Reihen

Reihen

Gegeben eine Folge a_n. Wir definieren die unendliche Summen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

Definition

- $S_n := a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißen "Partialsummen von a_n", die Folge S_n heißt (unendliche) Reihe.
- Wenn S_n konvergiert, mit limes S, schreiben wir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := S$.

Zu jeder Folge s_n gibt es eine Folge a_n so daß s_n die Partialsummen von a_n sind: $a_0 := s_0$, $a_{n+1} := s_{n+1} - s_n$.
Dann $a_0 + \dots a_n = s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \dots + (s_n - s_{n-1})$.

Ein Beispiel: $a_n = n$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Besseres Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$. Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots \\ 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= 2 + 1 + \tfrac{1}{2} \quad \dots \end{aligned}$$

Daher (kein ordentlicher Beweis): $1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2$

Warum kein ordentlicher Beweis?

$$
\begin{aligned}
a_n = 2^n.\text{ Dann: } \quad \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \ 1 + 2 + 4 + \dots \\
2 \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \qquad\ 2 + 4 + \dots \\
\text{“Daher:”} \ 1 \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= -1
\end{aligned}
$$

Was ist das Problem? Wir setzten die Konvergenz implizit voraus.
Ordentlicherer Beweis später.

Einfache Eigenschaften

Theorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *("$a_n$ ist Nullfolge")*

Beweis: Sei S die unendliche Summe. Laut Definition:
$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)\,|S_n - S| < \epsilon$. Insbesondere: $|S_n - S| < \epsilon$ und $|S_{n+1} - S| < \epsilon$, d.h.
$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| = |(S_{n+1} - S) - (S_n - S)| < 2\epsilon$. $\square$

Umkehrung ("a_n Nullfolge $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert") gilt nicht!

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht!

Bew.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots >$$
$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$ $\square$

Ein genauerer Blick auf die geometrische Reihe

Theorem

Sei $q > 1$. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1}$. *Bzw:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1}$

Beweis: Per Def., $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{q^n} = 1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^N}$.

Daher: $qS_n = q + S_n - \frac{1}{q^N}$, d.h. $S_n = \frac{q - \frac{1}{q^N}}{q-1}$, und der Limes ist $\frac{q}{q-1}$.

Mehr Beispiele

- Wissen bereits: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht!

  (Mit Integration: Summe bis N "ungefähr" $\int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln(N) - 1$.)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für jedes $k > 1$.

  (Mit Integration: Summe bis N "ungefähr" $\int_1^N \frac{1}{x^k} dx = k - k\frac{1}{N^{k+1}}$.)
- $\frac{1}{n}$ ist "Trennlinie": Die "üblichen" Reihen die schneller fallen (z.B. $\frac{1}{n^q}$ und erst recht $\frac{1}{q^n}$, mit $q > 1$) konvergieren;
  $\frac{1}{n}$ und alles was weniger schnell fällt konvergiert nicht.
- Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Kein Prüfungsstoff.)

Monotonie und Konvergenz

Bis jetzt hatten wir immer $a_n \geq 0$. Für solche Reihen gilt:
S_n ist monoton wachsend, und daher: S_n beschränkt gdw. S_n konvergent.

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn a_n alternierend ist, d.h. abwechselnd positiv und negativ, und $|a_n|$ (die Absolutbeträge) eine monoton fallende Nullfolge sind, dann konvergiert die Reihe.

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. Die Absolutbeträge, d.h. $\frac{1}{n}$, sind eine fallende Nullfolgen, daher ist die Reihe konvergiert (und ist $-\ln(2)$, kein Prüfungsstoff).

Wir wissen bereits: Voraussetzung "Nullfolge" ist nötig:
Gegenbeispiel: $(-1)^n$ hat Partialsummen $(1, 0, 1, 0, \dots)$ und konvergiert nicht.

Ü: Warum muss man auch monoton fallend voraussetzen?

Absolute Konvergenz

Definition

Wenn die Reihe der absoluten Folgenglieder $|a_n|$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, konvergiert, heißt die Reihe a_n "absolut konvergent".

Theorem

Absolut konvergent impliziert konvergent.

(Umkehrung gilt nicht, wieder dasselbe Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.)

Beweis: Seien S_n Partialsummen von a_n, S_n^* (monoton steigend) von $|a_n|$.
S_n konvergiert gdw. S_n Cauchyfolge, d.h. per Def.:
$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall m > n > N)\,|S_m - S_n| < \epsilon$.
Aber $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| = S_m^* - S_n^* = |S_m^* - S_n^*|$. $\square$

Dreiecksungleichung

Alle (fast alle?) analytischen Beweise bisher haben die Dreiecksungleichung benutzt:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\, |a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

manchmal in der Form

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, |a - b| \leq |a| + |b|$$

oder

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Oder für mehr als zwei:

$$(\forall a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R})\, |a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \ldots |a_n|$$

Ü: Beweise die Dreiecksungleichung.

Arithmetik

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = T$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $S + T$.
  Warum? Für die n-ten Partialsummen gilt:
  $S_n^{a+b} := (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) =$
  $= (a_1 + \dots + a_n) \ + \ (b_1 + \dots + b_n) = S_n^a + S_n^b,$
  und $\lim(S_n^a + S_n^b) = \lim(S_n^a) + \lim(S_n^b)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot a_n$ konvergiert gegen $\lambda \cdot S$.
  Warum? Für die n-ten Partialsummen gilt:
  $S_n^{\lambda a} := \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \dots a_n) = \lambda S_n^a$,
  und $\lim(\lambda \cdot S_n^a) = \lambda \cdot \lim(S_n^a)$.
- Für das Produkt zweier Reihen gilt das i.A. natürlich nicht!
  I.A. ist ja $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \neq a_1 b_1 + a_2 b_2$
  Bsp: $\bar{a} = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2$, und
  $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot a_n) = 2 \neq 2 \cdot 2 = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$.

Cauchy Produkte (kein Prüfungsstoff)

Das Produkt von Reihen lässt sich informell so beschreiben/umordnen:
$(a_0 + \dots + a_N + \dots) \cdot (b_0 + \dots + b_N + \dots) =$
$= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots + (a_0 b_N + \dots a_N b_0) + \dots.$
Es gilt:

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn die Reihen a_n und b_n absolut konvergieren, dann gilt:
$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *mit* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Die Folge (bzw. Reihe) c_n nennt man das Cauchyprodukt, manchmal auch Faltung der Folgen/Reihen a_n und b_n.

Teilmengen von $\mathbb{R}$

Mengenschreibweisen

Notation: Seien A und B Mengen.

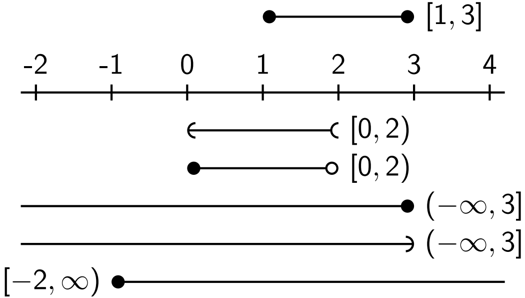
- $\{a_0, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die (nur) $a_0, \dots a_n$ als Elemente enthält. Insbesondere: $\{a\}$ enthält genau a.
- $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente die in A oder B (oder beiden) sind.
- $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente die in A und in B sind. Könnte man auch als $\{x \in A : x \in B\}$ schreiben.
- $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente die in A aber nicht in B sind. Könnte man auch als $\{x \in A : x \notin B\}$ schreiben.
- $A \setminus \{a\}$ ist also $\{x \in A : x \neq a\}$.
- $A \times B$ ist die Menge der (geordneten) Paare (endliche Folge der Länge 2) (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
  $A^2 := A \times A$.
  Bsp: $\mathbb{R}^2$ ist die (reelle) Ebene (kartesische Koordinaten)
- Analog $A_1 \times \cdots \times A_n$. Z.B. $\mathbb{R}^3$ ist der 3dimensionale Raum.

Reelle Intervalle

In $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner: einer linear geordneten Menge): Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ heißt "das abgeschlossene Intervall a b".
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ heißt "das offene Intervall a b".
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, analog $[a, b)$ ("halboffen")
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, analog für $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$ und (a, ∞).
- Manchmal: $]a, b]$ statt $(a, b]$; $]a, b[$ statt (a, b) etc.

Darstellungen:



Metrische Räume

Für $x, y \in \mathbb{R}$, setzte $d(x,y) := |x-y|$. d ist ein "Abstand" oder "Metrik":

Definition

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X, wenn gilt: $d(x,y) = d(y,x)$; $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ gdw. $x = y$; und $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Andere Beispiele für Abstände:

- In $\mathbb{R}^2$ die "Euklidische Metrik" $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- Analog für $\mathbb{R}^3$: $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.
- (Bem.: Auch in $\mathbb{R}$ gilt: $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2}$.)
- Allgemeiner: V normierter Vektorraum. Dann ist $d(\vec{x},\vec{y}) := |\vec{y} - \vec{x}|$ ein Abstand.

Eine "Grundmenge" X zusammen mit einem Abstand $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nennt man "metrischen Raum".

Offene Mengen 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Für $x \in \mathbb{X}$ und $\varepsilon > 0$, setze
$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ (genannt "Ball").

In $\mathbb{R}$ ist $B_\varepsilon(x)$ das Intervall $(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$.
In $\mathbb{R}^2$ ist $B_\varepsilon(\vec{x})$ die randlose Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\vec{x}$ und Radius ε.
Analog: In $\mathbb{R}^3$ Kugel.

Definition

$A \subseteq X$ heißt offen, wenn $(\forall x \in A)\,(\exists \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

(Insbesondere: $\emptyset$ ist offen.)

Intuitiv: Eine Menge ist offen wenn sie "keinen Rand" hat.

Offene Mengen 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Theorem

- *Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist offen. X ist offen.*
- *A offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung von Bällen.*
- *Die ("beliebige") Vereinigung von offenene Mengen ist offen.*
- *Der Schnitt zweier (oder: endlich vieler) offener Mengen ist offen.*

Beweis: Ü. (Für den ersten Punkt benötigt man die Dreiecksungleichung.)

In $\mathbb{R}$ gilt daher:

- Ein offenens Interval ist offen.
- $A \subseteq \mathbb{R}$ offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung offener Intervalle.