die Formänderungsarbeit $W = \frac{1}{2}k\,s^2 = \frac{1}{2}k\,(l\,\varepsilon)^2 = 12{,}5$ J.
Lösungsvariante:
Nach (2.167) gilt für die Arbeit $W = V\int \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon$. Im elastischen Bereich ist $\sigma = E\,\varepsilon$ und damit $W = \dfrac{1}{2}V\,E\,\varepsilon^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi\,d^2 l}{4}E\,\varepsilon^2 =$ 12,5 J.

d) Die relative Volumenänderung ist nach (2.154) $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu) = 2\cdot 10^{-3} =$ 0,2 %. Das Stabvolumen wird also geringfügig vergrößert.

Ü 2.12-1: Die Länge der Flüssigkeitssäule ergibt sich aus ihrer Masse m und der gesuchten Dichte ϱ zu

$$l = \frac{m}{A\,\varrho}\,.$$

Unterhalb der gestrichelten Linie befindet sich lediglich Wasser im Gleichgewicht. Das bedeutet, dass der Druck im linken und im rechten Schenkel auf Höhe der gestrichelten Linie gleich sein muss. Mithilfe von (2.179) gilt für den Schweredruck $\varrho_\mathrm{W} g(l-a) = \varrho\,g\,l$, dabei ist $\varrho_\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg/dm^3}$ die Dichte von Wasser.



Durch Umformung ergibt sich für die gesuchte Dichte der Flüssigkeit

$$\varrho = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_\mathrm{W}} + \frac{a\,A}{m}} = 0{,}8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}}\,.$$

Ü 2.12-2:

a) Die Ladung habe die Dichte ϱ_L, das Wasser ϱ_W und es gelte $\varrho_\mathrm{L} > \varrho_\mathrm{W}$. Dann muss für den Teil des Auftriebs, der auf die Ladung entfällt, gelten:
$F_\mathrm{A} = F_\mathrm{G,L}$,
d. h. die Auftriebskraft muss gleich groß sein wie die Gewichtskraft.
Nun gilt für das Volumen V_verd der verdrängten Flüssigkeit nach dem Gesetz von Archimedes, (2.188)
$\varrho_\mathrm{W} g\,V_\mathrm{verd} = \varrho_\mathrm{L} g\,V_\mathrm{L}$ oder
$V_\mathrm{verd} = V_\mathrm{L}\dfrac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{W}}$.
Es wird also mehr Volumen verdrängt, als dem Volumen V_L der Ladung entspricht. Konsequenterweise wird also der Wasserspiegel – wenn auch geringfügig – nach dem Sinken fallen.

b) Für das ganze Schiff gilt dieselbe Argumentation. Auch hier wird beim Schwimmen mehr Volumen verdrängt, als dem tatsächlichen Schiffsvolumen entspricht.

Ü 2.12-3: Nach (2.181) gilt für die Seitendruckkraft auf den Schieber $F_\mathrm{S} = \varrho\,g\,y_\mathrm{S}\,A_\mathrm{S}$. Die Reibungskraft auf den bewegten Schieber ist $F_\mathrm{R} = \mu F_\mathrm{S}$. Die Gesamtkraft, die zum Heben erforderlich ist, beträgt somit

$$F_1 = F_\mathrm{G} + F_\mathrm{R} = mg + \varrho\,g\frac{h}{2}b\,h\,\mu$$
$$= g\left(m + \frac{1}{2}\varrho\,b\,h^2\,\mu\right) = 11{,}1\ \mathrm{kN}\,.$$

Wenn der Schieber um 60 cm hoch gezogen ist, wird in obiger Gleichung die Höhe h ersetzt durch $h - 60\ \mathrm{cm} = 90\ \mathrm{cm}$. Die Zugkraft beträgt dann $F_2 = 4{,}75$ kN.

Ü 2.12-4: Die Oberflächenenergie vergrößert sich mit Vergrößerung der Oberfläche gemäß (2.192) um

$$\Delta W = \sigma \Delta A = \sigma(A_\mathrm{T} - A_\mathrm{W}) \; .$$

Die Oberfläche des Tropfens vor dem Zerstäuben ist $A_\mathrm{W} = 4\pi r_\mathrm{W}^2$.
Das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r_\mathrm{W}^3$ des Tropfens bleibt beim Zerstäuben unverändert.
Ist N die Zahl der erzeugten Tröpfchen, dann gilt

$$\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{W}^3 = N \cdot \frac{4}{3}\pi r_\mathrm{T}^3 \quad \text{oder}$$
$$N = \left(\frac{r_\mathrm{W}}{r_\mathrm{T}}\right)^3 = 10^{12} \; .$$

Die Oberfläche von N Tröpfchen mit Radius r_T ist $A_\mathrm{T} = N \cdot 4\pi r_\mathrm{T}^2$.
Damit steigt die Oberflächenenergie um

$$\Delta W = \sigma \left(N \cdot 4\pi r_\mathrm{T}^2 - 4\pi r_\mathrm{W}^2\right) \; .$$

Die relative Zunahme beträgt

$$\frac{\Delta W}{W_\mathrm{W}} = \frac{N \cdot 4\pi r_\mathrm{T}^2 - 4\pi r_\mathrm{W}^2}{4\pi r_\mathrm{W}^2} = N\left(\frac{r_\mathrm{T}}{r_\mathrm{W}}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{r_\mathrm{W}}{r_\mathrm{T}} - 1 = 10^4 \; .$$

Die Oberflächenenergie steigt also um das 10^4-fache an.

Ü 2.12-5: Nach (2.210) ist der Volumenstrom beim Venturi-Rohr für $\alpha\varepsilon = 1$

$$\dot{V} = A_\mathrm{V} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho\left[1 - \left(\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{R}}\right)^2\right]}} \; .$$

Daraus folgt für den Druckunterschied (s. Abb. 2.110)

$$\Delta p = \frac{\dot{V}^2 \varrho \left[1 - \left(\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{R}}\right)^2\right]}{2A_\mathrm{V}^2}$$
$$= 8\varrho\left(\frac{\dot{V}^2}{\pi\, d_\mathrm{V}^2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{d_\mathrm{V}}{d_\mathrm{R}}\right)^4\right] = 70 \text{ Pa} \; .$$

Ü 2.12-6: Unter der Annahme, dass die Strömung ideal ist, gilt mit der Gleichung von Bernoulli, (2.203),

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 \quad \text{oder}$$
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho \left(v_1^2 - v_2^2\right) \; .$$

Dabei beziehen sich die Größen mit Index 1 auf den weiten und jene mit Index 2 auf den verengten Teil des Rohres.
Mithilfe der Kontinuitätsgleichung, (2.202), wird

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \; .$$

Damit ergibt sich der gesuchte Druck

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right] = 2{,}63 \text{ bar} \; .$$

Ü 2.12-7:

a) Wenn die Reibung nicht berücksichtigt wird, gilt das Ausflussgesetz von Torricelli, (2.211):

$$v = \sqrt{2g(h - h')} \; .$$

Der Volumenstrom ist damit

$$V_\mathrm{ideal} = A\, v = \frac{\pi\, d^2}{4}\sqrt{2g(h - h')}$$
$$= 2{,}77 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \approx 10 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}} \; .$$

b) Im Realfall beträgt nach (2.213) die Ausflusszahl $\mu = \varphi\alpha = 0{,}795$. Der Volumenstrom reduziert sich somit auf

$$V_\mathrm{real} = \mu\, V_\mathrm{ideal} = 2{,}20 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \approx 8 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}} \; .$$

c) Wenn zwischen Behälter und Außenwelt ein Überdruck Δp vorliegt, dann folgt aus der Bernoulli-Gleichung für die Ausströmgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\left(\frac{\Delta p}{\varrho} + g(h - h')\right)} = 21{,}9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \; .$$

Der Volumenstrom ist $V = A\, v = 6{,}87 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \approx 25 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.

Ü 2.12-8:

a) Die Geschwindigkeit des Wassers im Rohr folgt unmittelbar aus der Kontinuitätsgleichung (2.202):

$$v_1 = \frac{V}{A} = \frac{4\,V}{\pi\,d^2} = 8{,}84\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Nach der Gleichung von Bernoulli, (2.203), gilt

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\,v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\,v_2^2\,.$$

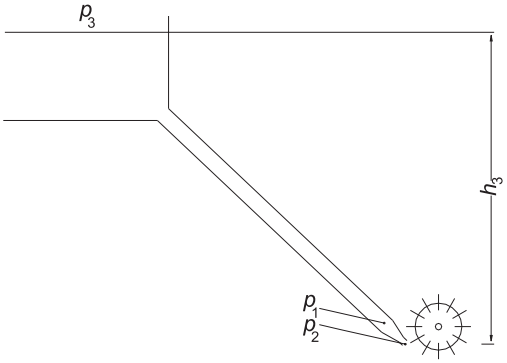
Daraus folgt die Ausströmgeschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}} = 32{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

c) Die Gleichung von Bernoulli lautet in diesem Fall

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\,v_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\varrho\,v_3^2 + \varrho\,g\,h_3\,.$$

Die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Sees ist praktisch null: $v_3 = 0$. Der Druck entspricht dem äußeren Luftdruck: $p_3 \approx 1$ bar. Damit ergibt sich für die Höhe: $h_3 = \frac{p_1 - p_3}{\varrho\,g} + \frac{v_1^2}{2g} = 55$ m.



Ü 2.12-9: Die Druckdifferenz im Prandtl'schen Staurohr, der so genannte Staudruck, ist (Abb. 2.109)

$$p_{\mathrm{Stau}} = \varrho\,g\,\Delta h = 1\,766\ \mathrm{Pa}\,.$$

Der Staudruck entspricht dem dynamischen Druck: $p_{\mathrm{Stau}} = p_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{2}\varrho\,v^2$.
Daraus folgt (2.205) für die Geschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{2p_{\mathrm{dyn}}}{\varrho}}$. ϱ ist hier die Dichte der Luft.
Mit der gegebenen Dichte ergibt sich $v = 52{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 190\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.
In größerer Höhe, in welcher der Luftdruck und damit auch die Dichte geringer ist (2.187), wird der Staudruck bei gleicher Flugzeuggeschwindigkeit niedriger.

Ü 2.12-10: Nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille, (2.234) gilt für den Volumenstrom bei laminarer Strömung

$$\dot{V} = \frac{\pi\,R^4\,\Delta p}{8\eta\,l}\,.$$

Daraus folgt für den Druckunterschied längs der Leitung

$$\Delta p = \frac{8\eta\,l\,\dot{V}}{\pi\,R^4} = 546\ \mathrm{kPa}\,.$$

Zusätzlich muss die Pumpe den Schweredruck nach (2.179) überwinden:

$$p_{\mathrm{S}} = \varrho\,g\,h = 50\ \mathrm{kPa}\,.$$

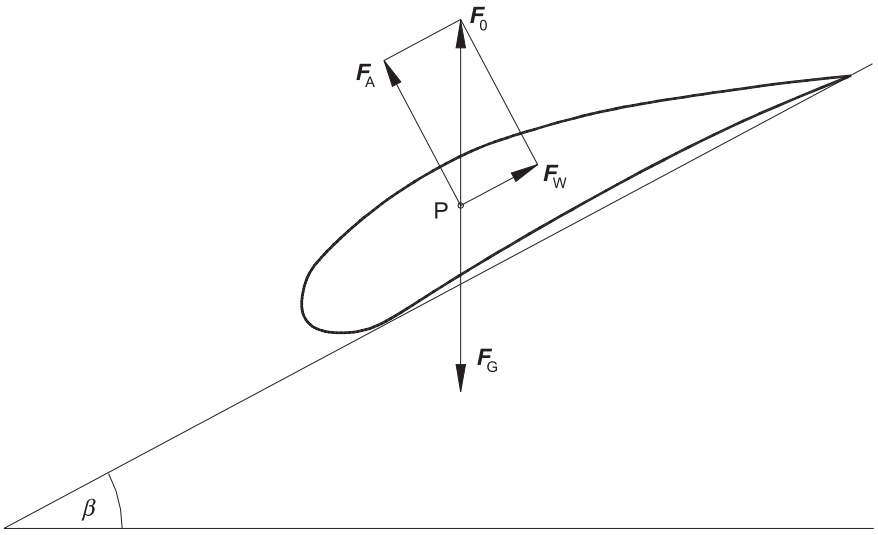
Der erforderliche Pumpendruck ist damit

$$p_{\mathrm{P}} = \Delta p + p_{\mathrm{S}} = 596\ \mathrm{kPa} \approx 6\ \mathrm{bar}\,.$$

Ü 2.12-11: Die Kugel sinkt mit konstanter Geschwindigkeit v, wenn die Gewichtskraft so groß ist wie die Summe aus Reibungskraft und Auftrieb. Dann gilt nach (2.239) für die Viskosität

$$\eta = \frac{2g\,r^2(\varrho_{\mathrm{K}} - \varrho_{\mathrm{Fl}})}{9\,v}\,.$$

Mit der Geschwindigkeit $v = s/t = 0{,}05$ m/s ergibt sich $\eta = 0{,}305$ Pa s.



Ü 2.12-12: Beim Segelflugzeug wird im Gleitflug die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ kompensiert durch die Resultierende $\boldsymbol{F}_0$ aus Auftriebskraft $\boldsymbol{F}_A$ und Widerstandskraft $\boldsymbol{F}_W$. Damit gilt für die Beträge:

$$F_0 = F_G = mg = 1{,}96\,\text{kN}\,.$$

Die Auftriebskraft beträgt $F_A = F_0 \cos\beta = 1{,}94$ kN.
Der Auftriebsbeiwert ist nach (2.259)

$$c_A = \frac{2\,F_A}{\varrho\, v^2 A} = 0{,}622\,.$$

Die Widerstandskraft beträgt $F_W = F_0 \sin\beta = 273$ N.
Nach (2.244) ist damit der Widerstandsbeiwert

$$c_W = \frac{2\,F_W}{\varrho\, v^2 A} = 0{,}0874\,.$$

Für die Gleitzahl gilt

$$\varepsilon = \frac{c_W}{c_A} = \tan\beta = 0{,}14 = \frac{1}{7{,}1}\,.$$

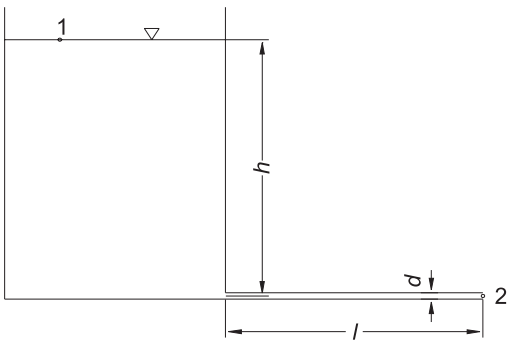
Ü 2.12-13: Beim Umschlag von laminarer in turbulente Strömung entspricht die Reynoldszahl gerade der kritischen Re_{kr}.

Bei Rohrströmungen gilt nach (2.248)

$$\text{Re} = \frac{d\,v\,\varrho}{\eta}\,.$$

Mit der kritischen Reynoldszahl $\text{Re}_{kr} = 2320$ nach Tab. 2.10 folgt daraus für die Strömungsgeschwindigkeit $v = \frac{\text{Re}_{kr}\,\eta}{d\,\varrho} = 1{,}93\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Der Druckverlust in der Röhre ist nach Hagen-Poiseuille (2.234)

$$p_V = \frac{8\eta\, l\, \dot{V}}{\pi R^4} = \frac{8\eta\, l\, v\, \pi R^2}{\pi R^4} = \frac{8\eta\, l\, v}{R^2} = 21{,}5\,\text{kPa}\,.$$



Wendet man die modifizierte Bernoulli-Gleichung nach (2.240) auf die Punkte 1 und 2 an, so gilt

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\, v_1^2 + \varrho\, g\, h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\, v_2^2 + \varrho\, g\, h_2 + p_V\,.$$

Die Drücke p_1 und p_2 sind gleich dem Atmosphärendruck, v_1 ist bei großem Gefäßdurchmesser vernachlässigbar. Damit gilt für die erforderliche Höhe:

$$h = \frac{\frac{1}{2}\varrho v^2 + p_V}{\varrho g} = 2{,}38\ \text{m} .$$

Lösungsvariante:
Die Verlusthöhe ist nach (2.242)

$$h_V = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = 2{,}19\ \text{m} .$$

Dazu kommt die Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}19\ \text{m} .$$

Die Gesamthöhe ist damit $h = 2{,}38$ m.

3. Thermodynamik

Ü 3.1-1: Die Länge bei der höheren Temperatur ist nach (3.7)

$$l_2 = l_1 \left[1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1)\right]$$

und damit für Glas $l_{2,\text{Glas}} = 1\,000{,}256$ mm und für Messing $l_{2,\text{Ms}} = 1\,001{,}52$ mm.
Für das Verhältnis der Längen gilt

$$\frac{l_{2,\text{Glas}}}{l_{2,\text{Ms}}} = 0{,}9987 .$$

Damit liest man auf dem Messingmaßstab die Länge des Glasstabes zu $l = 998{,}7$ mm ab.

Ü 3.1-2: Die Fläche der Platte ist proportional zum Quadrat des Durchmessers. Damit ändert sich die Fläche mit dem doppelten linearen Ausdehnungskoeffizienten.
Herleitung:
Fläche: $A = \frac{\pi}{4} d^2$,
Änderung der Fläche: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}d} = \frac{\pi}{4} 2d$ und damit $\Delta A = \frac{\pi}{4} 2d\,\Delta d$.
Die relative Flächenänderung ist $\frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta d}{d} = 2\alpha\,\Delta T$.

Mit $\alpha = 11{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ aus Tab. 3.4 ergibt sich

$$\Delta A = 2\alpha A\,\Delta T = 1\,908\ \text{mm}^2 .$$

Ü 3.1-3: Wenn die Schienen nicht verschweißt wären, würden sie sich beim Abkühlen verkürzen. Die relative Längenänderung ist nach (3.6)

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha\,\Delta T .$$

Da dies durch das Verschweißen verhindert wird, erfahren sie eine Dehnung von demselben Betrag:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha\,\Delta T .$$

Nach dem Hooke'schen Gesetz, (2.150), beträgt die Spannung

$$\sigma = E\varepsilon = E\alpha\,\Delta T = 88{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} .$$

Ü 3.1-4: Nach (3.11) verhält sich die Dichte gemäß

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{1 - \gamma\vartheta_2}{1 - \gamma\vartheta_1} .$$

Daraus folgt für die gesuchte Temperatur

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{1 - \varrho_2/\varrho_1}{\gamma} = 38{,}7\ ^\circ\text{C} .$$

Lösungsvariante:
Die relativen Änderungen von Dichte und Volumen betragen $\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\frac{\Delta V}{V} = -\gamma\,\Delta T$.
Daraus folgt für die Temperaturdifferenz

$$\Delta T = -\frac{\Delta\varrho}{\varrho\,\gamma} = 18{,}7\ \text{K} .$$

Also beträgt die Endtemperatur 38,7 °C.

Ü 3.1-5: In Anlehnung an (3.18) beträgt die individuelle Gaskonstante am gegebenen Zustand

$$R_\mathrm{i} = \frac{p}{T\varrho} = \frac{p\,v}{T} = 457\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\,.$$

Ü 3.1-6: Aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.19) folgt die Masse:

$$m = \frac{p\,V}{R_\mathrm{i}\,T}\,.$$

Die individuelle Gaskonstante von Luft ist gemäß Beispiel 3.1-3 $R_\mathrm{i} = 286{,}9\ \mathrm{J/(kg\,K)}$. Damit ergibt sich $m \approx 2{,}4\ \mathrm{kg}$.

Ü 3.1-7: Die Stoff- oder Teilchenmenge beträgt nach (3.20)

$$\nu = \frac{p\,V}{R_\mathrm{m}\,T} = 120\ \mathrm{mol}\,.$$

Ü 3.2-1:

a) Die mittlere Geschwindigkeit für ein bestimmtes Gas hängt nur von der Temperatur ab. Nach (3.26) gilt für Helium mit der Molmasse $M = 4{,}0026\ \mathrm{g/mol}$ (s. Periodensystem)

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{3R_\mathrm{m}\,T}{M}} = 1\,305\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Die Anzahl der He-Atome beträgt nach der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (3.22),

$$N = \frac{p_\mathrm{n}\,V}{k\,T_\mathrm{n}}\,.$$

Die mittlere kinetische Energie eines He-Atoms ist nach (3.28)

$$\overline{E}_\mathrm{kin} = \frac{3}{2}k\,T_\mathrm{n}\,.$$

Damit ist die gesamte kinetische Energie aller Atome

$$E_\mathrm{kin,\,ges} = N\,\overline{E}_\mathrm{kin} = \frac{3}{2}k\,T_\mathrm{n}\cdot\frac{p_\mathrm{n}\,V}{k\,T_\mathrm{n}} = \frac{3}{2}p_\mathrm{n}\,V = 152\ \mathrm{J}\,.$$

Ü 3.2-2: Die Schallgeschwindigkeit ist proportional zur Wurzel aus der absoluten Temperatur: $c \sim \sqrt{T}$.
Damit gilt $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$.
Wenn die Grundfrequenz der Pfeife proportional ist zur Schallgeschwindigkeit (Abschn. 5.2.4.2), dann gilt auch für die Frequenzen

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \text{ oder } f_2 = f_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 428{,}6\ \mathrm{Hz}\,.$$

Ü 3.2-3: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Geschwindigkeiten zwischen $v_1 = 1\,000\ \mathrm{m/s}$ und $v_2 = 1\,100\ \mathrm{m/s}$ ist nach (3.34)

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v \quad \text{mit}$$

$$f(v) = 4\pi\,v^2\left(\frac{m_\mathrm{M}}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{m_\mathrm{M}v^2}{2kT}}\,.$$

Die Masse eines Stickstoffmoleküls (N_2) beträgt

$$m_\mathrm{M} = M_\mathrm{r}u = \frac{M}{N_\mathrm{A}}\,.$$

Mit der Molmasse $M = 28{,}014\ \mathrm{g/mol}$ und der Avogadro-Konstante $N_\mathrm{A} = 6{,}022\cdot10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ ergibt sich $m_\mathrm{M} = 4{,}652\cdot10^{-26}\ \mathrm{kg}$.
Durch numerische Integration mit einem Rechner folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v = 7{,}02\cdot10^{-3}$.
Um die numerische Integration zu umgehen, kann mit guter Genauigkeit auch gerechnet werden
$f(\overline{v})\,\Delta v$ mit $\overline{v} = \frac{v_1+v_2}{2} = 1\,050\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\Delta v = v_2 - v_1 = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt damit

$$f(\overline{v})\,\Delta v = 6{,}78\cdot10^{-3}\,.$$

Im Gefäß befinden sich $N = \frac{p_\mathrm{n}\,V}{k\,T} = 2{,}45\cdot10^{22}$ Moleküle. Damit wird die Zahl der Moleküle,

die Geschwindigkeiten im angegebenen Intervall besitzen

$$f(\vec{v})\,\Delta v\,N \approx 1{,}7 \cdot 10^{20} \ .$$

Ü 3.2-4: Obwohl die Elektronen im Festkörper der Fermi-Statistik unterliegen (Abschn. 9.2.2), soll hier näherungsweise das Elektronengas durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung beschrieben werden.
Um die Austrittsarbeit von $W_\mathrm{A} = 4{,}5\,\mathrm{eV}$ zu überwinden, muss die Geschwindigkeit der Elektronen

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,W_\mathrm{A}}{m}} = 1{,}26 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

betragen.
Nach der Näherungslösung von (3.37) beträgt der Bruchteil der Elektronen, der schneller ist als v_0

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{W_\mathrm{A}}{kT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{W_\mathrm{A}}{kT}} \ .$$

Für $T = 300\,\mathrm{K}$ ergibt sich $x(300\,\mathrm{K}) = 3{,}77 \cdot 10^{-75}$ und für $T = 1\,500\,\mathrm{K}$ $x(1\,500\,\mathrm{K}) = 5{,}06 \cdot 10^{-15}$.
Obwohl die Temperatur nur um einen Faktor 5 ansteigt, ist die Wahrscheinlichkeit des Elektronenaustritts um den Faktor $1{,}34 \cdot 10^{60}$ gestiegen.

Ü 3.3-1: Aus der Energiebilanzgleichung

$$\begin{aligned} &m_1 c_1 (T_\mathrm{m} - T_1) + C_\mathrm{K}(T_\mathrm{m} - T_1) \\ &= m_2 c_2 (T_2 - T_\mathrm{m}) \end{aligned}$$

folgt die Wärmekapazität des Kalorimeters:

$$C_\mathrm{K} = \frac{m_2 c_2 (T_2 - T_\mathrm{m}) - m_1 c_1 (T_\mathrm{m} - T_1)}{T_\mathrm{m} - T_1} \ .$$

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist $c_1 = 4{,}187\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$, die von Kupfer ist $c_2 = 0{,}386\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$.
Damit ergibt sich $C_\mathrm{K} = 182\,\mathrm{J/K}$.

Ü 3.3-2: Um die Temperatur des Kalorimeters um $\mathrm{d}T$ zu erhöhen, ist die Wärme $\delta Q = (c_1 m_1 + C_\mathrm{K})\,\mathrm{d}T$ erforderlich. Die Heizleistung beträgt

$$P = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} = (c_1 m_1 + C_\mathrm{K})\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \ .$$

Daraus folgt für die spezifische Wärmekapazität

$$c_1 = \frac{\frac{P}{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t} - C_\mathrm{K}}{m_1} = 2{,}48\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \ .$$

Ü 3.3-3: Beim Durchströmen des Gases der Masse m kühlt sich dasselbe um $T_1 - T_2 = 5\,\mathrm{K}$ ab. Dabei wird die Wärme

$$\delta Q = c_\mathrm{p} m\,(T_1 - T_2)$$

frei. Diese Wärme heizt das Wasserbad um

$$\mathrm{d}T_3 = \frac{\delta Q}{c_1 m_1} = \frac{c_\mathrm{p} m\,(T_1 - T_2)}{c_1 m_1}$$

auf.
Abgeleitet nach der Zeit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}t} = \frac{c_\mathrm{p}\dot{m}\,(T_1 - T_2)}{c_1 m_1} = \frac{c_\mathrm{p}\dot{V}\varrho\,(T_1 - T_2)}{c_1 m_1} \ .$$

Die gesuchte isobare spezifische Wärmekapazität ergibt sich daraus mit $c_1 = 4{,}187\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$ zu

$$c_\mathrm{p} = \frac{\frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}t} c_1 m_1}{\dot{V}\varrho\,(T_1 - T_2)} = 1\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \ .$$

Die molare Wärmekapazität ist nach (3.4)

$$C_\mathrm{mp} = c_\mathrm{p} M = 1\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}} \cdot 30\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 30\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}} \ .$$

Ü 3.3-4: Schreibt man die spezifische Wärmekapazität gemäß Debye als $c = a\,T^3$, dann gilt für die zu entziehende Wärme nach (3.41)

$$Q_{21} = m \int_{T_2}^{T_1} a\,T^3\,\mathrm{d}T = \frac{1}{4} m a \left(T_1^4 - T_2^4\right) \ .$$

Die spezifische Wärmekapazität bei $T_2 = 20$ K folgt aus der gegebenen molaren Wärmekapazität gemäß (3.4) zu

$$c = \frac{C_m}{M} = 0{,}0269 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} .$$

Die Konstante a beträgt damit

$$a = \frac{c}{T_2^3} = 3{,}365 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}^4}$$

und die abzuführende Wärme $Q_{21} = -26{,}9$ J.

Ü 3.3-5:

a) Wenn keine Wärme an die Umgebung abgegeben wird, liegt ein adiabates System vor. Bei isentroper Zustandsänderung ist die Endtemperatur nach (3.67)

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\varkappa - 1} .$$

Bei Luft ist der Isentropenexponent $\varkappa = 1{,}4$ (Tab. 3.8).
Damit wird die Endtemperatur $T_2 = 995$ K oder $\vartheta_2 = 722\,^\circ$C.

b) Der Enddruck beträgt nach (3.69)

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\varkappa} = 63 \text{ bar} .$$

c) Die Kompressionsarbeit ist nach (3.70)

$$W_{12} = \nu \, C_{mv} (T_2 - T_1) .$$

Die Stoffmenge folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = 0{,}0228 \text{ mol} .$$

Die molare isochore Wärmekapazität von Luft (zweiatomige Moleküle mit $f = 5$ Freiheitsgraden) ist nach (3.56)

$$C_{mv} = \frac{5}{2} R_m = 20{,}8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} .$$

Damit beträgt die Arbeit

$$W_{12} = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} \frac{5}{2} R_m (T_2 - T_1)$$
$$= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 330 \text{ J} .$$

Ü 3.3-6:

a) Die Stoffmenge wird aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (3.20), bestimmt:

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = 358 \text{ mol} .$$

Die Masse des Gases ist

$$m = \nu M.$$

Mit der Molmasse $M = 2{,}016$ g/mol ergibt sich $m = 721$ g.

b) Bei isentroper Ausdehnung gilt die *Poisson-Gleichung* $p V^{\varkappa} = \text{const}$, (3.66). Daraus berechnet sich das Volumen mit dem Isentropenexponent von Wasserstoff $\varkappa = 1{,}41$ (Tab. 3.8) zu

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\varkappa} = 26{,}1 \text{ m}^3 .$$

c) Die Temperatur nach der Expansion folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (3.16):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{oder}$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 175 \text{ K} \quad \text{bzw.}$$

$$\vartheta_2 = -98\,^\circ\text{C} .$$

d) Die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase (3.16), liefert bei isobarer Zustandsänderung

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = 336 \text{ K} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta_3 = 63\,^\circ\text{C} .$$

e) Bei der isentropen Expansion wurde keine Wärme aufgenommen. Die Wärmezufuhr erfolgt bei der isobaren Erwärmung und ist nach (3.64)

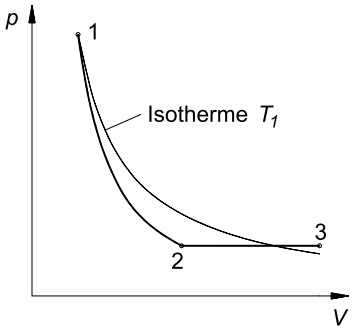
$$Q_{23} = \nu \, C_{mp} (T_3 - T_2) .$$

Die molare isobare Wärmekapazität von Luft ist nach Tab. 3.8

$$C_{\mathrm{mp}} = 28{,}76\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$$

Damit wird die aufgenommene Wärme $Q_{23} = 1{,}65$ MJ.

Im p, V-Diagramm haben die Zustandsänderungen folgenden Verlauf:



Ü 3.3-7:

a) Wenn die Zustandsänderung so verläuft, dass der Polytropenexponent $n = 2$ ist, gilt $p_1 V_1^2 = p_2 V_2^2$ oder $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = 4p_1 = 4$ bar.

b) Die Endtemperatur folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase (3.16):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{oder}$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2\, V_2}{p_1\, V_1} = 2T_1 = 590\ \mathrm{K} \quad \text{bzw.}$$

$$\vartheta_2 = 317\ ^\circ\mathrm{C}\ .$$

c) Die Volumenänderungsarbeit entspricht nach (3.50) der Fläche unter der Kurve der Zustandsänderung:

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -p_1 V_1^2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^2}$$

$$= p_1 V_1^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = p_1 V_1 = 100\ \mathrm{J}\ .$$

Alternativ kann auch die Formel aus Abb. 3.22 verwendet werden:

$$W_{12} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n-1} = p_2 V_2 - p_1 V_1$$

$$= 4p_1 \frac{V_1}{2} - p_1 V_1 = p_1 V_1\ .$$

d) Bei einer beliebigen Zustandsänderung sind die Prozessgrößen Q und W sowie die Zustandsgröße U über den ersten Hauptsatz, (3.48), verknüpft:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}\ .$$

Die Änderung der inneren Energie gehorcht bei beliebigen Zustandsänderungen (3.47):

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \nu \int C_{\mathrm{mv}}(T)\,\mathrm{d}T$$

$$\approx \nu\, C_{\mathrm{mv}}(T_2 - T_1)\ .$$

Die Stoffmenge folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R_{\mathrm{m}} T_1} = 0{,}0408\ \mathrm{mol}\ .$$

Die molare isochore Wärmekapazität ist für ein Molekül mit $f = 5$ Freiheitsgraden nach (3.56)

$$C_{\mathrm{mv}} = \frac{5}{2} R_{\mathrm{m}} = 20{,}8\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\ .$$

Damit wird die Änderung der inneren Energie

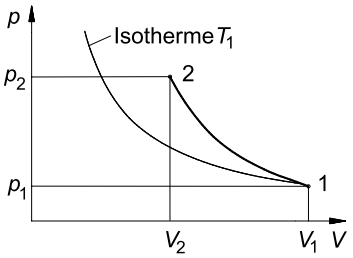
$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{p_1\, V_1}{R_{\mathrm{m}}\, T_1} \frac{f}{2} R_{\mathrm{m}} (T_2 - T_1)$$

$$= p_1 V_1 \frac{f}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = p_1 V_1 \frac{f}{2} = 250\ \mathrm{J}\ .$$

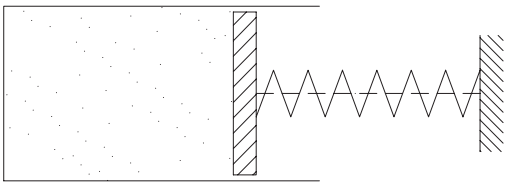
Die gesuchte Wärme folgt nun aus dem ersten Hauptsatz zu

$$Q_{12} = \Delta U - W_{12} = \frac{3}{2} p_1 V_1 = 150\ .$$

Im p, V-Diagramm haben die Zustandsänderungen folgenden Verlauf:

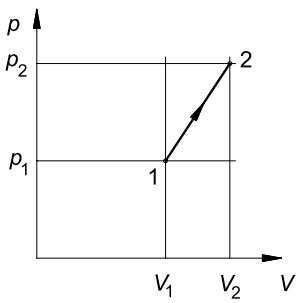


Ü 3.3-8: Eine Zustandsänderung, die im p, V-Diagramm längs einer Geraden verläuft, lässt sich beispielsweise realisieren durch eine Anordnung, bei welcher der Gasdruck auf den Kolben durch eine gespannte Feder kompensiert wird.



a) Die Stoffmenge des Gases ist nach der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$\nu = \frac{p_1\, V_1}{R_\mathrm{m}\, T_1} = 0{,}08206\ \mathrm{mol}\ .$$



b) Die Endtemperatur ergibt sich aus (3.16):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{oder}$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2\, V_2}{p_1\, V_1} = 3T_1 = 879\ \mathrm{K} \quad \text{bzw.}$$

$$\vartheta_2 = 606\ ^\circ\mathrm{C}\ .$$

c) Die abgegebene Arbeit entspricht nach (3.50) betragsmäßig der Fläche unter der Kurve der Zustandsänderung. Diese Trapezfläche kann direkt berechnet werden:

$$W_{12} = -(V_2 - V_1)\frac{p_1 + p_2}{2} = -150\ \mathrm{J}\ .$$

d) Bei Erhöhung der Temperatur erhöht sich nach (3.47) auch die innere Energie:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \nu\, C_\mathrm{mv}(T_2 - T_1)\ .$$

Die molare isochore Wärmekapazität ist nach Tab. 3.8 $C_\mathrm{mv} = 20{,}43\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$. Rechnet man idealisierend nach (3.56) $C_\mathrm{mv} = \frac{f}{2} R_\mathrm{m}$, mit $f = 5$ Freiheitsgraden, so ergibt sich

$$\Delta U = 1\,000\ \mathrm{J}\ .$$

e) Die zugeführte Wärme folgt nun aus dem ersten Hauptsatz, (3.48), zu

$$Q_{12} = \Delta U - W_{12} = 1\,150\ \mathrm{J}\ .$$

Ü 3.3-9:

a) Die Temperaturen ergeben sich aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$T_1 = \frac{p_1\, V_1}{\nu\, R_\mathrm{m}} = 301\ \mathrm{K}\ ,$$

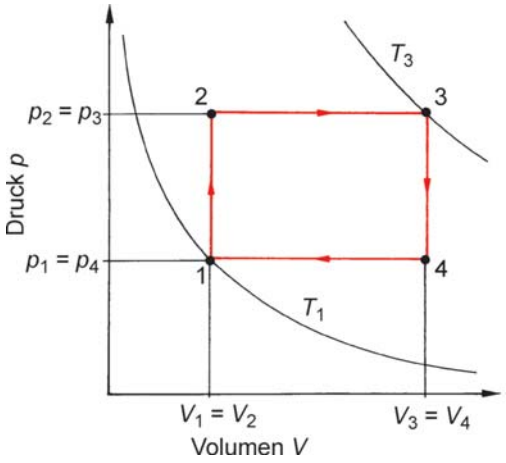
$$T_2 = \frac{p_2\, V_2}{\nu\, R_\mathrm{m}} = 401\ \mathrm{K}\ ,$$

$$T_3 = \frac{p_3\, V_3}{\nu\, R_\mathrm{m}} = 601\ \mathrm{K}\ .$$

b) Die abgegebene Arbeit entspricht der umfahrenen Fläche des Kreisprozesses, also hier einer Rechtecksfläche:

$$W = (V_3 - V_1)(p_2 - p_1) = 125\ \mathrm{J}\ .$$

Gemäß Vorzeichenkonvention gilt $W = -125\ \mathrm{J}$.



c) Wärme wird zugeführt bei der isochoren Erwärmung 1 → 2 sowie bei der isobaren Erwärmung (Expansion) 2 → 3. Nach (3.63) und (3.64) gilt

$$Q_{12} = \nu\, C_{mv}(T_2 - T_1) \quad \text{und}$$
$$Q_{23} = \nu\, C_{mp}(T_3 - T_2)\,.$$

Die molaren Wärmekapazitäten sind nach Tab. 3.7 für Moleküle mit $f = 5$ Freiheitsgraden

$$C_{mv} = \frac{5}{2}R_m = 20{,}79\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \quad \text{und}$$
$$C_{mp} = \frac{7}{2}R_m = 29{,}1\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\,.$$

Damit ergibt sich
$Q_{12} = 624\,\text{J}$ und $Q_{23} = 1\,746\,\text{J}$.
Die gesamte zugeführte Wärme beträgt somit
$Q_{zu} = Q_{12} + Q_{23} = 2\,370\,\text{J}$.

d) Der thermische Wirkungsgrad ist nach (3.75)

$$\eta_{th} = \frac{|W|}{Q_{zu}} = 5{,}27\%\,.$$

e) Die Maximaltemperatur des Prozesses ist $T_3 = 601\,\text{K}$, die Minimaltemperatur $T_1 = 301\,\text{K}$. Ein Carnot-Prozess zwischen diesen beiden Temperaturen hätte nach (3.76) den Wirkungsgrad

$$\eta_{th,C} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 50\%\,.$$

Ü 3.3-10:

a) Die Leistungszahl der Wärmepumpe ist nach (3.81)

$$\varepsilon_W = \frac{|\dot{Q}_{ab}|}{P}\,.$$

Damit ist die Leistung, die der Motor zuführen muss

$$P = \frac{|\dot{Q}_{ab}|}{\varepsilon_W} = 5\,\text{kW}\,.$$

b) Bei einem Carnot-Prozess wäre die Leistungszahl nach (3.82)

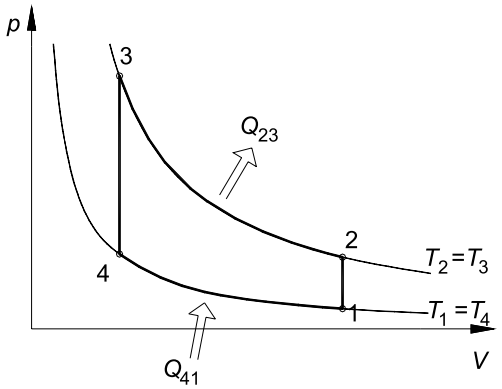
$$\varepsilon_{W,C} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} = 6{,}36$$

und die erforderliche Motorleistung lediglich $P = 2{,}36\,\text{kW}$.

Ü 3.3-11:

a) Der Wirkungsgrad des idealen Stirling-Prozesses entspricht jenem des Carnot-Prozesses und ist nach (3.80)

$$\varepsilon_{K,C} = \frac{T_1}{T_3 - T_1} = 0{,}345\,.$$



b) Vom Wärmebad der tiefen Temperatur T_1 wird Wärme zugeführt während der isothermen Expansion 4 → 1. Nach (3.62) gilt

$$Q_{41} = \nu R_m T_1 \ln \frac{V_1}{V_4} .$$

Die Stoffmenge ν folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} .$$

Damit wird

$$Q_{41} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = 175\,\text{J} .$$

Bei einer Drehzahl von $n = 1\,400\,\text{min}^{-1}$ ist die zugeführte Wärmeleistung (d. h. die dem Kühlgut entzogene Kälteleistung)

$$\dot{Q}_{zu} = Q_{zu} \cdot n = 4{,}08\,\text{kW} .$$

c) Die Leistung des Antriebsmotors ist nach (3.79)

$$P = \frac{\dot{Q}_{zu}}{\varepsilon_K} = 11{,}8\,\text{kW} .$$

d) Nach dem Energieflussdiagramm von Abb. 3.26 wird die Summe der zugeführten Leistungen bei hoher Temperatur abgegeben. Damit ist

$$\left|\dot{Q}_{ab}\right| = \dot{Q}_{zu} + P = 15{,}9\,\text{kW} .$$

Ü 3.3-12: Ein Perpetuum Mobile 2. Art könnte Wärme aus dem Meerwasser aufnehmen, ohne zugleich Wärme an ein kälteres Wärmebad abzugeben. Wenn die Masse m an Meerwasser um die Temperatur ΔT abgekühlt würde, dann wäre die frei werdende Energie

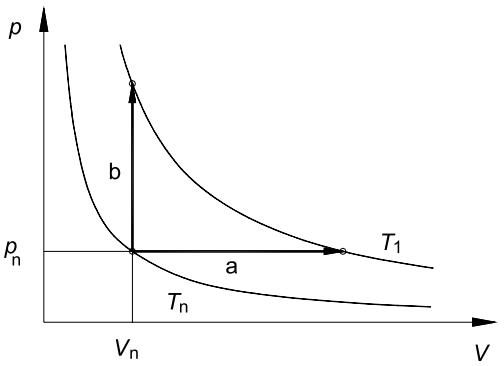
$$Q = c\, m\, \Delta T .$$

Mit $c = 4{,}17\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg·K}}$ ergibt sich $Q = 5{,}8 \cdot 10^{24}$ J. Diese Energie würde $4{,}5 \cdot 10^{11}$ s oder etwa 14 000 Jahre reichen.

Ü 3.3-13: Die Entropieänderung ist nach (3.85)

$$\Delta S = S_1 - S_n = \int_{T_n}^{T_1} \frac{\delta Q_{rev}}{T} .$$

Beide Wege sind im Prinzip reversibel führbar.



a) Im Falle der isobaren Zustandsänderung gilt (s. auch (3.87))

$$\delta Q = \nu C_{mp}\, \mathrm{d}T \quad \text{und}$$

$$\Delta S = \nu C_{mp} \int_{T_n}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \nu C_{mp} \ln \frac{T_1}{T_n} .$$

Die Stoffmenge ν folgt aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase, (3.20):

$$\nu = \frac{p_n V_n}{R_m T_n} = 0{,}0446\,\text{mol} .$$

Die isobare molare Wärmekapazität von N_2 ist nach Tab. 3.8

$$C_{mp} = 29{,}1\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} .$$

Damit ergibt sich die Entropieänderung

$$\Delta S = 0{,}785\,\text{J/K} .$$

b) Im Falle der isochoren Zustandsänderung ergibt sich (siehe (3.86))

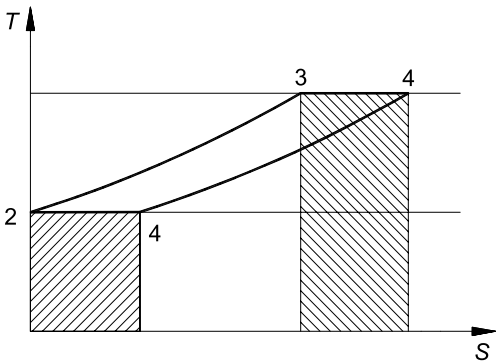
$$\Delta S = \nu C_{mv} \ln \frac{T_1}{T_n} = 0{,}560\ \frac{\text{J}}{\text{K}} .$$

Ü 3.3-14: Der Stirling-Prozess verläuft zwischen Isothermen und Isochoren (Abb. 3.28). Isothermen sind im T, S-Diagramm natürlich waagrechte Geraden. Bei einer isochoren Zustandsänderung gilt nach (3.86) für die Entropie

$$S(T) = S_0 + \nu\, C_{\mathrm{mv}} \ln \frac{T}{T_0} ,$$

wobei S_0 die Entropie bei der Temperatur T_0 ist. Umgeformt ergibt sich, dass eine Isochore im T, S-Diagramm durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird:

$$\begin{aligned} T(S) &= T_0 \exp\left(\frac{S - S_0}{\nu\, C_{\mathrm{mv}}}\right) \\ &= T_0 \exp\left(-\frac{S_0}{\nu\, C_{\mathrm{mv}}}\right) \cdot \exp\left(\frac{S}{\nu\, C_{\mathrm{mv}}}\right) . \end{aligned}$$



Beim gezeichneten T, S-Diagramm wurde willkürlich die Entropie des Zustandes 2 auf Null gesetzt: $S_2 = 0$.
Die Flächen unter den beiden Exponentialfunktionen sind gleich, nämlich

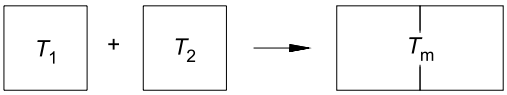
$$\int T(S)\, \mathrm{d}S = Q = \nu\, C_{\mathrm{mv}}(T_3 - T_1) .$$

Sie stellen die Wärme dar, die intern bei der isochoren Abkühlung gespeichert und anschließend bei der isochoren Erwärmung wieder zugeführt wird. Damit verbleiben für den Wärmeaustausch mit der Umgebung nur noch die schraffierten Flächen unter den Geradenstücken. Diese sind aber flächengleich mit den Rechteckflächen des Carnot-Prozesses von Abb. 3.37. Daraus folgt, dass der ideale Stirling-Prozess den gleichen Wirkungsgrad besitzt wie der Carnot-Prozess.

Ü 3.3-15:

a) Beim Kontakt entsteht eine Temperatur, die dem Mittelwert der beiden Temperaturen entspricht (Abschn. 3.3.1, Kalorimetrie):

$$T_{\mathrm{m}} = \frac{T_1 + T_2}{2} = 293{,}15\ \mathrm{K} .$$



Zur Berechnung der Entropieänderung des Systems muss ein reversibler Ersatzprozess betrachtet werden. Hier kann z. B. ein Körper reversibel um 10 K erwärmt werden, während der andere um 10 K abgekühlt wird. Dabei gilt:

$$\delta Q_{\mathrm{rev}} = m\, c\, \mathrm{d}T \quad \text{und}$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} = m\, c\, \frac{\mathrm{d}T}{T} .$$

Beim Aufheizen ergibt sich die Entropieänderung

$$\Delta S_1 = m\, c \int_{T_1}^{T_{\mathrm{m}}} \frac{\mathrm{d}T}{T} = m\, c \ln \frac{T_{\mathrm{m}}}{T_1} ,$$

beim Abkühlen

$$\Delta S_2 = m\, c \ln \frac{T_{\mathrm{m}}}{T_2} .$$

Damit ist die komplette Entropieänderung

$$\Delta S = m\, c \left(\ln \frac{T_{\mathrm{m}}}{T_1} + \ln \frac{T_{\mathrm{m}}}{T_2}\right) .$$

Mit der Wärmekapazität $c = 0{,}384$ kJ/(kg K) für Kupfer ergibt sich $\Delta S = 0{,}447$ J/K. Die Entropieänderung ist positiv. Der Vorgang des Temperaturausgleichs ist daher irreversibel.

b) Die Entropie ist mit der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit verknüpft nach (3.93): $S = k \ln W$.
Also gilt $S_1 = k \ln W_1$ und $S_2 = k \ln W_2$, sowie $\Delta S = S_2 - S_1 = k(\ln W_2 - \ln W_1) = k \ln \frac{W_2}{W_1}$.
Das Wahrscheinlichkeitsverhältnis mit dem die beiden Zustände realisiert werden ist damit

$$\frac{W_2}{W_1} = \mathrm{e}^{\Delta S/k} = \mathrm{e}^{3{,}24\cdot 10^{22}} \quad \text{oder}$$
$$\frac{W_1}{W_2} = \mathrm{e}^{-3{,}24\cdot 10^{22}} = 10^{-1{,}4\cdot 10^{22}} .$$

Das bedeutet, dass die Einstellung des Originalzustands um den Faktor $10^{-1{,}4\cdot 10^{22}}$ unwahrscheinlicher ist, als der Zustand des Temperaturausgleichs.

Ü 3.5-1: Für den Wärmetransport ist die *Nußeltzahl* entscheidend. Nach Tab. 3.14, (3.185) gilt näherungsweise

$$\mathrm{Nu} \approx 0{,}129(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/3} .$$

Die *Grashofzahl* ist nach Tab. 3.13, (3.172)

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\,\gamma\,\Delta T\,L^3}{\nu^2} .$$

Die erforderlichen Stoffwerte sind in Tab. 3.15 zusammengestellt. Für Luft von 20 °C gilt:
$\gamma = 3{,}421 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ und $\nu = 15{,}35 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.
Die Temperaturdifferenz ist $\Delta T = T_\mathrm{O} - T_\mathrm{L} = 20\ \mathrm{K}$.
Die charakteristische Länge L entspricht der Höhe $h = 0{,}6$ m des Heizkörpers.
Mit diesen Daten ergibt sich für die Grashofzahl

$$\mathrm{Gr} = 6{,}153 \cdot 10^8$$

Die *Prandtlzahl* ist nach (3.178) in Tab. 3.13

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu\,\varrho\,c_p}{\lambda} = 0{,}715 .$$

Damit wird die Nußeltzahl Nu = 98,1.

Nach (3.188) beträgt der Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_\mathrm{K}^* = \frac{\mathrm{Nu}\,\lambda}{L} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}} .$$

Damit ist der Wärmestrom vom Heizkörper in die Raumluft

$$j_{q,\mathrm{K}} = \alpha_\mathrm{K}^*(T_\mathrm{O} - T_\mathrm{L}) = 84\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} .$$

Bei einer Heizkörperfläche (Vorder- und Rückseite des Heizkörpers) von

$$A = 2\,hb = 1{,}44\ \mathrm{m}^2$$

wird der Wärmestrom infolge Konvektion

$$\dot{Q}_\mathrm{K} = 121\ \mathrm{W} .$$

Ü 3.5-2: Die Wärmestromdichte infolge Wärmeleitung beträgt nach (3.131), mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}026\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$ aus Tab. 3.12:

$$j_{q,\mathrm{L}} = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta s} = 22\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} .$$

Bei einer Scheibenfläche von $A = 1\ \mathrm{m}^2$ ist der Wärmestrom infolge Leitung

$$\dot{Q}_\mathrm{L} = 22\ \mathrm{W} .$$

Der Wärmestrom infolge Konvektion wird analog zu Ü 3.5-1 berechnet. Hier ergibt sich:
Grashofzahl: $\mathrm{Gr} = 1{,}972 \cdot 10^9$,
Prandtlzahl: $\mathrm{Pr} = 0{,}718$,
Nußeltzahl: Nu = 145,

Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_\mathrm{K}^* = 3{,}5\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}$.
Damit wird die Wärmestromdichte infolge Konvektion

$$j_{q,\mathrm{K}} = \alpha_\mathrm{K}^* \Delta T = 35\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

und der Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{K} = 35$ W.
Der Wärmestrom infolge Strahlung ist nach (3.200)

$$\dot{Q}_\mathrm{S} = C_{12} A \left(T_1^4 - T_2^4\right) .$$

Der Strahlungsaustauschkoeffizient ist nach (3.203) in Abb. 3.59

$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{\sigma}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} .$$

Mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$$

und dem Emissionsgrad von Glas $\varepsilon = 0{,}88$ nach Tab. 3.16 ergibt sich
$C_{12} = 4{,}455 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$ und $\dot{Q}_\mathrm{S} = 38\ \mathrm{W}$.
Der gesamte Wärmestrom beträgt somit

$$\dot{Q}_\mathrm{ges} = \dot{Q}_\mathrm{L} + \dot{Q}_\mathrm{K} + \dot{Q}_\mathrm{S} = 95\ \mathrm{W} .$$

Der Wärmedurchlasswiderstand der Scheibe ist

$$R = \frac{A\,\Delta T}{\dot{Q}_\mathrm{ges}} = 0{,}105 \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}{\mathrm{W}} .$$

Wird eine Scheibe bedampft, so dass sie einen Emissionsgrad von $\varepsilon = 0{,}08$ aufweist, dann reduziert sich der Strahlungsaustauschkoeffizient auf

$$C_{12,\,\mathrm{bedampft}} = 4{,}487 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$$

und der Wärmestrom infolge Strahlung auf

$$Q_{\mathrm{S,\,bedampft}} = 4\ \mathrm{W} .$$

Der gesamte Wärmestrom beträgt jetzt

$$Q_{\mathrm{ges,\,bedampft}} = 61\ \mathrm{W} .$$

Die prozentuale Reduktion ist

$$\frac{\dot{Q}_{\mathrm{ges,\,normal}} - \dot{Q}_{\mathrm{ges,\,bedampft}}}{\dot{Q}_{\mathrm{ges,\,normal}}} = 36\% .$$

Nach der Bedampfung erhöht sich der Wärmedurchlasswiderstand der Scheibe auf

$$R_\mathrm{bedampft} = \frac{A\,\Delta T}{\dot{Q}_{\mathrm{ges,\,bedampft}}} = 0{,}164 \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}{\mathrm{W}} .$$

Ü 3.5-3: Der Wärmedurchgangskoeffizient k (nach DIN ISO 6946: U) des Daches beträgt nach (3.222)

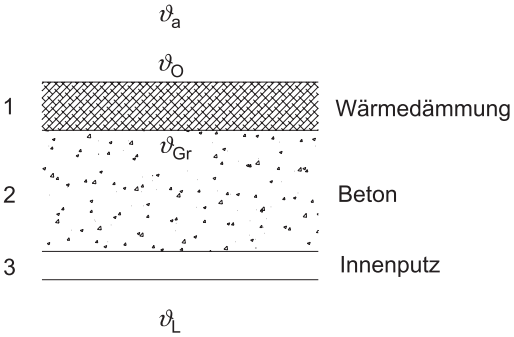
$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_\mathrm{a}^*} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_\mathrm{i}^*}} .$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich $k_1 = 0{,}57 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}$.
Die Temperatur ϑ_Gr an der Grenzschicht zwischen Wärmedämmung und Betondecke kann berechnet werden, wenn der Wärmestrom durch die Decke bekannt ist.
Im Sommer ist die Oberflächentemperatur $\vartheta_\mathrm{O} = 60\ ^\circ\mathrm{C}$ direkt gegeben. Das bedeutet, dass der Wärmeübergang von der Außenluft auf die Dachhaut nicht betrachtet werden muss. Der k-Wert beträgt in diesem Fall

$$k_2 = \frac{1}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_\mathrm{i}^*}} = 0{,}581 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}} .$$

Der Wärmestrom durch die Decke ist nach (3.210)

$$\dot{Q} = k_2\, A(\vartheta_\mathrm{O} - \vartheta_\mathrm{L}) .$$



Dieser Wärmestrom muss auch durch die Wärmedämmung fließen. Nach (3.131) gilt hierfür

$$\dot{Q} = \lambda_1 A \frac{\vartheta_\mathrm{O} - \vartheta_\mathrm{Gr}}{s_1} .$$

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen folgt

$$k_2(\vartheta_\mathrm{O} - \vartheta_\mathrm{L}) = \frac{\lambda_1}{s_1}(\vartheta_\mathrm{O} - \vartheta_\mathrm{Gr}) \quad \text{oder}$$

$$\vartheta_\mathrm{Gr} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{s_1} - k_2\right)\vartheta_\mathrm{O} + k_2 \vartheta_\mathrm{L}}{\frac{\lambda_1}{s_1}} = 25{,}1\ ^\circ\mathrm{C} .$$

Im Winter ist die Außentemperatur $\vartheta_a = -15\,^\circ\mathrm{C}$. Damit ist der Wärmestrom durch die Decke

$$\dot{Q} = k_1 A(\vartheta_L - \vartheta_a) .$$

Die Oberflächentemperatur der Dachhaut bestimmt sich aus

$$\dot{Q} = \alpha_a^* A(\vartheta_O - \vartheta_a) .$$

Durch Gleichsetzen der Wärmeströme folgt

$$k_1(\vartheta_L - \vartheta_a) = \alpha_a^*(\vartheta_O - \vartheta_a)$$

und für die Oberflächentemperatur

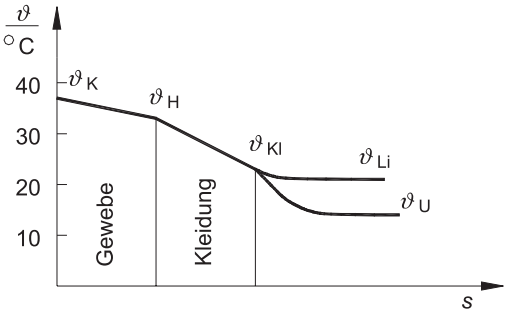
$$\vartheta_O = \frac{k_1(\vartheta_L - \vartheta_a) + \alpha_a^* \vartheta_a}{\alpha_a^*} = -14{,}3\,^\circ\mathrm{C} .$$

Damit wird die Temperatur an der Grenzfläche wie bereits oben abgeleitet

$$\vartheta_{Gr} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{s_1} - k_2\right)\vartheta_O + k_2\,\vartheta_L}{\frac{\lambda_1}{s_1}} = 15{,}6\,^\circ\mathrm{C} .$$

Der Temperaturunterschied an der Grenzfläche zwischen Sommer und Winter beträgt somit $\Delta T = 9{,}5$ K.

Ü 3.5-4: Zwischen Körperinnerem und Umgebung wird sich folgendes Temperaturprofil einstellen:
ϑ_H ist die Oberflächentemperatur des Körpers (Haut),
ϑ_{Kl} ist die Oberflächentemperatur der Kleidung.
Für die Wärmestromdichten gelten folgende Beziehungen nach (3.156):
Im Gewebe: $j_G = \frac{1}{R_G}(\vartheta_K - \vartheta_H)$,
in der Kleidung: $j_{Kl} = \frac{1}{R_{Kl}}(\vartheta_H - \vartheta_{Kl})$
und nach (3.162) und (3.209) für
Wärmestrahlung: $j_S = \alpha_S^*(\vartheta_{Kl} - \vartheta_U)$,
Konvektion: $j_K = \alpha_K^*(\vartheta_{Kl} - \vartheta_{Li})$.



Weil der Wärmestrom durch alle Schichten konstant sein muss, lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\frac{1}{R_G}(\vartheta_K - \vartheta_H) = \frac{1}{R_{Kl}}(\vartheta_H - \vartheta_{Kl}) \qquad (1)$$

und

$$\frac{1}{R_{Kl}}(\vartheta_H - \vartheta_{Kl}) = \alpha_S^*(\vartheta_{Kl} - \vartheta_U) + \alpha_K^*(\vartheta_{Kl} - \vartheta_{Li}) . \qquad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Temperaturen auf der Oberfläche der Haut und der Kleidung berechnen:

$$\vartheta_H = 32{,}9\,^\circ\mathrm{C} \quad \text{und} \quad \vartheta_{Kl} = 22{,}8\,^\circ\mathrm{C} .$$

Die gesuchte Wärmestromdichte folgt beispielsweise aus

$$j_G = \frac{1}{R_G}(\vartheta_K - \vartheta_H) = 51\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} .$$

4. Elektrizität und Magnetismus

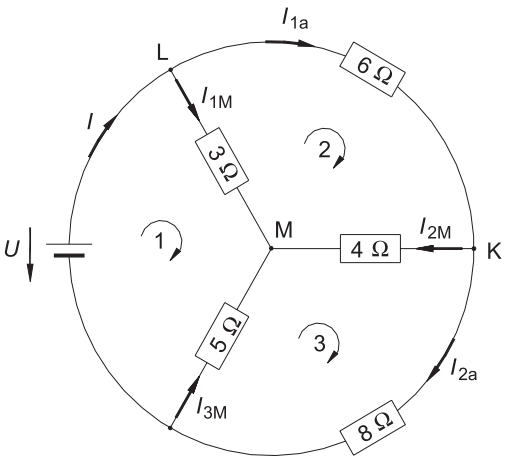
Ü 4.1-1: Zur Lösung werden die Kirchhoff'schen Gesetze verwendet. Die Maschenregel, (4.25), ergibt, angewandt auf

Masche 1: $3\Omega\, I_{1M} - 5\Omega\, I_{3M} - U = 0$, (1)
Masche 2: $6\Omega\, I_{1a} + 4\Omega\, I_{2M} - 3\Omega\, I_{1M} = 0$, (2)
Masche 3: $8\Omega\, I_{2a} + 5\Omega\, I_{3M} - 4\Omega\, I_{2M} = 0$. (3)

Die Knotenregel (4.21), liefert, angewandt auf

Knoten K: $I_{1a} = I_{2a} + I_{2M}$, (4)
Knoten M: $I_{1M} + I_{2M} + I_{3M} = 0$. (5)

Damit wurden für die fünf Unbekannten fünf Gleichungen gefunden, die lösbar sind.



Eliminiert man beispielsweise mithilfe von (4) den Strom I_{1a} in (2), so ergibt sich

$$6\,I_{2a} + 10\,I_{2M} - 3\,I_{1M} = 0$$

oder

$$I_{2a} = \frac{3\,I_{1M} - 10\,I_{2M}}{6} .$$

Dies eliminiert I_{2a} in (3):

$$\frac{8}{6}(3\,I_{1M} - 10\,I_{2M}) + 5\,I_{3M} - 4\,I_{2M} = 0$$

oder

$$4\,I_{1M} - \left(4 + \frac{80}{6}\right) I_{2M} + 5\,I_{3M} = 0 .$$

Damit verbleiben drei Gleichungen für drei Unbekannte

$$3\,I_{1M} \qquad\qquad - 5\,I_{3M} = \frac{U}{\Omega}$$

$$4\,I_{1M} - \frac{52}{3}\,I_{2M} + 5\,I_{3M} = 0$$

$$I_{1M} + \quad I_{2M} + \quad I_{3M} = 0 ,$$

die nach den gängigen Regeln der linearen Algebra gelöst werden.

Es ergibt sich:
$I_{1M} = 1{,}286$ A, $I_{2M} = -0{,}058$ A,
$I_{3M} = -1{,}228$ A.
De Strom, der durch die Batterie fließt, folgt aus der Knotenregel, angewandt auf Knoten L: $I = I_{1a} + I_{1M}$.
Mit (2) ist $I_{1a} = \frac{3\,I_{1M} - 4\,I_{2M}}{6} = 0{,}681$ A und $I = 1{,}967$ A.
Mit dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich für den Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = \frac{U}{I} = 5{,}08\ \Omega .$$

Der gesamte Leistungsverbrauch ist nach (4.62)

$$P = I\,U = 19{,}67\ \mathrm{W} .$$

Ü 4.1-2: Zur Auswahl eines geeigneten Materials wird der spezifische Widerstand berechnet. Der Widerstand des Heizdrahtes ist nach (4.13)

$$R = \varrho\frac{l}{A} = \varrho\frac{4\,l}{\pi\,d^2} .$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz, (4.19), gilt $R = \frac{U}{I}$ und somit

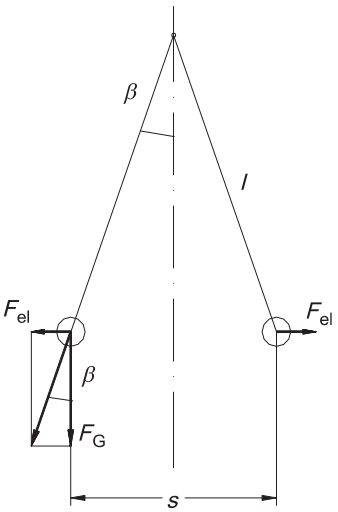
$$\varrho = \frac{\pi\,d^2 U}{4\,l\,I} = 0{,}271\ \Omega\,\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$
$$= 2{,}71 \cdot 10^{-5}\ \Omega\,\mathrm{cm} .$$

Ü 4.1-3: Der Winkel β, den der Faden relativ zum Lot einnimmt, wird bestimmt aus $\sin\beta = \frac{s}{2l} = 0{,}167$. Damit ist $\beta = 9{,}59°$.
Im Gleichgewicht zeigt die Resultierende aus elektrischer Abstoßungskraft $\boldsymbol{F}_{el}$ und Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ in Fadenrichtung. Damit gilt für den Winkel β:
$\tan\beta = \frac{F_{el}}{F_G}$ oder $F_{el} = mg\tan\beta = 3{,}32 \cdot 10^{-3}$ N.
Die Coulomb'sche Abstoßungskraft ist nach (4.2)

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{s^2} .$$

Daraus folgt die gesuchte Ladung:

$$Q = \sqrt{F_{\mathrm{el}} 4\pi\varepsilon_0 s^2} = 1{,}52 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\ .$$

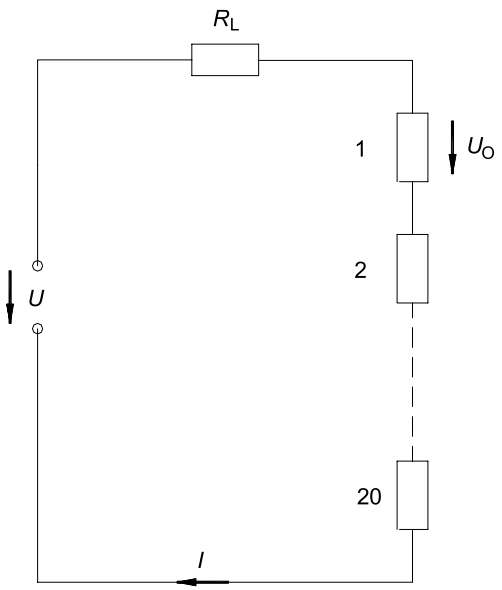


Ü 4.2-1: Nach (4.81) ist die Masse des abgeschiedenen Metalls proportional zum Strom:

$$m = \frac{M}{z N_{\mathrm{A}} e} I t\ .$$

Mit (4.82) und (4.83) gilt

$$\frac{M}{z N_{\mathrm{A}} e} = Ä\ .$$



Damit ist der erforderliche Strom

$$I = \frac{m}{Ä t} = 37{,}25\ \mathrm{kA}\ .$$

Die 20 Öfen benötigen die Leistung

$$P_{\mathrm{O}} = 20\, U_{\mathrm{O}} I = 3{,}427\ \mathrm{MW}\ .$$

Die Leitungen besitzen den Widerstand $R_{\mathrm{L}} = \varrho_{\mathrm{Cu}} \frac{l}{A}$.
Mit einer Leitungslänge von $l = 1\,000$ m ergibt sich $R_{\mathrm{L}} = 2{,}81\ \mathrm{m\Omega}$.
Die Verlustleistung der Leitungen ist nach (4.64)

$$P_{\mathrm{L}} = I^2 R_{\mathrm{L}} = 3{,}903\ \mathrm{MW}\ .$$

Damit ist die erforderliche Generatorleistung

$$P_{\mathrm{Gen}} = P_{\mathrm{O}} + P_{\mathrm{L}} = 7{,}33\ \mathrm{MW}\ .$$

Ü 4.2-2: Der elektrische Strom ist nach den Faraday'schen Gesetzen proportional zur abgeschiedenen Masse. Mit (4.81) bis (4.83) sowie (4.9) gilt

$$I = j A = \frac{m}{Ä t}\ .$$

Die Masse der Nickelschicht ist

$$m = V \varrho_{\mathrm{Ni}} = A\, d \varrho_{\mathrm{Ni}}\ ,$$

dabei ist A die Oberfläche des Zylinders und d die Schichtdicke.
Da die Stromstärke begrenzt ist, folgt aus den beiden Gleichungen die erforderliche Zeit:

$$t = \frac{m}{Ä j A} = \frac{A\, d \varrho_{\mathrm{Ni}}}{Ä j A} = \frac{d \varrho_{\mathrm{Ni}}}{Ä j} = 15{,}9\ \mathrm{h}\ .$$

Die Oberfläche des Zylinders beträgt $A = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 0{,}487\ \mathrm{m}^2$, was zu einer Stromstärke von $I = j A = 12{,}2$ A führt.
Insgesamt wird die Masse
$m = A\, d \varrho_{\mathrm{Ni}} = I Ä t = 0{,}212$ kg abgeschieden.

Ü 4.3-1: Die Kapazität des Kondensators ist nach (4.136)

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} = 4{,}45 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F} = 44{,}5\ \mathrm{pF}\ .$$

Die elektrische Feldstärke ist nach (4.94)

$$E = \frac{U}{d} = 2\,500\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ .$$

Für die Verschiebungsdichte gilt nach (4.129)

$$D = \varepsilon_0 E = 2{,}21 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}\ .$$

Damit wird die Ladung auf den Platten nach (4.130) (s. auch Beispiel 4.3-4)

$$Q = D A = \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 \frac{U}{d} \pi r^2 = 4{,}45 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{As}\ .$$

Zur Kontrolle: Nach der Definitionsgleichung (4.134) für die Kapazität gilt

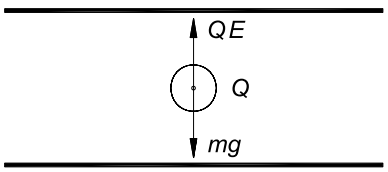
$$Q = C U = 44{,}5\ \mathrm{pF} \cdot 10\ \mathrm{V} = 4{,}45 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{A\,s}\ .$$

Ü 4.3-2: Im statischen Gleichgewicht muss die Gewichtskraft mg kompensiert werden durch die elektrische Feldkraft QE (der Auftrieb wird vernachlässigt):

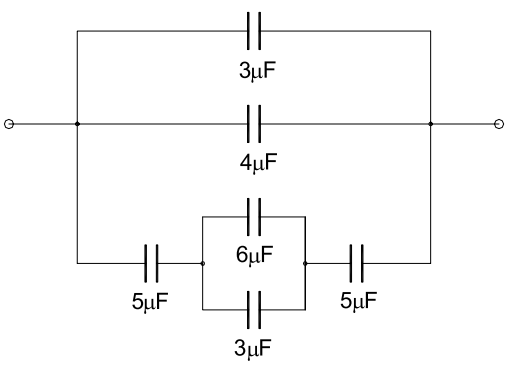
$$m g = Q E\ .$$

Mit $E = \dfrac{U}{d}$ folgt (s. (4.127)

$$U = \frac{mgd}{Q} = 368\ \mathrm{V}\ .$$



Ü 4.3-3: Abbildung 4.84 kann folgendermaßen umgezeichnet werden:



Die Kapazität des unteren Zweiges ist nach den Regeln für Parallel- und Reihenschaltung von Abb. 4.76

$$\frac{1}{C_\mathrm{u}} = \frac{1}{5\ \mu\mathrm{F}} + \frac{1}{9\ \mu\mathrm{F}} + \frac{1}{5\ \mu\mathrm{F}} = \frac{0{,}511}{\mu\mathrm{F}}$$

oder $C_\mathrm{u} = 1{,}957\ \mu\mathrm{F}$.

Damit ist die Gesamtkapazität $C_\mathrm{ges} = 3\ \mu\mathrm{F} + 4\ \mu\mathrm{F} + 1{,}963\ \mu\mathrm{F} = 8{,}963\ \mu\mathrm{F}$.

Ü 4.3-4:

a) In diesem Fall handelt es sich um eine Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit jeweils der halben Plattenfläche A. Jede Kapazität für sich ist nach (4.136) und (4.153)

$$C_1 = \varepsilon_{\mathrm{r}1} \varepsilon_0 \frac{A}{2d} \quad \text{und} \quad C_2 = \varepsilon_{\mathrm{r}2} \varepsilon_0 \frac{A}{2d}\ .$$

Die Gesamtkapazität ist nach (4.147)

$$C_\mathrm{ges} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1} + \varepsilon_{\mathrm{r}2}}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d}\ ;$$

es wird also das arithmetische Mittel der beiden relativen Permittivitätszahlen wirksam.

b) Dieser Fall entspricht der Hintereinanderschaltung von Kondensatoren. Die Einzelkapazitäten sind jetzt

$$C_1 = \varepsilon_{\mathrm{r}1} \varepsilon_0 \frac{2A}{d} \quad \text{und} \quad C_2 = \varepsilon_{\mathrm{r}2} \varepsilon_0 \frac{2A}{d}\ .$$

Nach (4.148) ist die Gesamtkapazität

$$\frac{1}{C_\mathrm{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{2\varepsilon_{\mathrm{r}1}\varepsilon_0 A} + \frac{d}{2\varepsilon_{\mathrm{r}2}\varepsilon_0 A} = \frac{d(\varepsilon_{\mathrm{r}1} + \varepsilon_{\mathrm{r}2})}{2\varepsilon_{\mathrm{r}1}\varepsilon_{\mathrm{r}2}\varepsilon_0 A}$$

und

$$C_\mathrm{ges} = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}1}\varepsilon_{\mathrm{r}2}}{\varepsilon_{\mathrm{r}1} + \varepsilon_{\mathrm{r}2}} \varepsilon_0 \frac{A}{d}\ .$$

Ü 4.4-1: Das Proton verspürt die Lorentz-Kraft (4.203),

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = Q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,.$$

Die Kraft steht senkrecht auf der Ebene, die durch die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannt wird. Da $\boldsymbol{v}$ senkrecht auf $\boldsymbol{B}$ steht, gilt für den Betrag der Kraft $F_\mathrm{L} = e\,v\,B$.
Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der kinetischen Energie

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{kin}}{m}} = 24 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Damit wird die Kraft $F_\mathrm{L} = 9{,}6 \cdot 10^{-12}$ N.

Ü 4.4-2: Die Hall-Feldstärke ist nach (4.206) und Abb. 4.104 $E_\mathrm{H} = \frac{U_\mathrm{H}}{b} = B\,v_x$.
Die Feldstärke in Längsrichtung ist nach (4.207) $E_x = \frac{n\,e\,v_x}{\varkappa}$.
Das Verhältnis der beiden Feldstärken wird damit $\frac{E_\mathrm{H}}{E_x} = \frac{B\varkappa}{n\,e} = \frac{B}{n\,e\varrho}$.

Ü 4.4-3: Die Stromschleife besitzt nach (4.199) das magnetische Moment

$$m = N\,I\,A = 2N\,I\,l\,r\,.$$

Im Magnetfeld erfährt sie nach (4.200) das Drehmoment

$$M = mB\sin\alpha = 2N\,I\,l\,rB\sin\alpha\,,$$

das den Zylinder bergauf bewegen möchte.
Infolge der Hangabtriebskraft wirkt auf den Zylinder das Drehmoment

$$M = mg\,r\sin\alpha\,,$$

das den Zylinder bergab bewegen möchte.
Im Gleichgewicht müssen die beiden Drehmomente gleich sein:

$$mgr\sin\alpha = 2N\,I\,l\,rB\sin\alpha\,.$$

Daraus folgt für die erforderliche Stromstärke:

$$I = \frac{mg}{2N\,lB} = 0{,}144\ \mathrm{A}\,.$$

Bemerkung: Die Lösung setzt voraus, dass der Haftreibungskoeffizient zwischen Walze und Unterlage genügend groß ist, so dass der Zylinder nicht abrutscht.

Ü 4.4-4: Die magnetische Flussdichte, die der linke Leiter erzeugt, ist nach (4.173) und (4.191)

$$B_1 = \mu_0\frac{I}{2\pi\left(\frac{d}{2}+x\right)}\,.$$

Der rechte Leiter erzeugt

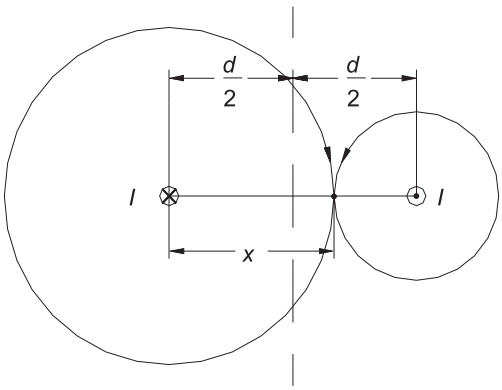
$$B_2 = \mu_0\frac{I}{2\pi\left(\frac{d}{2}-x\right)}\,.$$

Beide Flussdichten sind gleich gerichtet und addieren sich zur gesamten Flussdichte

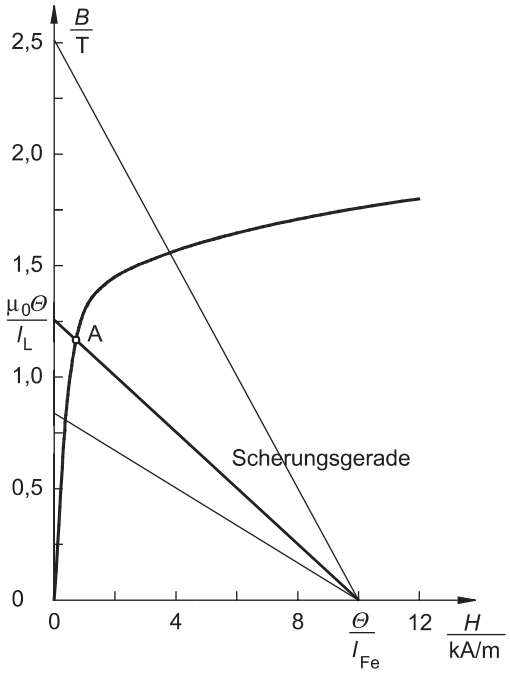
$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{2}+x} + \frac{1}{\frac{d}{2}-x}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi}\,\frac{2d}{d^2-4x^2}\,.$$

Auf der Symmetrieachse, für $x = 0$, ergibt sich

$$B(0) = \frac{2\mu_0 I}{\pi\,d}\,.$$



Ü 4.4-5: Auf der senkrechten Achse werden die Positionen $\frac{\mu_0\Theta}{l_\mathrm{L}} = 2{,}51$ T, 1,26 T und 0,84 T eingezeichnet und von dort die Scherungsgeraden zum Punkt $\frac{\Theta}{l_\mathrm{Fe}} = 10\,\frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}}$ auf der waagrechten Achse. Die Schnittpunkte der Scherungsgeraden mit der Magnetisierungskurve liefern die Arbeitspunkte.
Es ergeben sich folgende Werte:
$l_\mathrm{L} = 1$ mm: $B = 1{,}56$ T; $l_\mathrm{L} = 2$ mm: $B = 1{,}17$ T und $l_\mathrm{L} = 3$ mm: $B = 0{,}81$ T.



Ü 4.5-1: Bei der rotatorischen Spannungserzeugung ist nach (4.250) in Abb. 4.125 die induzierte Spannung

$$u(t) = NBA\omega \sin \omega t \, .$$

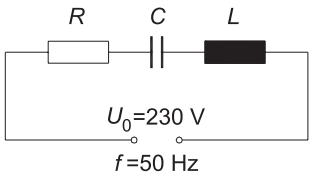
Die Amplitude ist

$$\hat{u} = NBA\omega \, .$$

Die erforderliche magnetische Flussdichte beträgt somit

$$B = \frac{\hat{u}}{NA\omega} = \frac{\hat{u}}{NA2\pi n} = 191 \text{ mT} \, .$$

Ü 4.5-2: Die Schaltung von Abb. 4.153 kann auf folgendes Ersatzschaltbild reduziert werden:



Der Widerstand beträgt

$$R = \frac{1}{\frac{1}{200\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega}} = 66{,}67\ \Omega \, ,$$

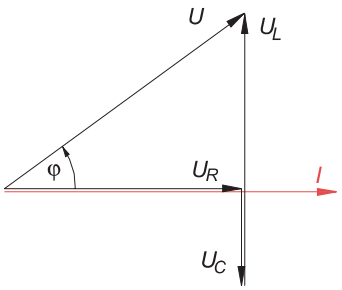
die Kapazität ist

$$C = \frac{1}{\frac{1}{10\ \mu\text{F}} + \frac{1}{5\ \mu\text{F}}} = 3{,}33\ \mu\text{F} \, ,$$

die Induktivität ist

$$L = 3\ \text{H} + \frac{1}{\frac{1}{1\ \text{H}} + \frac{1}{2\ \text{H}}} = 3{,}67\ \text{H} \, .$$

Das Zeigerdiagramm der *R-L-C*-Reihenschaltung nach Abb. 4.133 hat folgende Form:



Der Wechselstromwiderstand ist

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 207{,}9\ \Omega \, .$$

Der Effektivwert des Stromes ergibt sich damit zu

$$I = \frac{U}{Z} = 1{,}11\ \text{A} \, .$$

Für den Phasenverschiebungswinkel gilt

$$\tan \varphi = \frac{|U_L| - |U_C|}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 2{,}95 \, .$$

Damit wird der Winkel $\varphi = 1{,}24$ rad $= 71{,}3°$. Die Wirkleistung ist

$$P = U I \cos \varphi = 81{,}6\ \text{W} \, .$$

Ü 4.5-3: Der magnetische Widerstand des Kreises ist

$$R_\mathrm{m} = \frac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \frac{l_\mathrm{L}}{\mu_0 A} \,.$$

Nun gilt nach (4.236) das „Ohm'sche Gesetz" für magnetische Kreise

$$\Theta = V_\mathrm{m} = \Phi\left(\frac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \frac{l_\mathrm{L}}{\mu_0 A}\right) \,.$$

Nimmt man näherungsweise an, dass die relative Permeabilität μ_r des Eisens konstant ist, so gilt bei konstanter Durchflutung Θ

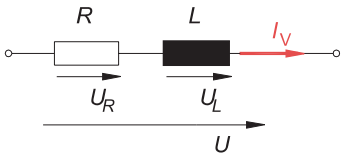
$$\Phi_1\left(\frac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \frac{l_{\mathrm{L},1}}{\mu_0 A}\right) = \Phi_2\left(\frac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \frac{l_{\mathrm{L},2}}{\mu_0 A}\right) \,.$$

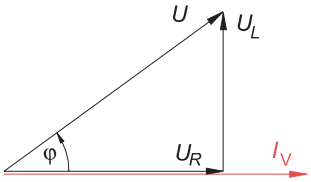
Damit ist das Verhältnis der Flussdichten

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\dfrac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \dfrac{l_{\mathrm{L},1}}{\mu_0 A}}{\dfrac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}\mu_0 A} + \dfrac{l_{\mathrm{L},2}}{\mu_0 A}} = \frac{\dfrac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}} + l_{\mathrm{L},1}}{\dfrac{l_\mathrm{Fe}}{\mu_\mathrm{r}} + l_{\mathrm{L},2}} = \frac{2}{3} \,.$$

Bei Verdoppelung des Luftspalts wird die Flussdichte demnach auf 2/3 des ursprünglichen Wertes reduziert.
Hinweis: Die Konstanz der relativen Permeabilität ist in der Realität eher nicht gegeben. Deshalb muss man wie in Ü 4.4-5 durch Eintragen der Scherungsgerade in die Magnetisierungskurve den Arbeitspunkt bestimmen.

Ü 4.5-4: Eine Leuchtstoffröhre benötigt zum Betrieb eine Vorschaltdrossel (Abb. 4.46). Der gesamte Verbraucher ist damit eine Reihenschaltung aus Ohm'schem Widerstand und Spule:





Aus dem Zeigerdiagramm folgt mit $U_R = 50$ V und $U = 230$ V:

$$U_L = \sqrt{U^2 - U_R^2} = 224{,}5\ \mathrm{V} \,.$$

Nun ist $U_L = I_\mathrm{V} X_L = I_\mathrm{V}\omega L$ und damit

$$L = \frac{U_L}{I_\mathrm{V} 2\pi f} = 5{,}955\ \mathrm{H} \,.$$

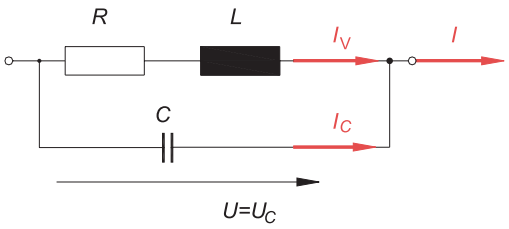
Kontrolle:
Nach (4.287) ist der Wechselstromwiderstand des Verbrauchers

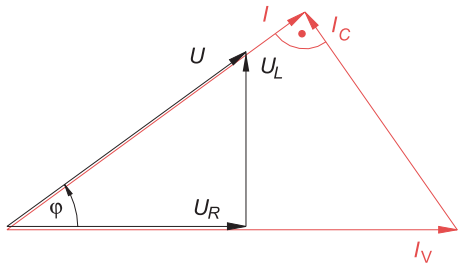
$$Z_\mathrm{V} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \,.$$

Der Ohm'sche Widerstand ist $R = \frac{U_R}{I_\mathrm{V}} = 416{,}7\ \Omega$. Damit ergibt sich $Z = 1\,917\ \Omega$ und für den Strom durch den Verbraucher $I_\mathrm{V} = U/Z = 0{,}12$ A.
Für den Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung folgt aus dem Zeigerdiagramm

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = 0{,}217 \,.$$

Damit ist $\varphi = 77{,}4°$
Um den Blindstrom zu kompensieren, wird ein Kondensator parallel geschaltet:





Wie aus dem Zeigerdiagramm hervorgeht, wird dadurch der Gesamtstrom I in den Zuführungsleitungen geringer. Bei vollständiger Blindstromkompensation sind I und U in Phase. Nun gilt

$$\sin\varphi = \frac{U_L}{U} = \frac{I_C}{I_V} \text{ oder } \frac{I_V X_L}{I_V Z} = \frac{UZ}{UX_C} .$$

Daraus folgt $\frac{X_L}{Z^2} = \frac{1}{X_C}$ und $\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2} = \omega C$.
Die erforderliche Kapazität ist

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = 1{,}62\ \mu\text{F} .$$

Alternative:
Nach (4.314) ist die benötigte Kapazität

$$C = \frac{Q}{U^2\omega} .$$

Die Blindleistung des Verbrauchers ist $Q = S\sin\varphi = U I_V \sin\varphi = 26{,}94$ VA. Damit ergibt sich ebenfalls $C = 1{,}62\ \mu$F.

5. Schwingungen und Wellen

Ü 5.1-1: Bei einer harmonischen Schwingung der Form
$y(t) = 0{,}25\text{ m} \cdot \cos(4\,\pi\,s^{-1} \cdot t + \pi/5)$, ist

a) die Kreisfrequenz gegeben als Vorfaktor der Zeit t:
$\omega_0 = 4\pi s^{-1}$,
die Schwingungsdauer

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}5\text{ s} ,$$

der Nullphasenwinkel
$\varphi_0 = \pi/5$ rad oder 36°,
die Amplitude
$\hat{y} = 0{,}25$ m.

b) Die momentane Auslenkung zur Zeit $t = 1{,}2$ s beträgt $y(1{,}2\text{ s}) = -0{,}25$ m. Der Körper befindet sich im unteren Totpunkt.
Für die Geschwindigkeit gilt allgemein nach (5.9)

$$v = \dot{y} = -\hat{y}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) .$$

Zur Zeit $t = 1{,}2$ s ergibt sich $v(1{,}2\text{ s}) = 0$, was zu erwarten war, da der Körper im Totpunkt momentan still steht.
Die Beschleunigung ist nach (5.10)

$$a = \ddot{y} = -\hat{y}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) .$$

Zur Zeit $t = 1{,}2$ s ergibt sich $a(1{,}2\text{ s}) = 39{,}5\text{ m/s}^2$.
Das ist die maximale Beschleunigung (Abb. 5.6).

c) Die maximale Geschwindigkeit ist

$$v_{\max} = \hat{v} = \hat{y}\omega_0 = 3{,}14\text{ m/s} .$$

Die maximale Beschleunigung ist

$$a_{\max} = \hat{a} = \hat{y}\omega_0^2 = 39{,}5\text{ m/s}^2 .$$

d) Die potenzielle Energie entspricht der Federspannenergie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k y^2 \, .$$

Die Federkonstante folgt aus der Eigenkreisfrequenz:

$$k = \omega_0^2 \, m = 15{,}8 \text{ N/m} \, .$$

Damit ergibt sich $E_{\text{pot}} = 0{,}0790$ J.
Die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

kann am einfachsten aus dem Energieerhaltungssatz nach (5.53) berechnet werden:

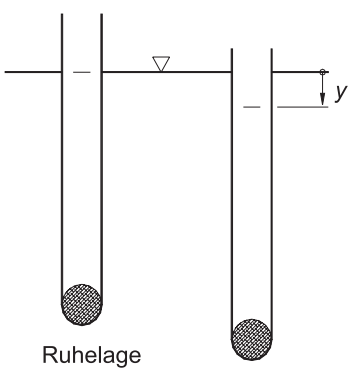
$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k \left(\hat{y}^2 - y^2 \right) = 0{,}415 \text{ J} \, .$$

Ü 5.1-2:

a) Wird das Reagenzglas der Querschnittsfläche A um die Strecke y ins Wasser gedrückt, so verdrängt es das Wasservolumen $V = Ay$. Nach dem Archimedischen Prinzip, (2.188), ist die damit erzeugte zusätzliche Auftriebskraft oder Rückstellkraft

$$F_{\text{rück}} = -A \varrho g y \, .$$

Da die Rückstellkraft wie bei einer Feder proportional ist zur Auslenkung, resultiert eine harmonische Schwingung



b) Die „Federkonstante“ beträgt $k = A \varrho g = \frac{\pi}{4} d^2 \varrho g = 1{,}109 \, \frac{\text{N}}{\text{m}}$.
Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung lautet:

$$\ddot{y} + \frac{A \varrho g}{m} y = 0 \, .$$

c) Nach (5.20) wird die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi d^2 \varrho g}{4m}} = 6{,}08 \text{ s}^{-1}$$

und die Schwingungsdauer

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}03 \text{ s} \, .$$

d) Die Kreisfrequenz hängt linear vom Durchmesser ab:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi \varrho g}{4m}} \, d = 5{,}068 \, \frac{\text{s}^{-1}}{\text{cm}} \cdot d \, .$$

e) Die Gleichung der Auslenkung lautet:

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t) \, .$$

Zur Zeit $t = 1{,}2$ s gilt $y(1{,}2 \text{ s}) = 0{,}528$ cm.
Damit ist die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k y^2 = 1{,}547 \cdot 10^{-5} \text{ J} \, .$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 1{,}2$ s ist

$$v = \dot{y} = -\hat{y} \omega_0 \sin(\omega_0 t) = -0{,}05167 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, .$$

Damit wird die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = 4{,}000 \cdot 10^{-5} \text{ J} \, .$$

Für die Gesamtenergie ergibt sich somit

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 5{,}547 \cdot 10^{-5} \text{ J} \, .$$

Zur Kontrolle:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 = 5{,}547 \cdot 10^{-5} \text{ J} \, .$$

Ü 5.1-3: Die Kapazität C des Kondensators soll vom Drehwinkel γ linear abhängen gemäß

$$C = a\gamma + b \,.$$

Die Eigenfrequenz des Schwingkreises ist nach (5.61)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \,.$$

Daraus folgt für die Kapazität

$$C = \frac{1}{f_0^2\, 4\pi^2 LC} \,.$$

Für den Winkel $\gamma_1 = 0$ ist $f_1 = 1\,\text{kHz}$ und $C_1 = 2{,}533\,\mu\text{F}$,
für den Winkel $\gamma_2 = 180°$ ist $f_2 = 3\,\text{kHz}$ und $C_2 = 281{,}4\,\text{nF}$.
Die Konstanten a und b der Eingangsgleichung können damit aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$C_1 = a \cdot 0 + b$ liefert $b = C_1$ und
$C_2 = a \cdot 180° + b$ liefert $a = \frac{C_2 - C_1}{180°}$.

Also gilt allgemein

$$C(\gamma) = \frac{C_2 - C_1}{180°}\,\gamma + C_1 \,.$$

Die Eigenkreisfrequenz beträgt damit in Abhängigkeit vom Drehwinkel

$$\omega_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L\left(C_1 + \frac{C_2 - C_1}{180°}\,\gamma\right)}} \,.$$

Zur Kontrolle:
$\omega_0(0) = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} = 6\,828\,\text{s}^{-1}$ und $f_0(0) = 1\,\text{kHz}$ und
$\omega_0(180°) = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = 18\,851\,\text{s}^{-1}$ und $f_0(180°) = 3\,\text{kHz}$.

Ü 5.1-4:

a) Nach (5.85) gilt für das Amplitudenverhältnis

$$\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = 2 = c^n \,.$$

Mit $n = 15$ folgt

$$c = \sqrt[n]{2} = 2^{1/15} = 1{,}047 \,.$$

Das logarithmische Dekrement beträgt

$$\Lambda = \ln c = 0{,}04621 \,.$$

b) Die Abklingkonstante ist nach (5.86)

$$\delta = \frac{\Lambda}{T_\text{d}} = 0{,}0132\,\text{s}^{-1} \,.$$

Die Kreisfrequenz beträgt

$$\omega_\text{d} = \frac{2\pi}{T_\text{d}} = 1{,}795\,\text{s}^{-1} \,.$$

c) Die Schwingungsgleichung lautet

$$y(t) = \hat{y}_0\, \text{e}^{-\delta t} \cos(\omega_\text{d} t)$$
$$= 20\,\text{cm} \cdot \text{e}^{-0{,}0132\,\text{s}^{-1}\,\text{t}} \cdot \cos(1{,}795\,\text{s}^{-1} t) \,.$$

Ü 5.1-5: Die sechs parallelen Federn entsprechen einer Feder mit der resultierenden Federkonstante $k_\text{res} = 6\,k$. Die Eigenfrequenz der Schwingung beträgt somit

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{m}} = 1{,}743\,\text{Hz} \,.$$

Die erregende Drehzahl $n_1 = 500\,\text{min}^{-1} = 8{,}33\,\text{s}^{-1}$ liegt oberhalb von f_0. Wird die Drehzahl erhöht, geht die Amplitude zurück. Nach (5.109) ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$\hat{y} = \frac{\hat{F}_\text{E}}{k\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta\right)^2}} \quad \text{mit } \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \,.$$

Nun gilt

$$\hat{y}_1 = \frac{\hat{F}_\text{E}}{k\sqrt{\left(1-\eta_1^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta_1\right)^2}} \quad \text{und}$$

$$\hat{y}_2 = \frac{\hat{F}_\text{E}}{k\sqrt{\left(1-\eta_2^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta_2\right)^2}} \,.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Kraftamplitude konstant bleibt, gilt für das Verhältnis

$$\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2} = 10 = \sqrt{\frac{\left(1-\eta_2^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta_2\right)^2}{\left(1-\eta_1^2\right)^2 + \left(2\vartheta\eta_1\right)^2}}$$

mit $\eta_1 = 4{,}781$.

Diese Gleichung kann nach der gesuchten normierten Frequenz η_2 aufgelöst werden. Nach Lösung einer biquadratischen Gleichung ergibt sich

$$\eta_2 = 14{,}83 \; .$$

Damit ist die gesuchte Erregerfrequenz

$$f_2 = \eta_2 f_0 = 25{,}85 \text{ Hz} \quad \text{bzw.} \quad n_2 = 1\,550 \text{ min}^{-1} \; .$$

Ü 5.1-6:

a) Das ungedämpfte System hat nach (5.61) die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

und die Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = 795{,}8 \text{ Hz} \; .$$

b) Die Eigenfrequenz bei Dämpfung beträgt nach (5.82) und (5.94)

$$\omega_\mathrm{d} = \omega_0\sqrt{1-\vartheta^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}} \; .$$

Nun soll gelten: $\omega_\mathrm{d} = \omega_0 \cdot 0{,}997$, also ist

$$0{,}997 = \sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}} \; .$$

Daraus ergibt sich

$$R = 2\sqrt{(1-0{,}997^2)\frac{L}{C}} = 15{,}48\,\Omega \; .$$

Der Dämpfungsgrad dieser Schwingung ist

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2L\omega_0} = 0{,}0774 \; .$$

c) Die Resonanzüberhöhung ist nach (5.115) bei schwacher Dämpfung, die hier gegeben ist,

$$\frac{\hat{y}(\text{Res})}{\hat{y}(\text{stat})} \approx \frac{1}{2\vartheta} = Q = 6{,}46 \; .$$

Die 3-dB-Breite der Resonanzkurve ist nach (5.116)

$$\Delta\eta = \frac{1}{Q} = 0{,}155 \; .$$

Das bedeutet anschaulich eine Frequenzbreite von

$$\Delta f = \Delta\eta \cdot f_0 = 123 \text{ Hz} \; .$$

Ü 5.1-7: Nach (5.124) ist die Amplitude der entstehenden Schwingung

$$\hat{y}_\mathrm{neu} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2\cos(\varphi_{01}-\varphi_{02}) + \hat{y}_2^2}$$
$$= 12{,}7 \text{ cm} \; .$$

Für den Nullphasenwinkel der resultierenden Schwingung gilt nach (5.125)

$$\tan\varphi_{0\mathrm{neu}} = \frac{\hat{y}_1\sin\varphi_{01} + \hat{y}_2\sin\varphi_{02}}{\hat{y}_1\cos\varphi_{01} + \hat{y}_2\cos\varphi_{02}} = 1{,}007 \; .$$

Damit ist $\varphi_{0\mathrm{neu}} = 0{,}789 \text{ rad} = 45{,}2°$.

Ü 5.1-8:

a) Für die Schwingungen in x- bzw. y-Richtung gilt

$$x(t) = \hat{x}\,\cos(\omega_0 t + \varphi_x) \quad \text{und}$$
$$y(t) = \hat{y}\,\cos(\omega_0 t + \varphi_y) \; .$$

Da nur der Phasenunterschied $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ gesucht ist, kann willkürlich $\varphi_x = 0$ gesetzt werden. Damit gilt
$x(t) = \hat{x}\,\cos(\omega_0 t)$ und

$$y(t) = \hat{y}\,\cos(\omega_0 t + \varphi) \; .$$

Das Maximum in x-Richtung tritt auf zur Zeit $t = 0$: $x(0) = \hat{x}$. Zur selben Zeit muss die y-Schwingung ihr Minimum aufweisen:

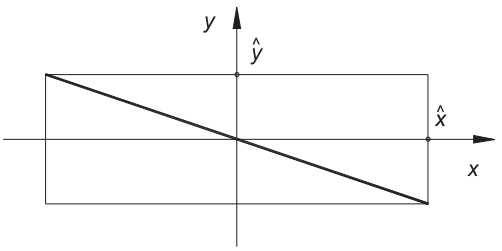
$$y(0) = -\hat{y} = \hat{y}\cos\varphi\,.$$

Daraus folgt

$$\varphi = \arccos(-1) = \pi \text{ oder } 180^\circ\,.$$

b) Bei der Überlagerung entsteht im Allgemeinen eine Ellipse. Aus der Ellipsengleichung (5.147) folgt für den Spezialfall $\varphi = \pi$ die Geradengleichung (5.152)

$$y = -\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\,x = -\frac{1}{3}\,x\,.$$



Ü 5.1-9: Die Funktion der Sägezahnspannung lautet
$u(t) = -\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{T}\,t$ für $0 \le t \le T$ mit $\hat{u} = 1$ V.
Die Fourier-Koeffizienten bestimmen sich nach (5.141) und (5.142):

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(-\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{T}\,t\right)\cos(k\omega\,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(-\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{T}\,t\right)\sin(k\omega\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

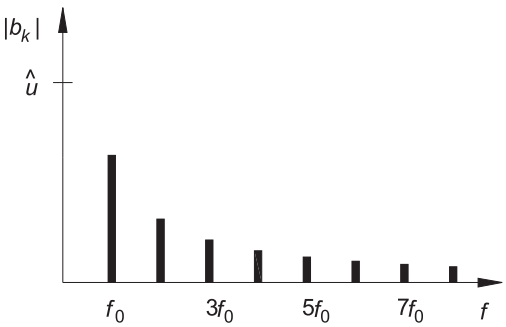
Bereits aus Symmetriegründen (die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung) folgt, dass die Fourier-Koeffizienten a_k verschwinden:
$a_k = 0$.
Für die b_k folgt nach Integration

$$b_k = -\frac{2\hat{u}}{k\,\pi}\,.$$

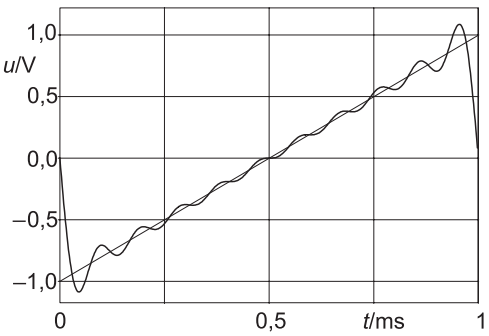
Damit lautet die Fourier-Reihe

$$u(t) = -\frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega\,t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega\,t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\sin(3\omega\,t) + \ldots\right]\,.$$

Das Spektrum hat folgende Form:



Die Überlagerung der ersten 10 Glieder der Fourier-Reihe liefert folgende Abb.:



Ü 5.2-1: Nach (5.171) gilt

$$\lambda = \frac{c}{f}\,.$$

Damit sind die gesuchten Wellenlängen
$\lambda(16\text{ Hz}) = 21{,}3$ m und $\lambda(20\text{ kHz}) = 17$ mm.

Ü 5.2-2: Eine Welle der Form

$$y(x,t) = 5\cdot 10^{-4}\text{ m}\cdot$$
$$\sin(1\,980\text{ s}^{-1}\cdot t - 6\text{ m}^{-1}\cdot x)$$

besitzt nach (5.172)

a) die Kreisfrequenz $\omega = 1\,980\ \mathrm{s}^{-1}$ und damit die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = 315\ \mathrm{Hz}$,
b) die Wellenzahl $k = 6\ \mathrm{m}^{-1}$ und damit die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}05\ \mathrm{m}$,
c) nach (5.171) oder (5.204) die Phasengeschwindigkeit

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 330\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

d) Die Geschwindigkeit oder Schnelle der schwingenden Teilchen ist mit

$$y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega\, t - k\, x + \varphi_0)\ :$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\hat{y}\omega\sin(\omega\, t - k\, x + \varphi_0)\ .$$

Die Schnellenamplitude beträgt

$$\hat{v} = \hat{y}\omega = 0{,}99\ \mathrm{m/s}\ .$$

Ü 5.2-3:

a) Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist nach (5.193)

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} = \sqrt{\frac{4F}{\pi\, d^2\varrho}} = 29{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

b) Nach (5.171) ist die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = 5{,}83\ \mathrm{m}\ .$$

c) Die Gleichung der Welle lautet allgemein nach (5.172)

$$y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega\, t - k\, x + \varphi_0)\ ,$$

mit $\omega = 2\,\pi f = 31{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = 1{,}078\ \mathrm{m}^{-1}$ und $\hat{y} = 20\ \mathrm{cm}$.
Der Nullphasenwinkel φ_0 bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen:

$$y(0,0) = 0 = \hat{y}\cos\varphi_0\ .$$

Die möglichen Werte für den Nullphasenwinkel sind

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{und}\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ .$$

Die Geschwindigkeit (Schnelle) ist

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\hat{y}\omega\sin(\omega\, t - k\, x + \varphi_0)\ ;$$

$$v = (0,0) = -\hat{y}\omega\sin(\varphi_0)\ .$$

$v(0,0)$ wird nur dann negativ, wenn $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ist.
Damit lautet die komplette Lösung:

$$y(x,t) = 20\ \mathrm{cm}\cdot$$

$$\cdot\cos\left(31{,}4\ \mathrm{s}^{-1}\cdot t - 1{,}08\ \mathrm{m}^{-1}\cdot x + \frac{\pi}{2}\right)\ .$$

Ü 5.2-4: Nach (5.177) gilt für die Intensität

$$I = \frac{1}{2}c\varrho\,\hat{y}^2\omega^2\ .$$

Mit der Dichte $\varrho = 1{,}293\ \mathrm{kg/m}^3$ (Tab. 7.1) folgt daraus für die Schwingungsamplitude

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2I}{c\varrho\,\omega^2}} = 1{,}07\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}\ .$$

Die Schwingungsamplitude ist kleiner als die Molekülgröße (einige 10^{-10} m).
Ü 5.2-5: Wird die Fläche gleichmäßig bestrahlt, dann ist die Intensität

$$I = \frac{P}{A} = 1\cdot 10^{17}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\ .$$

Nach (5.180) gilt

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}{\mu_\mathrm{r}\mu_0}}\,\hat{E}^2\ .$$

Für Luft gilt in guter Näherung $\varepsilon_\mathrm{r} = \mu_\mathrm{r} = 1$. Damit wird die Amplitude der elektrischen Feldstärke

$$\hat{E} = \sqrt{2I}\ \sqrt[4]{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

oder mit dem Wellenwiderstand des Vakuums nach (5.187)

$$\hat{E} = \sqrt{2I\,Z_{\mathrm{F},0}} = 8{,}68\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ .$$

Die Amplitude der magnetischen Feldstärke wird mit (5.183)

$$\hat{H} = \frac{\hat{E}}{Z_{\mathrm{F},0}} = 2{,}31\cdot 10^7\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\ .$$

Ü 5.2-6: Die abgestrahlte Leistung verteilt sich gleichmäßig auf eine Kugeloberfläche. Damit ist die Intensität

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\ .$$

Ü 5.2-7: Für den Fall des bewegten Beobachters gilt nach (5.205)

$$f_\mathrm{B} = f_\mathrm{Q}\left(1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)\ .$$

Daraus folgt für die gesuchte Geschwindigkeit

$$v_\mathrm{B} = \left(\frac{f_\mathrm{B}}{f_\mathrm{Q}} - 1\right) c = \left(\sqrt[12]{2} - 1\right) c$$
$$= 20{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

mit der Schallgeschwindigkeit $c = 340$ m/s.

Ü 5.2-8:

a) Der ruhende Beobachter hört nach (5.208) die Frequenz

$$f_\mathrm{B} = \frac{f_\mathrm{Q}}{1 + \frac{v_\mathrm{Q}}{c}} = 465{,}8\ \mathrm{Hz}\ .$$

b) Vom Tunneleingang werden die Wellen reflektiert, die in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wurden, die also eine höhere Frequenz aufweisen (Abb. 5.53b). Nach (5.207) gilt

$$f_\mathrm{T} = \frac{f_\mathrm{Q}}{1 - \frac{v_\mathrm{Q}}{c}} = 539{,}7\ \mathrm{Hz}\ .$$

c) Der Lokführer bewegt sich auf die Wellen zu, die vom Tunneleingang mit der Frequenz f_T reflektiert wurden. Damit gilt nach (5.205)

$$f_\mathrm{L} = f_\mathrm{T}\left(1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}\right) = 579{,}4\ \mathrm{Hz}\ .$$

Ü 5.2-9:

a) Die beweglichen Elektronen in den Metallteilen des Fahrzeugs werden nach (5.213) mit der Frequenz

$$f_\mathrm{E} = f_\mathrm{Q}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

zu erzwungenen Schwingungen erregt. Sie strahlen ihrerseits Wellen mit eben dieser Frequenz ab, die der Beobachter (Detektor) nahe des Senders erneut dopplerverschoben wahrnimmt mit der Frequenz

$$f_\mathrm{B} = f_\mathrm{E}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\ .$$

Damit ergibt sich

$$f_\mathrm{B} = f_\mathrm{Q}\frac{c+v}{c-v} = f_\mathrm{Q}\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} = f_\mathrm{Q}\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$.
Da $\beta \ll 1$, gilt in guter Näherung

$$f_\mathrm{B} = f_\mathrm{Q}(1+\beta)^2 = f_\mathrm{Q}(1+2\beta)\ .$$

Die relative Frequenzänderung ist

$$\frac{\Delta f}{f_\mathrm{Q}} = \frac{f_\mathrm{B} - f_\mathrm{Q}}{f_\mathrm{Q}} = \frac{f_\mathrm{B}}{f_\mathrm{Q}} - 1 = 2\frac{v}{c}\ .$$

b) Die absolute Frequenzänderung ist

$$\Delta f = f_\mathrm{Q} \cdot 2\frac{v}{c} = 1\ \mathrm{kHz}\ .$$

Die relative Frequenzänderung beträgt

$$\frac{\Delta f}{f_\mathrm{Q}} = 1{,}11 \cdot 10^{-7}\ .$$

c) Aus $v = \frac{\Delta f}{2 f_\mathrm{Q}} c$ folgt nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, (1.14), dass Δf ebenfalls auf 10% genau sein muss. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Fehler der Quellenfrequenz f_Q vernachlässigbar ist. Der Absolutfehler der Differenzfrequenz muss also kleiner als 100 Hz sein.

Ü 5.2-10:

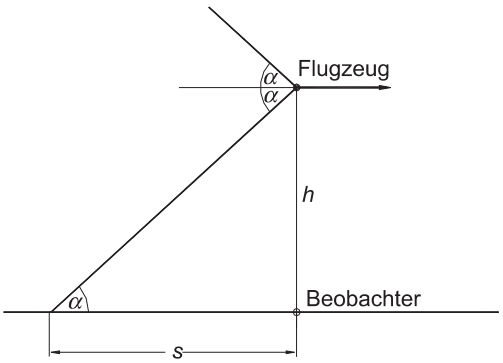
a) Nach (5.214) gilt für den halben Öffnungswinkel des Mach'schen Kegels
$\sin\alpha = \frac{c}{v_Q} = \frac{1}{Ma} = \frac{2}{3}$ oder $\alpha = 41{,}8°$.

b) Die Schallschleppe trifft im Abstand

$$s = \frac{h}{\tan\alpha} = 5{,}59\ \text{km}$$

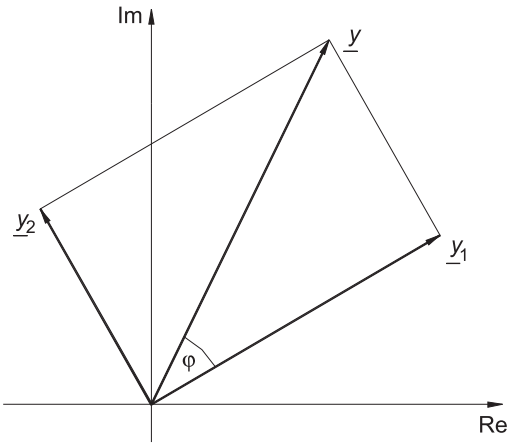
auf den Boden. Um diese Strecke bis zum Beobachter zurück zu legen, benötigt das Flugzeug und die Schallschleppe die Zeit

$$t = \frac{s}{v_Q} = \frac{s}{c\,Ma} = 11\ \text{s}\ .$$



Ü 5.2-11:

a) Das Zeigerdiagramm hat zur Zeit $t = 0$ und am Ort $x = 0$ folgendes Aussehen:



Die resultierende Amplitude ist nach Pythagoras

$$\hat{y}^2 = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2} = 3{,}61 \cdot 10^{-4}\ \text{m}\ .$$

Dasselbe Ergebnis liefert auch die Anwendung von (5.124).

b) Für den Phasenverschiebungswinkel gilt
$\tan\varphi = \frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1} = \frac{2}{3}$ oder $\varphi = 0{,}588\ \text{rad} = 33{,}7°$.

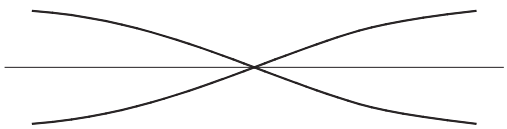
Ü 5.2-12:

a) In der Stabmitte, der Einspannstelle, befindet sich ein Schwingungsknoten. Die freien Enden sind Schwingungsbäuche. Damit ist die Stablänge l identisch mit der halben Wellenlänge:

$$l = \frac{\lambda_0}{2} \text{ oder } \lambda_0 = 2l\ .$$

Nach (5.171) ist die Schallgeschwindigkeit im Stab

$$c = \lambda_0 f_0 = 2l f_0 = 5\,054\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$



b) Nach (5.197) gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ oder } E = \varrho\, c^2 = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\ .$$

c) Bei der ersten Oberschwingung gilt

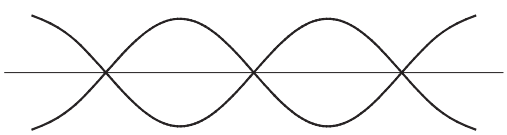
$$l = 3\frac{\lambda_1}{2} \text{ oder } \lambda_1 = \frac{2}{3}l\ .$$

Damit wird die Frequenz

$$f_1 = 3\frac{c}{2l} = 3f_0 = 7\,581\ \text{Hz}\ .$$

Die Serie der Obertöne ist dieselbe wie bei den gedackten Pfeifen (5.220):

$$f_n = (2n+1)f_0\ .$$



Ü 5.2-13:

a) Die Addition der beiden Teilwellen ergibt nach (5.222)
$y = 2\hat{y}\cos(\omega t - k x)\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$, mit $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \pi(f_1 + f_2)$ und $k = \frac{k_1+k_2}{2}$.
Mit $k = \frac{\omega}{c} = 2\pi\frac{f}{c}$ ergibt sich $k = \frac{\pi}{c}(f_1 + f_2)$.
Ferner ist
$\Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \pi(f_1 - f_2)$ und $\Delta k = \frac{\pi}{c}(f_1 - f_2)$.
Die Einhüllende der Funktion (Abb. 5.66) ist gegeben durch $\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$. Zur Zeit $t = 0$ gilt $\cos(\Delta k x)$. Sie hat ein Maximum am Ort $x = 0$. Das nächste Maximum (Minimum) tritt auf an der Stelle, an der gilt $\Delta k x = \pi$ oder

$$x = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{c}{f_2 - f_1} = 110\,\text{m}\,.$$

Damit ist der Abstand benachbarter Schwebungsgruppen $s = 110$ m.

b) Am Ort $x = 0$ ist die zeitabhängige Schwebung gegeben durch den Ausdruck $\cos(\Delta\omega t)$. Nach dem ersten Maximum bei $t = 0$, folgt das nächste bei

$$t = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{f_1 - f_2}\,.$$

Die Schwebungsfrequenz ist damit

$$f_S = f_2 - f_1 = 3\,\text{Hz}\,.$$

c) Die Gruppengeschwindigkeit beträgt nach (5.223)

$$c_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 - f_2}\,c = c = 330\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Die Welle erfährt keine Dispersion.

Ü 5.2-14: Nach (5.223) ist die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k}\,.$$

Nun gilt

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 2\pi\frac{c_0}{n\lambda}\,.$$

Also ist

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi\,c_0\left(\frac{1}{n_2\lambda_2} - \frac{1}{n_1\lambda_1}\right)\,.$$

Für die Wellenzahl gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Also ist

$$\Delta k = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\,.$$

Damit ergibt sich für die Gruppengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} c_{gr} &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \\ &= c_0\,\frac{\dfrac{1}{n_2\lambda_2} - \dfrac{1}{n_1\lambda_1}}{\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_1}} = c_0\,\frac{n_1\lambda_1 - n_2\lambda_2}{n_1 n_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ &= 0{,}67188\,c_0 = 2{,}0143\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,. \end{aligned}$$

Der Gruppenindex wird

$$n_{gr} = \frac{c_0}{c_{gr}} = 1{,}48835\,.$$

Alternative:
Nach (5.225) ist der Gruppenindex

$$n_{gr} = n - \lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \approx n - \lambda\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\,.$$

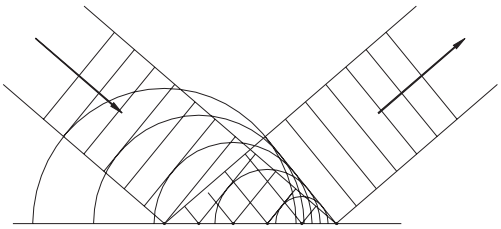
Dabei ist

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2},\ \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\,,$$
$$\Delta n = n_2 - n_1 \text{ und } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1\,.$$

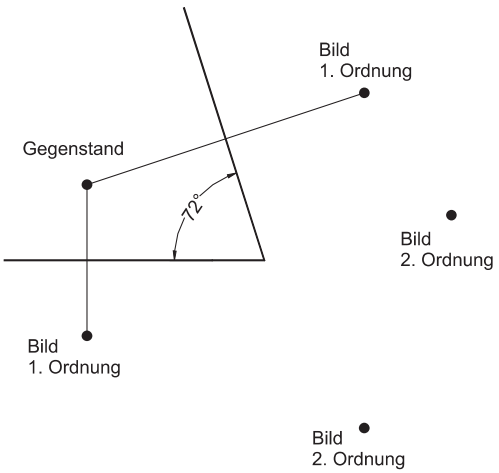
Damit ergibt sich $n_{gr} = 1{,}48821$, in guter Übereinstimmung mit obigem Wert.

6. Optik

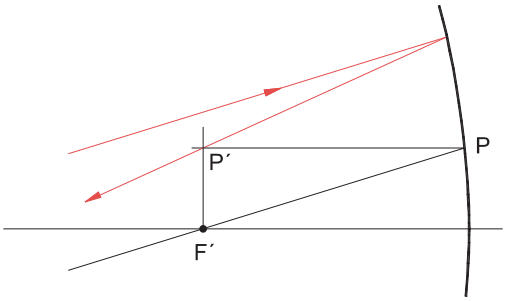
Ü 6.2-1: An den Schnittpunkten der Wellenflächen der einlaufenden Welle mit der Spiegelebene werden Elementarwellen mit den Radien λ, 2λ, 3λ usw. gezeichnet. Die Einhüllende der Kugelwellen ergibt die Wellenflächen der reflektierten Welle.



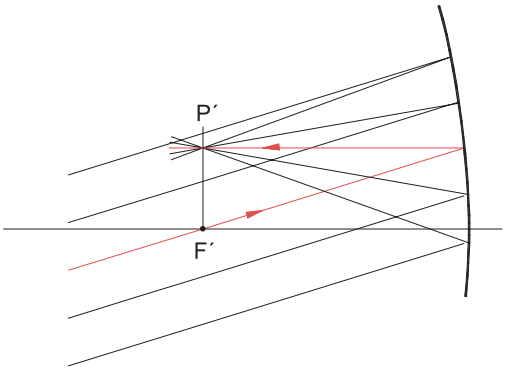
Ü 6.2-2: Es entstehen 5 Bilder.



Ü 6.2-3: Zeichnet man parallel zum einfallenden Strahl einen Strahl durch den Brennpunkt F′, so wird dieser nach der Reflexion im Punkt P parallel zur optischen Achse zurückgeworfen. Da der Ausgangsstrahl und der Strahl F′P parallel sind, scheinen sie aus dem Unendlichen zu kommen. Ihr Bildpunkt muss also in der Brennebene liegen. Das bedeutet, dass der reflektierte Strahl durch den Punkt P′ gehen muss.



Ü 6.2-4: Alle parallelen Strahlen müssen sich in der Brennebene schneiden. Da der rote Strahl durch F′ nach der Reflexion zu einem achsenparallelen Strahl wird, ist der gemeinsame Schnittpunkt bekannt.



Ü 6.2-5: Es liegen die Verhältnisse von Abb. 6.10 vor. Die Bildweite ist nach (6.2) bzw. (6.4)

$$a' = \frac{a f'}{a - f'} .$$

Für $a = 5f'$ ergibt sich

$$a' = \frac{5f'^2}{5f' - f'} = \frac{5}{4} f' .$$

Der gesuchte Abstand beträgt somit

$$l = \left|a - a'\right| = \left|5f' - \frac{5}{4} f'\right| = \frac{15}{4} \left|f'\right| = -\frac{15}{4} f' .$$

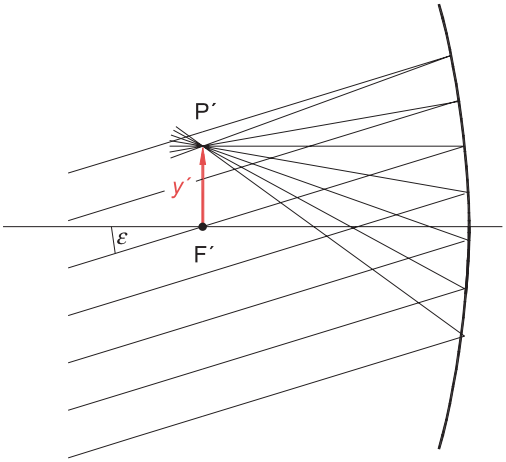
Für $a = \frac{1}{5} f'$ folgt

$$a' = \frac{\frac{1}{5} f'^2}{\frac{1}{5} f' - f'} = -\frac{1}{4} f' .$$

Das Bild liegt rechts vom Spiegel und ist virtuell. Der gesuchte Abstand beträgt somit

$$l = |a - a'| = \frac{9}{20}|f'| = -\frac{9}{20}f' \,.$$

Ü 6.2-6: Strahlen vom unteren Rand des Mondes fallen unter dem Winkel $\varepsilon = 15{,}5'$ relativ zur optischen Achse auf den Spiegel. Sie schneiden sich im Punkt P′, der sich in der Höhe



$$y' = |f'| \tan\varepsilon = 16{,}8\ \text{m} \cdot \tan\frac{15{,}5°}{60}$$
$$= 0{,}07575\ \text{m}$$

befindet. Das Bild des Mondes hat damit den Durchmesser

$$d' = 2y' = 15{,}15\ \text{cm} \,.$$

Ü 6.2-7: Für die Bild- und Gegenstandsweite gilt

$$a' = z' + f' \quad \text{und} \quad a = z + f' \,.$$

Setzt man diese Beziehungen in die Abbildungsgleichung (6.2) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{z+f'} + \frac{1}{z'+f'} = \frac{1}{f'}$$

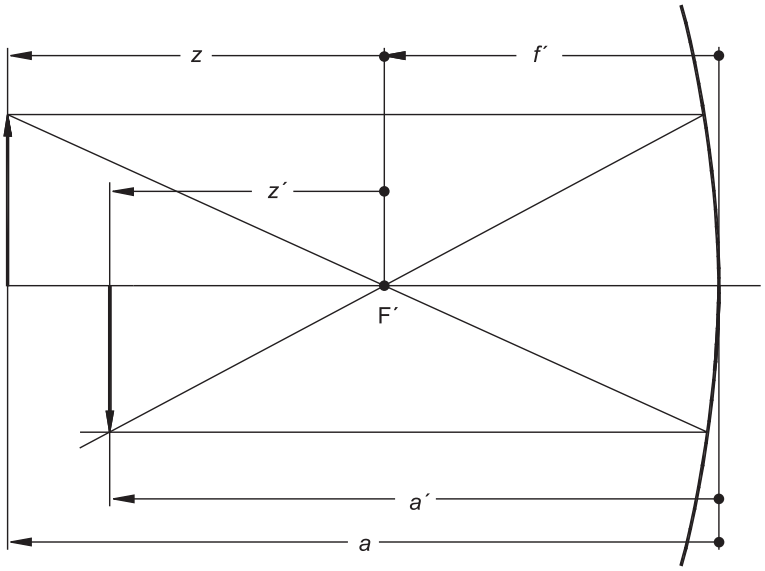
oder mit gemeinsamem Hauptnenner

$$\frac{z'+f'+z+f'}{(z+f')(z'+f')} = \frac{1}{f'} \,.$$

$$f'(z'+2f'+z) = (z+f')(z'+f')$$

Nach Ausmultiplikation folgt

$$z'f' + 2f'^2 + zf' = zz' + zf' + z'f' + f'^2$$



und damit die Newton'sche Abbildungsgleichung

$$z\,z' = f'^2 \,.$$

Ü 6.2-8: Für die erste Brechung gilt nach (6.11)

$$\sin 60° = n \sin \varepsilon_1 \,.$$

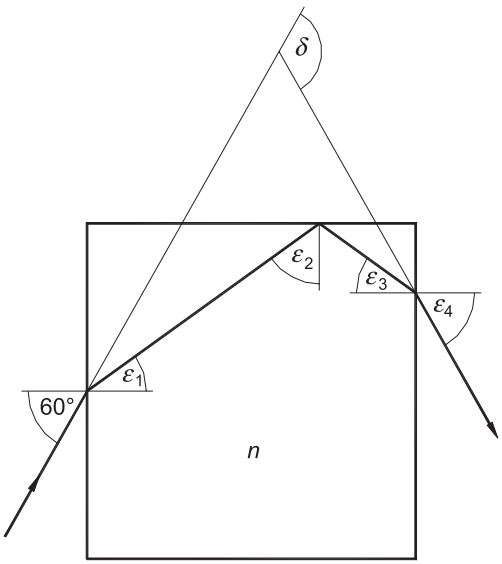
Damit ist der Brechungswinkel

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{1}{n} \sin 60° = 0{,}577 \text{ oder } \varepsilon_1 = 35{,}26° \,.$$

Der Strahl trifft auf die obere Grenzfläche unter dem Winkel $\varepsilon_2 = 90° - \varepsilon_1 = 54{,}74°$. Dieser Winkel ist aber größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\varepsilon_g = \arcsin \frac{1}{n} = 41{,}8° \,.$$

Daher wird der Strahl total reflektiert und trifft unter dem Winkel $\varepsilon_3 = 90° - \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ auf die rechte Grenzfläche, die er mit $\varepsilon_4 = 60°$ verlässt. Der Ablenkwinkel zwischen dem ein- und dem ausfallenden Strahl ist $\delta = 120°$.



Ü 6.2-9: Mit dem Brechungsgesetz (6.11), gilt

$$\sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon' \,.$$

Der Brechungswinkel ist

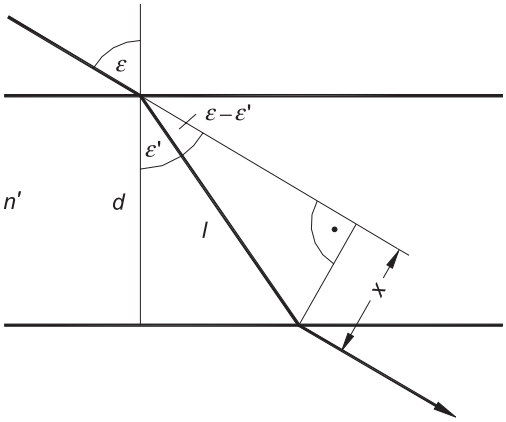
$$\varepsilon' = \arcsin \left(\frac{1}{n'} \sin \varepsilon \right) \,.$$

Für die Länge l innerhalb der Platte gilt

$$l = \frac{d}{\cos \varepsilon'} = \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon'}} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{1}{n'^2} \sin^2 \varepsilon}} \,.$$

Der seitliche Versatz wird damit

$$x = l \sin(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{1}{n'^2} \cdot \sin^2 \varepsilon}} \cdot \sin \left[\varepsilon - \arcsin \left(\frac{1}{n'} \sin \varepsilon \right) \right] \,.$$



Beispiel:
$\varepsilon = 45°$, $d = 10\,\text{mm}$ und $n' = 1{,}5$ liefert $x = 3{,}29\,\text{mm}$.
Für $\varepsilon \to 90°$ folgt $x \to d$, für $\varepsilon = 0$ ist $x = 0$.

Ü 6.2-10: Nach Abb. 6.16b beträgt bei einem Winkel von $\varepsilon = 30°$ im Plexiglas der Winkel $\varepsilon' = 48{,}5°$ an Luft. Damit ist
$n \sin 30° = \sin 48{,}5°$ oder $n = 1{,}5$.
Der Grenzwinkel der Totalreflexion ist nach (6.14)

$$\varepsilon_g = \arcsin \frac{1}{1{,}5} = 41{,}9° \,.$$

Wie Abb. 6.16c zeigt, wird der Strahl bei einem Einfallswinkel von 50° total reflektiert.

Ü 6.2-11: Der Ablenkwinkel ist nach (6.16)

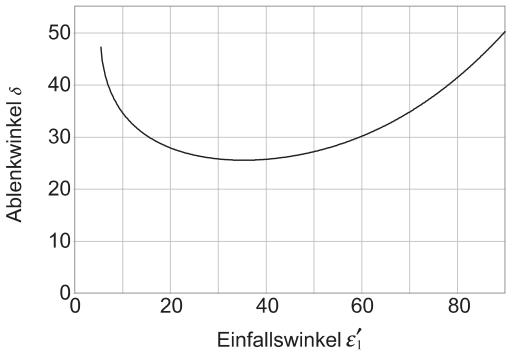
$$\delta = \varepsilon_1' - \alpha + \arcsin\left(\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon_1'} - \right.$$
$$\left. - \cos\alpha\sin\varepsilon_1'\right) .$$

Der minimale Ablenkwinkel beträgt nach (6.17)

$$\delta_{\min} = 2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 25{,}6° .$$

Er tritt auf bei symmetrischem Durchgang. Dann ist

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \alpha) = 35{,}3° .$$



An der rechten Fläche tritt nach (6.18) Totalreflexion auf, wenn der Einfallswinkel kleiner ist als

$$\varepsilon_{1,\mathrm{g}}' = \arcsin\left[n\sin\left(\alpha - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right] = 5{,}33° .$$

Ü 6.2-12: Der minimale Ablenkwinkel beträgt nach (6.17)

$$\delta_{\min} = 2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha .$$

Daraus folgt für den Brechungsindex

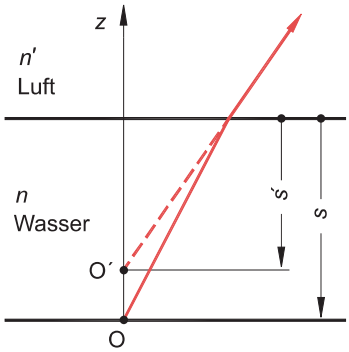
$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1{,}61 .$$

Ü 6.2-13: Aufgrund der Abbe'schen Invariante (6.21), gilt

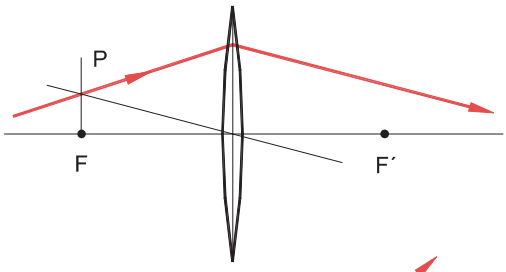
$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) .$$

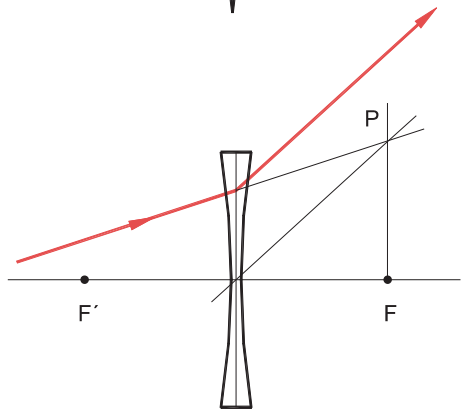
Mit $n' = 1$, $n = 1{,}333$ (Tab. 6.1) und $r = \infty$ ergibt sich

$$n\left(-\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s'} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{s}{n} = -1{,}13\ \mathrm{m} .$$



Ü 6.2-14: Sammellinse:
In F wird ein Lot errichtet. Der Punkt P in der Brennebene kann als Gegenstandspunkt aufgefasst werden. Sein Bildpunkt liegt im Unendlichen. Also muss ein Strahl, durch den Mittelpunkt, der nicht gebrochen wird und der gesuchte Strahl hinter der Linse, parallel verlaufen.





Zerstreuungslinse:
Die Konstruktion läuft sinngemäß wie oben beschrieben. Allerdings liegt jetzt F rechts von der Linse.

Ü 6.2-15:

a) Wenn die Brennweite an Luft f' ist, dann gilt nach der Linsenmacherformel, (6.29)

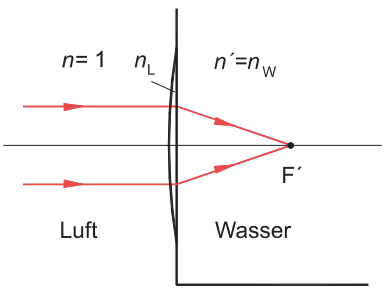
$$\frac{1}{f'} = (n_\mathrm{L} - 1)\frac{1}{r_1} \quad \text{oder} \quad r_1 = (n_\mathrm{L} - 1)f' \,.$$

Aus (6.25) folgt mit $a = -\infty$

$$\frac{n_\mathrm{W}}{a'} = \frac{n_\mathrm{L} - 1}{r_1} \,.$$

Die Bildweite a' ist identisch mit der Brennweite im Wasser:

$$f'_\mathrm{W} = \frac{n_\mathrm{W}}{n_\mathrm{L} - 1} r_1 = n_\mathrm{W} f' = 13{,}33 \text{ cm} \,.$$



b) Nach (6.25) gilt

$$\frac{1}{a'} - \frac{n_\mathrm{W}}{a} = -\frac{n_\mathrm{L} - 1}{r_2} \,.$$

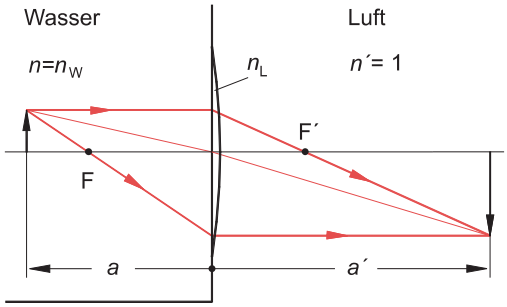
Der Radius r_2 ist jetzt negativ:
$r_2 = -(n_\mathrm{L} - 1)f'$.
Damit ergibt sich für die Bildweite

$$a' = \frac{af'}{a + n_\mathrm{W} f'} = 30 \text{ cm} \,.$$

Der Abbildungsmaßstab beträgt nach (6.26)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n_\mathrm{W} a'}{a} = -2 \,.$$

Das Bild ist reell und Kopf stehend.

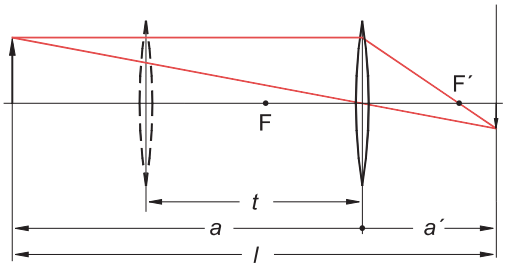


Ü 6.2-16: Es gilt die Abbildungsgleichung (6.31)

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$$

Sowie die geometrische Beziehung

$$-a + a' = l \,.$$



Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Gegenstandsweite, bei der eine Abbildung möglich ist:

$$a^2 + a\,l + f'\,l = 0 \,.$$

Sie hat zwei Lösungen:

$$a_{1,2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4f'\,l}}{2} = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - f'\,l} \,.$$

Die beiden Linsenorte, für die eine scharfe Abbildung auf der Mattscheibe möglich ist, liegen symmetrisch zur Mitte des Aufbaus. Ihr Abstand ist

$$t = 2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - f'\,l} = \sqrt{l^2 - 4f'\,l} \,.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Brennweite zu

$$f' = \frac{l^2 - t^2}{4l} .$$

Ü 6.2-17: Aus der Abbildungsgleichung (6.31) folgt die Brechkraft der Linse:

$$D' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = 2{,}5 \text{ dpt} .$$

Der Brechungsindex ergibt sich aus der Linsenmacherformel (6.29):

$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1)\frac{1}{r_1} \quad \text{oder}$$
$$n_L = 1 + D' r_1 = 1{,}50 .$$

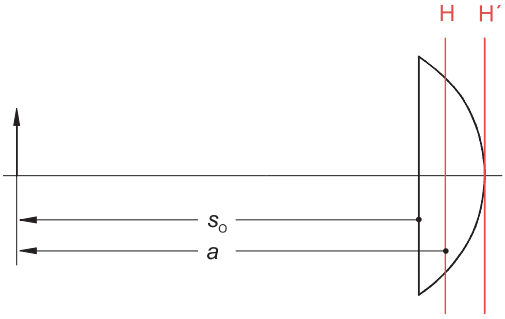
Ü 6.2-18:

a) Die Brennweite kann nach (6.36) berechnet werden:

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1)\left(-\frac{1}{r_2}\right) = 17{,}5 \text{ dpt}$$

und daraus $f' = 5{,}71$ cm.

b) Die gegenstandseitige Hauptebene H befindet sich nach (6.39) im Abstand $s_H = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r_2} = +1{,}18$ cm von der Planfläche.



Die bildseitige Brennebene H′ hat den Abstand

$$s'_{H'} = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r_1} = 0$$

Vom rechten Scheitel, d. h. sie verläuft durch den Scheitel.

c) Die Gegenstandsweite beträgt

$$a = s_O - s_H = -13{,}18 \text{ cm} .$$

Die Bildweite folgt aus (6.32):

$$a' = \frac{a f'}{a + f'} = 10{,}1 \text{ cm} .$$

Der Abstand vom rechten Scheitel beträgt

$$s'_{O'} = a' = 10{,}1 \text{ cm} .$$

d) Der Abbildungsmaßstab ist nach (6.28)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -0{,}77 .$$

Ü 6.2-19: Die Brennweite bestimmt sich aus (6.36) mit den Krümmungsradien: $r_1 = +r$, $r_2 = -r$:

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{(n_L - 1)^2}{n_L}\frac{2r}{r^2}$$
$$= \frac{2}{r} \cdot \frac{n_L - 1}{n_L} .$$

Die Brennweite wird damit

$$f' = \frac{r}{2} \cdot \frac{n_L}{n_L - 1} .$$

Für die Lage der Hauptebenen gilt nach (6.39):

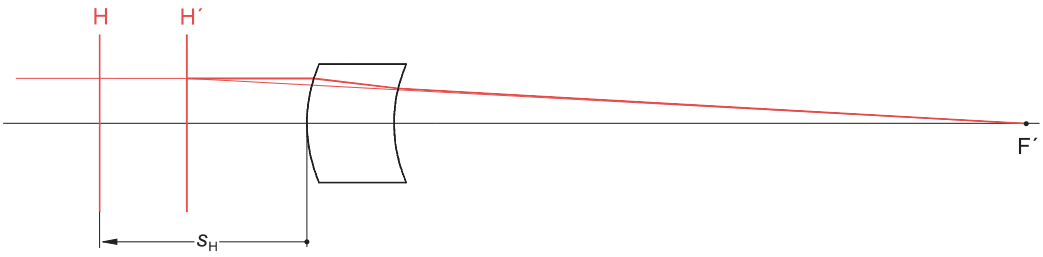
$$s'_{H'} = -f' \frac{n_L - 1}{n_L}\frac{2r}{r} = -r \quad \text{und}$$
$$s_H = -f' \frac{n_L - 1}{n_L}\frac{2r}{-r} = r .$$

Beide Hauptebenen liegen also in der Linsenmitte.

Ü 6.2-20: Bei einer Plankonvex- oder Plankonkavlinse ist $r_1 = \infty$. Die Brechkraft ist daher nach (6.36)

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1)\left(-\frac{1}{r_2}\right) ,$$

hängt also nicht von der Dicke ab.



Ü 6.2-21: Die Brennweite folgt aus (6.37):

$$f' = \frac{n_L}{n_L - 1} \cdot \frac{r^2}{(n_L - 1)\, d} = 28{,}9 \text{ cm} .$$

Für die Lage der Hauptebenen liefert (6.39):

$$s'_{H'} = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r} = \frac{r}{1 - n_L} = -7{,}14 \text{ cm und}$$

$$s_H = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \frac{d}{r} = s'_{H'} = -7{,}14 \text{ cm} .$$

Ü 6.2-22:

a) Die Brennweite der plankonvexen Linse kann aus der Linsenmacherformel, (6.29), berechnet werden:
$\frac{1}{f'_1} = D'_1 = (n_{L,1} - 1)\frac{1}{r_1} = 3{,}75$ dpt und $f'_1 = 26{,}7$ cm.
Nach (6.43) addieren sich die Brechkräfte, wenn die Linsen eng zusammen stehen:

$$D' = D'_1 + D'_2 \text{ oder } \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} .$$

Daraus folgt $D'_2 = -2{,}08$ dpt oder $f'_2 = -48$ cm.
Aus der Linsenmacherformel für die plankonkave Linse erhält man den gesuchten Radius:
$\frac{1}{f'_2} = (n_{L,2} - 1)\left(-\frac{1}{r_2}\right)$ liefert
$r_2 = -(n_{L,2} - 1) f'_2 = +25$ cm.

b) Die Gesamtbrennweite eines Systems aus zwei Linsen ist nach (6.41)

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f' - e} .$$

Der gesuchte Abstand beträgt somit

$$e = f'_1 + f'_2 - \frac{f'_1 f'_2}{f'} = 21{,}3 \text{ cm} .$$

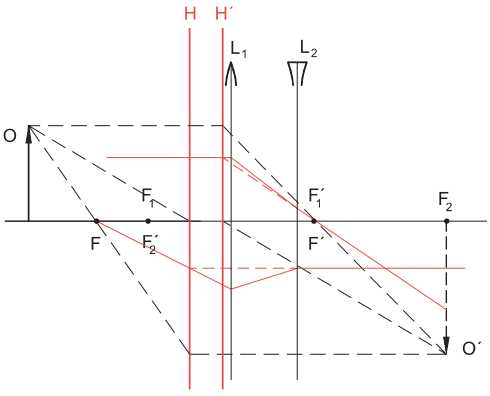
c) Der Brennpunkt F′ hat nach (6.40) den Abstand $s'_{F'}$ von der Konkavlinse (Linse L_2):
$\frac{1}{s'_{F'}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1 - e} = 0{,}167\ \text{cm}^{-1}$ oder $s'_{F'} = 6$ cm.
Ebenso gilt für den Brennpunkt F relativ zur Linse L_1:

$$\frac{1}{s_F} = -\frac{1}{f'_1} - \frac{1}{f'_2 - e} = -0{,}231\ \text{cm}^{-1}$$

oder $s_F = -43{,}3$ cm .

Die Lage der Hauptebene H′ relativ zur Linse L_2 ergibt sich aus $s'_{F'} = s'_{H'} + f'$ oder $s'_{H'} = s'_{F'} - f' = -24$ cm.
In gleicher Weise ergibt sich für den Abstand der Hauptebene H von der Linse L_1:

$$s_H = s_F - f = s_F + f' = -13{,}3 \text{ cm} .$$



d) Die Gegenstandsweite beträgt

$$a = s_O - s_H = -51{,}7 \text{ cm} .$$

Nach (6.32) wird die Bildweite

$$a' = \frac{a f'}{a + f'} = 71{,}5\ \text{cm} .$$

Das Bild hat von der Zerstreuungslinse den Abstand

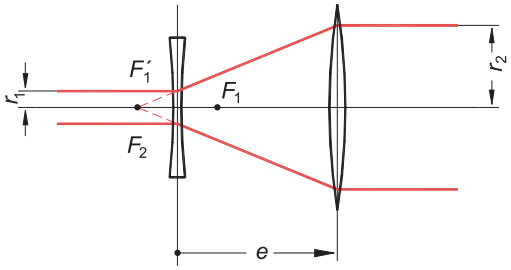
$$s'_{O'} = a' + s'_{H'} = 47{,}5\ \text{cm} .$$

Der Abbildungsmaßstab beträgt

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -1{,}38 .$$

Das Bild ist reell, Kopf stehend und vergrößert.

Ü 6.2-23: Um ein paralleles Strahlenbündel wieder in ein paralleles Bündel abzubilden, muss das System *afokal* sein, d. h. die Brennweite muss $f' = \infty$ sein.



Aus (6.41) folgt damit

$$f'_1 + f'_2 - e = 0 \quad \text{oder} \quad e = f'_1 + f'_2 .$$

Die Brennpunkte F'_1 und F_2 liegen an derselben Stelle. Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{r_2}{f'_2} = \frac{r_1}{-f'_1} \quad \text{oder} \quad f'_2 = -f'_1 \frac{r_2}{r_1} = 50\ \text{cm} .$$

Der Abstand der Linsen ist $e = 40$ cm.

Ü 6.2-24: Die Referenzebene RE_1 liege in L_1, die Ebene RE_2 in L_3. Damit besteht die Systemmatrix aus drei Linsenmatrizen und zwei Transfermatrizen:

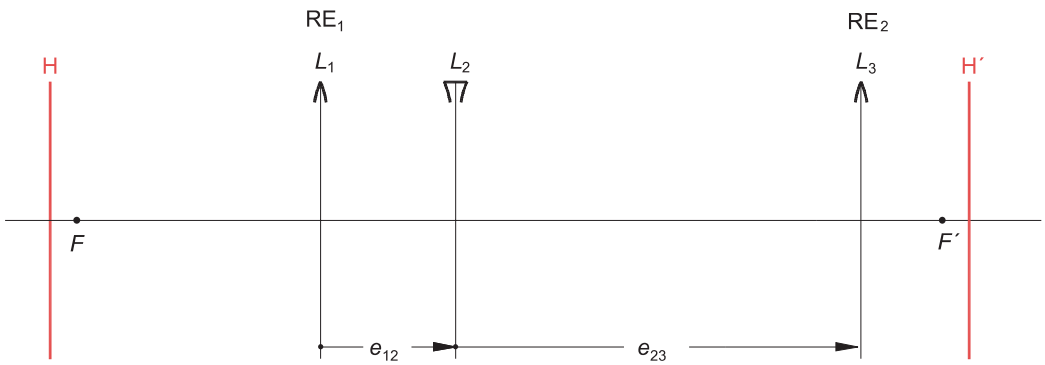
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}_3\,\boldsymbol{T}_{23}\,\boldsymbol{L}_2\,\boldsymbol{T}_{12}\,\boldsymbol{L}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}667\ \text{cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9\ \text{cm} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}133\ \text{cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3\ \text{cm} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}333\ \text{cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 15{,}6\ \text{cm} \\ 1{,}667\ \text{cm}^{-1} & -9 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle wird die Determinante berechnet: $\det \boldsymbol{M} = 1$.
Die Brennweite des Systems ist nach (6.58) $f' = -\frac{1}{C} = -0{,}6$ cm. Das System ist also zerstreuend.
Der objektseitige Brennpunkt F liegt nach (6.53) am Ort
$s_{1,F} = \frac{D}{C} = -5{,}4$ cm links von Linse L_1.
Der bildseitige Brennpunkt F′ liegt nach (6.54)
$s'_{2,F'} = -\frac{A}{C} = 1{,}8$ cm rechts von Linse L_3.
Die objektseitige Hauptebene H liegt nach (6.55)



$$s_{1,\mathrm{H}} = \frac{D - \left(n_1/n_2'\right)}{C} = -6\ \mathrm{cm}\ \text{links von } \mathrm{L}_1.$$

Die bildseitige Hauptebene H′ liegt nach (6.56)

$$s_{2,\mathrm{H}'}' = \frac{1 - A}{C} = +2{,}4\ \mathrm{cm}\ \text{rechts von } \mathrm{L}_3.$$

Ü 6.2-25: Die Konvexfläche liegt links, die Planfläche rechts. Die Referenzebene RE_1 geht durch den Scheitel, RE_2 liegt in der Planfläche. Nach (6.47) gilt für die Linsenmatrix:

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{dick,\,Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_\mathrm{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n_\mathrm{L}}{n_\mathrm{L} r_1} & \frac{1}{n_\mathrm{L}} \end{pmatrix}.$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation ergibt sich

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{dick,\,Luft}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_\mathrm{L}} & \frac{r_1}{n_\mathrm{L}} \\ \frac{1-n_\mathrm{L}}{r_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6667 & 2\ \mathrm{cm} \\ -0{,}1667\ \mathrm{cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle wird die Determinante berechnet: $\det \boldsymbol{L}_{\mathrm{dick,\,Luft}} = 1$.
Die Brennweite ist nach (6.58):

$$f' = -\frac{1}{C} = 6\ \mathrm{cm},$$

der Abstand des objektseitigen Brennpunktes F von RE_1 ist nach (6.53):

$$s_{1,\mathrm{F}} = \frac{D}{C} = -6\ \mathrm{cm},$$

der Abstand des bildseitigen Brennpunktes F′ von RE_2 ist nach (6.54):

$$s_{2,\mathrm{F}'}' = -\frac{A}{C} = 4\ \mathrm{cm},$$

der Abstand der objektseitigen Hauptebene H von RE_1 ist nach (6.55):
$s_{1,\mathrm{H}} = \frac{D-1}{C} = 0$, d. h. die Hauptebene verläuft durch den Scheitel, der Abstand der bildseitigen Hauptebene H′ von RE_2 nach (6.56):

$$s_{2,\mathrm{H}'}' = \frac{1 - A}{C} = -2\ \mathrm{cm}.$$

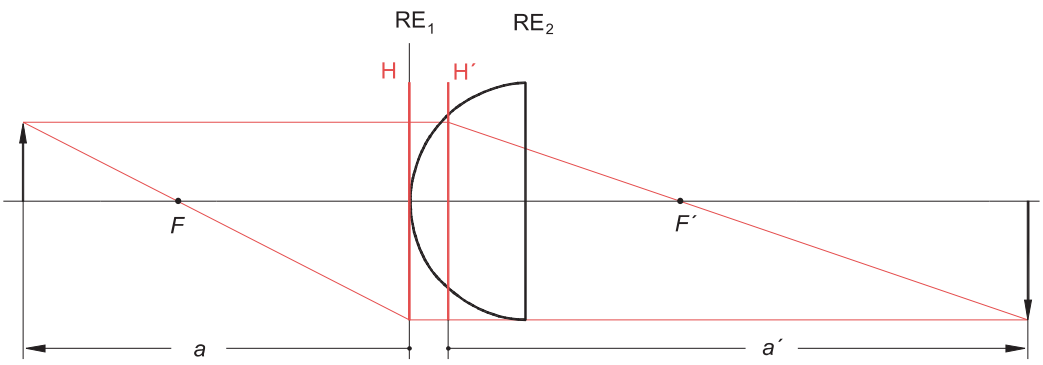
Die Abbildung des Objekts kann mit der klassischen Abbildungsgleichung behandelt werden. In diesem Fall ist die Gegenstandsweite $a = s_\mathrm{O} = -10\ \mathrm{cm}$. Gleichung (6.32) liefert für die Bildweite

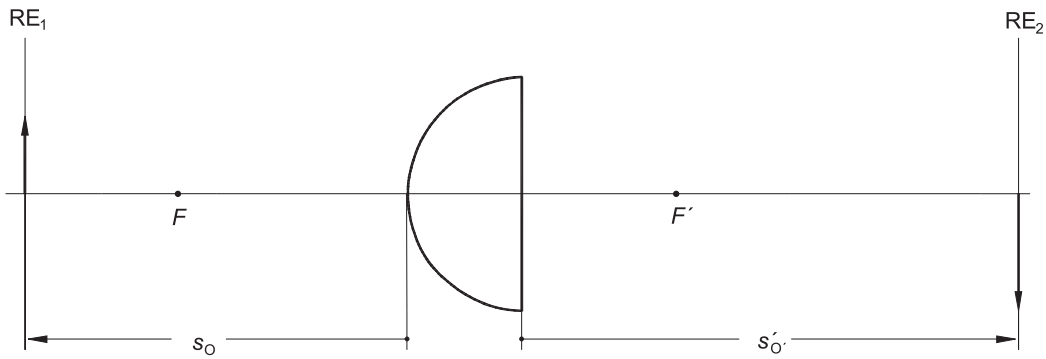
$$a' = \frac{a f'}{a + f'} = 15\ \mathrm{cm}.$$

Der Abstand vom rechten Scheitel ist damit

$$s_{\mathrm{O}'}' = a' + s_{2,\mathrm{H}'}' = 13\ \mathrm{cm}.$$

Wird die Berechnung mit der Matrixmethode durchgeführt, dann erweitert man zweckmäßigerweise das System so, dass die Referenzebene RE_1 im Objekt liegt und die Referenzebene RE_2 im Bild. Die Systemmatrix besteht jetzt aus zwei Transfermatrizen und der bereits bekannten Linsenmatrix:





$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & s'_{O'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6667 & 2\ \text{cm} \\ -0{,}1667\ \text{cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s_O \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation ergibt sich

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}6667 - 0{,}1667\ \text{cm}^{-1} s'_{O'} & \\ -0{,}1667\ \text{cm}^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6667 s_O + 2\ \text{cm} + 0{,}1667\ \text{cm}^{-1} s_O s'_{O'} + s'_{O'} \\ 0{,}1667\ \text{cm}^{-1} s_O + 1 \end{pmatrix} .$$

Nach Abb. 6.45 liegt eine Abbildung vor, wenn das Matrixelement $B = 0$ ist:

$$-0{,}6667 s_O + 2\ \text{cm} + 0{,}1667\ \text{cm}^{-1} s_O s'_{O'} + s'_{O'} = 0 .$$

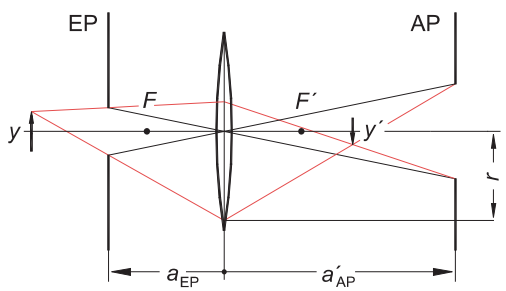
Daraus folgt $s'_{O'} = 13$ cm.

Ü 6.2-26:

a) Für den Abbildungsmaßstab gilt nach Strahlensatz

$$\beta' = \left| \frac{a'_{AP}}{a_{EP}} \right| = 2 .$$

Damit ist der Durchmesser der Austrittspupille doppelt so groß wie der Durchmesser der Eintrittspupille: $d'_{AP} = 24$ mm.



b) Die Brennweite der Linse folgt aus der Abbildungsgleichung (6.31):

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'_{AP}} - \frac{1}{a_{EP}} = 5\ \text{dpt} \quad \text{oder}$$

$$f' = 20\ \text{cm} .$$

Ein Gegenstand der Gegenstandsweite $a = -50$ cm wird nach (6.32) abgebildet am Ort

$$a' = \frac{a f'}{a + f'} = 33{,}3\ \text{cm} .$$

Der Abbildungsmaßstab beträgt nach (6.33)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -0{,}667 .$$

Damit ist die Bildgröße $y' = y\beta' = -6{,}67$ mm.

Zur Konstruktion des Bildes können Strahlen verwendet werden, die durch die Randpunkte der Pupillen gehen.

c) Der notwendig Radius r der Linse folgt aus geometrischen Überlegungen (Strahlensatz) zu 22,5 mm. Der erforderliche Linsendurchmesser ist damit $2r = 45$ mm.

Ü 6.2-27: Das Auge habe die Brennweite f'_A, die Brennweite der Brille ist f'_B. Für beide Fälle gilt die Abbildungsgleichung (6.31). Beim unbewaffneten Auge gilt:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a_N} = \frac{1}{f'_A} . \qquad (1)$$

Sitzt die Brille nahe beim Auge, können nach (6.43) die Brechkräfte von Brille und Auge addiert werden:

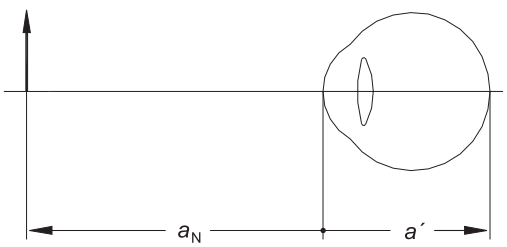
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_A} + \frac{1}{f'_B} .$$

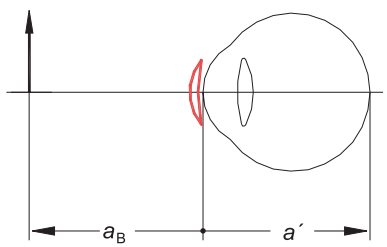
Damit wird die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a_B} = \frac{1}{f'_A} + \frac{1}{f'_B} . \qquad (2)$$

Subtrahiert man (1) von (2), so ergibt sich

$$\frac{1}{f'_B} = D'_B = -\frac{1}{a_B} + \frac{1}{a_N} = 2 \text{ dpt} .$$





Ü 6.2-28: Wie in Ü 6.2-27 gilt für das unbewaffnete Auge

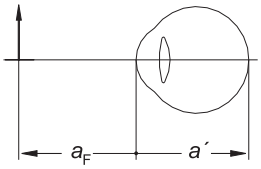
$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a_F} = \frac{1}{f'_A} \qquad (1)$$

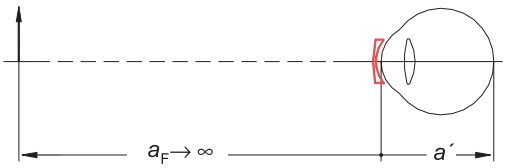
und für das Auge mit Zerstreuungslinse

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f'_A} + \frac{1}{f'_B} . \qquad (2)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt

$$\frac{1}{f'_B} = D'_B = \frac{1}{a_F} = -2 \text{ dpt} .$$





Ü 6.2-29:

a) Die Mikroskopvergrößerung beträgt nach (6.63)

$$\Gamma'_M = \frac{t}{f'_{Ob}} \frac{a_B}{f'_{Ok}} = -400 .$$

b) Nach der Newton'schen Abbildungsgleichung (6.34) gilt für die Abstände von Objekt und Bild von den jeweiligen Brennpunkten

$$z \cdot z' = -f'^2 .$$

Für unseren Fall wird daraus mit $z' = t$ (Abb. 6.54):

$$z_{Ob} \cdot t = -f'^2_{Ob} \text{ , oder}$$

$$z_{Ob} = -\frac{f'^2_{Ob}}{t} = -0{,}1 \text{ mm} .$$

c) Normalerweise entsteht das Zwischenbild in der vorderen Brennebene des Okulars (Abb. 6.54). Wird das Okular um Δz_{Ok} nach hinten verschoben, dann wird das Zwischenbild durch das Okular abgebildet. Die Gegenstandsweite beträgt

$$a_{Ok} = -f'_{Ok} + \Delta z_{Ok} .$$

Nach (6.32) entsteht das stark vergrößerte Bild im Abstand

$$a'_{Ok} = \frac{a_{Ok} f'_{Ok}}{a_{Ok} + f'_{Ok}} = \left(1 + \frac{f'_{Ok}}{\Delta z_{Ok}}\right) f'_{Ok}$$

vom Okular.

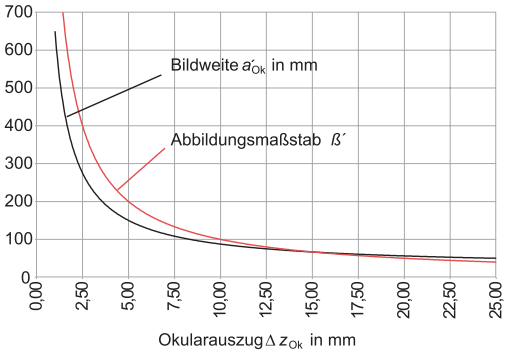
Der Abbildungsmaßstab des Okulars ist nach (6.33)

$$\beta'_{\mathrm{Ok}} = \frac{f'_{\mathrm{Ok}}}{a_{\mathrm{Ok}} + f'_{\mathrm{Ok}}} = -\frac{f'_{\mathrm{Ok}}}{\Delta z_{\mathrm{Ok}}}.$$

Der gesamte Abbildungsmaßstab beträgt

$$\beta' = \beta'_{\mathrm{Ob}} \cdot \beta'_{\mathrm{Ok}} = \frac{t}{f'_{\mathrm{Ob}}} \frac{f'_{\mathrm{Ok}}}{\Delta z_{\mathrm{Ok}}} .$$

Für den Fall $\Delta z_{\mathrm{Ok}} = 1$ mm ergibt sich $a'_{\mathrm{Ok}} = 650$ mm und $\beta' = 1000$.



Ü 6.2-30: Das Mikroskop von Ü 6.2-29 hat ein Objektiv der Brennweite $f'_{\mathrm{Ob}} = 4$ mm und ein Okular der Brennweite $f'_{\mathrm{Ok}} = 25$ mm. Der Linsenabstand ist

$$e = f'_{\mathrm{Ob}} + t + f'_{\mathrm{Ok}} = 189 \text{ mm} .$$

Die Gesamtbrennweite des Systems beträgt nach (6.41)

$$f' = \frac{f'_{\mathrm{Ob}} f'_{\mathrm{Ok}}}{f'_{\mathrm{Ob}} + f'_{\mathrm{Ok}} - e} = \frac{f'_{\mathrm{Ob}} f'_{\mathrm{Ok}}}{-t} = -0{,}625 \text{ mm} .$$

Nach (6.60) wird damit die Lupenvergrößerung

$$\Gamma'_{\mathrm{L}} = -\frac{a_{\mathrm{B}}}{f'} = -400 .$$

Die Vergrößerung ist negativ, weil im Gegensatz zur Lupe das Bild beim Mikroskop Kopf steht.

Ü 6.2-31: Der Feldstecher hat eine Vergrößerung von $|\Gamma'_{\mathrm{F}}| = 8$ und den Objektivdurchmesser $D_{\mathrm{Ob}} = 30$ mm.

a) Nach Abb. 6.56 gilt

$$l = f'_{\mathrm{Ob}} + f'_{\mathrm{Ok}} ;$$

ferner ist die Vergrößerung

$$\Gamma'_{\mathrm{F}} = -\frac{f'_{\mathrm{Ob}}}{f'_{\mathrm{Ok}}} .$$

Aus diesen beiden Gleichung können die Brennweiten berechnet werden:

$$f'_{\mathrm{Ob}} = \frac{\Gamma'_{\mathrm{F}}}{\Gamma'_{\mathrm{F}} - 1}\, l = 177{,}8 \text{ mm} \quad \text{und}$$

$$f'_{\mathrm{Ok}} = l - f'_{\mathrm{Ob}} = 22{,}2 \text{ mm} .$$

b) Wenn das Auge auf Unendlich akkomodiert ist, müssen parallele Strahlen die Okularlinse verlassen. Das bedeutet, dass das Zwischenbild ZB in der Brennebene F_2 entstehen muss. Es besitzt vom Objektiv die Bildweite

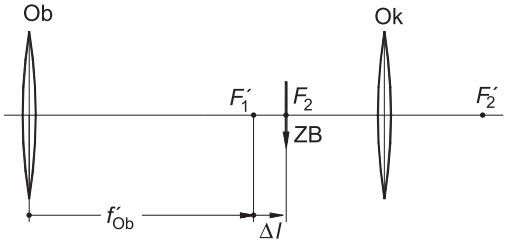
$$a' = f'_{\mathrm{Ob}} + \Delta l .$$

Mithilfe der Abbildungsgleichung (6.31) folgt für die Gegenstandsweite

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'_{\mathrm{Ob}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{f'_{\mathrm{Ob}} + \Delta l} - \frac{1}{f'_{\mathrm{Ob}}} .$$

Dies ergibt $a = -6\,499$ mm $\approx -6{,}5$ m.



Ü 6.2-32: Wenn die Feld- oder Kollektivlinse an der Stelle des Zwischenbildes angebracht ist, befindet sie sich in der vorderen Brennebene des Okulars. Das System aus Feldlinse und Okularlinse besitzt also den Linsenabstand

$$e = f'_{\mathrm{Ok}} .$$

Nach (6.41) beträgt die Systembrennweite von zwei Linsen

$$f' = \frac{f'_{\mathrm{Feld}} f'_{\mathrm{Ok}}}{f'_{\mathrm{Feld}} + f'_{\mathrm{Ok}} - e} = \frac{f'_{\mathrm{Feld}} f'_{\mathrm{Ok}}}{f'_{\mathrm{Feld}}} = f'_{\mathrm{Ok}}$$

und zwar unabhängig von der Brennweite der Brennweite der Feldlinse.

Ü 6.2-33:

a) Die Fernrohrvergrößerung beträgt nach (6.64)

$$\Gamma'_{\mathrm{F}} = -\frac{f'_{\mathrm{Ob}}}{f'_{\mathrm{Ok}}} = -60 .$$

b) Der Durchmesser der Austrittspupille ist nach (6.65)

$$D_{\mathrm{AP}} = \frac{D_{\mathrm{EP}}}{|\Gamma'_{\mathrm{F}}|} = 5{,}33\ \mathrm{mm} .$$

c) Die Dämmerungszahl ist in (6.66) definiert:

$$Z = \sqrt{|\Gamma'_{\mathrm{F}}|\ D_{\mathrm{EP}}} = 139 .$$

d) Wenn Augenpupille und Austrittspupille denselben Durchmesser haben, steigt die Helligkeit mit Instrument nach (6.67) mit dem Quadrat der Fernrohrvergrößerung. Der Lichtstrom Φ, der ins Auge fällt, ist im Vergleich zum Lichtstrom Φ_0 bei unbewaffnetem Auge

$$\Phi = \Gamma'^2_{\mathrm{F}} \Phi_0 = 3\,600 \cdot \Phi_0 .$$

e) Wenn die Augenpupille einen Durchmesser von $D_{\mathrm{Auge}} = 8\ \mathrm{mm}$ aufweist, könnte das Auge einen Lichtstrom empfangen, der proportional zur Fläche der Augenpupille ist:

$$\Phi_0 \sim A_{\mathrm{Auge}} = \frac{\pi}{4} D^2_{\mathrm{Auge}} .$$

Da aber wegen der kleineren Austrittspupille des Fernrohrs nur die Fläche

$$A_{\mathrm{AP}} = \frac{\pi}{4} D^2_{\mathrm{AP}}$$

beleuchtet wird, beträgt der Lichtstrom mit Instrument nur noch

$$\Phi = \Gamma'^2_{\mathrm{F}} \Phi_0 \frac{A_{\mathrm{AP}}}{A_{\mathrm{Auge}}} = \Gamma'^2_{\mathrm{F}} \Phi_0 \left(\frac{D_{\mathrm{AP}}}{D_{\mathrm{Auge}}} \right)^2 = 1\,600 \cdot \Phi_0 .$$

Ü 6.2-34: Die vordere Grenzentfernung einer „scharfen" Abbildung ist nach (6.69)

$$a_{\mathrm{v}} = \frac{a f'^2}{f'^2 - u' k (a + f')} .$$

Mit $f' = 45\ \mathrm{mm}$, $u' = 0{,}0433\ \mathrm{mm}$, $a = -3\ \mathrm{m}$ und Blende $k = 2{,}8$ ergibt sich $a_{\mathrm{v}} = -2{,}55\ \mathrm{m}$.
Ebenso folgt für die hintere Grenzentfernung

$$a_{\mathrm{h}} = \frac{a f'^2}{f'^2 + u' k (a + f')} = -3{,}64\ \mathrm{m} .$$

Die Schärfentiefe ist damit

$$\Delta a = a_{\mathrm{v}} - a_{\mathrm{h}} = 1{,}09\ \mathrm{m} .$$

Ü 6.2-35: Die hintere Grenzentfernung wird nach (6.69) unendlich, falls
$f'^2 + u' k (a + f') = 0$ ist.
Daraus folgt für die einzustellende Gegenstandsweite

$$a = -\frac{f'^2}{u' k} - f' = -5{,}89\ \mathrm{m} .$$

Die vordere Grenzentfernung wird dann

$$a_{\mathrm{v}} = \frac{a f'^2}{f'^2 - u' k (a + f')} = a \frac{f'^2}{f'^2 + f'^2} = \frac{a}{2} = -2{,}95\ \mathrm{m} .$$

ε_1 in °	0	30	45	60	80	90
Φ_e in nW	62,0	53,3	43,8	31,7	10,8	0
I_e in mW/sr	15,5	13,3	10,9	7,9	2,7	0
$I_e(0)$ in mW/sr	15,5	15,4	15,4	15,9	15,5	–
L_e in kW/(m^2 · sr)	15,5	15,4	15,4	15,9	15,5	–

Ü 6.3-1:

a) Die Strahlstärke ist nach (6.75) gegeben durch

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega} ,$$

wobei der Raumwinkel anhand (6.73) berechnet wird:

$$\Omega = \frac{A_2}{r^2}\Omega_0 .$$

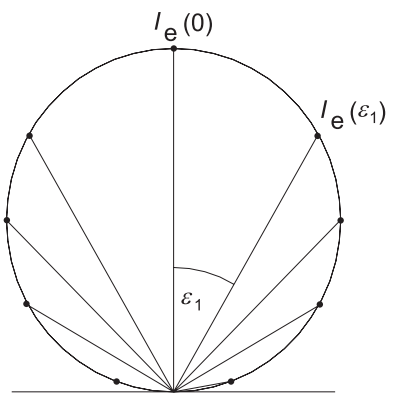
Damit gilt

$$I_e(\varepsilon_1) = \frac{\Phi_e(\varepsilon_1)\, r^2}{A_2 \Omega_0} .$$

Die Ergebnisse sind in obiger Tabelle eingetragen.

b) Wenn die LED ein Lambert-Strahler ist, dann muss nach (6.77) gelten:

$$I_e(\varepsilon_1) = I_e(0) \cdot \cos\varepsilon_1 .$$



Um dies zu überprüfen, wird

$$I_e(0) = \frac{I_e(\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1}$$

berechnet und in obige Tabelle eingetragen. Es zeigt sich, dass $I_e(0)$ hinreichend konstant ist. Die LED hat demnach Lambert'sche Charakteristik. Das Polardiagramm $I_e(\varepsilon_1)$ zeigt die Abstrahlcharakterisitk.

c) Die Strahldichte beträgt nach (6.76)

$$L_e = \frac{I_e(\varepsilon_1)}{A_1 \cos\varepsilon_1} .$$

Sie ist in der fünften Zeile der obigen Tabelle eingetragen. Der Mittelwert ist 15,5 kW/(m^2 · sr).

d) Die spezifische Ausstrahlung eines Lambert-Strahlers, der in den Halbraum emittiert, ist nach (6.82)

$$M_e = L_e\, \pi\, \Omega_0 = 48{,}7\ \text{kW/m}^2 .$$

e) Auf den Empfänger fällt nach dem photometrischen Grundgesetz, (6.78), die Strahlungsleistung

$$\Phi_e = L_e \frac{A_1 \cos\varepsilon_1\, A_2 \cos\varepsilon_2}{r^2}\Omega_0 .$$

Diese Leistung ist maximal für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$:

$$\Phi_{e,\max} = L_e \frac{A_1 A_2}{r^2}\Omega_0 .$$

Damit ist nach (6.83) die maximale Bestrahlungsstärke

$$E_{e,\max} = \frac{\Phi_{e,\max}}{A_2} = L_e \frac{A_1}{r^2}\Omega_0 = 62\ \frac{\text{mW}}{\text{m}^2} .$$

Ü 6.3-2:

a) Die Strahlstärke wäre nach (6.87) als Integral zu berechnen:

$$L_\mathrm{e} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\mathrm{e},\lambda}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\ .$$

Näherungsweise soll gelten:

$$L_\mathrm{e} \approx L_{\mathrm{e},\lambda}(\bar{\lambda}) \cdot \Delta\lambda\ .$$

Nach (6.88) ist die spektrale Strahldichte des Hohlraumstrahlers

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{e},\lambda} &= \frac{c_1}{\lambda^5}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1}\,\frac{1}{\Omega_0} \\ &= 5{,}22\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{sr}} \\ &= 5{,}22\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{nm}\cdot\mathrm{sr}}\ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Strahldichte

$$L_\mathrm{e} \approx 209\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{sr}}\ .$$

b) Die Strahldichte der LED ist nach (6.76)

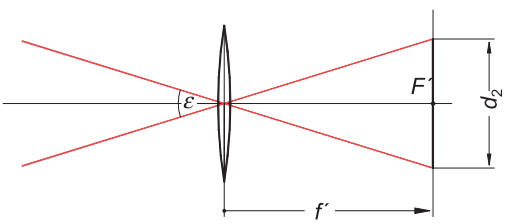
$$L_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{e}}{A_1} = 1\,000\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{sr}}\ .$$

Sie ist also deutlich höher, als die des Hohlraumstrahlers.

Ü 6.3-3:

a) Die parallelen Randstrahlen von der Sonne durchsetzen die Linse unter dem Winkel $\varepsilon = 32' = 9{,}31\cdot 10^{-3}$ rad.
Das Bild in der Brennebene hat damit den Durchmesser

$$d_2 = f'\,\varepsilon = 0{,}931\ \mathrm{m}\ .$$



b) Wenn die Bestrahlungsstärke am Ort der Linse $E_{\mathrm{e},1}$ beträgt, dann durchdringt die Linse die Strahlungsleistung

$$\Phi_\mathrm{e} = E_{\mathrm{e},1} A_\mathrm{Linse} = E_{\mathrm{e},1}\,\frac{\pi\,d_1^2}{4}\ .$$

Vernachlässigt man die Verluste in der Linse, dann fällt diese Strahlungsleistung auch auf das Bild der Sonne. Damit wird die Bestrahlungsstärke nach (6.83)

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{e},2} &= \frac{\Phi_\mathrm{e}}{A_\mathrm{Bild}} = \frac{\Phi_\mathrm{e} 4}{\pi\,d_2^2} = E_{\mathrm{e},1}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \\ &= 1{,}38\,\frac{\mathrm{MW}}{\mathrm{m}^2}\ . \end{aligned}$$

Die Vernachlässigung der Linsenabsorption ist natürlich in Wahrheit nicht gegeben. Tatsächlich zeigt das Glas starke Absorption im UV und IR, so dass die wirkliche Bestrahlungsstärke wesentlich niedriger ist. Um die wirkliche Bestrahlungsstärke zu berechnen, muss der Absorptionsgrad des Linsenmaterials in Abhängigkeit von der Wellenlänge bekannt sein.

Ü 6.3-4: Nach dem photometrischen Entfernungsgesetz (6.84) gilt für den Zusammenhang von Lichtstärke und Beleuchtungsstärke

$$E_\mathrm{v} = \frac{I_\mathrm{v}}{r^2}\cos\varepsilon_2\,\Omega_0\ .$$

Daraus folgt die gesuchte Lichtstärke mit $\varepsilon_2 = 0$ zu

$$I_\mathrm{v} = E_\mathrm{v}\,r^2\,\frac{1}{\Omega_0} = 1\,125\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}} = 1\,125\ \mathrm{cd}\ .$$

Ü 6.3-5:

a) Der Lichtstrom, der auf den Empfänger fällt, ist nach (6.91)

$$\Phi_\mathrm{v} = K_\mathrm{m}\,V(\lambda)\Phi_\mathrm{e} = 6{,}2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{lm}\ .$$

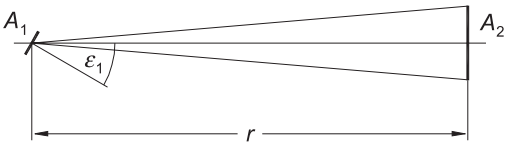
Der Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$ ist in DIN 5031 in Nanometerschritten tabelliert.

b) Die Beleuchtungsstärke ist in Analogie zu (6.83)

$$E_\mathrm{v} = \frac{\Phi_\mathrm{v}}{A_2} = 0{,}31\,\mathrm{lx}\ .$$

c) Der Raumwinkel ist nach (6.74)

$$\Omega = \frac{A_2}{r^2}\Omega_0 = 20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sr}\ .$$



d) Da die LED eine Lambert'sche Abstrahlcharakteristik besitzt, gilt nach (6.77)

$$I_\mathrm{v}(\varepsilon_1) = I_\mathrm{v}(0)\cos\varepsilon_1\ .$$

Die Lichtstärke $I_\mathrm{v}(\varepsilon_1)$ beträgt mit (6.75)

$$I_\mathrm{v}(\varepsilon_1) = \frac{\Phi_\mathrm{v}}{\Omega} = 0{,}31\,\mathrm{cd} = 310\,\mathrm{mcd}\ .$$

Damit wird die Lichtstärke in Vorwärtsrichtung

$$I_\mathrm{v}(0) = \frac{I_\mathrm{v}(\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1} = 358\,\mathrm{mcd}\ .$$

e) Die Leuchtdichte beträgt nach (6.76)

$$L_\mathrm{v} = \frac{I_\mathrm{v}(\varepsilon_1)}{A_1\cos\varepsilon_1} = 716 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}$$
$$= 716\,\frac{\mathrm{klm}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{sr}}$$

Ü 6.3-6: Die Spektralfarbe der Wellenlänge $\lambda = 490$ nm besitzt nach DIN 5033 die Normspektralwerte $\overline{x} = 0{,}0320$, $\overline{y} = 0{,}2080$ und $\overline{z} = 0{,}4652$.
Damit sind gemäß (6.96) die Normfarbwerte $X = 0{,}0320\,k$, $Y = 0{,}2080\,k$ und $Z = 0{,}4652\,k$, mit $X + Y + Z = 0{,}7052\,k$.
Nach (6.97) ergeben sich die Normfarbwertanteile
$x = 0{,}0454$, $y = 0{,}2950$ und $z = 0{,}6596$.
Zur Kontrolle: $x + y + z = 1{,}0000$.

Für die Spektralfarbe der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm ergibt sich in gleicher Weise mit

$\overline{x} = 1{,}0622$, $\overline{y} = 0{,}6310$ und $\overline{z} = 0{,}0008$:
$x = 0{,}6270$, $y = 0{,}3725$ und $z = 0{,}0005$.
Wieder gilt $x + y + z = 1{,}0000$.

Die Farborte aller Mischfarben dieser beiden Spektralfarben liegen in der Normfarbtafel auf einer Geraden durch die Punkte $P_\mathrm{türkis}(0{,}0454/0{,}2950)$ und $P_\mathrm{orange}(0{,}6270/0{,}3725)$.
Sie müssen einer Geradengleichung der Form $y = ax + b$ genügen. Durch Einsetzen der beiden Punkte ergeben sich die Gleichungen

$$0{,}2950 = 0{,}0454a + b$$
$$0{,}3725 = 0{,}6270a + b\ .$$

Daraus folgt
$a = 0{,}1333$ und $b = 0{,}2890$.
Also lauten alle erzeugbaren Farborte:
$y = 0{,}1333x + 0{,}2890$ mit $0{,}0454 \le x \le 0{,}6270$.
Setzt man $x = 1/3$ ein, so ergibt sich $y = 1/3$.
Das sind aber die Koordinaten des Unbuntpunktes E.

Ü 6.3-7: Wird in erster Näherung die Lichtquelle als monochromatisch angesehen, dann gilt für die Farbreizfunktion $\varphi(\lambda_0) = k$ und $\varphi(\lambda \neq \lambda_0) = 0$.
Mithilfe der Zahlenwerte der Normspektralwerte $\overline{x}(640\,\mathrm{nm}) = 0{,}4479$, $\overline{y}(640\,\mathrm{nm}) = 0{,}1750$ und $\overline{z}(640\,\mathrm{nm}) = 0$ aus der DIN 5033 ergibt sich für die Normfarbwerte
$X = 0{,}4479$, $Y = 0{,}1750$ und $Z = 0$.
Die Normfarbwertanteile ergeben sich zu
$x = 0{,}7191$ und $y = 0{,}2809$.
Soll der Farbort genauer bestimmt werden, müssen die Integrale

$$X = \int \varphi_\lambda\,\overline{x}(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda\ ,\ Y = \int \varphi_\lambda\,\overline{y}(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda \quad \text{und}$$
$$Z = \int \varphi_\lambda\,\overline{z}(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda$$

λ/nm	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	φ_λ	$\varphi_\lambda\,\bar{x}$	$\varphi_\lambda\,\bar{y}$	$\varphi_\lambda\,\bar{z}$
570	0,7621	0,952	0,0021	0,0002	0,0002	0,0002	0,0000
575	0,8425	0,9154	0,0018	0,0007	0,0006	0,0006	0,0000
580	0,9163	0,87	0,0017	0,0020	0,0018	0,0017	0,0000
585	0,9786	0,8163	0,0014	0,0053	0,0052	0,0044	0,0000
590	1,0263	0,757	0,0011	0,0132	0,0136	0,0100	0,0000
595	1,0567	0,6949	0,001	0,0301	0,0318	0,0209	0,0000
600	1,0622	0,631	0,0008	0,0628	0,0667	0,0396	0,0001
605	1,0456	0,5668	0,0006	0,1201	0,1256	0,0681	0,0001
610	1,0026	0,503	0,0003	0,2107	0,2113	0,1060	0,0001
615	0,9384	0,4412	0,0002	0,3391	0,3183	0,1496	0,0001
620	0,8544	0,381	0,0002	0,5006	0,4277	0,1907	0,0001
625	0,7514	0,321	0,0001	0,6775	0,5091	0,2175	0,0001
630	0,6424	0,265	0	0,8411	0,5403	0,2229	0,0000
635	0,5419	0,217	0	0,9577	0,5190	0,2078	0,0000
640	0,4479	0,175	0	1,0000	0,4479	0,1750	0,0000
645	0,3608	0,1382	0	0,9577	0,3455	0,1323	0,0000
650	0,2835	0,107	0	0,8411	0,2385	0,0900	0,0000
655	0,2187	0,0816	0	0,6775	0,1482	0,0553	0,0000
660	0,1649	0,061	0	0,5006	0,0825	0,0305	0,0000
665	0,1212	0,0446	0	0,3391	0,0411	0,0151	0,0000
670	0,0874	0,032	0	0,2107	0,0184	0,0067	0,0000
675	0,0636	0,0232	0	0,1201	0,0076	0,0028	0,0000
680	0,0468	0,017	0	0,0628	0,0029	0,0011	0,0000
685	0,0329	0,0119	0	0,0301	0,0010	0,0004	0,0000
690	0,0227	0,0082	0	0,0132	0,0003	0,0001	0,0000
				$X = 4{,}1052$, $Y = 1{,}7495$, $Z = 0{,}0005$			

bestimmt werden, die in der Praxis durch Summen berechnet werden:

$$X = \sum \varphi_i \bar{x}_i\,, \quad Y = \sum \varphi_i \bar{y}_i \quad \text{und}$$
$$Z = \sum \varphi_i \bar{z}_i\,.$$

Die nachfolgende Tabelle ist ein Ausschnitt einer Excel-Tabelle mit der die Berechnung vorgenommen wird.
Für die Farbwertanteile ergibt sich in guter Übereinstimmung mit der obigen Näherungsrechnung:
$x = 0{,}7011$ und $y = 0{,}2988$.

Ü 6.4-1: Aus der fundamentalen Wellengleichung

$$c = \lambda f \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

folgt durch Ableiten

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}f} = -\frac{c}{f^2} \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}\lambda = -\frac{c}{f^2}\,\mathrm{d}f\,.$$

Geht man zu den etwas größeren Intervallen über, so gilt

$$\Delta\lambda = \frac{c}{f^2}\Delta f = \frac{\lambda}{f}\Delta f\,.$$

Dies ist (6.102). Ersetzt man f durch c/λ, so ergibt sich der unvorstellbar kleine Wert von

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta f = 1{,}2 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{m}\,.$$

Die Kohärenzlänge ist mit (6.100) und (6.101)

$$l = \frac{c}{\Delta f} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}\,.$$

Ü 6.4-2: Die Orte konstruktiver Interferenz liegen in großem Abstand auf den Asymptoten, deren Winkel durch (6.105) gegeben sind. So ist der Winkel des ersten Maximums

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{d} .$$

Der Abstand von der Symmetrieachse, auf der das Maximum nullter Ordnung auftritt, ist

$$\Delta x = D\tan\alpha_1 \approx D\sin\alpha_1 = \lambda\frac{D}{d} = 1{,}96\ \text{mm} .$$

Ü 6.4-3: Aus der Brennweite lässt sich mithilfe der Linsenmachergleichung (6.29) der Krümmungsradius der Linse berechnen:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\frac{1}{R} \quad \text{liefert}$$
$$R = (n-1)f' = 2{,}5\ \text{m} .$$

Nach (6.112) sind die Radien der dunklen Ringe

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} .$$

Damit wird die Wellenlänge des Lichts

$$\lambda = \frac{r_m^2}{m\,R} = 640\ \text{nm} .$$

Ü 6.4-4: Der geometrische Wegunterschied der beiden reflektierten Strahlen ist $2d$. Der optische Gangunterschied beträgt damit $2dn_\text{F}$. Wenn keine Reflexion erfolgen soll, dann müssen sich die beiden reflektierten Wellen auslöschen (destruktive Interferenz), also einen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge oder ungeradzahligen Vielfachen davon aufweisen:

$$2d\,n_\text{F} = (2m+1)\frac{\lambda_1}{2} . \qquad (1)$$

Soll starke Reflexion auftreten, dann müssen die reflektierten Wellen konstruktiv interferieren, also einen Gangunterschied von ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge haben:

$$2d\,n_\text{F} = m\lambda_2 . \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt für die Ordnungszahl der Interferenz $m = 3$ und für die Dicke der Schicht

$$d = m\frac{\lambda_2}{2n_\text{F}} = 800\ \text{nm} .$$

Ü 6.4-5:

a) Nach (6.109) ist die erforderliche Mindestdicke

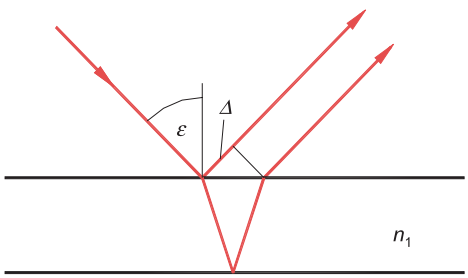
$$d = \frac{\lambda}{4n_1} = 119\ \text{nm} .$$

Weitere mögliche Schichtdicken sind

$$d_m = \frac{(2m+1)\lambda}{4n_1} = 357\ \text{nm}, 595\ \text{nm}, \ldots$$

b) Der Gangunterschied zwischen den beiden reflektierten Strahlen ist (s. Herleitung von (6.106)

$$\Delta = 2d\sqrt{n_1^2 - \sin^2\varepsilon} .$$



Die Reflexion wird minimal, wenn gilt:

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2} .$$

Daraus folgt für die gesuchte Wellenlänge

$$\lambda = \frac{4d\sqrt{n_1^2 - \sin^2\varepsilon}}{2m+1} .$$

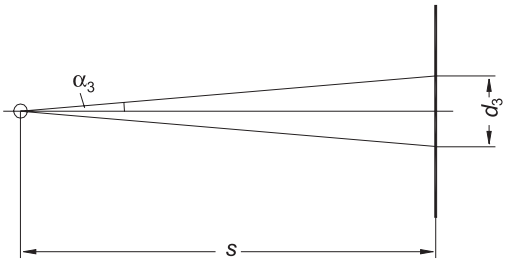
Für $d = 119\,\text{nm}$ und $m = 0$ folgt $\lambda = 536\,\text{nm}$.

Ü 6.4-6: Der dritte dunkle Ring erscheint unter dem Winkel α_3 relativ zur Symmetrieachse, der gegeben ist durch

$$\sin\alpha_3 = 3{,}238\frac{\lambda}{d} .$$

Mit $\tan\alpha_3 = \frac{d_3}{2s}$ folgt

$$d = \frac{3{,}238\,\lambda}{\sin\alpha_3} \approx \frac{3{,}238\,\lambda}{\tan\alpha_3} = \frac{3{,}238\,\lambda\cdot 2s}{d_3}$$
$$= 198\ \mu\text{m} .$$



Ü 6.4-7: Die Intensitätsverhältnisse werden durch (6.113) beschrieben:

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \text{mit} \quad x = \pi\frac{b}{\lambda}\sin\alpha .$$

Nebenmaxima treten nach (6.115) auf für $\sin\alpha_m \approx (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{b}$, d. h. für $x_m \approx \pi(m+\frac{1}{2})$. Sucht man mithilfe eines Rechnerprogramms in der Gegend dieser Stellen die Maxima obiger Funktion, so erhält man folgende numerische Ergebnisse:

$$\frac{I_1}{I_0} = 0{,}0472 , \quad \frac{I_2}{I_0} = 0{,}0165 \quad \text{und}$$
$$\frac{I_3}{I_0} = 0{,}00834 .$$

Ü 6.4-8: Mathematisch ist die Halbwertsbreite gegeben durch den Schnittpunkt der Funktion

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{1}{2} ,$$

oder vereinfacht

$$\sin x = \frac{x}{\sqrt{2}} .$$

Diese Gleichung hat die numerische Lösung $x = 1{,}391557$.

Damit ist der gesuchte Winkel gegeben durch

$$\sin\alpha_{1/2} = 0{,}4429\frac{\lambda}{b} .$$

Ü 6.4-9: Der Grenzwinkel für das beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen ist nach (6.118)

$$\delta = 1{,}22\frac{\lambda}{d} .$$

Da im Auge die Wellenlänge des Lichts verkürzt ist um den Betrag des Brechungsindex, gilt für den Grenzwinkel innerhalb des Auges

$$\delta_\text{i} = 1{,}22\frac{\lambda}{n\,d} .$$

Dies entspricht aber nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz (mit $\sin\delta \approx \delta$) einem Grenzwinkel außerhalb des Auges von wiederum

$$\delta = 1{,}22\frac{\lambda}{d} \approx 3{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{rad} \approx 1{,}2' .$$

Dieser Grenzwinkel stimmt etwa überein mit dem physiologischen Grenzwinkel von ungefähr einer Winkelminute (Abschn. 6.2.7.1).

Ü 6.4-10: Nach den Ausführungen von Ü 6.4-9 beträgt der Grenzwinkel für $\lambda = 550$ nm

$$\delta = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = 1{,}7\cdot 10^{-4}\ \text{rad} .$$

Der Abstand Erde-Mond ist ungefähr $r_{\text{E,M}} \approx 3{,}8\cdot 10^8$ m. Damit ergibt sich auf dem Mond eine Längendifferenz von

$$y = \delta\, r_{\text{E,M}} \approx 64\ \text{km} .$$

Ü 6.4-11:

a) Ein Fernrohr 8x30 hat einen Objektivdurchmesser von 30 mm. Der Grenzwinkel des Auflösungsvermögens beträgt nach (6.118)

$$\delta = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = 2{,}24\cdot 10^{-5}\ \text{rad}$$

für eine Wellenlänge von $\lambda = 550$ nm. An der Burgwand sollten damit Details im Abstand $y = \delta\, s \approx 34$ cm aufgelöst werden. Die Fenster können also ohne weiteres gesehen werden.

b) Beim Auge mit $d = 1{,}5\,\text{mm}$ ist die Auflösungsgrenze

$$y = 1{,}22\frac{\lambda}{d}s = 6{,}7\,\text{m}\,.$$

Die Fenster werden also nicht aufgelöst.

Ü 6.4-12: Die Lage der Hauptmaxima ist gegeben durch (6.121):

$$\sin\alpha_{m,\max} = \pm m\frac{\lambda}{g}\,.$$

Da die Interferenzfunktion des Gitters durch die Spaltbeugungsfunktion moduliert wird, kommt es an all jenen Stellen zur Auslöschung, an denen die Spaltfunktion null wird. Diese Minima der Spaltbeugungsfunktion sind nach (6.114) gegeben durch

$$\sin\alpha_{k,\min} = \pm k\frac{\lambda}{b}\,.$$

Ist also $\sin\alpha_{m,\max} = \sin\alpha_{k,\min}$ oder

$$m\frac{\lambda}{g} = k\frac{\lambda}{b}\,,$$

dann ist kein Beugungsreflex zu beobachten. Nun soll gelten: $g = 2b$, d. h.

$$m\frac{\lambda}{2b} = k\frac{\lambda}{b} \quad \text{oder} \quad m = 2k\,.$$

Da $k = 1, 2, 3, \ldots$, folgt, dass für $m = 2, 4, 6, \ldots$ Auslöschung erfolgt. Also sind nur die Hauptmaxima mit den Ordnungszahlen $m = 0, 1, 3, 5, \ldots$ beobachtbar.

Ü 6.4-13: Die Winkel der Maxima sind nach (6.121) gegeben durch

$$\sin\alpha_m = \pm m\frac{\lambda}{g} = \pm m\cdot 0{,}66\,.$$

Da der Sinus eines Winkels nie größer sein kann als 1, kann man lediglich die Beugungsordnungen

$$m = 0 \pm 1$$

beobachten.

Ü 6.4-14:

a) Die Beugungsmaxima 1. Ordnung treten nach (6.121) auf unter den Winkeln

$$\alpha_1 = \pm\arcsin\frac{\lambda}{g} = \pm 36{,}1^\circ\,.$$

b) Bei einem verdrehten Gitter gilt nach (6.122):
$\sin\alpha_{+1} = \frac{\lambda}{g} + \sin\beta$ oder $\alpha_{+1} = 49{,}7^\circ$.
Für $m = -1$ folgt
$\sin\alpha_{-1} = -\frac{\lambda}{g} + \sin\beta$ oder $\alpha_{-1} = -24{,}5^\circ$.

Ü 6.4-15:

a) Nach (6.122) beträgt der Beugungswinkel

$$\alpha_{-1} = \arcsin\left(-\frac{\lambda}{g} + \sin\beta\right) = 28{,}8^\circ\,.$$

Für $m = +1$ gibt es keine Lösung.

b) Der Blaze-Winkel muss nach (6.124) folgendermaßen gewählt werden:

$$\delta = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 10{,}6^\circ\,.$$

Ü 6.4-16:

a) Das erforderliche Auflösungsvermögen des Gitters ist

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{589}{589{,}5930 - 588{,}9963} = 987\,.$$

Nach (6.125) ist das Auflösungsvermögen eines Gitters in der ersten Ordnung

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = p;\,.$$

Die notwendige Strichzahl des Gitters ist damit $p \geq 987$.
Bei 50 Strichen pro mm ist die erforderliche Breite des Gitters $s \geq 20\,\text{mm}$.

b) In der dritten Ordnung wird das Auflösungsvermögen drei mal größer:

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = 3p \approx 3\,000\,.$$

Ü 6.4-17: Das erforderliche Auflösungsvermögen des Gitters ist nach Ü 6.4-16

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = 987 \,.$$

Aus (6.127) folgt die Basisbreite des Prismas:

$$B \geq \frac{\lambda/\mathrm{d}\lambda}{|\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda|} = 11{,}6\ \mathrm{mm} \,.$$

Ü 6.4-18:

a) Die Laue-Gleichungen (6.129) bestimmen die Winkel, unter denen Interferenzmaxima auftreten. Für einen Röntgenstrahl in z-Richtung ist
$\alpha_0 = \beta_0 = 90°$ und $\gamma_0 = 0$.
Mit $a = b = c$ und $h = k = 1$ sowie $l = -1$ werden die Laue-Gleichungen

$$a\cos\alpha = \lambda \qquad (1)$$

$$a\cos\beta = \lambda \qquad (2)$$

$$a(\cos\gamma - 1) = -\lambda \,. \qquad (3)$$

Für die Richtungskosinusse muss gelten:

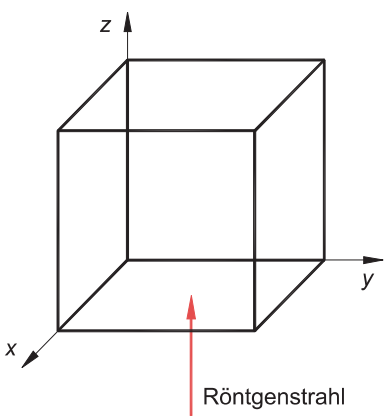
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \,. \qquad (4)$$

Setzt man (1) bis (3) in (4) ein, so folgt

$$\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)^2 = 1 \,.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2}{3}a = 0{,}2\ \mathrm{nm} \,.$$



b) Die Winkel α, β und γ folgen aus (1) bis (3):
$\alpha = 48{,}2°$, $\beta = 48{,}2°$ und $\gamma = 70{,}5°$.

Ü 6.4-19: Röntgenreflexe werden beobachtet, wenn die Bragg-Bedingung, (6.130) erfüllt ist:

$$2d\sin\Theta = m\lambda \,.$$

Damit gilt

$$\Theta = \arcsin\left(m\frac{\lambda}{2d}\right) \,.$$

Die ersten drei Glanzwinkel betragen:

$$\Theta_1 = 7{,}28°, \ \Theta_2 = 14{,}69° \quad \text{und} \quad \Theta_3 = 22{,}36° \,.$$

Ü 6.4-20:

a) Nach Abb. 6.106 ist der Winkel zwischen dem Primärstrahl und dem gebeugten Strahl doppelt so groß wie der Glanzwinkel Θ, der die Bragg-Bedingung (6.130) erfüllt:

$$2\Theta = 2\arcsin\left(m\frac{\lambda}{2d}\right) \,.$$

Die ersten beiden Winkel betragen:
$2\Theta_1 = 31{,}92°$ und $2\Theta_2 = 66{,}73°$.

b) Das Argument der arcsin-Funktion muss stets kleiner oder gleich 1 sein:

$$m\frac{\lambda}{2d} \leq 1 \,.$$

Daraus folgt für die Ordnungszahl:

$$m \leq \frac{2d}{\lambda} = 3{,}6 \,.$$

Die größte mögliche Ordnungszahl ist damit $m = 3$.
Die zugehörigen Winkel betragen $\Theta_3 = 55{,}59°$ und $2\Theta_3 = 111{,}18°$.

Ü 6.4-21: Die Kreise entstehen durch den Schnitt der Kugelwellen mit den ebenen Wellen. Liegt auf der Symmetrieachse in der Filmebene konstruktive Interferenz vor, dann ist der Radius des ersten Rings nach Pythagoras

$$r_1 = \sqrt{(s + 1 \cdot \lambda)^2 - s^2} \, .$$

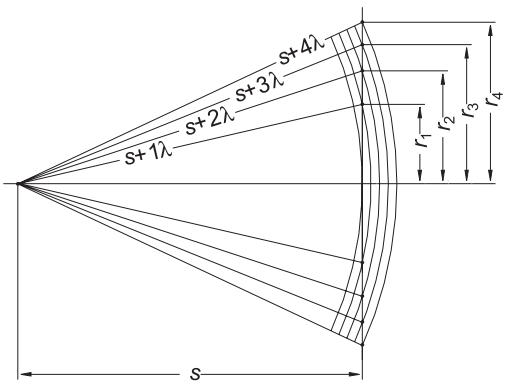
Für den k-ten Ring gilt

$$r_k = \sqrt{(s + k\lambda)^2 - s^2} = \sqrt{2ks\lambda + k^2\lambda^2} \, .$$

Da $s \gg \lambda$, gilt in guter Näherung

$$r_k \approx \sqrt{2ks\lambda} = 0{,}796 \text{ mm} \cdot \sqrt{k} \, .$$

Die ersten vier Radien sind
$r_0 = 0$, $r_1 = 0{,}796$ mm, $r_2 = 1{,}13$ mm, $r_3 = 1{,}38$ mm, $r_4 = 1{,}59$ mm, usw.



Ü 6.4-22: Die Gangunterschiede benachbarter Wellen müssen eine Wellenlänge sein. Nach Pythagoras gilt für die k-te Welle:

$$r_k^2 + f'^2 = (f' + k\lambda')^2 \, .$$

Daraus folgt für die Brennweite der Zonenlinse

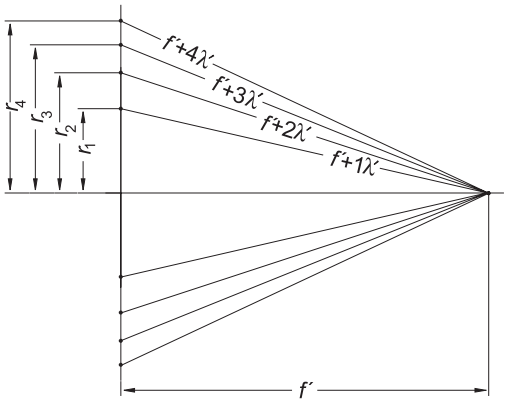
$$f' = \frac{r_k^2 - k^2\lambda'^2}{2k\lambda'} \approx \frac{r_k^2}{2k\lambda'} \, .$$

Nun gilt nach Ü 6.4-21

$$r_k^2 = 2ks\lambda$$

und damit

$$f' = s\frac{\lambda}{\lambda'} = 48{,}9 \text{ cm} \, .$$



Ü 6.4-23: Nach dem Gesetz von Malus (6.131), ist die Intensität hinter einem Polarisator $I = I_0 \cos^2\varphi$, wenn φ der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung des Lichts und der Durchlassrichtung des Polarisators ist. Nun besitzt natürliches Licht keine Vorzugsrichtung sondern besteht aus Wellenzügen mit statistisch regellos wechselnden Schwingungsrichtungen. Man muss daher über alle möglichen Winkel φ mitteln:

$$I = I_0\overline{\cos^2\varphi} = I_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}I_0 \, .$$

Ü 6.4-24: Hinter dem ersten Polarisator beträgt die Intensität nach den Ausführungen von Ü 6.4-23

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0 \, .$$

Nach dem Gesetz von Malus, (6.131), ist die Intensität hinter dem zweiten Polarisator

$$I_2 = I_1\cos^2 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}I_0$$

und hinter dem dritten Polarisator

$$I_3 = I_2\cos^2 30° = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 I_0 = \frac{9}{32}I_0$$
$$= 0{,}281 \, I_0 \, .$$

Ü 6.4-25: Nach Tab. 6.13 ist der Gangunterschied der beiden Teilstrahlen beim Kerr-Effekt

$$\Delta = \lambda l K E^2$$

mit der Kerr-Konstanten
$K = 2{,}48 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m/V^2}$.
Wenn der Gangunterschied eine halbe Wellenlänge sein soll, gilt

$$E = \frac{1}{\sqrt{2lK}} = 2{,}25 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ .$$

Ü 6.4-26: Nach Tab. 6.13 gilt für den Gangunterschied der beiden Teilstrahlen beim Pockels-Effekt

$$\Delta = l\, n_0^3\, r_{63}\, E\ .$$

Die Feldstärke ist bei longitudinal anliegender Spannung $E = \frac{U}{l}$. Damit wird der Gangunterschied

$$\Delta = n_0^3\, r_{63}\, U\ ,$$

unabhängig von der Länge.
Die Halbwellenspannung ist

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2 n_0^3\, r_{63}} = 3{,}64\ \mathrm{kV}\ .$$

Ü 6.4-27: Setzt man die Messwerte des Drehvermögens in °/mm und die Wellenlängen in nm in die Gleichung

$$[\alpha] = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4}$$

ein, dann ergeben sich die beiden Gleichungen

$$17{,}314 = \frac{A}{656{,}3^2} + \frac{B}{656{,}3^4} \qquad (1)$$

$$32{,}766 = \frac{A}{486{,}1^2} + \frac{B}{486{,}1^4}\ . \qquad (2)$$

Nach den Regeln der linearen Algebra folgen daraus die beiden Konstanten

$$A = 7{,}1116 \cdot 10^6\ \frac{^\circ}{\mathrm{mm}} \cdot (\mathrm{nm})^2\ ,$$

$$B = 1{,}4904 \cdot 10^{11}\ \frac{^\circ}{\mathrm{mm}} \cdot (\mathrm{nm})^4\ .$$

Für die Wellenlänge $\lambda = 589{,}3\ \mathrm{nm}$ wird das Drehvermögen
$[\alpha] = 21{,}714\ ^\circ/\mathrm{mm}$.

Ü 6.5-1:

a) Die Energie der auftreffenden Photonen ist nach (6.136) bis (6.138)

$$E_{\mathrm{ph}} = hf = \frac{1{,}24\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{eV}}{\lambda} = 4{,}89\ \mathrm{eV}\ .$$

Von dieser Energie wird die Austrittsarbeit $W_\mathrm{A} = 2{,}14\ \mathrm{eV}$ benötigt, um die Elektronen auszulösen. Der verbleibende Rest steht als kinetische Energie zur Verfügung:

$$E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{ph}} - W_\mathrm{A} = 2{,}75\ \mathrm{eV}\ .$$

b) Die Geschwindigkeit der Elektronen folgt aus

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{zu}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{kin}}}{m}} = 9{,}83 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

Ü 6.5-2: Die Leistung ist das Produkt aus der Energie eines Photons und der Zahl der Photonen, die je Zeiteinheit ausgesandt werden:

$$\Phi_\mathrm{e} = E_{\mathrm{ph}} \dot{N}\ .$$

Daraus ergibt sich

$$\dot{N} = \frac{\Phi_\mathrm{e}}{E_{\mathrm{ph}}} = \frac{\Phi_\mathrm{e} \lambda}{h c} = 3{,}26 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s^{-1}}\ .$$

Ü 6.5-3: Beim Compton-Effekt ist nach (6.140) die maximale Änderung der Röntgen-Wellenlänge für $\vartheta = 180^\circ$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0 c} = 2\lambda_\mathrm{C} = 4{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}\ .$$

Damit ist die Wellenlänge der gestreuten Röntgenstrahlung

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 75{,}79 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}\ .$$

Die Energie der ankommenden Quanten beträgt

$$E_{\mathrm{ph}} = \frac{h\,c}{\lambda}\ ,$$

die der gestreuten Quanten

$$E'_{\mathrm{ph}} = \frac{h\,c}{\lambda'}\ .$$

Damit wird der Energieverlust

$$\Delta E = E_{\mathrm{ph}} - E'_{\mathrm{ph}} = h\,c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$
$$= 1{,}79 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J} = 1{,}119\ \mathrm{keV}\ .$$

Der relative Energieverlust ist

$$\frac{\Delta E}{E_{\mathrm{ph}}} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} = 6{,}4\%\ .$$

Ü 6.5-4: Die Photonenenergie beträgt nach (6.36) bzw. (6.37)

$$E_{\mathrm{ph}} = \frac{1{,}24\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{eV}}{\lambda}\ .$$

Für die Wellenlängen des sichtbaren Lichts $380\ \mathrm{nm} \leq \lambda \leq 780\ \mathrm{nm}$ (Abschn. 6.1) ergeben sich die Energien $3{,}26\ \mathrm{eV} \geq E_{\mathrm{ph}} \geq 1{,}59\ \mathrm{eV}$.

Ü 6.5-5: Wie bei Ü 6.5-2 erläutert, ist die Leistung eines monochromatischen Lichtstrahls

$$\Phi_{\mathrm{e}} = E_{\mathrm{ph}}\dot{N} = \frac{h\,c}{\lambda}N\ .$$

Daraus folgt für den Photonenstrom

$$\dot{N} = \frac{\Phi_{\mathrm{e}}\lambda}{h\,c} \approx 5\ \mathrm{s}^{-1}\ .$$

Ü 6.5-6: Nach (6.147) ist der Taillendurchmesser bei einem Gauß'schen Strahl

$$d = \frac{4\lambda f'}{\pi D} = 6{,}045 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}\ .$$

Die mittlere Bestrahlungsstärke ist nach (6.83)

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{\Phi_{\mathrm{e}}}{A} = \frac{4\Phi_{\mathrm{e}}}{\pi d^2} = 2{,}09 \cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 20{,}9\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}\ .$$

Ü 6.5-7: Die Wellenlänge der Materiewelle ist nach (6.148)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} = 1{,}66 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{m}\ .$$

Die Größe aller vorkommenden Gegenstände, Spalte, Aperturblenden etc. ist viel größer als diese Wellenlänge. Starke Beugungseffekte beobachtet man aber, wenn Wellenlänge und Dimensionen der beugenden Objekte in derselben Größenordnung liegen.

Ü 6.5-8: Nach (6.148) ist die Materie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p}\ .$$

Mit der kinetischen Energie $E = \frac{1}{2}m\,v^2$ und dem Impuls $p = m\,v$ folgt

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{oder} \quad p = \sqrt{2E\,m}\ .$$

Damit ist die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E\,m}} = 1{,}81 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\ .$$

Diese Wellenlänge entspricht etwa der Gitterkonstante typischer Kristalle. Neutronen können demnach an Kristallgittern gebeugt werden.

7. Akustik

Ü 7.2-1:

a) Bei schallharten Wänden entsteht durch die Überlagerung von einlaufender und reflektierter Welle eine stehende Welle mit Schwingungsknoten an der Wand (Abb. 7.6 und 5.58). Wie bei den stehenden Wellen auf Saiten (Abschn. 5.2.4.2) entstehen Resonanzen bei den Frequenzen
$f_n = (n + 1)f_0$ mit der Grundfrequenz $f_0 = \frac{c}{2L}$.
Setzt man $n+1 = m$, wobei $m = 1, 2, 3, \ldots$, dann gilt

$$f_m = m\frac{c}{2L} .$$

Für die drei Raumrichtungen ergeben sich folgende Resonanzfrequenzen:

m	$f_{\mathrm{L},m}$/Hz	$f_{\mathrm{B},m}$/Hz	$f_{\mathrm{H},m}$/Hz
1	17	21,25	28,3
2	34	42,5	56,7
3	51	63,75	85
4	68	85	113,3
5	85	106,3	141,7

Nun gibt es aber auch Resonanzen von stehenden Wellen, die sich schräg zu den Hauptachsen des Quaders ausbreiten, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f_{\mathrm{res}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{m_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{m_H}{H}\right)^2}$$

mit $m_L, m_B, m_H = 0, 1, 2, \ldots$, wobei mindestens ein $m \neq 0$ sein muss.
Zusätzlich zu den oben angegebenen Resonanzfrequenzen ergeben sich:
$f_{110} = 27{,}2$ Hz, $f_{101} = 33{,}0$ Hz, $f_{011} = 35{,}4$ Hz, $f_{111} = 39{,}3$ Hz usw.

b) Das Oktavband mit der Mittenfrequenz $f_{\mathrm{m}} = 63$ Hz erstreckt sich von $f_{\mathrm{u}} = 44$ Hz bis $f_{\mathrm{o}} = 88$ Hz (Tab. 7.4). In diesem Band liegen die Frequenzen, die in obiger Tabelle grau unterlegt sind.

c) Nach (7.11) ist die Schallgeschwindigkeit in Gasen

$$c = \sqrt{\varkappa R_{\mathrm{i}} T} = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}} .$$

Helium hat am Normzustand die Dichte $\varrho_{\mathrm{n}} = 0{,}17847\ \mathrm{kg/m^3}$ (Tab. 3.6). Mit dem Isentropenexponenten $\varkappa = 5/3$ ergibt sich $c_{\mathrm{He}} = 973$ m/s.
Für Luft am Normzustand gilt nach Tab. 7.1: $c_{\mathrm{Luft}} = 331$ m/s. Damit sind die Grundfrequenzen in den drei Hauptrichtungen des Quaders für die beiden Gase:

	$L = 10$ m	$B = 8$ m	$H = 6$ m
$f_{1,\mathrm{Luft}}$/Hz	16,55	20,69	27,58
$f_{1,\mathrm{He}}$/Hz	48,65	60,81	81,08

Die Resonanzfrequenzen in Helium sind wegen der höheren Schallgeschwindigkeit näherungsweise um den Faktor 3 höher als in Luft.

Ü 7.2-2:

a) Die Pegel der Teiltöne betragen $L_1 = 90$ dB, $L_2 = 87{,}5$ dB, $L_3 = 85$ dB, … $L_{10} = 67{,}5$ dB. Der Gesamtschallpegel wird nach (7.30)

$$L_{\mathrm{ges}} = 10\,\lg\left(\sum_{n=1}^{10} 10^{\frac{L_n}{10\ \mathrm{dB}}}\right)\mathrm{dB} = 93{,}6\ \mathrm{dB} .$$

b) Die Frequenzen der Teiltöne sind $f_1 = 200$ Hz, $f_2 = 400$ Hz, $f_3 = 600$ Hz, … $f_{10} = 2\,000$ Hz. Davon befinden sich in den angegebenen Oktavbändern die folgenden Frequenzen f_n. Die Pegel in den einzelnen Oktavbändern werden wie in Teilaufgabe a) berechnet.

c) Der Gesamtpegel des ersten Klangs ist $L_{\mathrm{ges},1} = 93{,}6$ dB. Zusammen mit dem

f_m/Hz	f_u/Hz	f_o/Hz	f_n/Hz	L_{Oktav}/dB
125	88	177	–	0
250	177	355	200	90
500	355	710	400, 600	89,4
1 000	710	1 420	800, 1 000, 1 200, 1 400	85,6
2 000	1 420	2 800	1 600, 1 800, 2 000	75,2

Zusatzgeräusch mit dem Pegel L_2 ergibt sich der Gesamtpegel 95 dB. Dann gilt mit (7.30):

$$95\,\text{dB} = 10\,\lg\left(10^{\frac{L_{\text{ges},1}}{10\,\text{dB}}} + 10^{\frac{L_2}{10\,\text{dB}}}\right)\text{dB}\,.$$

Daraus folgt

$$L_2 = 10\,\lg\left(10^{9{,}5} - 10^{\frac{L_{\text{ges},1}}{10\,\text{dB}}}\right)\text{dB}$$
$$= 10\,\lg\left(10^{9{,}5} - 10^{9{,}36}\right)\text{dB} = 89{,}5\,\text{dB}\,.$$

Ü 7.2-3:

a) Die akustische Leistung des Lautsprechers ist $P_{\text{Schall}} = \eta \cdot P = 5$ W. Diese Leistung verteilt sich im Raum gleichmäßig auf Kugeloberflächen, so dass nach (7.25) in Abb. 7.3 gilt:

$$I(r) = \frac{P_{\text{Schall}}}{4\pi\, r^2}\,.$$

In $r = 10$ m Abstand ergibt sich $I_{10\,\text{m}} = 3{,}98 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
Der zugehörige Pegel ist nach Tab. 7.2:

$$L_{10\,\text{m}} = 10\,\lg\frac{I_{10\,\text{m}}}{I_0}\text{dB} = 96\,\text{dB}\,.$$

b) Vor einer schallharten Wand strahlt der Lautsprecher nur in Vorwärtsrichtung ab, d. h. in eine Halbkugel. Damit gilt

$$I(r) = \frac{P_{\text{Schall}}}{2\pi\, r^2}\,.$$

Jetzt ergibt sich für die Intensität $I'_{10\,\text{m}} = 7{,}96 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 2I_{10\,\text{m}}$ und für den Pegel $L'_{10\,\text{m}} = L_{10\,\text{m}} + 3\,\text{dB} = 99\,\text{dB}$.

c) Da die Intensität proportional zu $1/r^2$ abnimmt, ist sie in doppeltem Abstand, also in 20 m Entfernung, auf ein Viertel zurückgegangen. Der Pegel hat dann um $10 \cdot \lg 4 = 6$ dB abgenommen auf $L_{20\,\text{m}} = 90$ dB (Abb. 7.3).

Ü 7.2-4:

a) Die Schnellenamplitude $\hat{v}$ und die Amplitude $\hat{p}$ des Schallwechseldrucks sind nach (7.14) und (7.15) über die Wellenkennimpedanz Z verknüpft:

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{Z} \quad \text{mit} \quad Z = \varrho\, c\,.$$

Nach Tab. 7.1 ist $Z = 416\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$ und damit $\hat{v} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Der Effektivwert ist bei sinusförmigen Größen der $\sqrt{2}$-te Teil des Scheitelwerts:

$$v_{\text{eff}} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} = 3{,}4 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

c) Die Schallintensität beträgt nach (7.22)

$$I = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z} = v_{\text{eff}}^2\, Z = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\,.$$

Der Pegel ist gemäß Tab. 7.2

$$L_I = 10\,\lg\frac{I}{I_0}\text{dB} = 76{,}8\,\text{dB}\,.$$

d) Gemäß Abb. 7.5 kommt es an der Grenzfläche zu einer Reflexion, so dass die Intensität I_t der transmittierten Welle kleiner ist, als die der einfallenden I_e. Nach (7.31)

sowie (7.36) bzw. (7.37) gilt für den Transmissionsgrad

$$\tau_S = 1 - \varrho_S = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} .$$

Der Wellenwiderstand von Argon ist $Z_2 = c_{Ar}\varrho_{Ar}$.
Nach (7.11) ist die Schallgeschwindigkeit proportional zur Wurzel aus der absoluten Temperatur. Damit ist

$$c_{Ar,20} = c_{Ar,0}\sqrt{\frac{293{,}15}{273{,}15}} = 319\,\frac{m}{s} .$$

Aus der Zustandsgleichung idealer Gase (3.19), lässt sich die Dichte eines Gases berechnen, wenn die Dichte am Normzustand bekannt ist:

$$\varrho(T) = \frac{m}{V} = \frac{p_n}{R_i\,T} = \varrho_n\frac{T_n}{T} .$$

Für Argon bei 20 °C ergibt sich $\varrho_{Ar,20} = 1{,}662\,\frac{kg}{m^3}$.
Damit ist der Wellenwiderstand von Argon bei 20 °C und Normdruck $Z_2 = 530\,\frac{kg}{m^2 s}$.
Die Intensität der Welle, die in Argon eindringt, wird damit

$$I_{Ar} = I_{Luft}\cdot\tau_S = 4{,}73\cdot 10^{-5}\,\frac{W}{m^2} .$$

Der Schallpegel ändert sich somit nur geringfügig auf

$$L_{Ar} = 10\,\lg\frac{I_{Ar}}{I_0}\,dB = 76{,}7\,dB .$$

Ü 7.2-5:

a) Die Schallintensität einer Punktquelle ist nach (7.25)

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} .$$

Damit ist der Pegel in Abhängigkeit vom Abstand

$$L(r) = 10\,\lg\frac{P}{4\pi r^2 I_0}\,dB .$$

Für die Pegeldifferenz zweier Orte mit den Radien r_0 und r_i folgt

$$L(r_i) - L(r_0) = 10\left(\lg r_0^2 - \lg r_i^2\right)dB = 20\,\lg\tfrac{r_0}{r_i}\,dB$$ (s. (7.27) in Abb. 7.3).
Mit $r_0 = 2$ m ergeben sich damit am Wohnhaus folgende drei Pegel:

$$L_{1,Haus} = L_{1,2\,m} + 20\,\lg\frac{2\,m}{160\,m}\,dB$$
$$= 93\,dB - 38{,}06\,dB = 54{,}94\,dB ,$$
$$L_{2,Haus} = L_{2,2\,m} + 20\,\lg\frac{2\,m}{100\,m}\,dB$$
$$= 97\,dB - 33{,}98\,dB = 63{,}02\,dB$$

und

$$L_{3,Haus} = L_{3,2\,m} + 20\,\lg\frac{2\,m}{252\,m}\,dB$$
$$= 98\,dB - 42{,}01\,dB = 55{,}99\,dB .$$

b) Die drei Einzelpegel werden nach (7.30) zu einem Gesamt-Pegel addiert:

$$L_{ges} = 10\,\lg\left(\sum_{n=1}^{3} 10^{\frac{L_n}{10\,dB}}\right)dB$$
$$= 10\,\lg\left(10^{5{,}494} + 10^{6{,}302} + 10^{5{,}599}\right)dB$$
$$= 64{,}3\,dB .$$

c) Die dominierende Schallquelle ist die Quelle 2. Also sollte ihr Beitrag reduziert werden. Wenn der Gesamtpegel am Haus $L'_{ges} = 60$ dB betragen soll, dann gilt

$$L'_{ges} = 60\,dB$$
$$= 10\,\lg\left(10^{5{,}494} + 10^{\frac{L'_{2,Haus}}{10\,dB}} + 10^{5{,}599}\right)dB .$$

Nach kurzer Umformung folgt der erforderliche Pegel von Quelle 2 am Haus:

$$L'_{2,Haus} = 10\,\lg\left(10^6 - 10^{5{,}494} - 10^{5{,}599}\right)dB$$
$$= 54{,}64\,dB .$$

In 2 m Abstand von der Quelle wird der erforderliche Pegel

$$L'_{2,2\,m} = L'_{2,Haus} - 20\,\lg\frac{2\,m}{100\,m}\,dB$$
$$= 88{,}6\,dB .$$

Der Pegel der Quelle 2 muss also um $\Delta L_2 = -8{,}4$ dB gesenkt werden.

Ü 7.2-6:

a) Unter der Annahme einer biegeweichen Wand gilt für das Schalldämmmaß (7.51):

$$R = 20 \lg \frac{\pi f m'}{Z} \text{dB} - 3 \text{ dB} .$$

Die flächenbezogene Masse der Wand ergibt sich aus der Dicke s und der Dichte ϱ zu

$$m' = \frac{m}{A} = s\varrho = 25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} .$$

Mit $Z = 416 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Tab. 7.1) folgt $R_{250 \text{ Hz}} = 30{,}5$ dB und $R_{1\,000 \text{ Hz}} = 42{,}5$ dB. Da die Frequenzen sich wie 4:1 verhalten, ist $R_{1\,000 \text{ Hz}}$ um $20 \lg 4$ dB $= 12$ dB höher als $R_{250 \text{ Hz}}$.

b) Die Grenzfrequenz der Spuranpassung ist nach (7.55)

$$f_g = \frac{c_L^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m'}{B}} .$$

Mit der Biegesteifigkeit

$$B = \frac{E s^3}{12(1 - \mu^2)} = 6\,522 \text{ N m}$$

und der Schallgeschwindigkeit $c_L = 344$ m/s (Tab. 7.1) ergibt sich $f_g = 1\,166$ Hz.

c) Wenn die Frequenz der Welle klein ist gegen f_g, dann liefert (7.51) einen vernünftigen Wert für das Schalldämmaß. Für die Frequenz $f = 250$ Hz gilt also $R_{\text{Messung}} \approx R_{\text{Rechnung}} = 30{,}5$ dB.
Für die hohe Frequenz $f = 1\,000$ Hz, die in der Größenordnung der Grenzfrequenz liegt, gilt $R_{\text{Messung}} < R_{\text{Rechnung}}$.

Ü 7.3-1:

a) Der Gesamtpegel wird nach (7.30) berechnet:

$$L_{\text{ges}} = 10 \cdot \lg \left(\sum_{i=1}^{8} 10^{L_i/10 \text{ dB}} \right) \text{dB}$$
$$= 62{,}1 \text{ dB} .$$

b) Zur Berechnung des A-bewerteten Pegels müssen die Bewertungsfaktoren Δ_i^* zur Pegelabschwächung berücksichtigt werden:

i	f_m/Hz	L_i/dB	Δ_i^*/dB	$\frac{L_i+\Delta_i^*}{10 \text{ dB}}$
1	16	43	−56,7	−1,37
2	31,5	48	−39,4	0,86
3	63	49	−26,2	2,28
4	125	60	−16,1	4,39
5	250	52	− 8,6	4,34
6	500	53	− 3,2	4,98
7	1 000	50	0	5,00
8	2 000	38	+1,2	3,92

Mit $\sum 10^{\frac{L_i+\Delta_i^*}{10 \text{ dB}}} = 250\,439$ wird der A-bewertete Pegel nach (7.60): $L_A = 54$ dB(A).

c) Mit Maschinenschaden ist der Pegel bei $f_m = 250$ Hz

$$L_{250} + \Delta_{250}^* = 80 \text{ dB} - 8{,}6 \text{ dB} = 71{,}4 \text{ dB} .$$

Damit wird der gewichtete Pegel während der zwei lauten Stunden: $L_{A,2\,\text{h}} = 71{,}5$ dB(A).
Der äquivalente Dauerschallpegel während 10 h Mittelungszeit wird nach (7.61):

$$L_m = 10 \cdot \lg \left[\frac{1}{10 \text{ h}} \left(2 \text{ h} \cdot 10^{7{,}15} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \ 8 \text{ h} \cdot 10^{5{,}4} \right) \right] \text{dB(A)} = 64{,}8 \text{ dB(A)} .$$

Ü 7.3-2:

a) Aus dem Diagramm der Isophonen von Abb. 7.12 liest man ab: $f \approx 32$ Hz.

b) Die Lautstärke beträgt $L_S = 70$ phon.

c) Die Lautheit ist nach (7.59)

$$S = 2^{0{,}1(70-40)} \text{sone} = 8 \text{ sone} .$$

d) Wenn der Hörer den Ton doppelt so laut empfindet, ist die Lautheit doppelt so groß, also $S' = 2S = 16$ sone.
Die zugehörige Lautstärke beträgt

$$L'_S = 10\left(\frac{\lg 16}{\lg 2} + 4\right)\text{ phon} = 80\text{ phon}\,.$$

Eine Erhöhung der Lautstärke um 10 phon bzw. des Pegels um 10 dB führt zu einer Verdoppelung der Schallempfindung.

Ü 7.4-1:

a) Die äquivalente Absorptionsfläche ist für den leeren Raum nach (7.66)

$$A_{\text{leer}} = \alpha_W S_W + \alpha_B S_B + \alpha_D S_D = 82{,}45\text{ m}^2\,.$$

Die Nachhallzeit beträgt nach der Sabine'schen Formel, (7.71):

$$T_{\text{leer}} = \frac{0{,}163}{\text{m/s}}\frac{V}{A} = 5{,}19\text{ s}\,.$$

Wenn 300 Personen anwesend sind, tragen diese noch zusätzlich 150 m^2 zur Absorptionsfläche bei. Damit beträgt die äquivalente Absorptionsfläche des vollen Raums $A_{\text{voll}} = 232{,}45\text{ m}^2$ und die Nachhallzeit $T_{\text{voll}} = 1{,}84$ s.

b) Wenn die optimale Nachhallzeit erreicht werden soll, muss die äquivalente Absorptionsfläche erhöht werden auf

$$A_{\text{opt}} = \frac{0{,}163}{\text{m/s}}\frac{V}{T_{\text{opt}}} = 285{,}25\text{ m}^2\,.$$

Dies ist ein Anstieg um $\Delta A = A_{\text{opt}} - A_{\text{voll}} = 52{,}8\text{ m}^2$.

Die zusätzliche Absorptionsfläche wird dadurch erzeugt, dass ein Teil der Decke mit Absorbermaterial abgedeckt wird. Damit gilt:

$$A_{\text{D, vorher}} = \alpha_D S_D\,,$$
$$A_{\text{D, nachher}} = \alpha_{\text{Abs}} S_{\text{Abs}} + \alpha_D(S_D - S_{\text{Abs}}) = A_{\text{D, vorher}} + \Delta A\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für den Deckenanteil, der mit Absorbermaterial versehen werden muss,

$$S_{\text{Abs}} = \frac{\Delta A}{\alpha_{\text{Abs}} - \alpha_D} = 81{,}23\text{ m}^2\,.$$

Ü 7.4-2:

a) Die äquivalente Absorptionsfläche des Raums ist nach der Sabine'schen Formel, (7.71)

$$A = \frac{0{,}163}{\text{m/s}}\frac{V}{T} = 18{,}3\text{ m}^2\,.$$

Nun ist nach (7.76) das Schalldämmmaß

$$R = L_1 - L_2 + 10\lg\frac{S}{A}\text{dB} = 28\text{ dB}\,.$$

b) Der Pegel L'_2 im Innenraum folgt wieder aus (7.76), jetzt allerdings unter der Maßgabe, dass die Dämmung des offenen Fensters null ist:

$$L'_2 = L_1 + 10\lg\frac{S}{A}\text{dB}\,.$$

Bei halb geöffnetem Fenster führt dies zum Pegel $L'_{2,\text{halb}} = 62{,}8$ dB.

Bei vollständiger Öffnung ist der Pegel um 3 dB höher: $L'_{2,\text{voll}} = 65{,}8$ dB.

8. Atom- und Kernphysik

Ü 8-1: Nach dem Bohr'schen Atommodell (Abb. 8.5) gilt für die Energie des Elektrons in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl n:

$$E_n = -\frac{e^4 m_0}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -2{,}18\cdot 10^{18}\text{ J}\cdot\frac{1}{n^2} = -13{,}6\text{ eV}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Die Balmer-Serie entsteht durch Übergänge von den Energieniveaus mit $n > 2$ auf das Niveau $n' = 2$. Damit ergeben sich folgende Photonenenergien:

$$E_{\text{ph}} = hf = 13{,}6\text{ eV}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Die ersten Werte der Reihe sind: $E_{\mathrm{ph},3} = 1{,}89\,\mathrm{eV}$, $E_{\mathrm{ph},4} = 2{,}55\,\mathrm{eV}$, $E_{\mathrm{ph},5} = 2{,}86\,\mathrm{eV}$ usw.
Die zugehörigen Wellenlängen berechnen sich nach $\lambda_n = \frac{hc}{E_n}$ mit $hc = 1{,}24\,\mu\mathrm{m\,eV}$.
$\lambda_3 = 656\,\mathrm{nm}$ (H_α), $\lambda_4 = 486\,\mathrm{nm}$ (H_β), $\lambda_5 = 434\,\mathrm{nm}$ (H_γ) usw. Die kürzeste noch sichtbare (oder eben nicht mehr sichtbare) Spektrallinie ist $\lambda_{10} = 380\,\mathrm{nm}$.

Ü 8-2:

a) Nach Bohr ist die Energie elektronischer Energieniveaus

$$E_n = -\frac{Z^2\,e^4\,m_0}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0^2\,\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} \quad (8.3)\ .$$

Für Kupfer mit $Z = 29$ ergibt sich für die K-Schale: $E_1 = -29^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV} = -11{,}438\,\mathrm{keV}$ und für die L-Schale: $E_2 = -29^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{4} = -2{,}859\,\mathrm{keV}$.
Also ist die Quantenenergie der Röntgen-K-Strahlung $E_\mathrm{K} = E_2 - E_1 = 8{,}579\,\mathrm{keV}$.
Die zugehörige Wellenlänge beträgt $\lambda = \frac{hc}{E_\mathrm{K}} = 145\,\mathrm{pm}$.

b) Nach Tab. 8.3 ist die frei werdende Energie bei einem Übergang von $\mathrm{L_{III}}$ nach K $E_{\mathrm{K}\alpha 1} = 8{,}048\,\mathrm{keV}$. Die Wellenlänge ist $\lambda = 154\,\mathrm{pm}$.

Ü 8-3: Die Aktivität von $m = 80\,\mathrm{g}$ Kohlenstoff einer lebenden Substanz beträgt $A_0 = 0{,}25\,\frac{\mathrm{Bq}}{\mathrm{g}} \cdot m = 20\,\mathrm{Bq}$.
Aus (8.85) ergibt sich für das Alter

$$t = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)\,T}{\ln 2} = 9\,400\,\mathrm{a}\ .$$

Ü 8-4:

a) Der Si-Kristall hat das Volumen $V = \frac{m}{\varrho} = 429\,\mathrm{cm}^{-3}$. Die Zahl der gewünschten Phosphoratome und der damit benötigten ^{31}Si-Kerne ist $N_0 = V\,n_\mathrm{P} = 4{,}29 \cdot 10^{19}$.

b) Die Aktivität zu Beginn ist $A_0 = \frac{\ln 2}{T}\,N_0 = 3{,}18 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Bq}$.

c) Aus (8.85) folgt für die Wartezeit $t = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)\,T}{\ln 2} = 154\,\mathrm{h} = 5{,}6\,\mathrm{d}$.

9. Festkörperphysik

Ü 9.2-1: Wenn jedes Fe-Atom ein freies Elektron liefert, dann ist die Dichte der Leitungsbandelektronen so groß wie die Atomdichte. Für die Massendichte gilt

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{\nu\,M}{V}\ ,$$

ν ist die Stoffmenge, M die Molmasse.
Nun gilt für die Stoffmenge
$\nu = \frac{N}{N_\mathrm{A}}$, mit der Avogadro-Konstanten N_A und der Teilchenzahl N.
Damit wird die Teilchenzahldichte

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_\mathrm{A}\,\varrho}{M} = 8{,}465 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3} = 8{,}465 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}\ .$$

Nach (9.10) beträgt die Fermi-Energie

$$E_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2\,n)^{2/3}\ .$$

Mit $\hbar$ und m (Elektronenmasse) aus Tab. 1.4 ergibt sich

$$E_\mathrm{F} = 1{,}13 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 7{,}03\,\mathrm{eV}\ .$$

Ü 9.2-2: Die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Energieniveaus E mit Elektronen ist nach (9.13)

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_\mathrm{F}}{kT}\right)}\ .$$

Für die Energie $E_1 = 3{,}05\,\mathrm{eV}$, dicht unter der Fermi-Energie, ergibt sich bei den beiden Temperaturen $f(E_1, T_1) = 0{,}874$ und $f(E_1, T_2) = 0{,}725$.

Für die Energie $E_2 = 3{,}15$ eV, dicht oberhalb der Fermi-Energie, folgt $f(E_2, T_1) = 0{,}126$ und $f(E_2, T_2) = 0{,}275$.

Ü 9.2-3: Der Beitrag der Elektronen zur molaren Wärmekapazität ist nach (9.16) und (9.15)

$$C_{\mathrm{m,el}} = \frac{1}{2}\pi^2 R_{\mathrm{m}} \frac{T}{T_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{2}\pi^2 R_{\mathrm{m}} \frac{kT}{E_{\mathrm{F}}} .$$

Mit $E_{\mathrm{F}} = 3{,}1$ eV nach Tab. 9.5 ergibt sich

$$C_{\mathrm{m,el}} = 0{,}334 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}} .$$

Das sind 1,2% der gesamten molaren Wärmekapazität.

Ü 9.2-4: Die mittlere freie Weglänge der Elektronen in Metallen ist nach (9.25)

$$l = v_{\mathrm{F}}\, \tau .$$

Die Fermi-Geschwindigkeit ist nach (9.11)

$$v_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2 n)^{1/3} .$$

Mit der Elektronendichte $n = N/V = 8{,}465 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$ aus Ü 9.2-1 ergibt sich $v_{\mathrm{F}} = 1{,}57 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Relaxationszeit ist nach (9.24)

$$\tau = \frac{\varkappa m}{e^2 n} = \frac{m}{e^2 n \varrho} = 4{,}19 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{s} .$$

Damit wird die mittlere freie Weglänge $l = 6{,}59$ nm.

Ü 9.2-5: Die Wahrscheinlichkeit, an der Leitungsbandkante Elektronen zu finden, ist nach (9.13)

$$f(E_{\mathrm{L}}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{\mathrm{L}} - E_{\mathrm{F}}}{kT}\right)} .$$

a) Wenn das Fermi-Niveau in der Mitte der verbotenen Zone liegt, gilt

$$E_{\mathrm{L}} - E_{\mathrm{F}} = \frac{E_{\mathrm{g}}}{2} = 0{,}555\ \mathrm{eV} \quad \text{und}$$
$$f(E_{\mathrm{L}}) = 4{,}75 \cdot 10^{-10} .$$

b) Für den Fall, dass das Fermi-Niveau $\Delta E = 20$ meV unter der Leitungsbandkante liegt, gilt

$$f(E_{\mathrm{L}}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)} = 0{,}316 .$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, an der Valenzbandkante Löcher zu finden, ist

$$f_{\mathrm{h}}(E_{\mathrm{V}}) = 1 - f(E_{\mathrm{V}}) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{\mathrm{V}} - E_{\mathrm{F}}}{kT}\right)} .$$

Mit $E_{\mathrm{V}} - E_{\mathrm{F}} = -(E_{\mathrm{g}} - \Delta E) = -1{,}09$ eV ergibt sich

$$f_{\mathrm{h}}(E_{\mathrm{V}}) = 4{,}88 \cdot 10^{-19} .$$

Ü 9.2-6: Der spezifische Widerstand eines Eigenleiters ist nach (9.28)

$$\varrho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{e\, n_{\mathrm{i}}(\mu_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}})} .$$

Die intrinsische Trägerdichte ist nach (9.30)

$$n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i0}}\, T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{g}}}{2kT}\right) = 3{,}9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm^{-3}} .$$

Die Summe der Beweglichkeiten ist nach Tab. 9.7 bei 300 K

$$\mu = \mu_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}} = 5\,800 \frac{\mathrm{cm^2}}{\mathrm{V\,s}} .$$

Diese hängt nach (9.29) von der Temperatur ab gemäß

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/2} = 2\,050 \frac{\mathrm{cm^2}}{\mathrm{V\,s}} .$$

Damit ergibt sich der spezifische Widerstand bei 600 K:

$$\varrho = 7{,}8 \cdot 10^{-2}\ \Omega\,\mathrm{cm} .$$

Tatsächlich ist das Ergebnis nicht ganz korrekt, weil die Breite der Energielücke E_{g} ebenfalls von der Temperatur abhängt. Bei $T = 600$ K ist $E_{\mathrm{g}}(600\ \mathrm{K}) \approx 0{,}55$ eV.
Damit wird $n_{\mathrm{i}} = 1{,}13 \cdot 10^{17}\ \mathrm{cm^{-3}}$ und $\varrho = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \Omega\,\mathrm{cm}$.

Ü 9.2-7: Bei dotiertem Silicium ist der spezifische Widerstand nach Tab. 9.9

$$\varrho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{e\, n_\mathrm{D}\, \mu_\mathrm{n}} .$$

Daraus ergibt sich die Beweglichkeit der Elektronen zu

$$\mu_\mathrm{n} = \frac{1}{\varrho\, e\, n_\mathrm{D}} .$$

Mit $R = \varrho \frac{l}{A}$ folgt

$$\mu_\mathrm{n} = \frac{l}{e\, n_\mathrm{D}\, RA} = 1\,248\, \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{V\,s}} .$$

Ü 9.2-8: Für die Ladungsträgerkonzentration gilt bei tiefen Temperaturen (Störstellenreserve) nach (6.33)

$$n(T) \sim \exp\left(-\frac{E_\mathrm{D}}{2kT}\right) .$$

Damit ist der Widerstand

$$R(T) \sim \varrho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{e\, n(T)\, \mu_\mathrm{n}} \quad \text{oder}$$

$$R(T) = a \cdot \exp\left(\frac{E_\mathrm{D}}{2kT}\right) ;$$

a ist eine Konstante, E_D die Donatoren-Ionisationsenergie nach Tab. 9.8.

a) Mit

$$R_1 = a \cdot \exp\left(\frac{E_\mathrm{D}}{2kT_1}\right) \quad \text{und}$$

$$R_2 = a \cdot \exp\left(\frac{E_\mathrm{D}}{2kT_2}\right) \quad \text{folgt}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp\left[\frac{E_\mathrm{D}}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \quad \text{und}$$

$$R_2 = 5{,}99\,\mathrm{k\Omega} .$$

b) Der Temperaturkoeffizient des Widerstands ist

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -\frac{E_\mathrm{D}}{2kT^2} a \exp\left(\frac{E_\mathrm{D}}{2kT}\right)$$

$$= -\frac{E_\mathrm{D}}{2kT^2} R(T) .$$

Bei 77 K ergibt sich

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right|_{77\,\mathrm{K}} = -43\, \frac{\Omega}{\mathrm{K}} .$$

Ü 9.2-9:

a) Die Diffusionsspannung beträgt nach (9.36)

$$U_\mathrm{d} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_\mathrm{A}\, n_\mathrm{D}}{n_\mathrm{i}^2} .$$

Die Akzeptorenkonzentration in der p-Zone berechnet sich nach Tab. 9.9:
$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = e\, n_\mathrm{A}\, \mu_\mathrm{p}$ und daraus $n_\mathrm{A} = \frac{1}{\varrho\, e\, \mu_\mathrm{p}} = 6{,}57 \cdot 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3}$.
Damit wird die erforderliche Donatorenkonzentration

$$n_\mathrm{D} = \frac{n_\mathrm{i}^2}{n_\mathrm{A}} \exp\left(\frac{eU_\mathrm{d}}{kT}\right) = 9{,}06 \cdot 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3} .$$

b) Die Masse m der Phosphor-Atome ist

$$m = \nu\, M ,$$

mit der Stoffmenge ν und der Molmasse $M = 30{,}974$ g/mol.
Nun ist die Stoffmenge

$$\nu = \frac{N}{N_\mathrm{A}} ,$$

mit der Avogadro-Konstanten N_A und der Teilchenzahl N.
Daraus folgt für die Masse

$$m = \frac{N\, M}{N_\mathrm{A}} .$$

Dividiert man durch das Probenvolumen, so ergibt sich

$$\frac{m}{V} = \frac{N}{V}\frac{M}{N_\mathrm{A}} = n_\mathrm{D}\frac{M}{N_\mathrm{A}} = 4{,}66\, \frac{\mu\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} .$$

Ü 9.2-10:

a) Die Breite des p,n-Übergangs ist nach (9.37)

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 U_d}{e} \cdot \frac{n_A + n_D}{n_A \cdot n_D}} .$$

Die Diffusionsspannung wird nach (9.36) berechnet:

$$U_d = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2} = 0{,}713 \text{ V} .$$

Mit $\varepsilon_r = 11{,}8$ (Tab. 9.7) ergibt sich $d = 0{,}969$ µm.

b) Wenn eine Sperrspannung U_R anliegt, wird in (9.37) U_d ersetzt durch

$$U_d - U_R = U_d + |U_R| .$$

Damit vergrößert sich die Raumladungszone auf

$$d = 0{,}969 \text{ µm} \sqrt{\frac{U_d + |U_R|}{U_d}} = 3{,}76 \text{ µm} .$$

c) Liegt eine Flussspannung U_F an, so wird die Dicke der Raumladungszone reduziert auf

$$d = 0{,}969 \text{ µm} \sqrt{\frac{U_d - U_F}{U_d}} = 0{,}530 \text{ µm} .$$

Ü 9.3-1:

a) Nach (5.188) oder (9.53) ist die Phasengeschwindigkeit von Longitudinalwellen mit großer Wellenlänge

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} .$$

Damit wird der Elastizitätsmodul

$$E = \varrho c_s^2 = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

b) Die Federkonstante der „Federn", mit denen die Eisenatome gegeneinander schwingen, ist nach (9.52)

$$k_F = a E .$$

Nach Tab. 9.1 ist die Gitterkonstante von Eisen $a = 2{,}87 \cdot 10^{-10}$ m. Damit ergibt sich $k_F = 57{,}4$ N/m.

Ü 9.3-2:

a) Die Energie eines Phonons ist nach (9.43)

$$E_{\text{Phonon}} = hf = \hbar\omega .$$

Daraus folgt für die Frequenz der elastischen Wellen

$$f = \frac{E_{\text{Phonon}}}{h} .$$

Für die TO- und TA-Phononen ergibt sich $f_{TO} = \frac{E_{TO}}{h} = 14{,}1$ THz und $f_{TA} = \frac{E_{TA}}{h} = 4{,}4$ THz.

b) Der Impuls der Phononen ist nach (9.44)

$$p_{\text{Phonon}} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k .$$

Der Betrag des Wellenzahlvektors ist $k = 1{,}64\frac{\pi}{a}$.

Mit der Gitterkonstanten $a = 5{,}43 \cdot 10^{-10}$ m aus Tab. 9.7 ergibt sich $k = 9{,}49 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ und damit $p_{\text{Phonon}} = 1 \cdot 10^{-24}$ N s.

Ü 9.3-3: Für Diamant ist die Debye-Temperatur $T_D = 1\,860$ K (Tab. 9.11). Für $T \ll T_D$ gilt nach (9.63) für die molare Wärmekapazität

$$C_m = \frac{12}{5}\pi^4 R_m \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 = 7{,}61 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} .$$

Mit der Molmasse $M = 12{,}011$ g/mol wird die spezifische Wärmekapazität nach (3.39) und (3.40)

$$c = \frac{C_m}{M} = 633{,}6 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} .$$

Der Literaturwert ist $c_{Lit} = 502 \frac{\text{J}}{\text{kg·K}}$. Die relative Abweichung beträgt $\frac{c - c_{Lit}}{c_{Lit}} = 26\%$.

Ü 9.3-4: Aus (9.68) für die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{1}{3}\varrho c c_s l_{ph}$$

folgt für die mittlere freie Weglänge

$$l_{ph} = \frac{3\lambda}{\varrho c c_s} = 2 \text{ nm} .$$

Ü 9.3-5: Nach dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz, (9.70), gilt

$$\lambda = L\,T\,\varkappa\,,$$

mit der Lorenz'schen Zahl

$$L = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2 = 2{,}45\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{K}^2}\,.$$

Damit wird die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{L\,T}{\varrho} = 449\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}}$$

Ü 9.4-1:

a) Die Temperaturabhängigkeit des Schwellstroms wird durch (9.73) beschrieben:

$$I_{\mathrm{th}} = I_0\,\mathrm{e}^{T/T_0}\,.$$

Aus

$$I_{\mathrm{th},1} = I_0\,\mathrm{e}^{T_1/T_0} \quad \text{und}$$
$$I_{\mathrm{th},2} = I_0\,\mathrm{e}^{T_2/T_0}$$

folgt für die charakteristische Temperatur

$$T_0 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{I_{\mathrm{th},1}}{I_{\mathrm{th},2}}} = 154\,\mathrm{K}\,.$$

b) Die Konstante I_0 beträgt

$$I_0 = \frac{I_{\mathrm{th},1}}{\mathrm{e}^{T_1/T_0}} = 6{,}56\,\mathrm{mA}$$

und damit wird

$$I_{\mathrm{th},20} = 44\,\mathrm{mA}\,.$$

Ü 9.4-2: Die Wellenlängen der Longitudinalmoden sind nach (9.74)

$$\lambda_m = \frac{2\overline{n}L}{m}\,.$$

Durch Ableiten nach der Modenzahl ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_m}{\mathrm{d}m} = -\frac{2\overline{n}L}{m^2}\,.$$

Setzt man $\mathrm{d}m = -1$, dann ist die Wellenlängendifferenz benachbarter Moden

$$\delta\lambda = \frac{2\overline{n}L}{m^2} = \frac{\lambda_m^2}{2\overline{n}L} = 0{,}51\,\mathrm{nm}\,.$$

Ü 9.4-3: Ein Halbleiter ist transparent für Photonen, deren Energie kleiner als die Bandlücke ist, d. h. $E_{\mathrm{ph}} < E_{\mathrm{g}}$.
Mit (6.115) und (6.116) ergibt sich für die Wellenlängen

$$\lambda > \lambda_{\mathrm{g}} = \frac{h\,c}{E_{\mathrm{g}}} = \frac{1{,}24\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{eV}}{E_{\mathrm{g}}} = 6{,}89\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Ü 9.4-4:

a) Die Empfindlichkeit einer Fotodiode ist nach (9.80)

$$S = \frac{e}{h\,c}\lambda\,\eta(\lambda)\,.$$

Daraus folgt für die Quantenausbeute

$$\eta(\lambda) = \frac{S\,h\,c}{e\lambda} = 57\%\,.$$

Das bedeutet, dass von je 100 auftreffenden Photonen 57 nachgewiesen werden.

b) Der Fotostrom, der als Kurzschlussstrom messbar ist, beträgt nach (9.79)

$$I_{\mathrm{K}} = I_{\mathrm{ph}} = \frac{\Phi_{\mathrm{e}}\,e}{hf}\eta(\lambda) = \frac{\Phi_{\mathrm{e}}\,e\lambda\eta(\lambda)}{hc}$$
$$= 300\,\mu\mathrm{A}\,.$$

Ü 9.4-5: Die Leerlaufspannung, die an der Fotodiode auftritt, ist nach (9.82)

$$U_{\mathrm{L}} = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{I_{\mathrm{ph}}}{I_{\mathrm{S}}} + 1\right)\,.$$

Der Fotostrom folgt aus (9.79) mit (9.80) zu

$$I_{\mathrm{ph}} = \Phi_{\mathrm{e}}\,S(\lambda)\,.$$

Die Empfindlichkeit kann aus Abb. 9.85 herausgemessen werden: $S(633\,\mathrm{nm}) = 0{,}35\,\mathrm{A/W}$. Damit ergibt sich ein Fotostrom von $I_{\mathrm{ph}} = 1{,}75\,\mu\mathrm{A}$.
Dies führt zu einer Leerlaufspannung von $U_{\mathrm{L}} = 0{,}312\,\mathrm{V}$.

10. Spezielle Relativitätstheorie

Ü 10-1: Nach (10.6) erscheinen einem ruhenden Beobachter die Längen in Bewegungsrichtung verkürzt um den Faktor

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} .$$

Soll $\frac{l'}{l} = \frac{3}{4}$ sein, dann ist die erforderliche Geschwindigkeit

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{l'}{l}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$= 0{,}661\, c = 1{,}98 \cdot 10^8 \,\frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Für eine Schlankheitskur eignet sich die Methode nicht, da in der Richtung senkrecht zur Bewegung keine Längenkontraktion stattfindet.
Der Massenzuwachs ist nach (10.10)

$$\frac{m(v)}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma = \frac{4}{3} .$$

Ü 10-2: Für den Stoß gilt der Impulserhaltungssatz und mit (10.11):

$$\frac{m_{\text{p0}}\, v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0\, u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} , \qquad (1)$$

dabei ist v die Geschwindigkeit vor und u die Geschwindigkeit nach dem Stoß. Der Energieerhaltungssatz lautet nach (10.10) und (10.17)

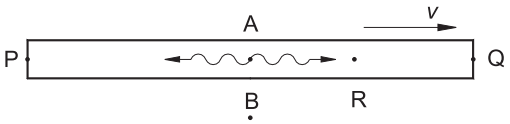
$$\frac{m_{\text{p0}}\, c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m_{\text{p0}}\, c^2 = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} . \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0{,}451\, c \quad \text{und}$$

$$m_0 = m_{\text{p0}} \frac{v}{u} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2{,}24\, m_{\text{p0}} .$$

Ü 10-3: Der Einsteinzug hat im bewegten System S' die Länge $l' = 2 \cdot 10^6$ km $= \frac{20}{3}$Ls $= 6{,}67$ Ls (Lichtsekunden). Für die Lichtgeschwindigkeit wird der gerundete Wert $c = 3 \cdot 10^8$ m/s benutzt.



a) Der Mitfahrer A im System S' löst zur Zeit $t = 0$ die beiden Lichtsignale aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Sie erreichen gleichzeitig die Enden P und Q nach Ablauf der Zeitspanne

$$t'_{\text{öffnen}} = \frac{l'}{2c} = 3{,}33 \text{ s} .$$

Es gibt also für das Öffnen der Türen keinen Zeitunterschied: $\Delta t' = 0$.

b) Für den im System S ruhenden Beobachter erscheint der Zug verkürzt auf die Länge

$$l = \frac{l'}{\gamma} .$$

Der relativistische Faktor ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1{,}667$$

und damit die Zuglänge $l = 4$ Ls $= 1{,}2 \cdot 10^9$ m.
Die Laufzeit zum hinteren Zugende P berechnet der Beobachter B aus

$$t_{\text{P}} = \frac{l}{2(v + c)} = 1{,}111 \text{ s} .$$

Die Laufzeit zum vorderen Zugende Q ist für den Beobachter B

$$t_{\text{Q}} = \frac{l}{2(c - v)} = 10 \text{ s} .$$

Damit entsteht eine Zeitdifferenz von $\Delta t = 8{,}889$ s.
Zweiter Lösungsweg:
Analog zu (10.7) gilt für die Zeitdifferenz im System S

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)\right) .$$

Nun ist $\Delta t' = 0$ und $x_2' - x_1' = l'$. Daraus folgt

$$\Delta t = \gamma\frac{v}{c^2}l' = 8{,}889\text{ s} .$$

Die beiden Diagramme zeigen die Darstellung im Minkowski-Raum.

c) Die Tür befinde sich im Punkt R. Da die hintere Tür nach $t_P = 1{,}111$ s öffnet, muss sich R am Ort $x = c\cdot t_P = 1{,}111$ Ls befinden. Mithilfe von (10.1) kann diese Koordinate in das System S′ transformiert werden:

$$x' = \gamma(x - v\,t) = 0{,}37\text{ Ls} .$$

Die Tür müsste also im Zug um 0,37 Ls entfernt von A nach vorne angebracht werden.

Ü 10-4: Der Radarstrahl erregt die beweglichen Elektronen in den Metallteilen der Karosserie zu erzwungenen Schwingungen nach (10.23) mit der Frequenz

$$f_{PKW} = f_S\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_S\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} .$$

Die schwingenden Elektronen strahlen ihrerseits eine Welle mit dieser Frequenz ab, die beim Empfänger noch einmal dopplerverschoben ankommt mit der Frequenz

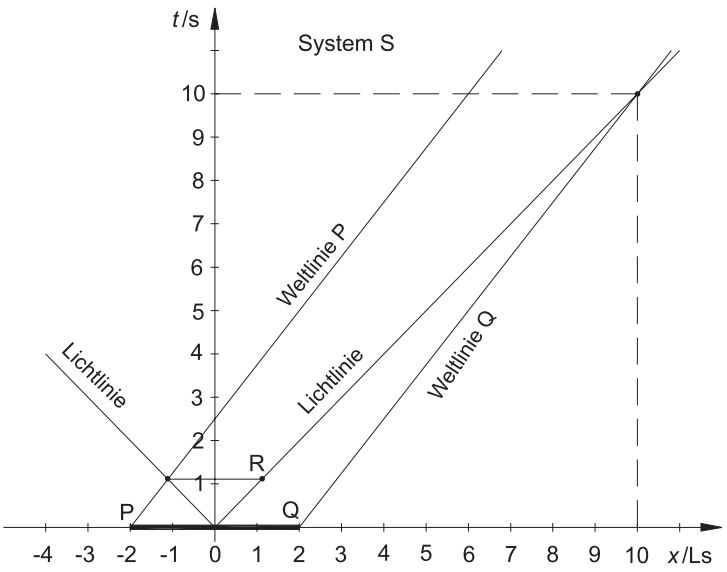
$$f_E = f_{PKW}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_S\frac{1+\beta}{1-\beta} .$$

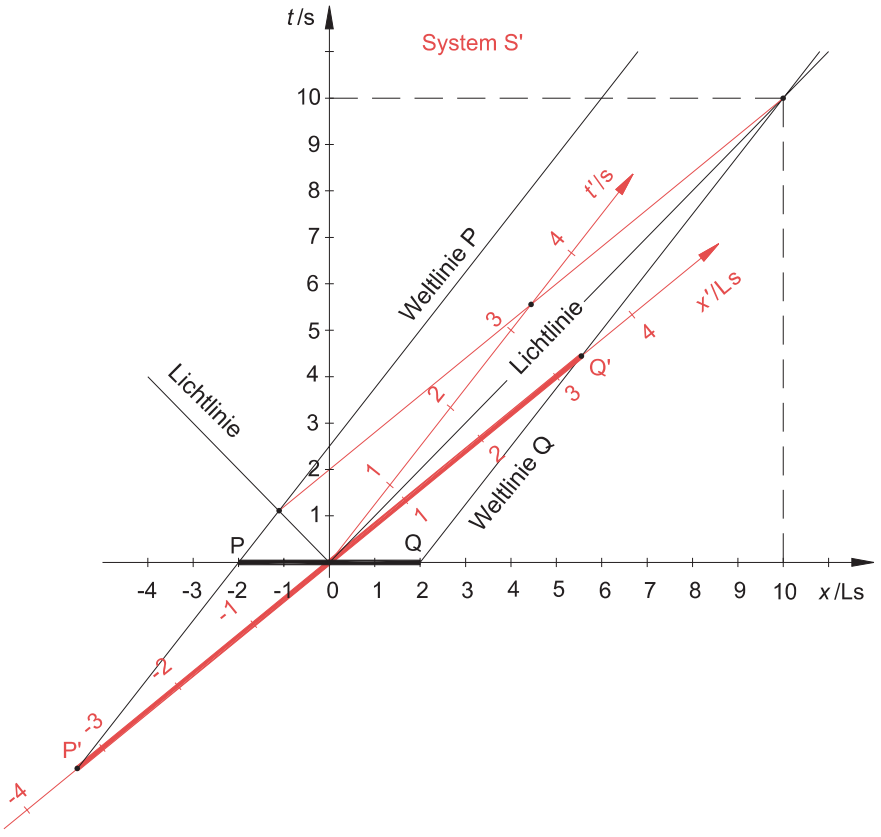
Da $\beta \ll 1$, gilt

$$f_E \approx f_S(1+\beta)^2 \approx f_S(1+2\beta)$$
$$= f_S(1 + 1{,}85\cdot 10^{-7}) = 9{,}00000167\text{ GHz} .$$

Da diese Frequenz nicht mit der nötigen Genauigkeit messbar ist, werden die beiden Schwingungen überlagert. Die resultierende Schwebung hat nach (5.134) die Schwebungsfrequenz

$$f_{Schweb} = f_E - f_S = f_S\cdot 2\beta = 1{,}668\text{ kHz} .$$





Ü 10-5: Wenn die Leistung $P = 500\,\text{MW}$ erzeugt wird, ist die Energie, die im Laufe eines Jahres produziert wird

$$E = P \cdot t = 1{,}578 \cdot 10^{16}\,\text{J}\,.$$

Nach (10.17) entspricht dies einer Massenabnahme von

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = 0{,}176\,\text{kg}\,.$$

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass im nachfolgenden thermischen Kraftwerk nur 30% bis 40% dieser Energie in elektrische Energie umgewandelt werden kann (Abschn. 3.3.5).

Ü 10-6: Die kinetische Energie ist nach (10.16)

$$E_{\text{kin}} = (m - m_0)\,c^2\,.$$

Dann ist die Masse

$$m = \frac{E_{\text{kin}}}{c^2} - m_0 = 5{,}35 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$$
$$= 58\,700 \cdot m_0\,.$$

Dieser Massenzuwachs erfordert nach (10.10)

$$\frac{m(v)}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

die Geschwindigkeit

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}\,.$$

Da $m_0/m \ll 1$, kann die Wurzel entwickelt werden:

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right]$$
$$= c\,(1 - 1{,}45 \cdot 10^{-10}) \approx c\,.$$

11.2 Nobelpreisträger der Physik

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1901	D	*Röntgen, Wilhelm Conrad* (1845 bis 1923)	Entdeckung der Röntgenstrahlen
1902	NL	*Lorentz, Hendrik Anton* (1853 bis 1928)	Beschreibung des Übergangs vom ruhenden zum gleichförmig bewegten System (Lorentz-Transformation in der speziellen Relativitätstheorie); Erklärung der Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld (Zeeman-Effekt)
	NL	*Zeeman, Pieter* (1865 bis 1943)	
1903	F	*Becquerel, Henri Antoine* (1832 bis 1908)	Entdeckung der spontanen radioaktiven Strahlung von Uran; Erforschung der Radioaktivität und Entdeckung der radioaktiven Elemente Polonium und Radium
	F	*Curie, Pierre* (1859 bis 1906) *Curie, Marie* (1867 bis 1934)	
1904	GB	*Rayleigh, Lord* (*Strutt, John William*) (1842 bis 1919)	Erforschung der Dichte von Gasen und Entdeckung des Edelgases Argon
1905	D	*Lenard, Philipp* (1862 bis 1947)	Durchgang von Kathodenstrahlen durch Materie und Elektronentheorie
1906	GB	*Thomson, Joseph John* (1856 bis 1940)	Elektrische Leitung in Gasen
1907	USA	*Michelson, Albert Abraham* (1852 bis 1931)	Spektroskopische Präzisionsmessungen (Interferometer), mit denen die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung nachgewiesen wurde
1908	F	*Lippmann, Gabriel* (1845 bis 1921)	Interferenzfarben-Photographie
1909	I	*Marconi, Guglielmo* (1874 bis 1937)	Drahtlose Telegraphie
	D	*Braun, Ferdinand* (1850 bis 1918)	
1910	NL	*van der Waals, Johannes Diderick* (1837 bis 1923)	Zustandsgleichung der realen Gase
1911	D	*Wien, Wilhelm* (1864 bis 1928)	Gesetze der Wärmestrahlung
1912	S	*Dalén, Gustaf* (1869 bis 1937)	Acetylenakkumulator zur Beleuchtung von Leuchttürmen und Bojen (Sonnenscheinventile)
1913	NL	*Kamerlingh-Onnes, Heike* (1853 bis 1926)	Verflüssigung von Wasserstoff und Helium, Entdeckung der Supraleitung

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1914	D	*von Laue, Max* (1879 bis 1960)	Röntgenstrahlinterferenzen in Kristallen
1915	GB	*Bragg, William Henry* (1862 bis 1942) *Bragg, William Lawrence* (1890 bis 1971)	Erforschung von Kristallstrukturen durch Röntgenstrahlen
1917	GB	*Barkla, Charles Glover* (1877 bis 1944)	Entdeckung der charakteristischen Röntgenstrahlen der Elemente
1918	D	*Planck, Max* (1858 bis 1947)	Entdeckung der Energiequanten und des Wirkungsquantums
1919	D	*Stark, Johannes* (1874 bis 1957)	Entdeckung des Doppler-Effektes an Kanalstrahlen und der Aufspaltung der Spektrallinien im elektrischen Feld
1920	F	*Guillaume, Charles Edouard* (1861 bis 1938)	Entdeckung der Anomalien der Nickel-Stahl-Legierungen (Invar-Effekt: geringe Wärmeausdehnung)
1921	D	*Einstein, Albert* (1879 bis 1955)	Deutung des photoelektrischen Effektes
1922	DK	*Bohr, Niels* (1885 bis 1962)	Quantenphysikalisches Atommodell
1923	USA	*Millikan, Robert Andrews* (1868 bis 1953)	Messung der elektrischen Elementarladung und des Planck'schen Wirkungsquantums
1924	S	*Siegbahn, Karl Manne Georg* (1886 bis 1978)	Röntgenspektroskopie
1925	D	*Franck, James* (1882 bis 1964) *Hertz, Gustav* (1887 bis 1975)	Quantensprünge durch Elektronenstöße
1926	F	*Perrin, Jean* (1870 bis 1942)	Diskontinuierliche Struktur der Materie; Entdeckung des Sedimentationsgleichgewichtes von Kolloiden
1927	USA	*Compton, Arthur Holly* (1892 bis 1962)	Stoß zwischen Röntgenquant und Elektron; Sichtbarmachung atomarer Teilchen in der Nebelkammer
	GB	*Wilson, Charles Thomson* (1869 bis 1959)	
1928	USA	*Richardson, Owen Williams* (1879 bis 1959)	Elektronenaustritt aus glühenden Körpern
1929	F	*de Broglie, Louis Victor* (1892 bis 1987)	Wellentheorie der Materie
1930	IND	*Raman, Chandrasekhara Venkata* (1888 bis 1970)	Streuung des Lichts an Molekülen (Molekülspektroskopie)

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1932	D	*Heisenberg, Werner* (1901 bis 1976)	Begründung der Quantenphysik
1933	A	*Schrödinger, Erwin* (1887 bis 1961)	Wellenmechanik und Anwendung auf das Elektron
	GB	*Dirac, Paul Adrien Maurice* (1902 bis 1984)	
1935	GB	*Chadwick, James* (1891 bis 1974)	Entdeckung des Neutrons
1936	A	*Hess, Viktor Franz* (1883 bis 1964)	Entdeckung der Kosmischen Strahlung;
	USA	*Anderson, Carl David* (1905 bis 1991)	Entdeckung des Positrons
1937	USA	*Davisson, Clinton Joseph* (1881 bis 1958)	Experimenteller Nachweis der Elektronenwellen (Beugung von Elektronen in Kristallen)
	GB	*Thomson, George Paget* (1892 bis 1975)	
1938	I	*Fermi, Enrico* (1901 bis 1954)	Atomreaktionen mit Neutronen
1939	USA	*Lawrence, Ernest Orlando* (1901 bis 1958)	Erfindung und Entwicklung des Zyklotrons zur Erzeugung künstlicher radioaktiver Elemente
1943	D	*Stern, Otto* (1888 bis 1969)	Richtungsquantelung des Elektronenspins, Entdeckung des magnetischen Moments des Protons
1944	USA	*Rabi, Isidor Isaak* (1898 bis 1988)	Bestimmung des magnetischen Moments von Atomkernen
1945	A	*Pauli, Wolfgang* (1900 bis 1958)	Entdeckung des Ausschlussprinzips
1946	USA	*Bridgman, Percy Williams* (1882 bis 1961)	Erfindung eines Apparates zur Erzeugung von höchsten Drücken
1947	GB	*Appleton, Edward Victor* (1892 bis 1965)	Ionosphärenforschung
1948	GB	*Blackett, Patrick Maynard Stuart* (1897 bis 1974)	Weiterentwicklung der Wilson'schen Nebelkammer und die damit verbundenen Entdeckungen auf den Gebieten der Kernphysik und der kosmischen Strahlung
1949	J	*Yukawa, Hideki* (1907 bis 1981)	Vorhersage der Existenz eines Mesons
1950	GB	*Powell, Cecil Frank* (1903 bis 1969)	Entdeckung des Mesons
1951	GB	*Cockcroft, John Douglas* (1897 bis 1967)	Atomkernumwandlung durch künstlich beschleunigte Protonen
	IRL	*Walton, Ernest Thomas Sinton* (1903 bis 1995)	

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1952	USA	*Bloch, Felix* (1905 bis 1983) *Purcell, Edward Mills* (1912 bis 1997)	Präzisionsmessung magnetischer Atomkernmomente
1953	NL	*Zernicke, Frederik* (1888 bis 1966)	Entwicklung des Phasenkontrastmikroskops
1954	D	*Born, Max* (1882 bis 1970)	Statistische Deutung der Quantenmechanik
		Bothe, Walter (1891 bis 1957)	Zählung atomarer Teilchen durch die Geigerzähler-Koinzidenzmethode
1955	USA	*Lamb, Edward William* (*1913); *Kusch, Polykarp* (1911 bis 1993)	Entdeckung der Feinstruktur des Wasserstoffspektrums; Präzisionsbestimmung des magnetischen Moments des Elektrons
1956	USA	*Bardeen, John* (1908 bis 1991) *Brattain, Walter Houser* (1902 bis 1987) *Shockley, William Bradford* (1910 bis 1989)	Entwicklung des Transistors
1957	USA	*Lee, Tsung Dao* (*1926) *Yang, Chen Ning* (*1922)	Untersuchung der Paritätsgesetze und die dadurch bedingten neuen Entdeckungen des Verhaltens von Elementarteilchen
1958	SU	*Tscherenkow, Pawel* (1904 bis 1990) *Frank, Ilja* (1908 bis 1990) *Tamm, Igor* (1895 bis 1971)	Erforschung und Deutung von Lichtstrahlung beim Durchdringen eines energiereichen Elektrons durch Materie (Tscherenkow-Effekt)
1959	USA	*Chamberlain, Owen* (1920 bis 2006) *Segrè, Emilio* (1905 bis 1989)	Nachweis des Antiprotons
1960	USA	*Glaser, Donald* (*1926)	Erfindung der Blasenkammer zur Beobachtung von Elementarteilchen
1961	USA	*Hofstadter, Robert* (1915 bis 1990)	Elektronenstreuung an Atomkernen
	D	*Mössbauer, Rudolf* (*1929)	Resonanzabsorption von Gammastrahlen (Mössbauer-Effekt)
1962	SU	*Landau, Lew Davidowitsch* (1908 bis 1968)	Erforschung des superfluiden Heliumzustandes bei Tiefsttemperaturen

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1963	USA	*Goeppert-Mayer, Maria* (1906 bis 1972)	Schalenmodell des Atomkerns; gruppentheoretische Quantenphysik
	D	*Jensen, Hans Daniel* (1907 bis 1973)	
	USA	*Wigner, Eugene* (1902 bis 1995)	Entdeckung und Anwendung fundamentaler Symmetrieprinzipien bei Atomkern und Elementarteilchen
1964	SU	*Basow, Nikolai* (1922 bis 2001)	Entdeckung des Maser- und Laser-Prinzips
		Prochorow, Alexander (1916 bis 2002)	
	USA	*Townes, Charles* (*1915)	
1965	USA	*Feynman, Richard* (1918 bis 1988)	Entwicklung der Quanten-Elektrodynamik
		Schwinger, Julian (1918 bis 1994)	
	J	*Tomonaga, Sin-Itiro* (1906 bis 1979)	
1966	F	*Kastler, Alfred* (1902 bis 1984)	Untersuchungen über das „optische Pumpen“ zur Klärung des energetischen Aufbaus der Atome
1967	USA	*Bethe, Hans* (1906 bis 2005)	Aufklärung der Energieproduktion der Sonne durch Atomkernverschmelzung
1968	USA	*Alvarez, Louis* (1911 bis 1988)	Entdeckung von Elementarteilchen-Resonanz-zuständen mit der Blasenkammer-Technik
1969	USA	*Gell-Mann, Murray* (*1929)	Grundlegende Theorie der Elementarteilchen (Quarks)
1970	S	*Alfvén, Hannes* (1908 bis 1995)	Beiträge zur Plasmaphysik, insbesondere der Magnetohydrodynamik
	F	*Néel, Louis* (1904 bis 2000)	Entdeckungen im Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus für Festkörperphysik-Anwendungen
1971	H	*Gabor, Dennis* (1900 bis 1979)	Erfindung der Holographie
1972	USA	*Bardeen, John* (1908 bis 1991)	Quantenmechanische Theorie der Supraleitung (BCS-Theorie)
		Cooper, Leon (*1930)	
		Schrieffer, John (*1931)	
1973	N	*Giaever, Ivar* (*1929)	Erforschung des Tunneleffektes in Halbleitern und Supraleitern (Josephson-Effekt)
	J	*Esaki, Leo* (*1925)	
	GB	*Josephson, Brian* (*1940)	

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1974	GB	*Ryle, Martin* (1918 bis 1984)	Verbesserung der Radioteleskope (Apertursynthese)
		Hewish, Antony (*1924)	Entdeckung der Pulsare
1975	USA	*Bohr, Aage Niels* (*1922)	Berechnung der Energiezustände von Atomkernen
		Mottelson, Benjamin (*1926)	
		Rainwater, James (1917 bis 1986)	
1976	USA	*Richter, Burton* (*1931)	Entdeckung neuer Elementarteilchen (Psi-Teilchen) mit der neuen Qualität „Charm“
		Ting, Samuel (*1936)	
1977	USA	*Anderson, Philip* (*1923)	Theorie der elektronischen Struktur magnetischer und ungeordneter Systeme
		Mott, Nevill (1905 bis 1996)	
		van Vleck, John (1899 bis 1980)	
1978	SU	*Kapitza, Peter* (1894 bis 1984)	Grundlegende Erfindungen und Entdeckungen auf dem Gebiet der Tieftemperaturphysik; Entdeckung einer isotropen Strahlung (Mikrowellen) im Weltall (Urknall-Hypothese)
	USA	*Penzias, Arno* (*1933)	
		Wilson, Robert (*1936)	
1979	USA	*Glashow, Sheldon* (*1932)	Theorie der vereinheitlichten schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen; Vorhersage des schwachen neutralen Stroms
		Weinberg, Steven (*1933)	
	GB	*Salam, Abdus* (1926 bis 1996)	
1980	USA	*Cronin, James* (*1931)	Entdeckung der Verletzung grundlegender Symmetrieprinzipien beim Zerfall neutraler K-Mesonen
		Fitch, Van (*1923)	
1981	USA	*Bloembergen, Nicolaas* (*1920)	Entwicklung hochpräziser Messmethoden durch Laserspektroskopie
		Schawlow, Arthur (1921 bis 1999)	
	S	*Siegbahn, Kai* (*1918)	Entwicklung der hochauflösenden Elektronen-Spektroskopie
1982	USA	*Wilson, Kenneth* (*1936)	Beiträge zur Theorie der Phasenübergänge und kritischen Phänomene

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1983	USA	*Chandrasekhar, Subrahmanyan* (1910 bis 1995) *Fowler, William* (1911 bis 1995)	Theoretische Studien der physikalischen Prozesse, die für die Struktur und Entwicklung von Sternen von Bedeutung sind; Kettenreaktionen, die für die Bildung chemischer Elemente im Weltall von Bedeutung sind
1984	I	*Rubbia, Carlo* (*1934)	Entdeckung der Feldpartikel W und Z (Vermittler der schwachen Wechselwirkung)
	NL	*van der Meer, Simon* (*1925)	Stochastische Kühlung
1985	D	*von Klitzing, Klaus* (*1943)	Quanten-Hall-Effekt
1986	D	*Ruska, Ernst* (1906 bis 1988)	Entwicklung des Elektronenmikroskops
	D	*Binnig, Gerd* (*1947)	Konstruktion des Rastertunnelmikroskops
	CH	*Rohrer, Heinrich* (*1933)	
1987	D	*Bednorz, Georg* (*1950)	Supraleitung in keramischen Materialien
	CH	*Müller, Karl Alexander* (*1927)	
1988	USA	*Lederman, Leon M.* (*1922) *Schwartz, Melvin* (*1932) *Steinberger, Jack* (*1921)	Entdeckung der Verschiedenheit von Elektron-Neutrino und Myon-Neutrino und Begründung der Paarstruktur der Leptonen ($e\nu_e, \mu\nu_\mu, \tau\nu_\tau$); erstmalige künstliche Erzeugung eines Neutrinostrahls in einem Teilchenbeschleuniger (Neutrino-Kanone)
1989	USA	*Ramsey, Norman* (*1915)	Resonanzmethode voneinander getrennt oszillierender Felder (Cäsium-Atomuhr als Normalzeit-Standard), Wasserstoff-Maser
	D	*Paul, Wolfgang* (1913 bis 1993) *Dehmelt, Hans* (*1922)	Entwicklung der Ionenkäfig-Technik zum langzeitigen Studium einzelner Elektronen und Ionen
1990	USA	*Friedman, Jerome* (*1930) *Kendall, Henry* (1926 bis 1999)	Experimentelle Bestätigung des Quarkmodells der Hadronen durch tief inelastische Elektron-Nukleon-Streuung
	CDN	*Taylor, Richard* (*1929)	
1991	F	*de Gennes, Pierre-Gilles* (*1932)	Methode zur Beschreibung der Ordnung komplizierter Formen der Materie, insbesondere von Flüssigkristallen und Polymeren (Skalengesetze)

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
1992	F	*Charpak, Georges* (*1924)	Entwicklung von Teilchendetektoren (Vieldraht-Proportionalkammer)
1993	USA	*Hülse, Russell A.* (*1950) *Taylor, Joseph H. Jr.* (*1941)	Entdeckung eines neuen Typs von Pulsar
1994	CDN	*Brockhouse, Bertramin N.* (*1918)	Technik der Neutronenstreuung zur Untersuchung fester Körper (Neutronenspektroskopie und Neutronenbeugung)
	USA	*Shull, Clifford G.* (1915 bis 2001)	
1995	USA	*Perl, Martin L.* (*1927) *Reines, Frederick* (1918 bis 1998)	Experimentelle Beiträge zur Leptonenphysik (Entdeckung des Tau-Leptons und des Neutrinos)
1996	USA	*Lee, David M.* (*1931) *Osheroff, Douglas M.* (*1945) *Richardson, Robert C.* (*1937)	Entdeckung der Suprafluidität in Helium-3
1997	USA	*Chu, S.* (*1948)	Entwicklung von Methoden zur Abkühlung und zum Einfangen von Atomen mit Laserlicht
	F	*Cohen-Tannoudji, C.* (*1933)	
	USA	*Phillips, W. D.* (*1948)	
1998	USA	*Laughlin, R. B.* (*1950)	Entdeckung einer neuen Form von Quanten-flüssigkeit mit gebrochen geladenen Anregungen
	D	*Störmer, H. L.* (*1949)	
	USA	*Tsui, D. C.* (*1939)	
1999	NL	*'t Hooft, Gerardus* (*1946) *Veltman, Martinus J. G.* (*1931)	Beiträge zur Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung
2000	RUS	*Alferov, Zhores* (*1930)	Entwicklung von Halbleiter-Heterostrukturen für die Hochgeschwindigkeitselektronik und Optoelektronik
	USA	*Krämer, Herbert* (*1928)	
	USA	*Kilby, Jack* (*1923)	Beiträge zur Entwicklung des integrierten Schaltkreises

Jahr	Land	Name des Preisträgers	Grund der Auszeichnung
2001	USA	*Cornell, Eric A.* (*1961)	Erzeugung der Bose-Einstein-Kondensation in verdünnten Gasen aus Alkaliatomen und frühe grundsätzliche Studien über die Eigenschaften der Kondensate
	D	*Ketterle, Wolfgang* (*1957)	
	USA	*Wieman, Carl E.* (*1951)	
2002	USA	*Davis, Raymond* (*1914)	Nachweis kosmischer Neutrinos
	J	*Koshiba, Masatoshi* (*1926)	
	USA	*Giacconi, Riccardo* (*1931)	Entdeckung kosmischer Röntgenquellen
2003	RU, USA	*Abrikosov, Alexei, A.* (*1928)	Bahnbrechende Beiträge zur Theorie der Supraleiter und Supraflüssigkeiten
	RU	*Ginzburg, Vitaly, L.* (*1916)	
	GB, USA	*Leggett, Anthony, J.* (*1938)	
2004	USA	*Gross, David J.* (*1941)	Entdeckung der asymptotischen Freiheit in der Theorie der starken Wechselwirkung
		Politzer, David H. (*1949)	
		Wilczek, Frank (*1951)	
2005	USA	*Glauber, Roy J.* (*1925)	Beitrag zur Quantentheorie der optischen Kohärenz
	USA	*Hall, John L.* (*1934)	Beiträge zur Entwicklung der Laser-basierten Präzisionsspektroskopie einschließlich der optischen Frequenzkamm-Technik
	D	*Hänsch, Theodor W.* (*1941)	
2006	USA	*Mather, John C.* (*1946)	Entdeckung der Schwarzkörperform und der Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung
		Smoot, George F. (∗1945)	

Kapitel 12
Namen- und Sachverzeichnis

12

12 Namen- und Sachverzeichnis

A

Abbe'sche Invariante, 508
Abbildung, optische, 539
Abbildungsfehler, 523, 524
Abbildungsgleichung, 511
– des Hohlspiegels, 497
– Newton'sche, 512
Abbildungsmaßstab, 498, 509
Aberration, chromatische und sphärische, 524
abgeschlossenes System, 58, 175
abhängiger Zerfall, 721
Abklingkoeffizient, 439, 443
Ablenkung, Teilchen im elektrischen Feld, 330
Ablenkungswinkel am Prisma, 505
Ablenkwinkel, minimaler, 506
Abnahme der Raketenmasse, 61
Abschattung, 523
Abschirmung, 779
absolute Luftfeuchtigkeit, 245
absoluter Größtfehler, 19
– Messverfahren, 19
absoluter Nullpunkt, 185
Absorber, Schall-, 626
Absorberfrequenz, charakteristische, 626
Absorption, 594
– eines Photons, 594
– elektromagnetischer Strahlung, 854
– von Röntgenstrahlung, 696
– Wechselwirkungsprozess, 759
Absorptionsanteil, 695
Absorptionsfläche, 639
– äquivalente, Akustik, 639
Absorptionsgrad, 639
– Schall-, 624
Absorptionskoeffizient, 855
Absorptionskurve, 758
Absorptionsspektroskopie, 655
Abstimmungsfrequenz, Masse-Feder-System, 643
Abweichungen, statistische, 15
– systematische, 15
Achse, freie, 92, 581
Addition von Kräften, 45
Adhäsionskraft, 131
Adiabatengleichung, 208
adiabates System, 175, 207
Admittanz, 399
Äquipotentialfläche, 324
Äquipotentiallinie, 325
Aerodynamik, 135
Aerostatik, 123
äußere Reibung, 49
Aggregatzustände, 237
Aggregatzustand, vierter, 317
Ähnlichkeit, geometrische und hydromechanische, 159
Ähnlichkeitsgesetze, 158
Airy'sche Beugungsscheibchen, 561
Akkumulator, 301
Aktionsgesetz, 45
Aktivität, 720
– optische, 587
– radioaktive, 719
– zeitlicher Verlauf, 719
Aktivitätsgleichung, 721
Akustik, 613
– musikalische, 634
– physiologische, 630
– technische, 638
akustische Schmerzgrenze, 630
Akzeptor, 823
Akzeptoren, Ionisationsenergie, 823
Akzeptoren-Konzentration, 823
Alcator, 743
All-Round-Effekt, 805
allgemeine Heisenberg'sche Unschärferelation, 673
allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase, 185
allseitige Kompression, 110, 112
Alpha-Strahlung, 715
Alpha-Teilchen, Streuung, 704
Alpha-Zerfall, 716, 717
amorphe Werkstoffe, 794
Ampere, 9
Ampere'sches Gesetz, 353
Ampere'sches magnetisches Moment, 361
Amperemeter, 283
Amplitude, 391, 420, 422, 447
Amplitudenresonanzfunktion, 446, 447
Amplitudenspektrum, Fourier-Analyse, 454
Analogie der Translation und Rotation, 81
Analysator, 579
Analyse, Korrelation-, 21
Änderung des Drehimpulses, zeitliche, 76
Änderung einer Zustandsgröße, 177
Aneroid-Barometer, 123
Angriffspunkt, 83
Anhangskraft, 131
anharmonischer Oszillator, 700
Anion, 292
anisotrope Polarisation, elektrische, 347
anisotropes Verhalten, 789
Anisotropie, 580
Anker, 402
Anlagenkennlinie, 168
anodische Oxidation, 294
Anomalie des Wassers, 184, 242
anormale Rutherford-Streuung, 762
Anpassungsfehler, 21
Anregungsdetektor, 723, 724
Anregungsfunktion, 732
Anti-Schottky-Fehlordnung, 793
Antiferromagnetismus, 375
Antistokeslinie, 703
Antiteilchen, 749, 751
Anwendung der
– der Kontinuitätsgleichung, 141
– des Reibungsgesetzes, 151
Anwendung der Bernoulli-Gleichung, 141
Anzeigetechnik, 808
aperiodischer Grenzfall, 440, 442

Apertur, numerische, 503
Aperturwinkel, 522
Äquipartionsprinzip, 191
Äquipotentialfläche, 106
Äquivalent-Dosisleistungskonstante, 778
Äquivalentdosis, 765–767
Äquivalentdosisleistung, 766, 778
äquivalente Schallabsorptionsfiäche, 639
äquivalenter Dauerschallpegel, 633
Aräometer, 130
Arbeit, 10, 62
– allgemein, 62
– auf schiefer Ebene, 63
– Hub-, 63
– mechanische, 62
– ortsabhängiger Kräfte, 63
– bei der Drehbewegung, 77
– bei Rotation, 81
– bei Translation, 81
– Beschleunigungs-, 63
– eines Spannungs-Dehnungs-Zyklus, 116
– elektrische, 290, 319
– Hub-, 65, 105
– Reibungs-, 64
– Verformungs-, 65
– Volumenänderungs-, 212
Arbeitspunkt, 379
Archimedisches Prinzip, 130
arithmetischer Mittelwert, 16
Asdex, 745
Astigmatismus, 524
Astronomia nova, 101
Asymmetrie-Energie, 709
asymmetrische Spaltung, 735
Asynchronmotor, 403
Aszension, kapillare, 134
Äther, 868
atomare Konstanten einiger Metalle, 791
atomare Masseneinheit, 708
Atombau, 653
– Systematik, 692
Atombegriff, 654
Atomistik, 654
Atomkern, Ladungsverteilung, 706
– Aufbau, 703
– Größe, 703
Atommasse, 707
– relative, 707
Atommassenkonstante, 707
Atommodell, Bohr'sches, 654
Atomorbital, 677
– Energiediagramm, 694
Atomphysik, 653
Atomuhr, 13
äußere Strahlenbelastung, Schutz, 777
Aufbau der Elektronenhülle, 693
Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 664
Auflösungsvermögen, 562
– eines Gitters, 569
– eines Mikroskops, 567
– eines Prismas, 570
– optischer Instrumente, 562
Auftrieb, 130
Auftrieb an umströmten Körpern, 163
– dynamischer, 163
Auftriebsbeiwert, 163
Auftriebskraft, 130
Auftriebspumpen, 167
Auge, menschliches, 523
Augenastigmatismus, 525
Ausbreitungsgeschwindigkeit, 469
– Biegewelle, 628
– Wellen, 467
Ausdehnung, thermische, 181
Ausdehnungskoeffizient, Längen, 181
– Raum, 126, 181
Ausfließen von Flüssigkeiten aus Gefäßen, 143
Ausflussgeschwindigkeit, 143
Ausflussgesetz, Torricellisches, 143
Ausflussmassenstrom, 143
Ausflusszahl, 143
Ausgleichsgerade, 21
Auslöschung bei Schwingungsüberlagerung, 451
Auslenkung, 422
Ausschaltvorgänge in Stromkreisen, 404
Außenpolmaschine, 402
Ausströmgesetz nach Bunsen, 145
Ausstrahlung, spezifische, 537, 543
Austauschreaktion, 731
Austauschteilchen, 755
Austrittsarbeit, 590
Auswahlregel, 677
Avogadro-Konstante, 12, 187
– Feldkonstante, 12
– magnetische Energie, 12
Axiome, Newton'sche, 44

B

Babinet'sches Theorem, 571
Bahndrehimpuls, 657, 676
– Vektordiagramm, 676
Bahndrehimpulsquantenzahl, 676, 688, 693
Bahnkurve, 37
Bahnlänge, 763
Bahnlinien, 135
Bahnmagnetismus, 687, 688
Bahnmoment, 370
Bahnscheitel, Rakete, 62
Balmer-Serie, 657
Bandgap, 823
Bandmittenfrequenz, 622
bar, 123
barn, 732
barometrische Höhenformel, 129, 192
Baryon, 749, 751
Baryonenzahl, 753
Basisgrößen, 9
Basisschaltung, 829
– Transistor, 831
basiszentrierte Gitter, 790
Batterie, 296
Bauelement, elektrisches, 392
– im Wechselstromkreis, 393
– Parallelschaltung, 396
– Reihenschaltung, 395
Becquerel, 719
Belastungsfall, elementarer, 113, 114
Beleuchtungsstärke, 11, 544
Belichtung, 543
Benetzung, 133, 134
berührungslose Thermometer, 183
Berührungsthermometer, elektrische und mechanische, 182
Berechnung der Wärmekapazität, 195
– von Dauermagnetsystemen, 377
Bernoulli-Gleichung, 140, 165
– Anwendung, 141
– bei Newton'scher Reibung, 154
– für kompressible Medien, 165
– verallgemeinerte, 165
Beschleunigeranlagen, 748
Beschleunigung, 10, 32, 103
– Coriolis-, 54
– Fall-, 103
– gleichmäßige, 34
– mittlere, 32
– momentane, 32
– Rakete, 61
– Tangential-, 39
– Teilchen im elektrischen Feld, 326
– Winkel-, 40, 77
– Zentripetal-, 39
Beschleunigung 8
– Winkel-, 81
Beschleunigung, Zentrifugal, 54
Beschleunigung-Zeit-Diagramm, 33
Beschleunigungsarbeit, 64
Beschleunigungsvektor, 37
Beschuss eines Kerns mit Alpha-Teilchen, 717
Besetzungsinversion, 596, 852
Besetzungszahl, 594
Bessel-Funktion, 561
Bestrahlung, 538, 543
Bestrahlungsstärke, 538, 543
Beta-Stabilität, 710
– Strahlung, 715
– Zerfall, 716, 717
Bethe-Bloch-Gleichung, 761
Beugung, 483, 491, 549, 559
– am Doppelspalt, 484, 593
– am Gitter, 564

– am Spalt, 558, 665
– Fraunhofer'sche, 559
– Intensitätsverteilung, 561
– nach Fresnel, 559
– von Elektronen (Davison und Germer), 662
– von Röntgenstrahlung, 662
Beugungsbild eines Drahtes, 562
Beugungsfunktion, 566, 569
Beugungsscheibchen, Airische, 561
Beweglichkeit, 816, 817
bewegte Bezugssysteme, 50
Bewegung, Nutations-, 96
– Dreh-, 75, 77
– Kreis-, 40
– relative, 50
– Translations-, 34
Bewegungsgleichung des Elektrons, 679
Bewegungsgröße der Drehbewegung, 76
Bewegungsverhalten, Feder-Masse-System, 425
bewertete Schallpegel, 633
Bewertungsfaktor, 633
Bewertungskurve, 633
Bezugsintensität, 641
Bezugsschalldruck, 621
Bezugssystem, 867
– bewegtes, 50
– gleichförmig rotierendes, 52
Biegesteifigkeit, 628
biegeweiche Grenzfläche, 624
Biegewelle, 468, 628
Biegewellen durch Spuranpassung, 628
Biegung, 114
Bild, reelles und virtuelles, 494
Bildentstehung beim Spiegel, 494
– beim Hohlspiegel, 496
Bildgröße, -weite, 497
Bimetall, 800
Bimetallmesswerk, 411
Bindung, Ionen-, 787
– kovalente, 787
– metallische, 788
– van-der-Waals'sche, 785
Bindungsarten, 786
Bindungsenergie der Van-der-Waals-Bindung, 785
Bindungsenergie des Kerns, 708
Bindungsenergie zweier Ionen, 787
Binnendruck, 233
biologische Wirkung der Strahlung, 770
Biot-Savart'sches Gesetz, 354
bipolarer Transistor, 829
Blasinstrument, 481
Blaze-Winkel, 569
Blende, 142, 523
Blendenzahl, 533
Blindanteil, 392, 399
Blindfaktor, 398
Blindleistung, 398
Blindwiderstand, induktiver und kapazitiver, 393
Bloch-Wand, 373
Bogenentladung, 310, 312
Bohr'sche Postulate, 657
Bohr'sche Quantenbedingungen, 659
Bohr'scher Radius, 657, 679
Bohr'sches Atommodell, 654
Bohr'sches Magneton, 363, 687
Bolometer, 534
Boltzmann-Faktor, 192
Boltzmann-Konstante, 12, 187, 595
– Verteilung, 595, 826, 841
Bose-Einstein-Statistik, 834
Bottom, 753
Bottonium, 749
Boyle-Mariotte-Gesetz, 188
Bracket-Serie, 657
Bragg'sche Bedingung, 572, 812
Braun'sche Röhre, 330
Bravais-Gitter, 790
Brechkraft, Linse, 511
Brechung an einem Prisma, 504
– an Kugelflächen, 507
– von Licht, 499, 580
Brechungsindex, 501
Brechungswinkel, 500
Brechzahl, 501, 582
Brechzahlen einiger Stoffe, 501
– von Kristallen, 582
breitbandige Absorber, 626
Bremsstrahlung, 694, 758
Bremsvermögen, 749, 757
– für Elektronen, 763
Brennpunkt, 495, 511
Brennstoff, 738
Brennweite, 511, 518
– beim Hohlspiegel, 496
– beim Wölbspiegel, 498
– dicke Linse, 514
Brewster'sches Gesetz, 580
Brillouin-Zonen, 812, 838
Brinell-Verfahren, 119, 120
Bruchdehnung, 118
Brutrate, 740
Brutreaktor, 741
Bunsensches Ausströmgesetz, 145
Burger-Modell, 799

C

Candela, 9, 543, 544
Carnot'scher Kreisprozess, 213
Carnot-Prozess, Leistungszahl, 216
Cavendish'sche Gravitationsdrehwaage, 103
Celsius, Grad, 180
charakteristische Strahlung, 694
charakteristisches Schallspektrum, 635
Charles'sches Gesetz, 188, 206
Charme, 753
Charmonium, 749
cholesterische Flüssigkristalle, 807
Clausius-Clapeyron'sche Gleichung, 241
Clausius-Rankine-Prozess, 218, 221
Compoundkern, 731
Compton-Effekt, 591, 759, 764
Compton-Streuung, 660
Computertomographie, 695
Cooper-Paar, 833, 834
Coriolis-Beschleunigung, 54
– Kraft, 52, 55
Cotton-Mouton-Effekt, 583, 585
Coulomb'sches Gesetz, 272
Coulomb'sches magnetisches Moment, 361
Coulomb-Energie, Atomkern, 709
Coulomb-Kraft, 657
Coulomb-Potential, 663
– Wall, 731
Coulombmeter, 294
Crash-Test, 69
Curie-Gesetz, 372, 375
Curie-Temperatur, 372, 849
Curie-Weiss'sches Gesetz, 372

D

d'Alembert'sche Wellengleichung, 472, 615
d'Alembert'sches Prinzip, 52
D-D-Reaktion, 742
d-Funktionen, 677
d-Orbitale, 690
D-T-Reaktion, 742
dünner Ring, Massenträgheitsmoment, 90
dünnwandiger Hohlzylinder, Massenträgheitsmoment, 90
Dämmerungszahl, 531
Dämpfungsfrequenz, 438
Dämpfungsgrad, 439, 443, 446
Dämpfungskoeffizient, 438, 619
Dalton'schen Gesetz, 245
Dampf, Naß, 234
Dampf, trockener, gesättigter, 234
– überhitzter, 234
Dauermagnetsystem, 377
Dauermagnetwerkstoffe, 377
Dauerschallpegel, 633
Davison- und Germer-Beugung, 662
De-Broglie-Beziehung, 600, 811
De-Broglie-Wellenlänge, 664
Debye'sches Gesetz, 231, 816
Debye-Scherrer-Verfahren, 574
Debye-Temperatur, 842
Defektelektron, 819
deformierbarer Körper, Mechanik, 108
Dehnung, 109, 110, 114

– zeitabhänige, 800
Deklination, 352
Dekrement, logarithmisches, 439
Depression, kapillare, 134
destruktive Interferenz, 478
Desublimieren, 237
Detektivität, 855
Detektor, Anregungs-, 723
– Ionisations-, 723
Detektoren, 748
Deuterium-Zyklus, 741
Diamagnetismus, 369–371
Diamantgitter, 787
Dichroismus, 583
Dichte der feuchten Luft, 247
– der Kernmaterie, 706
– einer Flüssigkeit, 130
– fester Körper, 131
– von Gasgemischen, 233
dichteste Kugelpackung, 790
dicke Linsen, 514
Dielektrikum, 340
Dielektrizitätskonstante, 272
Dielektrizitätszahl, 340
Diesel-Prozess, 218, 219
Differentialgleichung
– des Feder-Masse-Systems, 423
– elektromagnetischer Schwingkreis, 433
– erzwungene Schwingung, 444
– gekoppeltes Schwingungssystem, 460
– Struktur, Schwingungen, 427
Differentialgleichung, allgemeine, (Schwingungen), 426
differentieller Energieverlust, 757
differentieller Wirkungsquerschnitt, 704, 705
differentielles Ionisationsvermögen, 757
diffuses Schallfeld, 638
Diffusionsspannung, 826
digitales elektronisches Messwerk, 412
Diode, 828
Dioptrie, 511
Dipolmoment, 272
– elektrisches, 347, 849
– magnetisches, 687
Dirac-Gleichung, 752, 755
direktionisierende Strahlen, 757, 758
Direktschall, 638
Dispersion, 486, 628
Dissipation, 618, 619
dissipative Kraft, 68
Dissonanz, 634
Dissoziation, 292
Donator, 822
– Ionisationsenergie, 823
Doppelbrechung, 580
– Anwendung, 584
Doppelspalt, 549, 565
– Beugung, 484, 593
Doppler-Effekt, 474, 551, 870, 880
Dosisaufbaufaktor, 780
Dosisgröße, 765
Dosismessung, 773
Dosismessverfahren, 775
Drehbewegung, 75–77
– von Systemen materieller Punkte, 78
Dreheisenmesswerk, 410
Drehfrequenz, 40
Drehimpuls, 81
– Definition, 75
– Eigenfunktionen, 701
– Gesamt-, 79
– innerer, 706
– mechanischer, 147
– quantenmechanischer, 668
– zeitliche Änderung, 76
Drehimpuls,, 75
Drehimpulserhaltung, 78, 104
Drehimpulsoperator, 666
– Kommutatoren, 673
Drehimpulssatz von Systemen rieller Punkte, 78
Drehimpulsvektor, 666
Drehkristall-Spektrometer, 573
Drehmoment, 75, 81, 83
– der Strömung, 147
– eines Kräftepaars, 83
– Gesamt-, 79
– Turbine, Pumpe, 148, 149
Drehmomentstoß, 77
Drehspulmesswerk, 410
Drehstrom, 399
Drehstrommotor, 403
Drehwinkel, 40
Drehzahl, 40
– spezifische, 169
Drei-Niveau-System, 596
Dreieck-Stern-Schaltung, 283, 400
Dreiecksschaltung, 399
Dreiphasenstrom, 399
Driftgeschwindigkeit, 816, 817
dritter Hauptsatz der mik, 231
dritter Hauptsatz der Thermodynamik, 176
drittes Kepler'sches Gesetz, Herleitung, 104
Drosselgerät, 142
Druck, 114, 123, 175
– Betriebs-, 140
– Bezugsschall-, 621
– Binnen, 234
– der feuchten Luft, 245
– dynamischer, 140
– Gas, 188, 189
– geodätischer, 140
– Gesamt, 240
– hydrostatischer, 127
– kritischer, 234
– Norm, 185
– Oberflächen-, 133
– Sättigungsdampf-Wasser, 240
– Schallwechsel-, 619
– Schwere-, 127, 128
– statischer, 140
– Stau-, 141, 142
– Wirk-, 142
Druckänderung, Akustik, 615
Druckabfall im Rohr, 152
Druckenergie, 140
Druckerhaltung, 140
Druckfühler, 803
Druckmessung, 124, 141
Druckmittelpunktsabstand, 128
Druckpunkt, 163
Drucksonde, 141
Druckverlust bei Newton'scher bung, 154
Druckwandlung, 126
Druckwasserreaktor, 738
Druckwiderstandsbeiwert, 156
Druckwiderstandskraft, 155
Dualismus Welle
– Teilchen, 592, 661
dünne Blättchen, Farben, 553
dünne Kugelschale, Massenträgheitsmoment, 90
dünne Linse, 510
dünne Scheibe, Massenträgheitsmoment, 90
dünne Schicht, Interferenzen, 552
dünner Stab
– Schallgeschwindigkeit, 616
dünner Stab, Massenträgheitsmoment, 90
Dulong-Petit'sches Gesetz, 204, 841
Durchdringungsverbundwerkstoffe, 803
Durchflussgleichung, 138
Durchflusszahl, 142
Durchflutungsgesetz, 352
durchschnittliche Geschwindigkeit, 193
Durchstrahlverfahren, 727, 728
Duromer, 795, 797
Dynamik, 29, 43
– in bewegten Bezugssystemen, 50
– klassische, 43
– relativistische, 874
dynamische Viskosität, 151
dynamischer Auftrieb, 163
– Druck, 140
dynamisches Grundgesetz der Rotation, 76

E

ebene Schallquelle, 618
ebene Wellen, 468
Ebenen in Kristallgitter, 791
Echelette-Gitter, 568
Echtzeitanalysator, 636

Echtzeitverfahren, 577
Effekt, All-Round-, 805
– Compton-, 591, 759
– Cotton-Mouton-, 583
– Doppler-, 474, 880
– Einweg-, 805
– Ettinghausen-, 845
– Faraday-, 588
– Foto-, 588
– galvonomagnetischer, 845
– gnetooptischer, 584
– Hall-, 363, 846
– Joule-Thomson, 237
– Kerr-, 584
– Koinzidenz-, 629
– lichtelektrischer, 588, 660
– Maggi-Righi-, 846
– magnetischer, 846
– magnetokalorischer, 237
– Magnus-, 145
– Meißner-Ochsenfeld-, 832
– Nernst-, 845
– Paarbildungs-, 759
– Peltier-, 846
– Photo-, 759
– piezoelektrischer, 849
– Pockels-, 584
– Purkinje-, 542
– Quanten-Hall-, 677, 680
– Raman-Effekt, 703
– Righi-Leduc-, 846
– Saugeffekt von Strömungen, 143
– Seebeck-, 182, 846
– Stark-, 690
– Thomson-, 845
– Tunnel-, 684
– Von-Klitzing-, 680, 681
– Zeeman-, 687
– Zener-, 827
– Zweiweg-, 805
Effekte, Grenzflächen-, 131
– relativistische, 872
– thermomagnetische, 846
effektive potentielle Energie, stoffatom, 677
effektiver Multiplikationsfaktor, 738
Effektivwert, 391
– der Wechselspannung, 391
– Schallwechseldruck, 617
– Wechselstrom, 391
Eichschallquelle, 621
Eigenfrequenz, 420, 422
Eigenfunktion, 668
– Impulsoperator, 669
– Wellenfunktion, 672
Eigenleitung, 819
Eigenschaft von Kreisprozessen, 213
Eigenschwingung, 481
Eigenwert, 668, 672
– starrer Rotator, 701
Eigenwertgleichung, 676
Einführung, Mechanik, 29
einfache Welle, 468
Einfangreaktion, 731
Einheit, physikalische, 9
Einlagerung, 793
Einlaufdüse, 142
Einschaltvorgänge in Stromkreisen, 404
Einschlussparameter, 743
Einschwingvorgang, 443
Einstein-Koeffizient, 594
Einstein-Temperatur, 841
Einwegeffekt, 805
elastisch-viskoses Verhalten, 799
elastische Energie, 67, 116
– Lagerung, 643
– Streuung, 731, 759
– Verformung, 108
elastischer Stoß, 69, 72
– Energieerhaltungssatz, 73
Elastizitätsmodul, 110, 111
Elastomer, 797
elekrische Verschiebungsarbeit, 321
elektrische Arbeit, 290
– an Grenzflächen, 349
– anisotrope, 347
– Arten, 347
– atomistische Deutung, 347
– Berührungsthermometer, 182
– Doppelschicht, 295
– Energiedichte, 350
– Feldkonstante, 10–12, 271
– Feldlinie, 318
– Feldstärke, 10, 319, 321, 349
– Gleichungen, 290
– Influenz, 331
– Kapazität, Kugelkondensator, 337
– Kapazitäten, Schaltung, 339
– Kraft, 320
– Ladung, 11, 752
– Leistung, 290
– Leiter, 810
– Leitfähigkeit, 275, 817
– Leitung, 816
– Maschinen, 401
– Messgeräte, 408
– Plattenkondensator, 337
– Polarisation, 340, 341
– Spannung, 10, 11, 274
– Stromdichte, 273
– Stromstärke, 13
– Verschiebungsdichte an Grenzflächen, 349
– Widerstände, 276
elektrische Arbeit
– - verschiedene Geometrien, 339
elektrische Arbeit Feldstärke, 10, 11
elektrische Suszeptibilität, 341
elektrischer Dipol, 686
– -, spezifischer, 278
– Widerstand, 11, 406
elektrischer Dipol Analogie, 381
elektrisches Dipolmoment, 324, 326, 328, 347, 849
– - und Leiter, 331
– - und Materie, 331, 333
– - und Nichtleiter, 340
– Energieinhalt, 349
– Feld, Beschreibung, 318
– Teilchen in Flüssigkeit, 330
elektrisches Feld, 317, 318
Elektrisierung, 341
Elektrizit, 269
elektroakustische Wandler, 620
elektrochemische Daten, 295
– Spannungsquelle, 296
– Spannungsreihe, 296
– Spannungsreihe der Metalle, 296
elektrochemischen Vorgänge, 274
elektrochemisches Äquivalent, 295
Elektrodynamik, 414
Elektrodynamik, relativistische, 878
– spezielle Relativitätstheorie, 878
– stationärer Ströme, 415
elektrodynamische Kraft, 878
elektrodynamischer Wandler, 621
elektrodynamisches Messwerk, 410
Elektroerosion, 294
Elektrokinese, 306
elektrokinetische Vorgänge, 306
Elektrolyse, 292
Elektrolytischer Trog, 138
elektrolytisches Polieren, 294
elektromagnetische Induktion, 383
– Lichtstrahler, 582
– Schwingung, 433
elektromagnetischer Schwingkreis, Differentialgleichungen, 433
Elektromotor, 401, 403
Elektromotorische Kraft, 274
Elektron, 751
– Bewegungsgleichung, 679
– freies, 809
– Hamilton-Funktion, 679
– Ruhemasse, 12
Elektron feld, Flugbahn, 328
Elektronen, Bremsvermögen, 763
– Energieaufspaltung im Magnetfeld, 691
– gebundene, 809
– in Festkörpern, 809
– Streuung, 704
– Wärmeleitfähigkeit, 844
Elektronenbeugung, 601
Elektroneneinfang, 718
Elektroneneinfangdetektor, 729
Elektronenemission, 309
Elektronengas, 788, 815
– molare Wärmekapazität, 815
– zweidimensionales, 680
Elektronengeschwindigkeit, 327
Elektronenhülle, 693
Elektronenmikroskop, 600, 601

Elektronenstrahl-Oszilloskop, 330, 412
Elektronenvolt, 326
Elektronresonator, 690
elektrooptische Eigenschaften, sigkristalle, 808
elektrooptischer Effekt, 585
Elektroosmose, 306, 308
Elektrophorese, 306
Elektrostatik, 414
elektrostatisches Messwerk, 411
– Potential, 321
elementare Belastungsfälle, 113, 114
Elementarladung, 12, 271, 327, 331
Elementarteilchen, 746, 751
– Erhaltungssätze, 752
Elementarwelle, 483
Elemente, Periodensystem, 693
elliptisch polarisiertes Licht, 580
Eloxalverfahren, 294
Emission, 594
– spontane, 853
– spontane, induzierte, 594
– stimulierte, 852
– thermische, 308
Emissionsspektroskopie, 655
Emitter, 829
Emitter-Schaltung, 831
Emitterschaltung, Transistor, 831
Empfangsraum, Schallintensität, 641
Empfindlichkeit, 857
– Diode, 857
endoergische Reaktion, 731
Energetik, 730
Energie, 10, 66, 87, 390, 673, 709
– Bindungsenergie des Kerns, 708
– Coulomb-Energie, Atomkern, 709
– Druck-, 140
– effektive potentielle, Wasserstoffatom, 673
– eines Phonons, 837
– elastische, 67, 116
– elektrische, 350
– freie, 229
– Gesamtenergie, 67
– Gesamtenergie, Schwingung, 432
– innere, 177, 236
– kinetische starrer Körper, 86
– kinetische, Elektronen, 657
– Kondensationsenergie, Atomkern, 709
– Lageenergie, 67
– magnetisches Dipolmoment, 687
– magnetisches Feld, 389
– mittlere thermische, 191
– Oberflächenenergie, 132
– Photon, 590
– potentielle, 106
– potentielle starrer Körper, 86
– Rotationsenergie, 77, 87
– Strahlungsenergie, 543
– thermische, 191
Energie, Feld, 326
Energie, Translation, 81
Energieübertragung, lineare, 770
Energieabsorptionskoeffizient, 764, 767
Energieaufspaltung
– von Protonen im Magnetfeld, 691
Energieband, 809
Energiebandstruktur, 811
Energiedichte, 469, 618
– bei Wellen, 468
– elektrische, 350
– magnetisches Feld, 389
– Schallwelle, 617
– Verlustenergiedichte, 117
Energiedosis, 767
Energieeinschlusszeit, 743
Energieerhaltungssatz, 67
– bei Rotation, 79
– beim elastischen Stoß, 74
Energieflussdiagramm, 215, 216
Energieinhalt des elektrischen Feldes, 350
Energiesatz, Mechanik, 67, 68
Energiestromdichte, 469
– Wellen, 469
Energietransport bei Wellen, 468
Energieveränderung durch Magnetfeld, 682
Energieverbrauch für Ionenpaare, 763
Energieverlust, differenzieller, 757
Entartung, 659
Entfernungsgesetz, photometrisches, 538
Enthalpie, 177
– freie, 231
– spezifische, 247
Entladungslampe, 312
Entmagnetisierungsfaktor, 374
Entropie, 176, 224
– eines Systems, 231
Epitaxie, 852
Erde, Magnetfeld, 352
Erdmasse, 103
Erdradius, 103
Erhaltungssätze bei chen, 752
Erhaltungssatz, Drehimpuls, 78
– Energie, 67, 68
– Impuls, 59
Ericsson-Prozess, 218, 221
Erreger, 445
Erstarren, 237
erste Brillouin-Zone, 838
erster Hauptsatz der mik, 231
erster Hauptsatz der Thermodynamik, 175
Erwartungswert, 14, 672
erzwungene Schwingungen, 422, 444
Estrich, schwimmender, 645
Ettinghausen-Effekt, 846
Ettinghausen-Nernst-Effekt, 846
Euler'sche Formel, 392, 422
Euler'sche Gleichung, Pumpe, 148, 149
Euler'sche Turbinengleichung, 148
exoergische Reaktion, 715, 731
Expansion isobare, 197
Expansionszahl, 142
Experimente zur Quantentheorie, 660
exponentielle Regression, 20
Extremalprinzipien, 662

F

Faktor, relativistischer, 870
Fall, freier, 35
Fallbeschleunigung, 103
Fallzeit, 35
Faraday'sches Gesetz, 294
Faraday-Effekt, 588
Faraday-Konstante, 12, 294
Farben dünner Blättchen, 553
Farbladung, Quantenzahl, 749
Faserkreisel, optische, 100
Faserverbund, 800
Faserverbundwerkstoffe, 803
Fast-Fourier-Transformation, 634
Fata Morgana, 504
Feder-Masse-System, Differenzialgleichung, 423
Federkonstante, 47
Federn, Parallelschaltung, 47
– Serienschaltung, 47
Fehler, Anpassungs, 21
Fehlerfortpflanzung, 18
Fehlerrechnung, 14
Fehlerrechung
– Kennwerte, 16
Fehlersumme, 16, 20
Feinstrukturkonstante, Sommerfeld'sche, 12, 659
Feld, allgemein, 317
– elektrisches, 318
– magnetisches, 318, 351, 359
– Schallfeld, diffuses, 638
– Strömungsfeld, 135
Feldeffektransistor, 680
Feldelektronenmikroskop, 309
Feldemission, 308, 309
Felder, instationäre, elektromagnetische, 383
Felder, instationäre, Vergleich: Hydrodynamik, Wärme, Elektrizität, 137
Feldkonstante, elektrische, 12, 271
– magnetische, 12, 359
Feldlinse, 531
Feldstärke, allgemein, 136, 348
– elektrische, 10, 320, 321
– Gravitationsfeldstärke, 106
– magnetische, 11, 352, 353
– Transportfeldstärke, 137
Fermat'sches Prinzip, 662

Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion, 814, 815, 820
Fermi-Energie, 813
Fermi-Fläche, 817
Fermi-Gas, 713
Fermi-Kugel, 814
Fermi-Niveaus verschiedener Metalle, 814
Fermi-Temperatur, 816
Fermi-Verteilung, 706
Fermionen, 749
Fernpunkt, 525
Fernrohr, 529
Ferrimagnetismus, 375
Ferromagnetismus, 369, 371, 372, 375
feste Körper, Dichte, 131
– Härte, 119
– Struktur, 785
– Thermodynamik, 837
festes Ende, Wellenreflexion, 480
Festigkeit von Werkstoffen, 111
Festkörper, Ausdehnung, 181
– Elektronen, 808
– makromolekularer, 796
Festkörperlaser, 596
Festkörperphysik, 785
feuchte Luft, Dichte, 247
– Druck, 245
– spezifische Enthalpie, 247
Feuchtegrad, 246
Feynman-Diagramm, 755
Figurenachse, 95
Fizeau-Streifen, 555, 557
Fläche, 10
Flächenfehler, 793, 794
Flächenträgheitsmoment, 128
flächenzentrierte Gitter, 789
Flatterecho, 638
Flüssigkeit
– Ausdehnung, 184
– Ausfließen aus Gefäßen, 143
– Dichte, 131
– strömende, 135
Flüssigkeitspendel, 431
Flüssigkeitsreibung, 143
Flüssigkristall, 586, 806, 807
Fluidität, 151
Fluss, elektrischer
– magnetischer, 10, 11, 357
Flussdichte, kritische magnetische, 832
– elektrische, 331
– magnetische, 358
Flussquant, 832
Förderhöhe
– Pumpe, 148
Formgedächtnis-Legierung, 804
Fotoapparat, 532, 533
Fotodiode, 535, 856
Fotoeffekt, 588, 854
Fotoemission, 309
Fotoleiter, 856
Fotometrie, 534
fotometrische Größen, 543
fotometrisches, 537
– Grundgesetz, 537
– Strahlungsäquivalent, 543
fotopische Anpassung, 543
Fotostrom, 856
Fototransistor, 859
Fotowiderstand, 276, 855
Foucault'sches Pendel, 55
Fourier-Analyse, 420, 454
Fourier-Differenzialgleichung, konvektiver Wärmeübergang
– Wärmeleitung, 248
Fourier-Koeffizienten, 455
Fourier-Reihe, 456
Fourier-Synthese, 450, 455, 485
Fränkelpaar, 793
Francisturbine, 168, 170
Franck-Hertz-Versuch, 660
Fraunhofer'sche Beugung, 559
freie Achsen, 92
freie Elektronen, Konzentration, 823
– Modell, 811
freie Energie, 230
freie Enthalpie, 231
freie gedämpfte Schwingung, 436
freie harmonische Schwingung, 423
freie Schwingungen, 422
freier Fall, 35
freies Elektron im Magnetfeld, 678
freies Ende, Wellenreflexion, 480
freies Teilchen, Impuls, 669
Freiheitsgrad, 31, 80, 191, 202, 245, 662
– n-atomiges Molekül, 699
Fremdatom, 822
Fremdstörstelle, 792, 793
Frenkel-Paar, 792
Frequenz, 10, 422, 426
– Drehfrequenz, 40
Frequenzbereich, Musikinstrumente, 635
Frequenzlücke, 840
Fresnel'scher Spiegelversuch, 551
Fresnel'sches Zonensystem, 575
Fresnel, Beugung, 559
Froudezahl, 162
Füllhalterdosimeter, 774
fundamentale Wechselwirkungen, 754
Fundamentalschwingung, 460
Funkenentladung, 312
Fusionsreaktion, 741

G

g-Faktor, 687
Galilei'sches Fernrohr, 529
Galilei-Transformation, 51
galvanische Zelle, 296
Galvanisieren, 293
galvanomagnetische Effekte, 845
Gamma-Emission, 718
Gamma-Strahlung, 715, 763
Gamma-Zerfall, 716
Gangunterschied, 478, 553, 556
Gas, ideales, 185, 188
– reales, 232
Gasdruck, 188, 190
Gase, Ausdehnung, 184
– ideale, Kompressionsmodul, 615
– ruhende, 123
– Schallgeschwindigkeit, 615
– Schweredruck, 128
– strömende, 135
Gasentladung, selbständige, 310
– unselbständige, 310
Gasgemische, Dichte, 233
Gaskonstante, individuelle, 186
– universelle, 12, 186
Gasmoleküle, 192
Gastheorie, 190
Gastheorie, kinetische, 188
Gasthermometer, Prinzip, 179
Gasturbine, offene, 220
Gasverflüssigung, 236
Gauß'sche Zahlenebene, 392
Gay-Lussac'sches Gesetz, 185
Gebiete, 6
Gebiete der Physik, 7
gebundene Elektronen, 809
gedämpfte elektronmagnetische Schwingung, 442
gedämpfte Schwingungen, 439
gefesselter Kreisel, 98
Gegenstandsweite, 497
Gehörorgan, schematisch, 630
Geiger-Müller-Zählrohr, 724, 726, 728
gekoppeltes Schwingungssystem, 459, 460
geladene Teilchen im elektrischen Feld, 326
generalisierte Koordinaten, 663
generalisierter Impuls, 663
Generator, 385, 403
Generatorprinzip, 384
genetisch verknüpfte Radionuklide, 720
genetische Schäden, 771
geodätischer Druck, 140
Geometrien von Schallquellen, 621
geometrische Ähnlichkeit, 159
– Optik, 492
Geräteeigenschaften, 413
Geräusch, 613, 634
Germer- und Davison-Beugung, 661
Gesamtaktivität, 721
Gesamtdrehimpuls, 78
Gesamtdrehmoment, 79
Gesamtdruck, 240
Gesamtenergie, 67

– Schwingung, 432
Gesamtimpuls, 59
– eines Systems, 59
Gesamtschallpegel, 622
Gesamtschwächungskoeffizient, 764
Gesamtselbstinduktivität, 389
Gesamtspannung des Verbundwerkstoffs, 803
Gesamtvergrößerung, 528
Gesamtwirkungsgrad, 65
Geschwindigkeit, 10, 11, 30, 81
– durchschnittliche, 193
– Energie, 10
– gleichmäßige, 34
– kritische, 171
– Licht, 13
– mittlere, 31, 189
– mittlere, Gasmoleküle, 189
– Momentan-, 31, 37
– nach dem Stoß, 71
– Rakete, 61
– Strahl, 60
– Teilchen im elektrischen Feld, 327
– Umfangsgeschwindigkeit, 42
– wahrscheinlichste, 193
– Winkel, 39, 81
Geschwindigkeiten, relativistische Addition, 874
Geschwindigkeitsgefälle, Akustik, 615
Geschwindigkeitspotenzial,, 137
Geschwindigkeitsvektor, 36
Geschwindigkeitsverteilung, 192, 193, 240
Geschwindigkeitsziffer, 143
Gesetz, Aktionsgesetz, 45, 103, 152, 538, 614
– Biot-Savart'sches, 354
– Boyle-Mariotte'sches, 185
– Brewster'sches, 580
– Bunsensches Ausströmgesetz, 145
– Coulomb'sches, 272
– Curie'sches, 370, 372, 375
– Curie-Weiss'sches, 372
– Debye'sches, 231
– Durchflutungsgesetz, 352
– Faraday'sches, 294
– Gay-Lussac'sches, 184
– Grundgestz, Newton'sches, 45
– Hagen-Poiseuille'sches, 153
– Hooke'sches, 48, 110, 112
– Induktionsgesetz, 383
– Kepler'sches zweites, 104
– Lambert'schcs Cosinusgesetz-, 536
– Malussches, 579
– Newton'sches Reibungsgesetz, 151
– Ohm'sches, 278
– radioaktives Zerfallsgesetz, 719
– Rayleigh-Jeans-Gesetz, 596
– Reflexionsgesetz, 493
– Rohrwiderstandsgesetz, 154
– Stefan-Boltzmann-, 542
– Toricelli'sches Ausflussgesetz, 143
– Trägheitsgesetz, 45
– Wechselwirkungsgesetz, 45
– Wiedemann-Franz'sches, 249, 844
– Wien'sches Verschiebungsgesetz, 541
– Zerfallsgesetz, 719
Gesetze, Kepler'sche, 101
– Kirchhoff'sche, 278
Gesichtsfeld, 523
gewöhnliche Wellengleichung, 471
Gibbs'sche Phasenregel, 245
Gibbs'sches Potential, 231
Gitter, Auflösungsvermögen, 569
Gitter, Beugung, 564
– Echelette-, 568
Gitter, holografisches, 568
Gitterbeugung, Hauptmaxima, 566
Gitterbeugungsfunktion, 565
Gitterfehler, 792, 793
Gitterkonstante, 564, 790
Gitterschwingungen, 837
Gittertypen, dichteste, 790
Gitterwelle,, 839
Glan-Thompson-Prisma, 582
Glas, metallisches, 794
gleichförmig rotierende Koordinatensysteme, 53
Gleichgewicht, 86
– -zwischen fester und flüssiger Phase, 240
– thermodynamisches, 238
Gleichgewichtsbedingungen, 238
– der Statik, 84
Gleichgewichtszustand, 177
gleichmäßig beschleunigte Bewegung, 40
gleichmäßige Beschleunigung, 34
– Geschwindigkeit, 34
– Kreisbewegung, 42
gleichsinniger Parallelismus, 97
Gleichungen, Poisson'sche, 208
Gleichverteilungssatz, 191, 203
Gleitreibungskraft, 436
Gleitreibungszahl, 48
Gleitzahl, 164
Glimmentladung, 311
Glühemission, 308
Glühlampe, 312
Gluon, 753, 754
Grad Celsius, 180
Gradient,, 137
gramm, 159
Gravitation, 101, 103, 754
Gravitations- und elektrisches Vergleich, 324
Gravitationsdrehwaage, Cavendish'sche, 103
Gravitationsfeld, 324
Gravitationsfeldstärke, 106
Gravitationsgesetz, Newton'sches, 103
Gravitationskonstante, 12, 103
Gravitationskonstante, relativistische, 12
Gravitationskraft, 45, 103, 106, 272
– Gravitationskraft, Coulomb Kraft Unterschiede, 272
Gravitationspotential, 106
Gray-Energiedosisleistung, 767
Grenzdämpfung, 48, 448
Grenzentfernung, photometrische, 535
Grenzfall, aperiodischer, 440
Grenzfläche, biegeweiche, 624
– Reflexionsfaktor, 624
Grenzflächen, elektrische
– schallharte, -weiche, 624
– Schallwellen, 625
Grenzflächen, elektrische Feldstärke, Verschiebungsdichte, 349
Grenzflächeneffekte, 131
Grenzfrequenz der Spuranpassung, 628
Grenzgerade, 21
Grenzschicht, 157
Grenzschichtbildung, laminare und turbulente, 158
Grenzwinkel der Totalreflexion, 502
Grenzwinkel, physiologischer, 525, 564
Größe, extensive und intensive, 178
– molare und spezifische, 178
– physikalische, 8, 10
Größtfehler, 18
Grundgesetz, hydrodynamisches, 614
– fotometrisches, 537
– Newton'sches, 45
Grundgleichung der kinetischen
– idealer Strömungen, 138
– reibungsfreier Strömungen, 138
Grundschwingung, 481
– Frequenz, 481
Gruppengeschwindigkeit, 472, 485, 839
Gruppenschaltung, 288
Güte, 443, 448
Güteschalter, 597
Gunn-Diode, 828
gyromagnetisches Verhältnis, 687, 688

H

h, *x*-Diagramm, 248
Hadron, 749, 751, 754
Härte fester Körper, 119
Härteprüfverfahren, 120
Häufigkeit, relative, 14
Häufigkeitsverteilung, 14, 15
Haftreibung, 49
Haftreibungszahlen, 48
Hagen-Poiseuille'sches Gesetz, 152

Haidinger'sche Ringe, 553
Halbleiter, 277, 534, 809, 818
– spezifischer elektrischer, 278
Halbleiter, Eigenschaften, 821
– Leitfähigkeit, 820
– Leitungsmechanismen, 821
Halbleiterlaser, 852, 853
Halbwertszeit, 719
– biologische, 780
– physikalische, 719, 780
Hall-Effekt, 363, 365, 814, 845
Hall-Generator, 365
Hall-Koeffizient, 365
– einiger Werkstoffe, 366
Hall-Spannung, 365, 680, 681
Hall-Widerstand, 680–682
Halogenlampe, 317
Hamilton'sches Prinzip, 662
Hamilton-Funktion, 663, 667
Hamilton-Funktion eines Elektrons, 677
Hamilton-Operator, 662
– kartesische Koordinaten, 673
– Kugel-Koordinaten, 673
Hangabtriebskraft, 46
Harmonices mundi, 101
harmonische Schwingungen, 422
– und Kreisbewegung, Zusammenhang, 421
harmonische Wellen, 468
harmonischer Oszillator, 679, 700
Hartmagnet, 376
Hauptachse, kristallografische, 581
Hauptebene, 514
Hauptmaxima, Gitterbeugung, 566
Hauptquantenzahl, 659, 677, 693
Hauptsatz, dritter, 176, 231
Hauptsatz, erster, 175, 231
Hauptsatz, nullter, 179
Hauptsatz, zweiter, 175, 222
Hauptschnitt, 581
Hauptspannung, 115
Hauptstrahl, 523
Hauptträgheitsachse, 92
Hauptträgheitsmoment, 92
Hebung, kapillare, 134
Heidinger'sche Ringe, 553
Heisenberg'sche, 601
Heisenberg'sche Unschärferelation, 673, 748
Heißleiter, 275
Hellempfindlichkeitsgrad, 543
Helligkeit, 532
Helmholtz-Lagrange-Gleichung, 510, 511, 540
Helmholtz-Resonator, 626
heteropolare Bindung, 786
Histogramm, 14
Hitzdrahtmesswerk, 411
Hochtemperatur-Reaktor, 740
Höhenformel, barometrische, 129
– internationale, 129
Höppler-Kugelfallviskosimeter, 153
Hörbereich, Schallfrequenz, 629
Höreindruck, 632
Hörschwelle, 632
Hohlraumionendosis, 776
Hohlraumstrahler, 541
Hohlspiegel, 496
Hohlzylinder, Masseträgheitsmomente, 90
Hollraumstrahlung, 660
Holografie, 574
holografische Korrelation, 577
holografisches Gitter, 568
Hologramm, 575
homöopolare Bindung, 787
Hooke'sches Gesetz, 48, 110, 112, 424
– bei Scherung, 112
Hubarbeit, 64, 65, 104
Huygens'sches Prinzip, 483
Huygens-Fresnel'sches Prinzip, 484, 559
Hydratisierung, 293
– von Ionen, 293
Hydraulik, 123
hydraulische Presse, 125
Hydrodynamik, 135
– Impulssatz, 146
hydrodynamische, Ähnlichkeit, 158
hydrodynamisches Grundgesetz, 614
– Paradoxon, 144
Hydrostatik, 123
hydrostatischer Druck, 127
hydrostatisches Paradoxon, 127
Hyperschall, 631
Hysterese, magnetische, 373
Hysterese, mechanische, 117
Hysteresekurve, 117, 372

I

ideale Gase, allgemeine, 211
ideale Gase, allgemeine Zustandsgleichungen, 185
– Kompressionsmodul, 615
– spezielle Zustandsänderungen, 204
ideale Strömungen,, 138
ideales Gas, 185, 188
Impatt-Diode, 828
Impedanz, 399
Impuls, 56, 81
– Drehimpuls, 76, 81
– eines materiellen Punktes, 56
– eines Phonons, 837
– eines Photons, 592
– eines Systems, 58
– freies Teilchen, 669
– generalisierter, 663
– relativistischer, 876
Impulsänderung, 57
– zeitliche, bei Strömung, 145
Impulserhaltungssatz, 59
Impulsoperator, 666
– Eigenfunktion, 669
Impulssatz, 59
– in der Hydrodynamik, 146
Impulsvektor, 666
indifferentes Gleichgewicht, 86
indirekt ionisierende Strahluna, 759, 763
indirekter Schall, 638
Induktionsgesetz, 383
Induktionsmesswerk, 411
Induktionsvorgang, 384, 385
induktive Zeitkonstante, 407
induktiver Blindwiderstand, 393
induzierte Emission, 594
inelastische Streuung, 731, 759
inelastischer Stoß, 71, 731
Inertialsystem, 44, 867
Influenz, 210
– elektrische, 331, 333
Infrarotspektrum, 702
Infraschall, 631
innere Energie, 236
– Kräfte, 58
– Reibung, 49, 150
– Strahlenbelastung, Schutz, 779
innerer Widerstand, 287
instationäre Felder, tromagnetische, 383
Instrumente, optische, 523
Intensität von Wellen, 469
Intensitätsverteilung am Spalt, 664
– bei der Beugung, 561
Interferenz, 477, 491, 549, 552
– destruktive und konstruktive, 478
Interferenzen an dünnen Schichten, 552
– gleicher Dicke, 555
Interferenzfarbe, 553
Interferenzfunktion, 566
Interferenzholografie, 577
Interferenzlinie, 553
Interferenzmikroskop, 558
Interferometer, 479, 557
intermediäre Vektorbosonen, 754
internationale Höhenformel, 129
intrinsische Trägheitsdichte, 822
Invariante, Abbe'sche, 508
inverser piezoelektrischer Effekt, 848
Inversionstemperatur, 236
Ionen, Hydratisierung, 293
Ionenbindung, 787
Ionendosis, 767
Ionendosisleistung, 767
Ionenpaare, Energieverbrauch, 763
Ionisation, 758
– spezifische, 761
Ionisationsdetektor, 723, 724
Ionisationsvermögen, 757, 762
ionisierende Strahlung, direkte, 758
– indirekte, 759, 764
– Messung, 723

Ionisierungsenergie, 761, 762
Ionisierungskoeffizient, 310
irreversibler Prozess, 222, 226
isentrope Zustandsänderung, 207, 211
Isentropenexponent, 165, 190, 202, 208
Isobare, 207, 210
isobare molare Wärmekapazität, 197
– Zustandsänderung, 207, 211
Isochore, 210
isochore molare Wärmekapazität, 195
– Zustandsänderung, 206, 211
Isochromate, 584
Isokline, 584
Isolator, 809, 842
– elektrischer, 809
– Wärme, 843
Isolierwirkungsgrad, 643, 644
Isospin, 751, 753
Isotherme, 205, 209, 243
isotherme Kompression, 205
– Zustandsänderung, 205, 211
isotropes Verhalten, 789

J

Jet, 745
Joule-Prozess, 218, 220
Joule-Thomson-Effekt, 236

K

Käfiganker, 403
Kältemaschine, 216
Kalkspat, 582
Kalorimetrie, 196
kalorische Zustandsgrößen, 177
Kaltleiter, 277
Kanalstrahlen, 312
Kapazität, 335
Kapazität, Kugelkondensator, 337
– Plattenkondensator, 337
– Wärmekapazität, 10, 11
Kapazitäts-Diode, 828
kapazitive Zeitkonstante, 406
kapazitiver Blindwiderstand, 393
Kapillaraszension, 134
Kapillardepression, 134
Kapillarität, 133
Kaplanturbine, 168, 170
Katakaustik, 495
Kataphorese, 307
Kathodenstrahl, 312
Kation, 292
Kavitation, 171, 646
Kavitationsgeräusch, 647
Kegel, Mach'scher, 476
Kelvin, 9
Kennwerte der Fehlerrechnung, 16
Kepler'sche Gesetze, 101
Kepler'sches Fernrohr, 529
Kepler'sches Gesetz, drittes, 104
Kepler'sches Gesetz, zweites, 104
Kern, Bindungsenergie, 708
Kernfusion, 708, 741
– Experimente, 743
Kernmagnetismus, 686, 688
Kernmagneton, 690
Kernmaterie, Dichte, 705
Kernmodell, 706
Kernphysik, 653
Kernradius, 705
Kernreaktion, 730, 731
Kernreaktor, 736
Kernspaltung, 708, 731, 733, 735
Kernspin, magnetische, 688
Kernspinresonanz, 690
Kernspintomografie, 691
Kernumwandlung, 714
Kerr-Effekt, 583, 585
Kilogramm, 9
Kinematik, 29, 43
– starrer Körper, 80
kinematische Zähigkeit, 151
Kinetik, 29
kinetische Energie, 665, 875, 877
– bei Rotation, 81
– bei Translation, 81
– starrer Körper, 86
– Teilchen im elektrischen Feld, 327
kinetische Gastheorie, 188
– Grundgleichung, 190
Kippschwingung, 463
Kippspannung, 330
Kirchhoff'sche Gesetze, 278
Klang, 634
Klassifikation der Stoßprozesse., 70
klassische Dynamik, 43
– Mechanik, 43
– Physik, 6
klassische Physik, 5
Klein-Gordon-Gleichung, 755
Kleinwinkel-Korngrenze, 793
Klemmspannung, 287, 288
Klimatechnik, 245
Knall, 613, 634
Knotenregel, 278
Koeffizient, Abkling-, 439, 443
– Absorptions-, 855
– Dämpfungs-, 439, 619
– Einstein-Statistik, 594
– Energieabsorptions-, 764, 767
– Gesamtschwächungs-, 764
– Hall-, 365
– Ionisierungs-, 310
– Korrelations-, 22
– Längenausdehnungs, 181
– Luftdämpfungs-, 619
– Luftreibungs-, 48
– Massenschwächungs-, 764
– Raumausdehnungs, 181
– Schwächungs-, 696
– Volumenausdehnungs-, 126
– Zähigkeits-, 48
Koeffizienten, Fourier-, 455
Körper, starrer, 30, 80
Körperdosis, 776
Körperschall, 642
Körperschalldämmung, 642
Koerzitivfeldstärke, 374
Koexistenz, 243
Kohärenz, 479, 549
Kohärenzbedingung, 551
Kohärenzeigenschaften einiger Lichtquellen, 550
Kohärenzlänge, 551
Kohäsionskraft, 131
Kohlenstoff-Zyklus, 741
Koinzidenzeffekt, 629
Kolbenmaschinen, 218
Kolbenpumpe, 167
Kollektor, 829
Kollektor-Schaltung, 831
– Transistor, 831
Kollektorstrom, 860
Koma, 524
Kommutator, 403, 672
Kompensationsmethode, 286
Kompensationsmethode nach Poggendorf, 286
komplexer Widerstand, 393
Kompressibilität, 112, 125
kompressible Medien, Bernoulli-Gleichung, 165
Kompression, allseitige, 112
– isotherme, 206
Kompressionsarbeit, 206
Kompressionsmodul, 110, 112, 615
– idealer Gase, 616
Kondensationsenergie, Atomkern, 709
– Kondensator, 393
– Kraft zwischen zwei Platten, 350
– Stromkreis, 404, 406
Kondensatoren als Baulelemente, 342
– Einteilung, 345
– Reihen- und Parallelschaltung, 339
Kondensieren, 237
Konditionierung, 245
Konduktanz, 399
Konkavspiegel, 495
konservative Kraft, 68
Konsonanz, 634
Konstante, 657
– atomare von Metallen, 790
– Atommassen-konstante, 707
– Avogadro, 12, 187
– Avogadro-, 12
– Boltzmann-, 12, 187, 595
– Dielektrizitäts-, 271
– Faraday-, 12, 294
– Feder-, 47
– Feinstruktur-, Sommerfeld'sche, 12
– Feld-, elektrische, 12, 271, 317

– Feld-, magnetische, 12, 351
– Gas-, 12, 184
– Gitter-, 564, 790
– Gravitations-, 12, 103
– Kraft-, 81
– Madelung-, 787
– Natur-, 12
– Rydberg-, 656
– Solar-, 538
– Stefan-Boltzmann-, 12
– van-der-Waals'sche, 235
– Verdet'sche, 588
– Zeit-, kapazitive, 394
– Zerfalls-, 719
Konstante,, 778
Konstante, Äquivalent-Dosisleistungs-, 777
konstruktive Interferenz, 478
Kontaktbimetalle, 800
Kontaktpotential, 713
Kontaktspannung, 847
Kontamination, 756
Kontinuitätsgleichung, 136–138
– Anwendung, 140
– Elektrizitätslehre, 137
– Wärmelehre, 137
Kontinuitätsgleichung, Hydrodynamik, 137
Kontraktionszahl, 143
Konvektion, 248
Konversationsfaktor, 740
Konversion, 718
Konvexspiegel, 498
Koordinaten, generalisierte, 663
– Schwerpunkt, 85
Koordinatensystem, rotierendes, 52
Koordinationzahl, 791
Kopplungsgrad, 462
Korngrenze, 793
Korpuskulartheorie, 491
Korrelation, holografische, 577
Korrelationsanalyse, 22
Korrelationskoeffizient, 22
Korrespondenz-Prinzip, 668
kovalente Bindung, 786
Kovolumen, 233
Kräfte am starren Körper, 82
– auf Punkte im System, 58
– auf schiefer Ebene, 47
Kräfteaddition, 46
kräftefreier Kreisel, 95
Kräftegleichgewicht, statisches, 47
Kräftepaar, Drehmoment, 83
Kräfteparallelogramm, 45
Kräftezerlegung, 46
Kräfte am starren Körper
– im Rohrkrümmer, 147
Kraft, 10, 43, 45, 81, 350
– Addition, 45
– Auf triebs-, dynamische, 163
– Auftriebs-, 130
– Auftriebs-, Zirkulation, 163
– Brech-Linse, 511
– Coriolis-, 55
– Coulomb-, 272, 657
– dissipative, 68
– Druckwiderstands-, 155
– elastische, 47
– elektrodynamische, 878
– elektromotorische, 274
– Gleitreibungs-, 436
– Gravitations-, 103, 106
– Hangabtriebs-, 47
– innere, 58
– konservative, 68
– Lager-, 644
– Linienflüchtigkeit, 82
– Lorentz-, 363
– Normal-, 47
– rücktreibende, Akustik, 614
– Reibungs-, 48, 150, 153, 436
– Reibungswiderstands-, 154
– relativistische, 876
– resultierende, 83
– Rollreibungs-, 436
– Schein-, 51
– Schub-, 61
– Schwer-, 47
– Seitendruck-, 128
– Stütz-, 85
– Trägheits-, 51
– Trägheits-, Akustik, 614
– Wirkungslinie, 83
– Zentrifugal-, 55
– Zentripetal-, 47
– Zerlegung, 45
– Zusammenhangs-, 131
Kraft Magnetfeld, 363
Kraft zwischen zwie elektrischen Leitern, 363
Kraftkonstante, 81
Kraftmessung, Methoden, 48
Kraftstoß, 56
Kraftwirkungen auf frei bewegliche Ladungsträger, 368
– im Magnetfeld, 357, 359
Kraftwirkungen auf frei Ladungsträger, 366
Kreisbewegung, 39, 42
– gleichmäßig beschleunigte, 42
Kreisel, 95
– gefesselter, 99
– kräftefreier, 95
Kreiselhorizont, 98
Kreiselkompass, 99
Kreiselmoment, 98
Kreiselpendel, 98
Kreiselpumpe, 167
Kreisfrequenz, 422, 426
– Gitterwellen, 838
Kreiskolbenpumpe, 167
Kreisprozess, allgemein, 212
– Carnot'scher, 212, 213, 224
– irreversibler, 226
– linksläufiger, 216
– rechtsläufiger, 213
Kreisprozesse, 212
– Eigenschaften, 212
– technische, 217, 218
Kriechfall, 440, 442
Kristall, negativer und positiver, 581
Kristallbindung, 785
Kristalle, Brechzahlen, 582
Kristallgitter, Richtungen und Ebenen, 791
kristalline Strukturen, 788
kristallografische Hauptachse, 581
Kristallsysteme, 789
Kriterium, Rayleigh'sches, 563
kritische Geschwindigkeit, 171
– Isotherme, 213
– magnetische Flussdichte, 832
– Reynoldszahl, 158
– Temperatur, 234
– Temperatur, Supraleitung, 833
kritischer Druck, 235
– Punkt, 234, 236
kritisches Volumen, 234
Kühlmittel, 738
künstliche Spaltung, 733
Kugel, elektrisches Feld, 330
– Massenträgheitsmomente, 90
Kugelflächen, Lichtbrechung, 507
Kugelkondensator, Kapazität, 337
Kugelpackung, dichteste, 790
Kugelwelle, 468
Kundt'sches Rohr, 481, 625
Kunststoffe, 798, 799
Kurskreisel, 95
Kurvenanpassung, 18
– grafische, 21
Kurzschlussläufer, 403

L

labiles Gleichgewicht, 86
Ladung, 271
– elektrische, 10
– spezifische, 367
Ladungsträgerkonzentration, 680
Ladungstransport, 292, 310
– in Flüssigkeiten, 292
– in Gasen, 292, 310
– stationärer, 273
Ladungsverteilung, 706
– im Atomkern, 706
Längenausdehnuneskoeffizient, 181
Längenkontraktion, 868, 872
Längswelle, 465
Lärmschwerhörigkeit, 633
Lageenergie, 67
Lagerkraft, 643
Lagerung, elastische, 642
Lagrange-Funktion, 663
Lambert'sches Cosinusgesetz, 536
Lambert-Strahler, 536

laminare Grenzschichtbildung, 158
laminare Rohrströmung, 151
laminare Strömung, 150
laminare Umströmung, 153
Landau-Effekt, 682
Landau-Niveaus, 682
Landau-Quantisierung, 657
Laplace-Gleichung, 136, 251
Laser, 596, 854
Laserdiode, 852
Laserdosis, 852
Laserkreisel, 100
latente Wärme, 237
Lateralvergrößerung, 498
Laue-Diagramm, 572
Laue-Gleichungen, 572
Laufradleistung, Turbine, 149
Lautheit, 632
Lautsprecher, 620
Lautstärke, 632
Lawinen-Fotodiode, 859
Lawson-Diagramm, 743
Leckage, 738
Leerlaufspannung, Fotodiode, 856
Leerstellen, 792, 793
Leistung, 10, 64
– bei Rotation, 81
– Drehbewegung, 77
– elektrische, 290
– gegen turbulente Strömung, 156
– im Wechselstromkreis, 394
– mittlere, 65
– Momentan-, 64, 77
– Nenn-, 64
– Translation, 81
– Turbine, 148
Leistung 8
– Torsions-, 77
Leistungszahl, 216
– für Carnot-Prozess, 217
Leiter, elektrischer, 810
– erster Art, 809
– im elektrischen Feld, 331
– im Magnetfeld, 359
– zweiter Art, 809
Leiterspannung, 400
Leiterstrom, 400
Leitfähigkeit eines Halbleiters, 382, 820
Leitfähigkeit, elektrische, 275, 817
– elektrische und magnetische, 381
Leitrad, 147
Leitungsband, 810
Leitungsmechanismen in Halbleitern, 820
Leitwert, 275
Leptonen, 749, 751, 755
Leptonenzahl, 752
Leuchtdichte, 543
Leuchtdiode, 536, 544, 850
Licht, Brechung, 499
– elliptisch polarisiertes, 580
– Polarisation, 491
– zirkular polarisiertes, 579
Lichtbrechung an einem Prisma, 504
– an Kugelflächen, 507
lichtelektrischer Effekt, 588, 660
Lichtgeschwindigkeit, 12, 13, 880
Lichtmenge, 543
Lichtmessung, 534
Lichtquanten, 588
Lichtquantenhypothese, 492, 590
Lichtreflexion, 493
– an gekrümmten Flächen, 495
Lichtsekunde, 870
Lichtstärke, 9, 545
Lichtstrahlen, 493
Lichtstrahler, elektromagnetische, 583
Lichtstrom, 543, 544
Lichttechnik, 542
lichttechnische Größen, 542
Lichtwellenleiter, 503
lineare Energieübertragung, 770
lineare Regression, 21
linienförmige Schallquelle, 618
Linienfehler, 793, 794
Linienflüchtigkeit der Kraft, 82
linksläufiger Kreisprozess, 216
Linse, 510
– Brechkraft, 511
– Brennweite, 511
– dünne, 510
– dicke, 514
Linsensysteme, 517
Linsentypen, 513
Lissajous-Figuren, 450, 457, 459
Lochblende, 561
Löcher, 819
Lösungsfunktion der Wellengleichung, 616
logarithmische Regression, 21
logarithmisches Dekrement, 439
longitudinale Molekülschwingung, 617
longitudinaler Doppler-Effekt, 880
Longitudinalwelle, 465, 613
Longitudinalwellen in Gasen, 481
Lorentz-Kraft, 363, 364, 834, 845
Lorentz-Transformation, 868, 870
Lorenz'sche Zahl, 249
Luft, feuchte, Druck, 245
luftäquivalentes Wandmaterial, 773
Luftdämpfungskoeffizient, 619
Luftfeuchtigkeit, 245
Luftreibungskoeffizient, 49
Luftschalldämmung, 641
Lumineszenz-Diode, 828, 850
Lupe, 526
Lux, 544
Lyman-Serie, 657

M

Mach'scher Kegel, 476
Mach'scher Winkel, 477
Machzahl, 165, 477
Madelung-Konstante, 787
Maggi-Righi-Effekt, 846
magische Zahl, 711, 713
Magnetfeld der Erde, 352
– Kraftwirkungen, 359
– und elektrischer Leiter, 359
– und Kraftwirkungen, 358
– und Materie, 368
magnetische Energie
– Feldkonstante, 359
– Feldstärke, 11, 352
– Feldstärke, geradliniger Leiter, 353
– Feldstärke, Leiter beliebiger Geometrie, 354
– Feldstärke, Ringspule, 354
– Feldstärke, Zylinderspule, 354
– Flussdichte, 357
– Induktion, 11, 359
– Leitfähigkeit, 382
– Polarisation, 368
– Quantenzahl des Kernspins, 688
– Salze, 236
– Suszeptibilität, 369
– Werkstoffe, 376
magnetische Energie Flussdichte, kritische, 832
magnetischer Einschluss, 744
– Fluss, 11, 357, 383
– Werkstoff, 376
– Widerstand, 382, 399
magnetischer Einschluss Analogie, 381
magnetisches Dipolmoment, 687
– Feld, 351, 389
magnetisches Dipolmoment Feld, Energiedichte, 389
magnetisches Dipolmoment Moment, 361, 688
Magnetisierung, 369
Magnetismus, 351
– Bahn-, 687
– Kern-, 686
– Spin-, 687
magnetokalorischer Effekt, 237
Magneton, Bohr'sches, 363
Magneton,Bohr'sches, 687
Magnetorotation, 588
Magnetostatik, 414
Magnetostriktion, 375, 647
Magnetschwebebahn, 377
Magnus-Effekt, 145
Majoritätsträger, 823
makromolekulare Festkörper, 796
Makrophysik, 5
Malus-Gesetz, 579
Mammutpumpe, 167
Manometer, 124
Maschenregel, 279
Maschinen, elektrische, 401
Masse, 9, 44, 81

Masse eines Körpers, 875
Masse, schwere, träge, 45
Masse-Feder-System
– Resonanzkurve, 644
Masse-Feder-System, Frequenz, 625, 643
Maßeinheiten, 8
– Potenzen, 13
Massenanziehung, 103
Massenbremsvermögen, 762
Massendefekt, 708
Masseneinheit, atomare, 707
Massenmittelpunkt, 59
Massenschwächungskoeffizient, 764
Massenspektrograph, 367
Massenspektrometer, 707
Massenstrom, 60, 138
– beim Ausfluss, 143
– im Rohr, 152
Massenträgheitsmoment, 76, 81, 87, 88, 428
Massenverteilungskurve, 735
Materie im elektrischen Feld, 317
– im Magnetgfeld, 368
– Strahlung, Wechselwirkung, 757
materielles Teilchen, Drehimpuls, 75
Materiewellen, 600
mathematisches Pendel, 427
Matthiessen'sche Regel, 818
maximale Wellenzahl,, 839
Maxwell'sche Gleichungen, 57, 579, 868
Maxwell'sche Verteilungskurve, 192, 240
Maxwell-Modell, 799
Mechanik deformierbarer fester Körper, 108
Mechanik deformierbarer Körper
– Einführung, 29
– Energiesatz, 68
– klassische, 43
– Newton'sche, 29
– relativistische, 29
– starrer Körper, 80
– Strukturbild, 30
mechanische Arbeit, 62
– Berührungsthermometer, 182
– Eigenschaften, Flüssigkristalle, 807
– Hysterese, 117
– Schwingungssysteme, 432
Meißner-Ochsenfeld-Effekt, 832
Memory-Legierungen,, 806
menschliches Auge, 523
menschliches Gehörorgan, 630
mesomerer Zustand, 718
Meson, 749, 751
Messbereichserweiterung, 283
Messgenauigkeit, 14
Messgerät, elektrisches, 408
Messgeräte, Einteilung, 409
Messunsicherheit, 16
Messwerk, digitales, 412
– elektrodynamisches, 410
– elektrostatisches, 411
Messwerte, Schwerpunkt, 21
Metall, 803, 812, 844
– Wärmekapazität, 844
Metalle, elektrochemische Spannungsreihe, 296
metallische Bindung, 788
metallisches Glas, 794
Meter, 9
Methoden der Kraftmessung, 48
Metrologie, 8, 683
Michelson-Interferometer, 479, 557
Mikrophon, 620
Mikrophysik, 5
Mikroskop, 527, 567
Miller'sche Indizes, 792
Minkowski-Diagramm, 870, 871
Mischkristall, 819
Mittelungspegel, 633
Mittelwert, arithmetischer, 16
mittlere Bahnlänge, 763
– Beschleunigung, 4
– Geschwindigkeit, 31
– Geschwindigkeit, Gasmoleküle, 189
– Ionisierungsenergie, 762
– Leistung, 65
– thermische Energie, 191
mittlerer Absorptionsgrad, 638
Moderator, 737, 738
Mohr'scher Spannungskreis, 113, 116
Mol, 9
molare Größen, 178
molare Wärmekapazität, 195, 202, 225, 841
– Wärmekapazität, Elektronengas, 815
Molekülachse bei der Rotation, 701
Molekülorbital, 698
Molekülschwingung, 617
Molekülspektren, 698
Molekülspektroskopie, 808
Mollier-Diagramm, 248
Molmasse, 178, 295
Molvolumen, 186
Moment, Dipol
– elektrisches
– – Drehmoment der Strömung, 147
Moment, Dipol-, elektrisches, 273, 347
– Dipol-, magnetisches, 686
– Dreh-, 75, 81, 83
– Dreh-, Turbine, 148
– Drehmoment eines Kräftepaars, 83
– Gesamtdreh-, 78
– Kreisel-, 98
– magnetisches, 357, 359, 361, 688
– Richt-, 77
– statisches, 128
– Torsions-, 77
Momentanbeschleunigung, 32
Momentangeschwindigkeit, 31, 37
Momentanleistung, 64
Momentenbeiwert, 164
Monochromator, 568
Mott-Streuung, 704
multilineare Regression, 21
Multiple, 657
Multiplikationsfaktor, 738
musikalische Akustik, 634
Musikinstrumente, 635
Mutter-Tochter-System, 721
Myon, 749, 751

N

n-Emission, 718
Nachhall, 640
Nachhallzeit, 640
Nahpunkt, 524
Naßdampf, 234
natürliche Radioaktivität, 720
– Zerfallsreihen, 722
Naturkonstanten, 14
Nebenquantenzahl, 659
Néel-Temperatur, 375
negativer Kristall, 581
nematische Flüssigkristalle, 806
Nennleistung, 65
Nernst-Effekt, 845
Nernst-Wärmesatz, 231
Netzebene, 572
Neutrino, 751
Neutron, 751
Neutroneneinfang, 734, 736
Newton'sche, 512
Newton'sche Axiome, 44
Newton'sche Ringe, 556
Newton'sches Aktionsgesetz Drehbewegung, 75
Newton'sches Gravitationsgesetz, 103
Newton'sches Grundgesetz, 45
Newton'sches Reibungsgesetz, 151
Nichtleiter im elektrischen Feld, 340
nichtlineare Schwingungen, 463
nichtnewton'sche Substanzen, 151
Norm-Hammerwerk, 644
Norm-Trittschallpegel, 644
Normalkomponente, 38
Normalkraft, 46
Normalspannung, 109, 114
Normalvergrößerung, 526
Normalverteilung, 15
Normatmosphäre, 129
Normdruck , 186
normierte Wellenfunktion, 668
Normstimmton, 635
Normtemperatur, 186
Normzustand, Gas, 186
Nukleon, 707
Nuklide, Daten, 709, 730

Nuklidmassen, 708
Nullphasenwinkel, 391, 422, 423
Nullpunkt, absoluter, 179, 185
nullter Hauptsatz der Thermodynamik, 179
numerische Apertur, 503
Nutation, 95
Nutationsbewegung, 96

O

Oberflächendruck, 133
Oberflächenenergie, 132
– Atomkern, 709
Oberflächenspannung, 132
Oberflächensperrschichtdetektor, 724
Oberschwingung, 481
Objektiv, 528
offene Gasturbine, 220
offene Strahlungsquellen, 727
offenes System, 175
Ohm'scher Widerstand, 393
Ohm'sches Gesetz, 278, 817
– Stromkreis, 381
Ohr, 630
Oktave, 633
Oktavfilter, 623
Okular, 527
Operatoren, 666
Operatorenalgebra, 667
Optik, allgemein, 492
– geometrische, 491, 492
optische Abbildung, 539
optische Achse, 581
optische Aktivität, 587
– Eigenschaften, Flüssigkristalle, 807
– Faserkreisel, 100
– Instrumente, 523, 526, 562
– Wegdifferenz, 550
optisches Spektrum, 654
Optoelektronik, 850
optoelektronische elemente, 850
Orbital, Atom-, 677
– Molekül-, 698
Ordnungszahl, 484, 692
Ortsdosis, 776
Ortsoperator, 666
Ortsvektor, 36, 666
Oszillator, 419, 463, 668
– anharmonischer, 700
– harmonischer, 700
Otto-Prozess, 218, 219

P

p-Emission, 718
p-Funktion, 677
p-Orbital, 677
p-Typ-Halbleiter, 823
p,V-Diagramm, 211, 219
Paarbildungseffekt, 759
Paarungsenergie, 709, 711
Parabolspiegel, 495
Paradoxon, hydrodynamisches, 144
– hydrostatisches, 127
Paraelektrizität, 347
Parallelismus, gleichsinniger, 97
Parallelogramm für Kräfte, 45
Parallelschaltung, 47, 281, 284, 340, 395
– der Bauelemente im Wechselstromkreis, 396
– Spannungsquellen, 288
– von Federn, 47
– Widerstände, 281
Paramagnetismus, 369–371
parametrisch erregte, 463
Parität, 753
Partialdruck, 240
Partikelbild, 6
Pascal, 123
Paschen-Serie, 657
Passfehler, 557
Pauli-Prinzip, 694
Pegeldifferenz, 622
Pegelzuschlag, 622
Peltier-Effekt, 846
Peltonturbinen, 168, 170
Pendel, ballistisches, 72
– Flüssigkeits-, 431
– Foucault'sches, 55
– mathematisches, 427
– physisches, 430
– Torsions-, 429
Pentagonalprisma, 506
Periodendauer, 40, 422, 467
– der Schwebung, 452
Periodensystem der Elemente, 692
periodische Felder, 390
Periodizität, 421, 422
Permeabilitätszahl, 368
Permittivitätszahl, 340
– Temperatur und Frequenzabhängigkeit, 349
Perowskit-Struktur, 848
Perpetuum mobile erster Art, 67, 198
– zweiter Art, 223
Personendosis, 776
Phase, 422, 446
Phasenübergang, 237
Phasengeschwindigkeit, 471, 485, 839
– Gitterwellen, 839
Phasenraum, 663
Phasenregel, Gibbsche, 245
Phasenresonanzfunktion, 446, 449
Phasensprung, 478
Phasenumwandlung, 237
Phasenwinkel, 422
phon, 632
Phononen, 837
Phononen-Dispersion, 838
Phononenweglänge, 842
Photodiode, 828
Photoeffekt, 641, 759
Photon, 590, 754
– Absorption, 594
– Energie, 591
– Impuls, 592
Physik, Gebiete, 7
– klassische, 6
– Quanten-, 6, 491, 493, 588, 653
– Wellen-, 491
physikalische Erkenntnis, Bereiche, 6
Physikalische Größen, 8, 10, 11
Physikalischer Erkenntnisprozeß, 3
physiologische Akustik, 630
physiologischer Grenzwinkel, 525
physisches Pendel, 429
piezoelektrischer Effekt, 849, 850
– Wandler, 621
piezoresistiver Wandler, 621
Pin-Fotodiode, 858
Pion, 748, 755
Pitot-Rohr, 141
Planartechnik, 832
Planck'sche Strahlungsformel, 541, 595
Planck'sches Wirkungsquantum, 5, 12, 541, 590
Planeten des Sonnensystems,, 3, 102
Plasma, 743
Plasmaeinschluss, 743, 744
Plasmaheizung, 745
Plasmastabilitäten, 745
Plasmastrom, 317
Plasmaverunreinigungen, 745
plastische Verformung, 117
Plattenkondensator, Kapazität, 337
Plattenschwinger, 626
pn-Übergang, 824
Pneumatik, 126
Pockels-Effekt, 584, 585
Poggendorf, 286
Poisson'sche Gleichung, 208
Poisson-Zahl, 110, 111
Poissonasche Gleichung, 256
Polarisation, 331, 340, 347, 465, 849
– des Lichtes, 578
– elektrische, 340, 341, 347
– magnetische, 368
– optische, 578, 840
Polarisationsfolie, 583
Polarisationsprisma, 582
Polarisationswinkel, 580
Polarisator, 578, 579
Polaroid-Filter, 583
Polymerwerkstoff, 797
polynome Regression, 21
polytrope Zustandsänderung, 210, 211
Polytropenexponent, 209
poröse Schallabsorber, 625, 626
Porro'sche Prismen, 530
positiver Kristall, 581
Positron, 715, 751

Positronium, 749
Postulate, Bohr'sche, 657, 658, 868
Potential, Coulomb
– Geschwindigkeits-Gradient, 137
– Gibbsches, 231
– Gravitations-, 106
– thermodynamisches, 175, 229
Potential, Coulomb-, 663
– elektrostatisches, 321
– Rechteck-, 668
– Woods-Saxon-, 713
Potentialdifferenz, 274
Potentiale, 671
– thermodynamische, 229
Potentialkurve bei, 699
Potentialkurve bei Molekülanregung, 698
Potentialschwelle, Tunneleffekt, 669
Potentialtheorie, 136
Potentialtopf, 668
potentielle Energie, 106
– starrer Körper, 86
– Wasserstoffatom, 679
Potentiometer, 276
Potentiometerschaltung, 285
Potenzen von Maßeinheiten, 13
Poynting'scher Vektor, 470
Präzession, 96, 97
Prandtl'sches Staurohr, 141
Presse, hydraulische, 125
Primärbatterien, 299
Primärelement, 296, 297
Primärionisation, 723
primitive Gitter, 789
Prinzip von d'Alembert, 52
Prisma, 504
– Ablenkungswinkel, 505
– Auflösungsvermögen, 570
– Glan-Thompson-, 582
– Lichtbrechung, 504
Prismenspektrometer, 506
Proton, 751
– Ruhemasse, 12
Protonen, Energieaufspaltung im Magnetfeld, 691
Protonenresonanzspektrum, 692
Prozess, irreversibler, 175, 195, 222
– reversibler, 175, 222
Prozesse, Stoß-, 67
Prozessgrößen, 175, 177
Prüfverfahren, Härte, 120
Pulververfahren, 573
Pumpe, 149, 168
– Förderhöhe, 148, 168
Pumpe 119
– Förderstrom, 168
Pumpen, Bauformen, 167
Pumpenkennlinie, 167
Punkt, kritischer, 234, 235
punktförmige Schallquelle, 618
Punktfehler, 792, 793
Pupille, 522
Purkinje-Effekt, 542

Q

Q-switching, 597
Quader, Massenträgheitsmomente, 90
Qualitätsfaktor, 768, 770
Quanten
– Wellen-, 549
Quanten-Hall-Effekt, 275, 366, 659, 677, 680, 684
Quantenausbeute, 856
Quantenbedingungen nach Sommerfeld, 659
Quantenmechanik des Atoms, 667
Quantenoptik, 588
Quantenphysik, 5
Quantentheorie, 653, 659
– Experimente, 660
Quantenzahl der Farbladung, 749
– magnetische, 693
Quantenzahlen von Protonen Neutronen, 752
Quark-Antiquark-System, 749
Quarkonia, 749
Quarkoniumzustände, 752
Quarks, 751
quasistationäre Ströme, Elektrodynamik, 414
Quelle, 136, 139, 831
– Strömungs-, 136
Quellenfreiheit, 139
Querdehnung, 110
Querdehnungszahl, 110, 111
Querschnittsveränderung, Unter-Überschallströmung, 166
Querwelle, 465

R

rücktreibende Kraft, Akustik, 614
Radialanteil der Wellenfunktion, 673
Radikale, 770
radioaktive Nuklide, Anwendung, 727
– Stoffe, Anwendung, 726
– Strahlenquellen, 728
– Zerfallsreaktionen, 716
radioaktiver Zerfall, 715, 719
radioaktives Gleichgewicht, 721
radioaktives Zerfallsgesetz, 719
Radiografie, 727
Radiografieverfahren, 729
Radiotoxität, 780
Radius, Bohr'scher, 657, 676
räumliche Spannungszustände, 113
Rakete, Bahnscheitel, 62
– Beschleunigung, 61
– Geschwindigkeit, 61
– Steighöhe, 61
Raketengleichung, 60
Raketenmasse, Abnahme, 61
Raman-Effekt, 703
Raumakustik, 638
Raumausdehnungskoeffizient, 126, 181, 184
Raumladungszone, 826
Raumwinkel, 10, 535
raumzentrierte Gitter, 790
Rayleigh'sches Kriterium, 563
Rayleigh-Jeans-Gesetz, 596
Rayleigh-Streuung, 703, 759
Reaktanz, 399
Reaktortypen, 738
reale Flüssigkeiten, Strömungen, 150
reale Gase, Strömungen, 150
– Zustandsänderungen, 232
Realgasfaktor, 233
Rechteckpotential, 668
rechtsläufiger Kreisprozess, 213
Redoxreaktion, 293
Referenzwelle, 575
Reflexion an gekrümmten, 495
Reflexion von Licht, 493, 580
Reflexion von Wellen, freies festes Ende, 481
Reflexionsfaktor einer, 624
Reflexionsgesetz, Optik, 493
Reflexionsgrad
– Schall-, 624
reflexvermindernde Schichten, 554
Regression, exponentielle, 21
– lineare, 21
– logarithmische, 21
– multilineare, 21
– polynome, 21
Regressionsgerade, 20
Reibung, äußere, 48
– Festkörper-, 48
– Flüssigkeits-, 49
– innere, 49, 150
– Luft-, 49
– Newton'sche, 151
– turbulente, 48
Reibungsarbeit, 64
reibungsfreie Strömungen, Grundgleichung, 138
Reibungsgesetz, Anwendung, 151
– Newton'sches, 151
– Stokes'sches, 153
Reibungskräfte, 49
– bei Schwingungen, 436
Reibungskraft im Rohr, 152
– Stokes'sche, 439
Reibungspumpen, 167
Reibungswiderstandskraft, 154
Reibungszahl, 49
Reichweite, 762, 763
Reihenschaltung, 281, 288, 339, 393
– der Bauelemente im Wechselstromkreis, 395
– Kondensatoren, 339
– Spannungsquellen, 288
– Widerstände, 281

Rekombination, 310, 851
Relativbewegung, 50
relative Atommasse, 707
– biologische Wirksamkeit, 767
– Dielektrizitätszahl, 340
– Häufigkeit, 14
– Tiefendosis, 771
relativistische Addition der
– Dymanik, 875
– Effekte, 872
– Geschwindigkeiten, 875
– Kraft, 876
– Wellengleichung, 755
relativistischer Faktor, 870
– Impuls, 876
Relativität des Bezugssystems, 867
Relativitätsprinzip, 867
Relativitätstheorie, spezielle, 867
Relaxationszeit, 618, 800, 816, 817
relaxierendes Verhalten, 800
rem, 766
Remanenz, 373
Resistanz, 399
Resonanz, 395, 396, 420, 446, 643
Resonanzüberhöhung, 446, 448
Resonanzabsorber, 625
Resonanzfall, Amplitude, 447
Resonanzfrequenz, System, 643
Resonanzkreisfrequenz, 448
Resonanzkurve, 644
Resonanzspektrometer, Aufbau, 691
Resonanzspektroskopie, 655
Resonator, 420, 421, 445
Restdehnung, 117
resultierende Kraft, 83
reversible Prozesse, 222
Reynoldszahl, 158
Rheologie, 799
Richardson-Gleichung, 308
Richtgröße, 47
– Winkel-, 81
Richtmoment, 77
Richtungen in Kristallgitter, 791
richtungsabhängige elektrische, 347
Righi-Leduc-Effekt, 846
Ringe, Haidinger'sche, 553
– Newton'sche, 556
Ringspule, magnetische, 354
Rockwell-Verfahren, 120, 121
Röntgen, 765, 766
Röntgenbeugung, 570, 743
Röntgenbremsstrahlung, 694
Röntgenquanten, Streuung, 704
Röntgenröhre, Aufbau, 694
Röntgenspektrum, 694
Röntgenstrahlung, 694
– Schwächung, 764
Rohr, Druckabfall, 152
– Massenstrom, 152
– Reibungskraft, 153
– Volumenstrom, 152
Rohrreibungszahl, 154, 161
Rohrströmung, laminare, 151
Rohrturbine, 168, 170
Rohrwiderstandsgesetz, 154
Rollreibung, 49
Rollreibungskraft, 436
Rotation, 75, 92
Rotation und Translation, Analogie, 81
Rotation, dynamisches, 76
Rotations-Schwingungs-Spektrum, 700
Rotations-Spannarbeit, 81
Rotationsenergie, 77
– eines Teilchens, 676
– Energieerhaltungssatz, 79
– starrer Körper, 87
Rotationsleistung, 81
rotierendes Koordinatensystem, 53
Rotor, 387, 402
Rückstreuung, 764
Rückstreuverfahren, 727, 728
Ruheenergie, 878
Ruhemasse des Elektrons, 12
– des Protons, 12
ruhende Flüssigkeiten, 123
Rutherford-Streuung, 704, 705
Rydberg-Atome, 657
Rydberg-Konstante, 657

S

s-Funktion, 673
s-Orbital, 677
S-Turbine, 168, 170
Sabine'sche Formel, 640
Saccharimeter, 588
Sättigungsdampfdruck von Wasser, 240
Sagnac-Effekt, 99
Sammellinse, 511
Satz von Steiner, 91
Saugeffekt von Strömungen, 143
Schadt-Helfrich-Zelle, 586
Schäden, genetische, 771
Schärfentiefe beim Fotoapparat, 533
Schalenmodell, 711
Schall, allgemein, 613
– indirekter, 638
Schall-Absorptionsgrad, 624
Schall-Reflexionsgrad, 624
Schall-Transmissionsgrad, 624
Schallabsorber, 625
Schallabsorption, 613, 618, 639
Schallausbreitung, 613
– Schnelleverteilung, 616
Schallbereich, 631
Schalldämmmaß, 628, 641
Schalldämmung, 613
– Körper-, 642
– Luft-, 641
Schalldruck, Hörschwelle, 632
Schalldruckpegel, 621
Schallempfindung, 630
Schallfeld, diffuses, 638
Schallfrequenz, Hörbereich, 630
Schallfrequenzspektrum, 622
Schallgeschwindigkeit, 616
– einiger Stoffe, 617
– maximale, 839
schallharte Grenzflächen, 624
Schallintensität, 618, 619, 641
Schallintensitätsabfall, 619
Schallintensitätspegel, 621
Schallinterferenz, 625
Schallkennimpedanz, 617, 624
Schallleistung, 618
– auf die Trennwandfläche, 641
– diffuses Schallfeld, 638
– im Raumwinkel, 638
– spezifische, 620
– transmittierte, 641
Schallleistungspegel, 621, 639
Schallmauer, 477
Schallpegel, bewerteter, 633
Schallpegel-Additionstabelle, 622
Schallpegeldifferenz, 619
Schallquellengeometrie, 619
Schallschnellepegel, 621
Schallspektren, charakteristische, 635
Schalltransmissionsgrad, 624
Schallwandler, 619
Schallwechseldruck, 617, 619
schallweiche Grenzflächen, 624
Schallwelle, Energiedichte, 618
Schallwellen, 614
– an Grenzflächen, 624
Schaltung von Kapazitäten, 339
– von Spannungsquellen, 288
– von Widerständen, 281
Scheingröße, 392, 399
Scheinkraft, 51
Scheinleistung, 398
Scherung, 110, 112, 114
Schichtverbundwerkstoff, 800
Schiebung, 109, 114
schiefe Ebene, 47, 64, 89
schiefer, zentraler Stoß, 73
Schlupf, Drehstromasynchronmotoren, 404
schmalbandige Absorber, 626
Schmelzdruckkurve, 242
Schmelzen, 237
Schmelzenthalpie, 238
Schmelztemperatur, 238
Schmerzgrenze, akustische, 630
Schneckenpumpe, 167
Schnelle, Schall-, 614
Schnelleamplitude, 616
Schnelleverteilung der tung, 616
Schnittweitengleichung, 510, 514
Schottky-Diode, 828
Schottky-Fehlordnung, 793
Schraubenversetzung, 793

Schrödinger-Gleichung, 664, 668, 755, 813
– harmonischer Oszillator, 700
– Nukleonen, 711
– Quanten-Hall-Effekt, 678
– zeitabhängige, 667
– zeitunabhängige, 667
Schubkraft, 60
Schubmodul, 110, 112
Schubspannung, 109, 113, 114, 151
Schutz, Strahlenbelastung, 108, 779
schwache Wechselwirkung, 755
Schwächungsfaktor, 778
Schwächungskoeffizient, 695
schwarzer Körper, 540
Schwebung, 452
Schwebungsfrequenz, 452, 460
Schwebungsgruppe, 484
Schwellenenergie, 731
Schwellstrom, 853
Schwere, 45
Schweredruck in Flüssigkeiten, 127
– in Gasen, 128
Schwerkraft, 46
– Hubweg, 105
Schwerpunkt, 59, 85
Schwerpunkt der Messwerte, 21
– starrer Körper, 86
Schwerpunktsatz, 59
Schwerpunktskoordinaten, 85
schwimmende Körper, Stabilität, 131
schwimmender Estrich, 645
schwingende Gitterbausteine, 837
Schwingfall, 439, 440
Schwingkreis
– Güte, 448
Schwingkreis, Kenngrößen, 443
Schwingung, allgemein, 420
– Überlagerung, 450
– elektromagnetische, 419, 433, 442
– erzwungene, 420, 423, 444
– freie, 419, 420, 423
– freie gedämpfte, 420, 436, 440
– fundamentale, 460
– gedämpfte, 439
– gekoppelte, 459
– Gesamtenergie, 432
– mechanische, 420
– nichtlineare, 463
– parametrisch erregte, 463
– ungedämpfte, 420, 423
Schwingung, gedämpfte, 442
– Strahlung, Absorption, 854
– Wechselwirkung, 754
– Wellen, 414
Schwingungen
– elektromagnetische und mechanische, Analogie, 435
– Größen, 422
– mit mehreren Freiheitsgraden, 459
– Reibungskräfte, 436
– und Wellen, Zusammenhang, 419
Schwingungsdauer, 422, 466
schwingungsfähige Systeme, lagen, 419
Schwingungssystem, gekoppeltes, 459
Schwingungssysteme, 432
Schwingungsüberlagerung, Auslöschung, 451
– parallele, 450
– senkrechte, 457
– Verstärkung, 451
Seebeck-Effekt, 182, 846
Sehwinkel, 526
Seiliger-Prozess, 218, 219
Seitendruck, 127
Seitendruckkraft, 128
Seitenkanalpumpe, 167
Sekundärbatterien, 306
Sekundärelektronenemission, 308, 309
Sekundärelement, 297
Sekundärionisation, 723
Sekunde, 9
selbständige Gasentladung, 310
Selbstinduktion, 389
Seltsamkeit, 751, 753
Senke, 139, 831
– Strömungs-, 136
senkrechter Wurf, 36
Senkung, kapillare, 134
Senkwaage, 130
Separation, 711
Separationsenergie, 711
Serienschaltung von Federn, 48
SI-Einheiten, 12, 13
Sicherheit, statistische, 17
Sieden, 237
Sievert, 766
Skineffekt, 386
skotopische Anpassung, 543
smektische Flüssigkristalle, 806
Solarkonstante, 538
Solarzelle, 856
Solenoid, 354
somatische Strahlenschäden, 771, 773
Sommerfeld'sche Erweiterung, 657
– Feinstrukturkonstante, 12, 659
– Quantenbedingungen, 657
Sonar-Prinzip, 647
sone, 632
Sonnensystem, Planetendaten, 102
Spalt, Beugung, 558, 665
Spaltprodukt, 734
Spaltungsquerschnitt, 734
Spaltwahrscheinlichkeit, 737
Spannarbeit, 81
Spannung, 273
– Diffusions-, 826
– elektrische, 11, 274
– Hall-, 365, 680, 681
– induzierte, 402
– Klemm, 287
– Klemm-„ 286
– magnetische, 402
– Normal-, 109, 114
– Oberflächen-, 132
– Schub-, 108, 113, 114, 150
– Temperatur-, 826
– Wechsel-, Effektivwert, 391
Spannungs-Dehnungs-Diagramm, 118
Spannungsdoppelbrechung, 584
Spannungsfaktor, 374
Spannungsgradient, 137
Spannungskreise, Mohr'sche, 116
Spannungsmesser, 284
Spannungsquellen, Arten, 274
– elektrochemische, 296
– Schaltung, 288
Spannungsreihe
– thermoelektrische, 847
Spannungsreihe, Metalle, 296
Spannungsstoß, 358
Spannungszustände, räumliche, 113
Spannungszustand, 109
– dreiachsiger, 109
Speicher-Varaktoren, 828
Spektralapparat, 568
spektrale Größen, 540
spektrale Strahldichte, 541
Spektralfotometer, 568
Spektrograph, 568
Spektrometer, 568
– Drehkristall, 573
Spektroskop, 568
Spektroskopie, Absorptions-, 655
– Emissions-, 655
– Resonanz-, 655
Spektroskopie-Verfahren, 655
Spektrum, 654
– des Wasserstoffatoms, 654, 657
Sperrsättigungsstrom, 827
Sperrspannung, 826
spezielle Gaskonstanten, 186
spezielle Relativitätstheorie, 867
– der Elektrodynamik, 878
– Postulate, 868
spezielle Zustandsänderungen Gase, 211
spezielle Zustandsänderungen idealer Gase, 204
spezifische Ausstrahlung, 538, 543
– Drehzahl, 169
– Größen, 178
– Ionisation, 757
– Ladung, 367
– Lichtausstrahlung, 543
– Schallleistung, 620
– Wärmekapazität„ 841
sphärischer Spiegel, 494
Spiegel, Bildentstehung, 494
– Konvex-, 496
Spiegelversuch, Fresnel'scher, 551

Spin, 753
Spin-Bahn-Kopplung, 714
Spinmagnetismus, 687, 688
Spinmoment, magnetisches, 370
Spinquantenzahl, 688
spontane Emission, 594
Spontanspaltung, 711, 719
Sprungtemperatur, 832
Spule, 393
Spule Stromkreis, 406
Spuranpassung, 629
Spurwellenlänge, 628
stabiles Gleichgewicht, 86
Stabilität schwimmender Körper, 131
Stabilitätsprobleme, 131
Stärke, Beleuchtungs-, 10, 544
– Bestrahlungs-, 538, 543
– Feld-, elektrische, 10, 320
– Feld-, magnetische, 11, 352
– Gravitationsfeld-, 106
– Koerzitivfeld-, 374
– Laut-, 632
– Licht-, 9, 545
– Strahl-, 536, 544
– Strom-, elektrische, 9, 273
– Transportfeld-, 137
Standardabweichung, 16
– des Messverfahrens, 19
Standardwasserstoffelektrode, 295
stante, 778
Stapelfehler, 793
Stark-Effekt, 690
starke Wechselwirkung, 754
starrer Körper, 30
– Kinematik, 80
– kinetische Energie, 86
– Massenträgheitsmoment, 87, 88
– Mechanik, 80
– potentielle Energie, 85
– Rotationsenergie, 87
– Schwerpunkt, 85
– Translationsenergie, 87
starrer Rotator, Eigenwerte, 702
Statik, 29
– Eliminatoren, 729
– Gleichgewichtsbedingungen, 84
stationäre Ströme, 415
– Strömung, 139
stationärer Ladungstransport, 273
– Wärmetransport, 250
statischer Druck, 140
statisches Kräftegleichgewicht, 47
– Moment, 128
statistische Abweichungen, 15
– Deutung der Entropie, 227
– Sicherheit, 17
statistisches Gewicht, 192
Stator, 387, 402
Staudruck, 141, 142
Staurohr, Prandtl'sches, 141
Stefan-Boltzmann-Gesetz, 542
Stefan-Boltzmann-Konstante, 12
stehende Wellen, 479
Steighöhe, 134
– Rakete, 61
Steiner'scher Satz, 91, 429
Stellarator, 745
Steradiant, 535
Stern-Dreieck-Schaltung, 283, 400
Sternschaltung, 399
Steuerspannung, 831
Stirling-Prozess, 218, 219
Stoß, Drehmoment, 77
– elastischer, 69, 72
– inelastischer, 71, 74
– schiefer, zentraler, 73
Stoßgesetze, elastische, 71
– inelastische, 71
Stoßparameter, 705
Stoßprozesse, 67
– Klassifikation, 70
Störstellen, 823
Störstellenleitung, 819, 822
Stoffmagnetismus, Arten, 371
Stoffmenge, 9
Stokes'sches Reibungsgesetz, 153
Stokeslinie, 703
strömende Flüssigkeiten, 135
strömende Gase, 135
Strahldichte, 536, 543
– spektrale, 541
Strahlen, direktionisierende, 757
Strahlenarten, 715
Strahlenbündel, 493
Strahlenbelastung, 757, 772
– des Menschen, 772
– Schutz, 779
Strahleneinwirkung, terrestrische, 773
Strahlenquelle, radioaktive, 728
Strahlenschaden, 773, 818
Strahlenschutz, 756, 772
Strahlenschutzmaßnahmen, 776
Strahlenschwächung, 764
Strahlenwirkung, biologische, 770
Strahler, Lambert'sche, 536
– schwarzer, 540
Strahlgeschwindigkeit, 60
Strahlpumpen, 167
Strahlstärke, 536, 544
Strahlung, biologische Wirkung, 770
– charakteristische, 694
– ionisierende, 723
– Materie, Wechselwirkung, 756
Strahlungsäquivalent, photometrisches, 543
Strahlungsdetektoren, 724
Strahlungsenergie, 535, 543
Strahlungsgleichung, Planck'sche, 541, 595
Strahlungsintensität, 695
Strahlungsisothermen, 595
Strahlungsleistung, 535, 543
– durchgelassene, 855
Strahlungsphysik, 534
strahlungsphysikalische Größen, 534
Strahlungsquellen, 850
Strangspannung, 399
Strangstrom, 400
Streckgrenze, 118
Streuanteil, 695
Streuung von Alpha-Teilchen, 704
– von Elektronen, 704
– von Neutrinos an Protonen, 704
– von Röntgen-Quanten, 704
Strömung, Drehmoment, 147
– instationäre, 154
– laminare, 150, 154
– Saugeffekt, 143
– turbulente, 154
– Widerstände, 155
Strömungen, laminare, 150
– realer Flüssigkeiten, 150
– realer Gase, 150
Strömungsdrehimpuls, 147
– mechanischer, 147
Strömungsfeld, 135
Strömungsgeräusche, 645
Strömungsgeschwindigkeit an Drosselstelle, 142
Strömungsimpuls, 145, 146
Strömungsmaschinen, 149, 218
Strömungsmechanik, 135
– spezielle Probleme, 163
Strömungspumpen, 167
Strömungsverhältnisse in, 149
Strömungsverhältnisse
– in Turbinen, 149
Strömungswiderstand, 155
Stromdichte, 273
– elektrische, 273
Stromkreis, Ein- und gänge, 404
Stromlinien, 135
Stromlinienform, 156
Strommesser, 283
Stromresonanz, 397
Stromrichtung,technische, 274
Stromstärke, 273
– elektrische, 9
– elektriscke, 9
Stromverstärkungsfaktor, 831
Struktur fester Körper, 785
Strukturbild Akustik, 613
– der Mechanik, 30
– der Thermodynamik, 176
– Festkörperphysik, 785
– physikalische Optik, 492
– Strahlenschutz, 757
Strukturen, kristalline, 788
Student-t-Verteilung, 17
Stützkraft, 85
Stufenversetzung, 793
Sublimieren, 237, 242
Substanzen, nichtnewton'sche, 151
Substitution, Gitterfehler, 793
Supraleiter, 277, 832

Supraleitung, 832
Suszeptanz, 399
Suszeptibilität, elektrische, 341
– magnetische, 368, 369
Symmetrie-Energie, 709
symmetrische Spaltung, 735
Synchronmotor, 403
Synchrotron, 367, 747
Synergetik, 229
System, abgeschlossenes, 58, 175
– adiabates, 175, 177, 207, 227
– Entropie, 231
– Gesamtimpuls, 59
– geschlossenes, 175, 177
– Impuls, 58
– Kräfte auf Punkte, 58
– offenes, 175, 177
systematische Abweichungen, 15
Systeme materieller Punkte, Drehbewegung, 78
Systeme, thermodynamische, 176
Szintillationsdetektor, 728
Szintillator, 726

T

Tangentialbeschleunigung, 39
Tangentialeinheitsvektor, 37
technische Akustik, 638
– Kreisprozesse, 217, 218
– Stromrichtung, 274
Teilchen
– Welle
– – Dualismus, 592
Teilchen, Welle, 664
Teilchenmassen, 708
Teilchenverbundwerkstoffe, 801
Teilchenzahldichte, 712
Temperatur, 9, 179, 190
– charakteristische, 853
– kritische, 235
– kritische, Supraleitung, 833
– thermodynamische, 215
Temperaturabhängigkeit der
– Kapazität, Festkörper, 204
– Wasserstoff, 203
Temperaturgradient, 137
Temperaturmessung, 181
Temperaturspannung, 825
Temperaturstrahler, 540
terrestrische Strahleneinwirkung, 773
Terzfilter, 622
Tesla, 358
TFTR, 743
thermische Ausdehnung, 181
– -, Emission, 308
– Energie, 190, 191
– Zustandsgrößen, 177, 211
thermischer
– Wirkungsgrad, 215, 218
Thermobimetalle, 801
Thermodynamik, 175
– dritter Hauptsatz, 231
– Einführung, 175
– erster Hauptsatz, 231
– fester Körper, 837
– Hauptsätze, 192
– nullter Hauptsatz, 179
– Strukturbild, 176
– zweiter Hauptsatz, 222
thermodynamische Temperatur, 215
thermodynamisches Gleichgewicht, 238
– Potential, 229
– System, 178
thermoelektrische Spannungsreihe, 847
thermoelektrischer und netischer Effekt, 846
thermoelektrischer und thermomagnetischer Effekt, 845
Thermoelement, 534, 847
Thermokraft, 847
Thermometer, 182, 183
Thermoplaste, 797
Thermospannung, 847
Thermotopographie, 808
Thomson-Effekt, 845
Thomson-Gleichung, 397
Tiefendosis, relative, 771
Tokamak, 745
Ton, 613, 634
Tonintervall, 637
Tonleiter, 637, 638
Toroid, 355
Torricelli'sches Ausflussgesetz, 143
Torsion, 114
Torsionsleistung, 77
Torsionsmoment, 77
Torsionspendel, 428
Torsionswelle, 467
Totalreflexion, 502
Trägheitsdichte, intrinsische, 822
Trägheitseinschluss, 744
Trägheitsgesetz, 45
Trägheitskraft, 51
– Akustik, 614
Trägheitsmoment, Flächen-
– Massen-, 88
Trägheitsmoment, Flächen
– Massen-, 81
Trägheitsmoment, Flächen-
– Haupt-, 92
– Massen-, 76, 90, 428
Trägheitsmoment, Flächen-, 129
Trägheitsmomente, Massen
– Körper, 87, 88
Transformation, Galilei, 50, 51, 868
– von Wechselströmen, 400
Transformator, 385, 400
Transformatorprinzip, 384
Transistor, 827
– Feldeffekt-, 680
Transistoren, Grundschaltungen, 830
Transistorkennlinie, 830
Translation, 80
– und Rotation, Analogie, 81
Translations-Spannarbeit, 81
Translationsbewegung, 34
Translationsenergie, starrer, 87
Translationsgitter, 790
Translationsleistung, 81
Transmissionsgrad
– Akustik, 624, 627
Transmissionskoeffizient, 669
transmittierte Schallleistung, 641
Transportfeldstärke, 137
Transrapid, 378
transversaler Doppler-Effekt, 880
Transversalwelle, 465, 480
Tripelpunkt, 180, 244
– von Wasser, 179, 180
Trittschall, 644
trocker gesättigter Dampf, 234
Tröpfchenmodell, 709
Tubuslänge, 528
Tunnel-Diode, 828
Tunneleffekt, 669, 684
Tunnelmikroskop, 669
Turbine, 148, 149, 168
Turbinengleichung, Euler'sche, 148
Turbinenleitrad, 147
turbulente Grenzschichtbildung, 158
turbulente Reibung, 49

U

überhitzter Dampf, 234
Überlagerung von parallele, 450
Überlagerung von Wellen, 477, 484
Überschallbereich, 165
Überschallströmung bei schnittsveränderungen, 166
Überschussreaktivität, 738
Übersetzungsverhältnis, 400
Überlagerung von
– senkrechte, 457
Uhrenparadoxon, 873
Ultraschall, 625, 631, 647
– Reinigung, 649
Umkehrlinse, 530
Umkehrprisma, 506
Umlaufzeit der Planeten im Sonnensystem, 104
umschlossene Strahlungsquellen, 727
Umströmen von Körpern, 154
umströmte Körper, Auftrieb, 163
Umströmung, laminare, 153
– von zylindrischen Körpern, 155
unabhängiger Zerfall, 721
unelastischer Stoß, 71, 72
unipolarer Transistor, 827
universelle Gaskonstante, 12, 186

Unschärferelation, 601, 673
unselbstständige Gasentladung, 310
Unterschallbereich, 165
Unterschallströmung bei Querschnittsveränderungen, 166
unvollkommene Benetzung, 133
Urspannung, 295

V

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, 12, 868
Vakuumfotozelle, 589
Vakuumlampe, 317
Valenzband, 810
Valenzelektronen, 694
van-der-Waals'sche Bindung, 785
van-der-Waals'sche Konstanten, 235
van-der-Waals'sche Zustandsgleichung, 233
van-der-Waals'sches Kovolumen, 233
Van-der-Waals-Kraft, 233
Variable, makroskopische, 175
Varianz, 15
Varistor
– Widerstände bei Strömungen, 276
Varistor Bauarten, Einteilung, 276
Vektor, Poynting'scher, 470
Vektordiagramm des Bahndrehimpulses, 676
Venturi-Düse, 142
verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung, 165
Verbrennungsmotor, 219
Verbundwerkstoffe, 800, 803
Verdampfungstemperatur, 238
Verdeckungseffekt, Akustik, 632
Verdet'sche Konstante, 588
Verdrängungspumpen, 167
Verdunstung, 242
Verflüssigung, 234
Verformung, 108
Verformung, elastische, 108
– plastische, 117
Verformungsarbeit, 65
– beim unelastischen Stoß, 72
Verformungsarten, 110
Verformungsverhalten von Kunststoffen, 799
Vergrößerung, 526, 527
Verhältnis, gyromagnetisches, 687, 688
Verlustenergiedichte, 117
Verlustfaktor, 398, 439
Verlusthöhe, 154
Verlustwinkel, 395, 396
Vermehrungsfaktor, 740
Vernichtungsstrahlung, 717, 758
Verschiebungsarbeit, elektrische, 322
Verschiebungsdichte, elektrische
– an Grenzflächen, 349
Verschiebungsgesetz, Wien'sches, 541
Versetzung, 794
Versetzungsdichte, 794
Verstärkung bei lagerung, 451
Vertaubung, 633
Vertauschungsrelation, 672
Verteilung der Spaltenergie, 736
– Häufigkeits-, 15
– Normal-, 15
Verteilungsfunktion, 192
Vertrauensbereich, 16
Vertrauensgrenzen, 20
Verzeichnung, 524
verzweigter Stromkreis, 278
Vibrationsmesswerk, 412
Vickers-Verfahren, 119, 120
Vielstrahlinterferenz, 566
Vier-Niveau-System, 596
Vier-Parameter-Modell, 799
vierter Aggregatzustand, 317
Vignettierung, 523
Viskosimeter, 153
Viskosität, dynamische, 151
Voigt-Kelvin-Modell, 799
vollkommene Benetzung, 133
vollkommene Benetzung momente, 90
Volt, 274, 275
Voltameter, 294
Voltmeter, 284
Volumen, kritisches, 234
Volumenänderungsarbeit, 199, 211
– isentrope, 208
Volumenausdehnungskoeffizient, 126
Volumenenergie, Atomkern, 142, 709
– im Rohr, 152
Volumenstrommessung, 141
Volumenstrommessung Von-Klitzing-Effekt, 680

W

wärmetechnische Stoffwerte, 251
Wölbspiegel, Brennweite, 499
Wärme, 10, 11, 193, 211
– Begriff, 195
– latente, 237
Wärme Energie, 10
Wärme Spannung
– elektrische, 11
Wärmeäquivalent, mechanisches, 216
Wärmedurchlasskoeffizient, 253
Wärmedurchlasswiderstand, 253
Wärmeisolatoren, 843
Wärmekapazität, 11, 195, 840
– allgemein, 175, 195
– Bestimmung, 198
– Energie, 11
– isobare, 197
– isobaremolare, 195
– isochore molare, 197
– molare, 195, 841
– molare, Elektronengas, 815
– spezifische, 175, 841
– Temperaturabhängigkeit, 203, 204, 241
Wärmekapazitäten, Berechnung, 189
Wärmeleitfähigkeit, 250, 843, 844
Wärmeleitfähigkeit der Elektronen, 844
Wärmeleitung, 248
– stationärer Fall, 250
Wärmepumpe, 217
Wärmestrahlung, 248, 594
Wärmestrom, 250
Wärmestromdichte, 842
Wärmeübertragung, 248
Wärmestrahlung, 248
Wahrscheinlichkeit, 227
– Aufenthalts-, 667
– Spalt-, 737
– Zerfalls-, 719
Wahrscheinlichkeitsfunktion, 593
Walze auf schiefer Ebene, 91
Wandler, biologischer, 614
– elektroakustischer, 621
– elektrostatischer, 614
– piezoelektrischer, 621
– piezoresistiver, 621
Wandler,biologischer
– elektrodynamischer, 621
Wasser, Anomalie, 184, 242
– Sättigungsdampfdruck, 241
– Tripelpunkt, 180
Wasserstoff-Spektrum, 655, 677
Wasserstoffatom, Lösung, 675
– optisches Spektrum, 656
– Quantenmechanik, 677
Wasserstrahlpumpe, 144
Wasserturbine, 168, 170
Weakonen, 756
Weber, 358
Wechselspannung, Effektivwert, 391
Wechselstrom, Effektivwert, 391
– Transformation, 400
Wechselstromkreis, 390, 391, 395, 396
– -, Bauelemente, 393
– -, Leistung, 397
Wechselwirkung der Strahlung Materie, 756
Wechselwirkungen, fundamentale, 754
Wechselwirkungsgesetz, 45
Wechselwirkungsprozesse von lung und Materie, 758
Weg, 81
Weg-Zeit-Diagramm, 31
Wegdifferenz, optische, 550
Weglänge, mittlere freie, 816, 859
Weichmagnet, 376

Weiss'sche Bezirke, 372
Weizsäcker-Formel, 708, 709
Welle eines Teilchens, 664
– -, elektromagnetische, 415
– einfache, 468
– elektromagnetische, 492
– Materiewellen, 600, 601
– stehende, 479
Welle-Teilchen, Dualismus, 661
Wellen, 419, 464
– Ausbreitungsgeschwindigkeit, 466
– Energietransport, 469
– harmonische, 468
– Intensität, 470
– stehende, 479
Wellenüberlagerung, 477, 484
Wellenausbreitung, Grundlagen, 464
Wellenbild, 6
Wellenfläche, 467
Wellenfront, 467
Wellenfunktion, 666–668
– normierte, 668
– Radialanteil, 673
Wellengleichung, 755
– d'Alembert'sche, 471, 615
– Diracsche, 754
– gewöhnliche, 471
– Lösungsfunktion, 616
– relativistische, 755
– Schrödingersche, 664, 754, 813
Wellenlänge, 466
– Balmerserie, 653
– Material-, 661
Wellenlängenverschiebung, Effekt, 592
Wellenoptik, 549
Wellenpaket, 484, 669
Wellenreflexion, freies und Ende, 481
Wellenwiderstand, 616
Wellenzahl, 468
Wellenzahlvektor, 812
Weltlinie, 871
Weltpunkt, 871
Wendekreisel, 99
Wendeprisma, 506
Werkstoff, amorpher, 794
Werkstoffe, 800
– magnetische, 376
Wertigkeit, 295
Wheatstone'sche Brücke, 285
Widerstände bei Strömungen, 155
– Schaltung, 281
Widerstand, 275
– -, komplexer, 393
– elektrischer, 11, 275, 276
– elektrischer und magnetischer, 381
– innerer, 287
– magnetischer, 382
– spezifischer, 275
Widerstand gnetfeldstärke, 681
Widerstandsbeiwerte, 156, 161
Widerstandstransformation, 401
Widerstandsverhältnis, 818
Wiedemann-Franz'sches-Gesetz, 844
Wien'sches Verschiebungsgesetz, 541
Wilson-Aufnahmen, 662
Windkanal, 156
Winkel, 10, 81
– Dreh-, 40
– Mach'scher, 477
– Raum-, 10
Winkelbeschleunigung, 40, 77, 81
Winkelgeschwindigkeit, 40, 81
– der Präzession, 96
Winkelrichtgröße, 81, 428
Wirbelbildung, 154
Wirbelstrom, 386
Wirkanteil, 392, 399
Wirkdruck, 142
Wirkleistung, 397, 398
Wirksamkeit, relative biologische, 770
Wirkung, 663
Wirkungsgrad, 65
– Gesamt-, 65
– thermischer, 215, 218
Wirkungslinie der Kraft, 82
Wirkungsquantum, Planck'sches, 12, 541, 590
Wirkungsquerschnitt, 705, 732, 734
Wirkwiderstand, 393
wohltemperierte Stimmung, 638
Woods-Saxon-Potential, 713, 714
Wurf, senkrechter, 36
Wurfparabel, 39

Z

Zählrohr, 781
Zähigkeit, dynamische, 151
– kinematische, 151
Zähigkeitskoeffizient, 49
Zahl, Mach'sche, 477
Zahnradpumpe, 167
Zeeman-Effekt, 690
Zeiger, komplexer, 392, 423
Zeigerdiagramm, 393
Zeit, 9
– induktive, 407
– kapazitive, 406
zeitabhängige Dehnung, 800
– Schrödinger-Gleichung, 665
Zeitdilatation, 868, 872
Zeitkonstante, induktive, 407
– kapazitive, 406
zeitliche Impulsänderung bei Strömung, 145
Zeitmittelholografie, 578
Zeitnormal, 13
Zeitstandsverhalten, 799
zeitunabhängige chung, 665
Zelle, galvanische, 296
Zener-Diode, 828
Zener-Effekt, 827
Zentrifugalbeschleunigung, 54
Zentrifugalkraft, 52, 55
Zentripetalbeschleunigung, 39
Zentripetalkraft, 47
Zerfall, radioaktiver, 715
Zerfallsenergie, 707
Zerfallsgesetz, 719
Zerfallsgleichungen, 716
Zerfallskonstante, 719
Zerfallskurven, 721
Zerfallsreaktionen, 715
Zerfallsschemen, 716
Zerfallswahrscheinlichkeit, 719
Zerlegung von Kräften, 45
Zerstäuber, 144
zirkular polarisiertes Licht, 579
Zirkulation, 163
Zonenintervalle, 635
Zonenlinse, 575
Zonenplatte, 575
Zonensystem, Fresnel'sches, 575
Zug, 114
Zugfestigkeit, 118
Zustandänderungen, spezielle, Gase, 211
Zustandsänderung, isentrope, 207, 211
– isobare, 206, 207, 211
– isochore, 206, 211
– isotherme, 205, 211
– polytrope, 209
Zustandsänderungen realer Gase, 232
Zustandsdiagramm, 243
Zustandsdichte, 683, 712, 814, 821
Zustandsflächen idealer Gase, 187
Zustandsgleichung, 177, 185
Zustandsgröße, allgemein, 177
Zustandsgrößen, kalorische, 177
– thermische, 177, 211
zweidimensionales Elektronengas, 680
zweiter Hauptsatz der Thermodynamik, 175, 222, 223
zweiter Righi-Leduc-Effekt, 846
Zyklotron, 367

Periodensystem der Elemente
Chemische Eigenschaften

Die Gruppenbezeichnung 1 bis 18 entspricht der IUPAC-Empfehlung 1985.

Elementangabe	Beispiel
Elektronenkonfiguration	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}$
Ionisierungsenergien in eV (I, II, III)	8,96 – 16,8 – 38,0
Atom- bzw. Ionenradius in pm (Ladung des Ions)	149 97 (2+)
relative Atommasse	112,41
Symbol	Cd
Ordnungszahl	48
Element	Cadmium
Wertigkeiten	2
Elektronegativität	1,69
spektroskopischer Grundzustand	$^{1}S_{0}$

Säure-Base-Verhalten des Oxids
- stark basisch
- schwach basisch
- stark sauer
- schwach sauer
- sauer / basisch

Teilchen		Ruhemasse
Neutron	n	1,008 665 u
Proton	p	1,007 276 u
Elektron	e	$5{,}485\,802 \cdot 10^{-4}$ u
Myon	μ	$1{,}134\,292 \cdot 10^{-1}$ u

$1\ \text{u} = 1{,}660\,565 \cdot 10^{-27}$ kg

Gruppe	Ordnungszahl	Symbol	Element	relative Atommasse	Elektronenkonfiguration	Ionisierungsenergien	Atom- bzw. Ionenradius	Wertigkeiten	Elektronegativität	Grundzustand
I a 1	1	H	Wasserstoff	1,008	$1s^{1}$	13,6	37 208 (1−)	1	2,20	$^{2}S_{1/2}$
VIII a 18	2	He	Helium	4,0026	$1s^{2}$	24,6 – 54,4	93			$^{1}S_{0}$
I a 1	3	Li	Lithium	6,941	$1s^{2}\,2s^{1}$	5,39 – 75,6 – 122	152 68 (1+)	1	0,98	$^{2}S_{1/2}$
II a 2	4	Be	Beryllium	9,0122	$1s^{2}\,2s^{2}$	9,32 – 18,2 – 154	112 35 (2+)	2	1,57	$^{1}S_{0}$
III a 13	5	B	Bor	10,81	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{1}$	8,3 – 25,1 – 37,9	79 23 (3+)	3	2,04	$^{2}P_{1/2}$
IV a 14	6	C	Kohlenstoff	12,011	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{2}$	11,26 – 24,4 – 47,9	71 16 (4+)	4,2	2,55	$^{3}P_{0}$
V a 15	7	N	Stickstoff	14,007	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{3}$	14,5 – 29,6 – 47,4	73 171 (3−) 13 (5+)	5,4,3,2	3,04	$^{4}S_{3/2}$
VI a 16	8	O	Sauerstoff	15,999	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{4}$	13,6 – 35,2 – 54,9	63 140 (2−)	2	3,44	$^{3}P_{2}$
VII a 17	9	F	Fluor	18,998	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{5}$	17,4 – 35,0 – 62,6	71 136 (1−)	1	3,98	$^{2}P_{3/2}$
VIII a 18	10	Ne	Neon	20,179	$1s^{2}\,2s^{2}\,2p^{6}$	21,6 – 41,0 – 64,0	71			$^{1}S_{0}$
I a 1	11	Na	Natrium	22,99	$[Ne]\,3s^{1}$	5,1 – 47,3 – 71,6	186 97 (1+)	1	0,93	$^{2}S_{1/2}$
II a 2	12	Mg	Magnesium	24,305	$[Ne]\,3s^{2}$	7,61 – 14,96 – 79,72	160 66 (2+)	2	1,31	$^{1}S_{0}$
III a 13	13	Al	Aluminium	26,982	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{1}$	5,96 – 18,74 – 28,31	143 51 (3+)	3	1,61	$^{2}P_{1/2}$
IV a 14	14	Si	Silicium	28,086	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{2}$	8,15 – 16,3 – 33,5	118 42 (4+)	4	1,90	$^{3}P_{0}$
V a 15	15	P	Phosphor	30,974	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{3}$	11,0 – 19,7 – 30,1	110 44 (3+) 35 (5+)	5,4,3	2,19	$^{4}S_{3/2}$
VI a 16	16	S	Schwefel	32,06	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{4}$	10,4 – 23,4 – 35,0	102 184 (2−) 12 (6+)	6,4,2	2,58	$^{3}P_{2}$
VII a 17	17	Cl	Chlor	35,453	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{5}$	13,0 – 23,8 – 39,9	99 181 (1−)	7,5,3,1	3,16	$^{2}P_{3/2}$
VIII a 18	18	Ar	Argon	39,948	$[Ne]\,3s^{2}\,3p^{6}$	15,8 – 27,6 – 40,9	98			$^{1}S_{0}$
I a 1	19	K	Kalium	39,098	$[Ar]\,4s^{1}$	4,3 – 31,8 – 46,0	227 133 (1+)	1	0,82	$^{2}S_{1/2}$
II a 2	20	Ca	Calcium	40,08	$[Ar]\,4s^{2}$	6,1 – 11,9 – 50,9	197 99 (2+)	2	1,00	$^{1}S_{0}$
III b 3	21	Sc	Scandium	44,956	$[Ar]\,3d^{1}\,4s^{2}$	6,54 – 12,8 – 24,8	161 81 (3+)	3	1,36	$^{2}D_{3/2}$
IV b 4	22	Ti	Titan	47,90	$[Ar]\,3d^{2}\,4s^{2}$	6,81 – 13,6 – 27,6	145 94 (2+) 68 (4+)	4,3	1,54	$^{3}F_{2}$
V b 5	23	V	Vanadium	50,942	$[Ar]\,3d^{3}\,4s^{2}$	6,71 – 14,6 – 29,3	131 88 (2+) 59 (5+)	5,4,3,2	1,63	$^{4}F_{3/2}$
VI b 6	24	Cr	Chrom	51,996	$[Ar]\,3d^{5}\,4s^{1}$	6,74 – 16,6 – 31	125 63 (3+) 52 (6+)	6,3,2	1,66	$^{7}S_{3}$
VII b 7	25	Mn	Mangan	54,938	$[Ar]\,3d^{5}\,4s^{2}$	7,41 – 15,70 – 33,7	137 80 (2+) 46 (7+)	7,6,4,3,2	1,55	$^{6}S_{5/2}$
VIII b 8	26	Fe	Eisen	55,847	$[Ar]\,3d^{6}\,4s^{2}$	7,83 – 16,16 – 30,6	124 74 (2+) 64 (3+)	3,2	1,83	$^{5}D_{4}$
VIII b 9	27	Co	Cobalt	58,933	$[Ar]\,3d^{7}\,4s^{2}$	7,81 – 17,3 – 33,5	125 72 (2+) 63 (3+)	3,2	1,88	$^{4}F_{9/2}$
VIII b 10	28	Ni	Nickel	58,70	$[Ar]\,3d^{8}\,4s^{2}$	7,61 – 18,2 – 35,2	125 69 (2+)	3,2	1,91	$^{3}F_{4}$
I b 11	29	Cu	Kupfer	63,546	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{1}$	7,68 – 20,34 – 29,5	128 96 (1+) 72 (2+)	2,1	1,90	$^{2}S_{1/2}$
II b 12	30	Zn	Zink	65,38	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}$	9,36 – 17,89 – 40,0	133 74 (2+)	2	1,65	$^{1}S_{0}$
III a 13	31	Ga	Gallium	69,72	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{1}$	6 – 20,5 – 30,7	122 62 (3+)	3	1,81	$^{2}P_{1/2}$
IV a 14	32	Ge	Germanium	72,59	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{2}$	8,09 – 15,86 – 34,07	121 73 (2+) 53 (4+)	4	2,01	$^{3}P_{0}$
V a 15	33	As	Arsen	74,922	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{3}$	10,5 – 20,1 – 28,0	125 58 (3+) 46 (5+)	5,3	2,18	$^{4}S_{3/2}$
VI a 16	34	Se	Selen	78,96	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{4}$	9,70 – 21,3 – 33,9	116 198 (2−) 42 (6+)	6,4,2	2,55	$^{3}P_{2}$
VII a 17	35	Br	Brom	79,904	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{5}$	11,8 – 21,8 – 36	114 195 (1−)	5,1	2,96	$^{2}P_{3/2}$
VIII a 18	36	Kr	Krypton	83,80	$[Ar]\,3d^{10}\,4s^{2}\,4p^{6}$	14 – 24,4 – 37	112			$^{1}S_{0}$
I a 1	37	Rb	Rubidium	85,468	$[Kr]\,5s^{1}$	4,2 – 27,3 – 40	248 147 (1+)	1	0,82	$^{2}S_{1/2}$
II a 2	38	Sr	Strontium	87,62	$[Kr]\,5s^{2}$	5,7 – 11,0 – 43,6	215 112 (2+)	2	0,95	$^{1}S_{0}$
III b 3	39	Y	Yttrium	88,907	$[Kr]\,4d^{1}\,5s^{2}$	6,38 – 12,2 – 20,5	178 92 (3+)	3	1,22	$^{2}D_{3/2}$
IV b 4	40	Zr	Zirkonium	91,22	$[Kr]\,4d^{2}\,5s^{2}$	6,92 – 13,97 – 24,00	159 79 (4+)	4	1,33	$^{3}F_{2}$
V b 5	41	Nb	Niob	92,906	$[Kr]\,4d^{4}\,5s^{1}$	6,88 – 14,3 – 25,0	143 69 (5+)	5,3	1,6	$^{6}D_{1/2}$
VI b 6	42	Mo	Molybdän	95,94	$[Kr]\,4d^{5}\,5s^{1}$	7,35 – 16,2 – 27,1	136 70 (4+) 62 (6+)	6,5,4,3,2	2,16	$^{7}S_{3}$
VII b 7	43	Tc	Technetium	98,91	$[Kr]\,4d^{5}\,5s^{2}$	7,3 – 15,3 – 29,5	135	7	1,9	$^{6}D_{9/2}$
VIII b 8	44	Ru	Ruthenium	101,07	$[Kr]\,4d^{7}\,5s^{1}$	7,36 – 16,8 – 28,5	133 67 (4+)	8,6,4,3,2	2,2	$^{5}F_{5}$
VIII b 9	45	Rh	Rhodium	102,91	$[Kr]\,4d^{8}\,5s^{1}$	7,7 – 18,1 – 31,1	134 68 (3+)	4,3,2	2,28	$^{4}F_{9/2}$
VIII b 10	46	Pd	Palladium	106,4	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{0}$	8,3 – 19,8 – 32,9	138 80 (2+)	4,2	2,20	$^{1}S_{0}$
I b 11	47	Ag	Silber	107,87	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{1}$	7,544 – 21,4 – 35,9	144 126 (1+)	1	1,93	$^{2}S_{1/2}$
II b 12	48	Cd	Cadmium	112,41	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}$	8,96 – 16,8 – 38,0	149 97 (2+)	2	1,69	$^{1}S_{0}$
III a 13	49	In	Indium	114,82	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{1}$	5,76 – 18,79 – 27,9	163 81 (3+)	3	1,78	$^{2}P_{1/2}$
IV a 14	50	Sn	Zinn	118,69	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{2}$	7,30 – 14,5 – 30,5	151 93 (2+) 69 (4+)	4,2	1,96	$^{3}P_{0}$
V a 15	51	Sb	Antimon	121,75	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{3}$	8,5 – 18 – 24,7	145 76 (3+) 62 (5+)	5,3	2,05	$^{4}S_{3/2}$
VI a 16	52	Te	Tellur	127,60	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{4}$	8,96 – 18,6 – 30,5	143 221 (2−) 56 (6+)	6,4,2	2,1	$^{3}P_{2}$
VII a 17	53	I	Iod	126,90	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{5}$	10,45 – 19,13 – 33	133 216 (1−)	7,5,1	2,66	$^{2}P_{3/2}$
VIII a 18	54	Xe	Xenon	131,30	$[Kr]\,4d^{10}\,5s^{2}\,5p^{6}$	12,13 – 21,2 – 32,1	131			$^{1}S_{0}$
I a 1	55	Cs	Cäsium	132,91	$[Xe]\,6s^{1}$	3,9 – 25,1	265 167 (1+)	1	0,79	$^{2}S_{1/2}$
II a 2	56	Ba	Barium	137,33	$[Xe]\,6s^{2}$	5,2 – 10,0	217 134 (2+)	2	0,89	$^{1}S_{0}$
III b 3	57	La	Lanthan	138,91	$[Xe]\,5d^{1}\,6s^{2}$	5,61 – 11,43 – 19,2	187 114 (3+)	3	1,10	$^{2}D_{3/2}$
IV b 4	72	Hf	Hafnium	178,49	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{2}\,6s^{2}$	7 – 14,9 – 23,2	156 78 (4+)	4	1,3	$^{3}F_{2}$
V b 5	73	Ta	Tantal	180,95	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{3}\,6s^{2}$	7,88 – 16,2	143 68 (5+)	5	1,5	$^{4}F_{3/2}$
VI b 6	74	W	Wolfram	183,85	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{4}\,6s^{2}$	7,98	137 70 (4+) 62 (6+)	6,5,4,3,2	2,36	$^{5}D_{0}$
VII b 7	75	Re	Rhenium	186,21	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{5}\,6s^{2}$	7,87 – 16,6	137 72 (4+) 56 (7+)	7,6,4,2,1	1,9	$^{6}S_{5/2}$
VIII b 8	76	Os	Osmium	190,2	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{6}\,6s^{2}$	8,7	134 69 (4+)	8,6,4,3,2	2,2	$^{5}D_{4}$
VIII b 9	77	Ir	Iridium	192,22	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{7}\,6s^{2}$	9,1	136 68 (4+)	6,4,3,2	2,20	$^{2}D_{5/2}$
VIII b 10	78	Pt	Platin	195,09	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{9}\,6s^{1}$	8,88 – 18,6	139 80 (2+)	4,2	2,28	$^{3}D_{3}$
I b 11	79	Au	Gold	196,97	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{1}$	9,18 – 19,95	144 137 (1+) 68 (3+)	3,1	2,54	$^{2}S_{1/2}$
II b 12	80	Hg	Quecksilber	200,59	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}$	10,44 – 18,76 – 34,2	150 110 (1+) 96 (2+)	2,1	2,00	$^{1}S_{0}$
III a 13	81	Tl	Thallium	204,38	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{1}$	6,11 – 20,4 – 29,8	170 147 (1+) 95 (3+)	3,1	2,04	$^{2}P_{1/2}$
IV a 14	82	Pb	Blei	207,19	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{2}$	7,38 – 14,96 – 31,9	175 120 (2+) 84 (4+)	4,2	2,33	$^{3}P_{0}$
V a 15	83	Bi	Bismut	208,98	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{3}$	8,0 – 16,6 – 25,42	155 96 (3+) 74 (5+)	5,3	2,02	$^{4}S_{3/2}$
VI a 16	84	Po	Polonium	(209)	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{4}$	8,42	167 67 (6+)	4,2	2,0	$^{3}P_{2}$
VII a 17	85	At	Astat	(210)	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{5}$		62 (7+)	7,5,3,1	2,2	
VIII a 18	86	Rn	Radon	(222,0)	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{10}\,6s^{2}\,6p^{6}$	10,75				$^{1}S_{0}$
I a 1	87	Fr	Francium	(223,0)	$[Rn]\,7s^{1}$		180 (1+)	1	0,7	
II a 2	88	Ra	Radium	(226,0)	$[Rn]\,7s^{2}$	5,28 – 10,15	143 (2+)	2	0,9	
III b 3	89	Ac	Actinium	(227,0)	$[Rn]\,6d^{1}\,7s^{2}$	6,9 – 12,1	188 118 (3+)	3	1,1	
IV b 4	104	Rf	Rutherfordium	(261,1)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{2}\,7s^{2}$					
V b 5	105	Db	Dubnium	(262,1)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{3}\,7s^{2}$					
VI b 6	106	Sg	Seaborgium	(263,1)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{4}\,7s^{2}$					
VII b 7	107	Bh	Bohrium	(262)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{5}\,7s^{2}$					
VIII b 8	108	Hs	Hassium	(265)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{6}\,7s^{2}$					
VIII b 9	109	Mt	Meitnerium	(268)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{7}\,7s^{2}$					
VIII b 10	110	Ds	Darmstadtium	(270)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{9}\,7s^{1}$					
I b 11	111	Rg	Roentgenium	(272)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{10}\,7s^{1}$					

Np – nicht natürlich vorkommende Elemente

Lanthanoide ▶

Ordnungszahl	Symbol	Element	relative Atommasse	Elektronenkonfiguration	Ionisierungsenergien	Atom- bzw. Ionenradius	Wertigkeiten	Elektronegativität	Grundzustand
58	Ce	Cer	140,12	$[Xe]\,4f^{2}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,6 – 12,3 – 20	183 107 (3+) 94 (4+)	4,3	1,12	$^{3}H_{4}$
59	Pr	Praseodym	140,91	$[Xe]\,4f^{3}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,46 – 10,55 – 20,2	132 106 (3+) 92 (4+)	4,3	1,13	$^{4}I_{9/2}$
60	Nd	Neodym	144,24	$[Xe]\,4f^{4}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,51 – 10,7	181 104 (3+)	3	1,14	$^{5}I_{4}$
61	Pm	Promethium	146,9	$[Xe]\,4f^{5}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,55 – 10,90	106 (3+)	3	1,2	$^{6}H_{5/2}$
62	Sm	Samarium	150,35	$[Xe]\,4f^{6}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,6 – 11,2	179 100 (3+)	3,2	1,17	$^{7}F_{0}$
63	Eu	Europium	151,96	$[Xe]\,4f^{7}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,67 – 11,25	199 117 (2+) 98 (3+)	3,2	1,2	$^{8}S_{7/2}$
64	Gd	Gadolinium	157,25	$[Xe]\,4f^{7}\,5d^{1}\,6s^{2}$	6,16 – 12	179 97 (3+)	3	1,20	$^{9}D_{2}$
65	Tb	Terbium	158,93	$[Xe]\,4f^{9}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,98 – 11,52	176 93 (3+)	4,3	1,2	
66	Dy	Dysprosium	162,50	$[Xe]\,4f^{10}\,5d^{0}\,6s^{2}$	6,8 – 11,6	175 92 (3+)	3	1,22	$^{5}I_{8}$
67	Ho	Holmium	164,93	$[Xe]\,4f^{11}\,5d^{0}\,6s^{2}$	6,02 – 11,80	174 91 (3+)	3	1,23	$^{4}I_{15/2}$
68	Er	Erbium	167,26	$[Xe]\,4f^{12}\,5d^{0}\,6s^{2}$	6,08 – 11,93	173 89 (3+)	3	1,24	$^{3}H_{6}$
69	Tm	Thulium	168,93	$[Xe]\,4f^{13}\,5d^{0}\,6s^{2}$	5,81 – 12,05 – 23,71	172 87 (3+)	3	1,25	$^{2}F_{7/2}$
70	Yb	Ytterbium	173,04	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{0}\,6s^{2}$	6,25 – 12,17 – 25,2	194 86 (3+)	3,2	1,1	$^{1}S_{0}$
71	Lu	Lutetium	174,97	$[Xe]\,4f^{14}\,5d^{1}\,6s^{2}$	5,43 – 14,7	172 85 (3+)	3	1,27	$^{2}D_{3/2}$

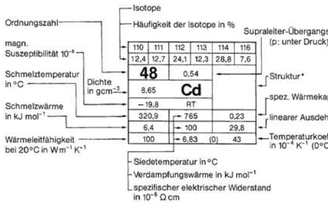
Actinoide ▶

Ordnungszahl	Symbol	Element	relative Atommasse	Elektronenkonfiguration	Ionisierungsenergien	Atom- bzw. Ionenradius	Wertigkeiten	Elektronegativität
90	Th	Thorium	232,04	$[Rn]\,5f^{0}\,6d^{2}\,7s^{2}$	6,95 – 11,5 – 20,0	180 102 (4+)	4	1,3
91	Pa	Protactinium	231,04	$[Rn]\,5f^{2}\,6d^{1}\,7s^{2}$		161 113 (3+) 98 (4+)	5,4	1,5
92	U	Uran	238,03	$[Rn]\,5f^{3}\,6d^{1}\,7s^{2}$	6,08	139 97 (4+) 80 (6+)	6,5,4,3	1,38
93	Np	Neptunium	(237,0)	$[Rn]\,5f^{4}\,6d^{1}\,7s^{2}$		130 110 (3+) 95 (4+)	6,5,4,3	1,36
94	Pu	Plutonium	(244,1)	$[Rn]\,5f^{6}\,6d^{0}\,7s^{2}$	5,8	151 108 (3+) 93 (4+)	6,5,4,3	1,28
95	Am	Americium	(243,1)	$[Rn]\,5f^{7}\,6d^{0}\,7s^{2}$	6,0	182 107 (3+) 92 (4+)	6,5,4,3	1,3
96	Cm	Curium	(247,1)	$[Rn]\,5f^{7}\,6d^{1}\,7s^{2}$		98 (3+)	3	1,3
97	Bk	Berkelium	(247,1)	$[Rn]\,5f^{9}\,6d^{0}\,7s^{2}$		96 (3+)	4,3	1,3
98	Cf	Californium	(251,1)	$[Rn]\,5f^{10}\,6d^{0}\,7s^{2}$		95 (3+)	3	1,3
99	Es	Einsteinium	(224,1)	$[Rn]\,5f^{11}\,6d^{0}\,7s^{2}$				1,3
100	Fm	Fermium	(257,1)	$[Rn]\,5f^{12}\,6d^{0}\,7s^{2}$				1,3
101	Md	Mendelevium	(258,1)	$[Rn]\,5f^{13}\,6d^{0}\,7s^{2}$				1,3
102	No	Nobelium	(259,1)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{0}\,7s^{2}$		110 (2+)		1,3
103	Lr	Lawrencium	(260,1)	$[Rn]\,5f^{14}\,6d^{1}\,7s^{2}$				

Periodensystem der Elemente

Physikalische Eigenschaften

Die Gruppenbezeichnung 1 bis 18 entspricht der IUPAC-Empfehlung 1985.



Gas — flüssig
Metall — flüssig
Halbleiter
Halbmetall

RT: Raumtemperatur
l: flüssig
s: Sublimation
α, w, r, m, g: Phase, Modifikation

Supraleiter:

Übergangstemperatur in K steht auf weißem Grund.

Ferromagnetika:

„ferro" und die entsprechende Curie-Temperatur in K stehen auf weißem Grund.

*Struktur
- kubischflächenzentriert
- kubischraumzentriert
- Diamant
- kubisch
- hexagonal
- rhomboedrisch
- tetragonal
- orthorhombisch
- monoklin

Np nicht natürlich vorkommende Elemente

Lanthanoide ▸

Actinoide ▸