1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer, Marion Scholz

1. April 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Mäuse regieren heimlich die Welt. Speedy Gonzales ist eine Maus. Speedy Gonzales regiert die Welt.

(b) Viele Menschen sind Brillenträger. Albert Einstein ist ein Mensch. Albert Einstein ist Brillenträger.

(c) Alle Frauen atmen. Chuck Norris atmet. Chuck Norris ist eine Frau.

Lösung

(a)
$$\begin{array}{l}\text{Mäuse regieren heimlich die Welt.}\\ \text{Speedy Gonzales ist eine Maus.}\\ \hline \text{Speedy Gonzales regiert die Welt.}\end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l}\text{Alle } x \text{ machen } y.\\ z \text{ ist ein } x.\\ \hline z \text{ macht } y.\end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

$$\begin{array}{l}\text{Vögel können fliegen.}\\ \text{Der Specht ist ein Vogel.}\\ \hline \text{Spechte können fliegen.}\end{array}$$

Alternativ kann der erste Satz auch als Existenz-Aussage interpretiert werden.

$$\begin{array}{l}\text{Manche Mäuse regieren heimlich die Welt.}\\ \text{Speedy Gonzales ist eine Maus.}\\ \hline \text{Speedy Gonzales regiert die Welt.}\end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l}\text{Es gibt } x\text{, die } y \text{ machen.}\\ z \text{ ist ein } x.\\ \hline z \text{ macht } y.\end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Eine gültige Regel erhält man etwa, wenn man „manche“ durch „alle“ ersetzt, siehe oben.

(b) Viele Menschen sind Brillenträger.
Albert Einstein ist ein Mensch.
―――
Albert Einstein ist Brillenträger.

Inferenzregel: Manche x sind y.
z ist ein x.
―――
z ist y.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Ersetzt man „viele“ durch „alle“, erhält man eine gültige Inferenzregel: Alle x sind y.
z ist ein x.
―――
z ist y.

Alle Bälle sind rund.
Ein Fußball ist ein Ball.
―――
Ein Fußball ist rund.

(c) Alle Frauen atmen.
Chuck Norris atmet.
―――
Chuck Norris ist eine Frau.

Inferenzregel: Alle x haben Eigenschaft y.
z hat Eigenschaft y.
―――
z ist ein x.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle x haben Eigenschaft y.
z ist ein x.
―――
z hat Eigenschaft y.

Ein anderes Beispiel, dem dieselbe Inferenzregel zugrunde liegt:

Alle Autos fahren.
Der Käfer ist ein Auto.
―――
Der Käfer fährt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Stefan gratuliert Mia zum Geburtstag.

(b) Ein Kamel nennt man auch Wüstenschiff oder Trampeltier.

(c) Ich darf nur dann ins Kino, wenn ich vorher mein Zimmer aufgeräumt habe.

(d) Wenn das Barometer fällt, wird es regnen oder schneien.

(e) Flo, du sollst nicht gleichzeitig essen und sprechen!

(f) Sophie wünscht sich zu Weihnachten einen Fernseher oder eine Playstation.

(g) Entweder Mama hilft mir bei der Hausübung oder nicht.

(h) Wir sitzen im Hörsaal und warten darauf, dass die Vorlesung beginnt.

Lösung

(a) *Stefan gratuliert Mia zum Geburtstag.*
$A \dots$ Stefan gratuliert Mia zum Geburtstag.
Struktur: A
Formel: A

(b) *Ein Kamel nennt man auch Wüstenschiff oder Trampeltier.*
$A \dots$ Ein Kamel nennt man Wüstenschiff.
$B \dots$ Ein Kamel nennt man Trampeltier.
Struktur: A oder B
Formel: $A \vee B$

(c) *Ich darf nur dann ins Kino, wenn ich vorher mein Zimmer aufgeräumt habe.*
$A \dots$ Ich darf ins Kino.
$B \dots$ Ich habe mein Zimmer aufgeräumt.
Struktur: A nur dann wenn B
Formel: $A \supset B$

Anmerkung: Beachten Sie, dass sich durch das Wort „nur" die Richtung der Implikation umdreht. Die Aussage ist äquivalent zur folgenden Umformulierung: Wenn ich ins Kino durfte, habe ich mein Zimmer aufgeräumt. Die Formulierung „nur wenn – dann" ist ziemlich eindeutig als Implikation und nicht als Äquivalenz zu verstehen. Das Aufräumen des Zimmers ist notwendig, aber nicht hinreichend: Auch Geldmangel könnte etwa einen Kinobesuch verhindern.

(d) *Wenn das Barometer fällt, wird es regnen oder schneien.*
$A \dots$ Das Barometer fällt.
$B \dots$ Es regnet.
$C \dots$ Es schneit.
Struktur: Wenn A, dann B oder C
Formel: $A \supset (B \vee C)$

Das inklusive Oder lässt auch Schneeregen zu.

(e) *Flo, du sollst nicht gleichzeitig essen und sprechen!*
$A \dots$ Flo isst.
$B \dots$ Flo spricht.
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B
Formel: $\neg(A \wedge B)$ oder $\neg A \vee \neg B)$ oder $A \uparrow B$

(f) *Sophie wünscht sich zu Weihnachten einen Fernseher oder eine Playstation.*
$A \dots$ Sophie wünscht sich einen Fernseher.
$B \dots$ Sophie wünscht sich eine Playstation.
Struktur: A und B (wenn um das Wünschen geht)
A oder B (wenn es um das Bekommen geht)
Formel: $A \wedge B$ bzw. $A \vee B$

Genau genommen hat Sophie einen einzigen Wunsch, nämlich einen Fernseher oder eine Playstation zu bekommen. Das ist etwas anderes als die Disjunktion „Sophie wünscht sich einen Fernseher, oder sie wünscht sich eine Playstation.“ In diesem Fall ist der Satz aus Sicht der Aussagenlogik eine einzige, atomare Aussage.

(g) *Entweder Mama hilft mir bei der Hausübung oder nicht.*
A ... Mama hilft mir bei der Hausübung.
Struktur: Entweder A oder nicht A
Formel: $A \not\equiv \neg A$

(h) *Wir sitzen im Hörsaal und warten darauf, dass die Vorlesung beginnt.*
A ... Wir sitzen im Hörsaal.
B ... Wir warten auf den Beginn der Vorlesung.
Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{xor}\}$ nicht vollständig ist.

Anmerkung: Die Begründung, dass in jedem Ausdruck immer mindestens eine Variable vorkommen muss und es daher nicht möglich ist, nullstellige Funktionen (also Konstanten wie false) darzustellen, ist nicht ausreichend, da das nur ein Problem der gewählten Darstellung ist. Wenn Sie aber zeigen können, dass beispielsweise die einstellige konstante Funktion definiert durch $\mathsf{false}(x) = 0$ nicht darstellbar ist, ist das schlüssig.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge $\{\mathsf{and}, \mathsf{not}\}$ vollständig ist. Es reicht daher zu zeigen, dass not durch die Funktionen in $\{\mathsf{and}, \mathsf{xor}, \mathsf{true}\}$ darstellbar ist. Tatsächlich gilt $\mathsf{not}(x) = \mathsf{xor}(x, \mathsf{true})$, wie sich durch Auswertung der beiden Seiten in den zwei möglichen Wahrheitsbelegungen überprüfen lässt:

x	$\mathsf{not}(x)$		$=$	$\mathsf{xor}(x,\mathsf{true})$		
0	**1**	0	✓	**1**	0	1
1	**0**	1	✓	**0**	1	1

(b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch and und xor darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem wir vom einzigen Argument x ausgehend die beiden Funktionen anwenden.

Wir stellen znächst fest, dass $\mathsf{and}(x,x) = x$ und $\mathsf{xor}(x,x) = \mathsf{false}(x)$ gilt. Beziehen wir $\mathsf{false}(x)$ mit ein, erhalten wir weiters

$$\begin{aligned}
&\mathsf{and}(\mathsf{false}(x), x) = \mathsf{and}(x, \mathsf{false}(x)) = \mathsf{and}(\mathsf{false}(x), \mathsf{false}(x)) = \mathsf{false}(x) \ , \\
&\mathsf{xor}(\mathsf{false}(x), \mathsf{false}(x)) = \mathsf{false}(x) \ , \\
&\mathsf{xor}(\mathsf{false}(x), x) = \mathsf{xor}(x, \mathsf{false}(x)) = x \ .
\end{aligned}$$

Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

Behauptung: Jeder Ausdruck bestehend aus and, xor und x ist äquivalent zu x oder $\mathsf{false}(x)$.

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl n der Anwendungen der Funktionen and und xor.

Induktionsanfang $n = 0$: Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von and und xor ist x selbst. Dafür gilt unsere Behauptung.

Induktionshypothese: Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. xor.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit $n+1$ Anwendungen von and und xor gilt. Wir haben also einen Ausdruck $\mathsf{and}(f(x), g(x))$ bzw. $\mathsf{xor}(f(x), g(x))$ vor uns, bei dem sowohl f als auch g mit n oder weniger Anwendungen von and und xor definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu x bzw. $\mathsf{false}(x)$. Wie wir oben aber festgestellt haben, sind die Funktionen and und xor mit den Argumenten x bzw. $\mathsf{false}(x)$ wieder äquivalent zu den Funktionen x bzw. $\mathsf{false}(x)$.

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu x (identische Abbildung) bzw. $\mathsf{false}(x)$ sind, ist z.B. die einstellige Funktion not nicht darstellbar. Die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{xor}\}$ ist daher nicht funktional vollständig.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{M}$ die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

(m1) $\{\texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{*}\} \subseteq \mathcal{M}$

(m2) Wenn $x \in \mathcal{M}$, dann auch $\texttt{[}xx\texttt{]} \in \mathcal{M}$.

(m3) Wenn $x, y \in \mathcal{M}$, dann auch $x\texttt{(}y\texttt{)} \in \mathcal{M}$.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ der stufenweise Konstruktion von $\mathcal{M}$ an. Bei der Menge $\mathcal{M}_2$ reicht es, 10 typische Elemente anzugeben, da sie schon verhältnismäßig groß ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeichenkette `[+(-)+(-)](-)(*)` in der Menge $\mathcal{M}$ liegt.

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `[+++](-)(*)` nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegen kann.

Lösung

(a) $\mathcal{M}_0 = \{\texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{*}\}$
$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \{\texttt{[++]}, \texttt{[--]}, \texttt{[**]}, \texttt{+(+)}, \texttt{+(-)}, \texttt{+(*)}, \texttt{-(+)}, \texttt{-(-)}, \texttt{-(*)}, \texttt{*(+)}, \texttt{*(-)}, \texttt{*(*)}\}$
$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{\texttt{[[++][++]]}, \texttt{[[--][--]]}, \ldots, \texttt{[+(+)+(+)]}, \texttt{[+(-)+(-)]}, \ldots,$
$\texttt{+([++])}, \texttt{+([--])}, \ldots, \texttt{[++](+)}, \texttt{[++](-)}, \ldots,$
$\texttt{[++]([++])}, \texttt{[++]([--])}, \ldots, \texttt{+(+)([++])}, \ldots, \texttt{+(+)(+(+))}, \ldots\}$

(b) Um zu zeigen, dass ein Wort in einer induktiv definierten Menge liegt, muss man das Wort schrittweise mit Hilfe der Eigenschaften (Konstruktionsregeln) erzeugen. Wir verwenden die Notation $A \overset{r}{\Longrightarrow} B$ um auszudrücken, dass Aussage B aus Aussage A mit Hilfe der Regel r folgt, wobei r entweder m2 oder m3 sein kann.

1. Wegen Regel m1 gilt $\texttt{+} \in \mathcal{M}$, $\texttt{-} \in \mathcal{M}$ und $\texttt{*} \in \mathcal{M}$.
2. $\texttt{+}, \texttt{-} \in \mathcal{M} \overset{\text{m3}}{\Longrightarrow} \texttt{+(-)} \in \mathcal{M} \overset{\text{m2}}{\Longrightarrow} \texttt{[+(-)+(-)]} \in \mathcal{M}$
3. $\texttt{[+(-)+(-)]} \in \mathcal{M}$ (siehe 2.), $\texttt{-} \in \mathcal{M} \overset{\text{m3}}{\Longrightarrow} \texttt{[+(-)+(-)](-)} \in \mathcal{M}$
4. $\texttt{[+(-)+(-)](-)} \in \mathcal{M}$ (siehe 3.), $\texttt{*} \in \mathcal{M}$ (siehe 3.)
   $\overset{\text{m3}}{\Longrightarrow} \texttt{[+(-)+(-)](-)(*)} \in \mathcal{M}$

Diese wenn-dann Schlüsse lassen sich etwas übersichtlicher zweidimensional mit Trennlinien anordnen. Oberhalb der Linie stehen die Voraussetzungen, unterhalb das Ergebnis der Regelanwendung, und daneben steht die Bezeichnung der verwendeten Eigenschaft.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\texttt{+} \in \mathcal{M}}\;\text{m1} \qquad \overline{\texttt{-} \in \mathcal{M}}\;\text{m1}}{\texttt{+(-)} \in \mathcal{M}}\;\text{m3}}{\texttt{[+(-)+(-)]} \in \mathcal{M}}\;\text{m2} \qquad \overline{\texttt{-} \in \mathcal{M}}\;\text{m1}}{\texttt{[+(-)+(-)](-)} \in \mathcal{M}}\;\text{m3} \qquad \overline{\texttt{*} \in \mathcal{M}}\;\text{m1}}{\texttt{[+(-)+(-)](-)(*)} \in \mathcal{M}}\;\text{m3}$$

(c) Um zu zeigen, dass ein bestimmtes Wort nicht in der definierten Menge liegt, muss man eine Eigenschaft finden, die alle Wörter in der Menge besitzen, nicht aber das bestimmte Wort. Für die Wahl dieser Eigenschaft gibt es verschiedene Möglichkeiten; hier zwei davon.

Argumentation über die Länge der Wörter. Bei der stufenweisen Konstruktion der gegebenen Menge $\mathcal{M}$ besitzen jene Wörter in $\mathcal{M}_i$, die neu hinzukommen (die also noch nicht in $\mathcal{M}_{i-1}$ vorhanden sind), mindestens die Länge $2^i \cdot 3 - 2$; das lässt sich mit einem kurzen Induktionsbeweis zeigen. Da das Wort `[+++](-)(*)` die Länge 11 besitzt, müsste es spätestens ab $i = 2$ in den stufenweise konstruierten Mengen $\mathcal{M}_i$ liegen. Wenn man also $\mathcal{M}_2$ konstruiert und feststellt, dass das gesuchte Wort nicht vorkommt, liegt es nicht in $\mathcal{M}$.

Diese Argumentation lässt sich theoretisch immer dann verwenden, wenn alle Abschlusseigenschaften der induktiven Definition zu längeren Wörtern führen. Allerdings kann es aufwändig sein, alle Wörter bis zur benötigten Länge tatsächlich zu generieren; $\mathcal{M}_2$ enthält bereits 243 Wörter, die Größe von $\mathcal{M}_i$ steigt exponentiell mit i an.

Argumentation über die verbotene Symbolfolge `[+++]`. Wir zeigen, dass die Zeichenfolge `[+++]` in einem Wort aus $\mathcal{M}$ nicht vorkommen kann. Dazu verwenden wir folgende Eigenschaft von $\mathcal{M}$: Die Anzahl der Zeichen wischen zwei zusammengehörigen eckigen Klammern ist immer gerade. Eckige Klammern können ja immer nur paarig durch Regel m2 eingeführt werden, indem ein Wort x verdoppelt und dazwischen geschrieben wird. Egal wieviele Zeichen x enthält, das Wort xx enthält eine gerade Anzahl von Zeichen. Da `+++` eine ungerade Länge besitzt, kann `[`$+{+}+$] in keinem Wort aus $\mathcal{M}$ vorkommen.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei F die Formel $(((A \supset B) \vee C) \not\equiv ((\neg B \wedge C) \supset A))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 0$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $((A \supset B) \vee C) \not\equiv ((\neg B \wedge C) \supset A)$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da A und B Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \supset B)$ eine Formel (a4).

(3) Da $(A \supset B)$ und C Formeln sind (Punkt 1 bzw. 2), ist auch $((A \supset B) \vee C)$ eine Formel (a4).

(4) Da B eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg B$ eine Formel (a3).

(5) Da $\neg B$ und C Formeln sind (Punkt 4 bzw. 1), ist auch $(\neg B \wedge C)$ eine Formel (a4).

(6) Da $(\neg B \land C)$ und A Formeln sind (Punkt 5 bzw. 1), ist auch $((\neg B \land C) \supset A)$ eine Formel (a4).

(7) Da $((A \supset B) \lor C)$ und $((\neg B \land C) \supset A)$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 5), ist auch $(((A \supset B) \lor C) \not\equiv ((\neg B \land C) \supset A))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{(A \supset B)}\,a4 \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{((A \supset B) \lor C)}\,a4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{\neg B}\,a3 \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{(\neg B \land C)}\,a4 \quad \dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1}{((\neg B \land C) \supset A)}\,a4}{(((A \supset B) \lor C) \not\equiv ((\neg B \land C) \supset A)) \in \mathcal{A}}\,a4$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b) $\mathsf{val}_I(((A \supset B) \lor C) \not\equiv ((\neg B \land C) \supset A))$
$= \mathsf{val}_I((A \supset B) \lor C)\ \mathsf{xor}\ \mathsf{val}_I((\neg B \land C) \supset A))$
$= (\mathsf{val}_I(A \supset B)\ \mathsf{or}\ \mathsf{val}_I(C))\ \mathsf{xor}\ (\mathsf{val}_I(\neg B \land C)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(A))$
$= ((\mathsf{val}_I(A)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(B))\ \mathsf{or}\ 0)\ \mathsf{xor}\ (\mathsf{val}_I(\neg B \land C)\ \mathsf{implies}\ 1)$
$= ((1\ \mathsf{implies}\ 1)\ \mathsf{or}\ 0)\ \mathsf{xor}\ 1$
$= (1\ \mathsf{or}\ 0)\ \mathsf{xor}\ 1$
$= 1\ \mathsf{xor}\ 1$
$= 0$

Wir konnten die Berechnung ein wenig abgekürzen, da das zweite Argument vom zweiten implies auf der rechten Seite den Wert 1 besitzt und damit das Ergebnis bereits eindeutig bestimmt; der Wert von $\mathsf{val}_I(\neg B \land C)$ ist irrelevant.

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$((A \supset B)$	$\lor C)$	$\not\equiv$	$((\neg B$	$\land\ C)$	$\supset A)$
0	0	0	1	1	**0**	1	0	1
0	0	1	1	1	**1**	1	1	0
0	1	0	1	1	**0**	0	0	1
0	1	1	1	1	**0**	0	0	1
1	0	0	0	0	**1**	1	0	1
1	0	1	0	1	**0**	1	1	1
1	1	0	1	1	**0**	0	0	1
1	1	1	1	1	**0**	0	0	1

Die Formel ist somit erfüll- und widerlegbar, aber weder gültig noch unerfüllbar.

Aufgabe 6 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $((A \equiv \neg B) \vee \neg A)$ und $((A \wedge B) \supset \neg(C \supset A))$ äquivalent sind.

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$((A\equiv$	$\neg B)$	$\vee$	$\neg A)$	$=$	$((A\wedge B)$	$\supset$	$\neg$	$(C\supset A))$
0	0	0	0	1	**1**	1	✓	0	**1**	0	1
0	0	1	0	1	**1**	1	✓	0	**1**	1	0
0	1	0	1	0	**1**	1	✓	0	**1**	0	1
0	1	1	1	0	**1**	1	✓	0	**1**	1	0
1	0	0	1	1	**1**	0	✓	0	**1**	0	1
1	0	1	1	1	**1**	0	✓	0	**1**	0	1
1	1	0	0	0	**0**	0	✓	1	**0**	0	1
1	1	1	0	0	**0**	0	✓	1	**0**	0	1

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\vee$ den Wert 1 liefert, wenn eines der Argumente den Wert 1 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen $\neg A$ den Wert 1 besitzt, bereits mit 1 festgelegt. Zusätzlich liefert die Implikation immer den Wert 1, wenn die linke Seite den Wert 0 besitzt, somit müssen bei der zweiten Formel nur die beiden letzten Interpretationen vollständig ausgewertet werden.

A	B	C	$((A\equiv$	$\neg B)$	$\vee$	$\neg A)$	$=$	$((A\wedge B)$	$\supset$	$\neg$	$(C\supset A))$
0	0	0			**1**	1	✓	0	**1**		
0	0	1			**1**	1	✓	0	**1**		
0	1	0			**1**	1	✓	0	**1**		
0	1	1			**1**	1	✓	0	**1**		
1	0	0	1	1	**1**	0	✓	0	**1**		
1	0	1	1	1	**1**	0	✓	0	**1**		
1	1	0	0	0	**0**	0	✓	1	**0**	0	1
1	1	1	0	0	**0**	0	✓	1	**0**	0	1

(b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir dabei identische Formeln erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$
\begin{aligned}
&(A \equiv \neg B) \vee \neg A && F \equiv G = (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)\\
&= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg A && \neg\neg F = F\\
&= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A && F \vee (F \wedge G) = F\\
&= (A \wedge \neg B) \vee \neg A && F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)\\
&= (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) && \neg F \vee F = \top\\
&= \top \wedge (\neg A \vee \neg B) && F \wedge \top = F\\
&= \neg A \vee \neg B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B) \supset \neg(C \supset A) && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= (A \wedge B) \supset \neg(\neg C \vee A) && \neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G\\
&= (A \wedge B) \supset (\neg\neg C \wedge \neg A) && \neg\neg F = F\\
&= (A \wedge B) \supset (C \wedge \neg A) && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= \neg(A \wedge B) \vee (C \wedge \neg A) && \neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G\\
&= \neg A \vee \neg B \vee (C \wedge \neg A) && F \vee (F \wedge G) = F\\
&= \neg A \vee \neg B
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Ist die Formel $(\neg A \vee B)$ eine logische Konsequenz der Formeln $(C \vee A) \wedge B$, $A \equiv B$ und $A \vee C$? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$(C \vee A)$	$\wedge B$,	$A \equiv B$,	$A \vee C$	$\models_I$	$\neg A \vee B$
0	0	0	0	0	1	0	✓	1
0	0	1	1	0	1	1	✓	1
0	1	0	0	0	0	0	✓	1
0	1	1	1	1	0	1	✓	1
1	0	0	1	0	0	1	✓	0
1	0	1	1	0	0	1	✓	0
1	1	0	1	1	1	1	✓	1
1	1	1	1	1	1	1	✓	1

Die Formel $(\neg A \vee B)$ ist eine logische Konsequenz der drei Prämissen.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt.
Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der Konklusion, reduziert sich die weitere Analyse auf jene zwei Interpretationen, in denen $(\neg A \vee B)$ falsch ist. Nur für diese Interpretationen müssen wir den Wert der Prämissen bestimmen. Werten wir als nächstes die zweite Prämisse für diese beiden Interpretationen aus, sehen wir dass sie

für beide Interpretationen falsch ist.

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$(C \vee A) \wedge B,$	$A \equiv B,$	$A \vee C$	$\models_I$	$\neg A \vee B$
0	0	0				✓	1
0	0	1				✓	1
0	1	0				✓	1
0	1	1				✓	1
1	0	0		0		✓	0
1	0	1		0		✓	0
1	1	0				✓	1
1	1	1				✓	1

Formel zur Konsequenzbeziehung: $(\neg A \vee B)$ ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln $(C \vee A) \wedge B$, $A \equiv B$ und $A \vee C$, wenn die Formel

$$(((C \vee A) \wedge B) \wedge (A \equiv B) \wedge (A \vee C)) \supset (\neg A \vee B)$$

gültig ist.

Aufgabe 8 **(2 Punkte)**

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3)$

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Sei F die Formel $((A \wedge C) \supset B) \equiv (A \downarrow B)$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) DNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$((A \wedge C)$	$\supset B)$	$\equiv$	$(A \downarrow B)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Aus dieser Tafel lässt sich folgende DNF ablesen:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$$

(b) KNF mittels algebraischer Methode:

$$
\begin{aligned}
&((A \wedge C) \supset B) \equiv (A \downarrow B) && F \supset G = \neg F \vee G \\
&= (\neg(A \wedge C) \vee B) \equiv (A \downarrow B) && F \downarrow G = \neg F \wedge \neg G \\
&= (\neg(A \wedge C) \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B) && \neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G \\
&= (\neg A \vee \neg C \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B) && F \equiv G = (F \vee \neg G) \wedge (\neg F \vee G) \\
&= (\neg A \vee \neg C \vee B \vee \neg(\neg A \wedge \neg B)) \\
&\quad \wedge (\neg(\neg A \vee \neg C \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) && \neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G,\ \neg\neg F = F \\
&= (\neg A \vee \neg C \vee B \vee A \vee B) \\
&\quad \wedge (\neg(\neg A \vee \neg C \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) && F \vee \neg F = \top,\ F \wedge \top = F \\
&= \neg(\neg A \vee \neg C \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B) && \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G,\ \neg\neg F = F \\
&= (A \wedge C \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B) && (F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\
&= (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A) \\
&\quad \wedge (C \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg B) && F \vee \neg F = \top,\ \top \wedge F = F,\ F \vee F = F \\
&= (A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg B) \\
&\quad \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg B && (F \vee G) \wedge F = F \\
&= (\neg A \vee C) \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Herr Winter vom Sonnenschein-Gymnasium findet nach einem Geografietest zwei identische Schummelzettel am Boden. Für ihn kommen fünf Schüler in Frage, die schon öfters durch Abschreiben aufgefallen sind. Nachdem die Schummelzettel Computerausdrucke sind, kommt eine Schriftanalyse nicht in Frage. Nach kurzer Diskussion mit den anderen Lehrern der Klasse hat er folgende Informationen:

- Anton, Bea oder Christian – zumindest einer der drei hat sicher geschummelt.
- Bea hat dann und nur dann geschummelt, wenn Doris nicht geschummelt hat.
- Wenn Christian nicht geschummelt hat, dann haben entweder Anton oder Doris geschummelt, aber sicher nicht beide.
- Wenn Christian geschummelt hat, dann sicher auch Emil ... die stecken doch immer unter einer Decke!

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Lassen sich die zwei Schummler aufgrund dieser Hinweise eindeutig ermitteln? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

A ... Anton hat geschummelt.
B ... Bea hat geschummelt.
C ... Christian hat geschummelt.
D ... Doris hat geschummelt.
E ... Emil hat geschummelt.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge \neg E) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E)$ genau 2 Schummler
$(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D \wedge \neg E) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E)$
$(\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D \wedge \neg E)$
$(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E)$
$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D \wedge E)$

$F_1 := A \vee B \vee C$	A oder B oder C
$F_2 := B \equiv \neg D$ oder $B \not\equiv D$ (äquiv.)	B genau dann wenn nicht D
$F_3 := \neg C \supset (A \not\equiv D)$	wenn nicht C dann entw. A oder D
$F_4 := C \supset E$ oder $C \equiv E$ (nicht äquiv)	wenn C dann E (beide unter einer Decke?)

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen A, B, C, D, und E, sodass die Formeln $F_0, \dots, F_4$ wahr werden. Wegen Formel F_0 können wir uns auf solche Belegungen beschränken, bei denen genau zwei der fünf Variablen wahr sind.

A	B	C	D	E	F_0	$A \vee B \vee C$	$B \equiv \neg D$	$\neg C \supset (A \not\equiv D)$	$C \supset E/C \equiv E$	
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1/1	✓
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0/0	
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1/1	
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1/0	
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0/0	
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1/1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1/0	
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0/0	
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1/1	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1/0	

Anton und Bea haben geschummelt.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Laura, Mark und Nicole gehen nach der Vorlesung meist gemeinsam abendessen. Wir wollen wissen, wer von ihnen zum Essen gerne Bier trinkt, es gibt aber nur folgende Informationen.

- Wenn Laura ein Bier bestellt, bestellt auch Mark eines.
- Es kann vorkommen, dass Mark oder Nicole ein Bier bestellen, aber nie beide zusammen.
- Hingegen bestellt Laura oder Nicole sicher ein Bier, oft auch beide.
- Nicole bestellt nur dann ein Bier, wenn Laura es auch tut.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Wer der drei trinkt zum Essen gerne Bier? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

L ... Laura trinkt zum Essen gerne Bier.
M ... Mark trinkt zum Essen gerne Bier.
N ... Nicole trinkt zum Essen gerne Bier.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := L \supset M$	wenn L dann M
$F_1 := \neg(M \wedge N)$	M und N nicht gemeinsam
$F_2 := L \vee N$	L oder N
$F_3 := N \supset L$	N nur dann, wenn L

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen L, M, und N, sodass die Formeln $F_0, \dots, F_3$ wahr werden.

L	M	N	$L \supset M$	$\neg(M \wedge N)$	$L \vee N$	$N \supset L$	
0	0	0	1	1	0		
0	0	1	1	1	1	0	
0	1	0	1	1	0		
0	1	1	1	0			
1	0	0	0				
1	0	1	0				
1	1	0	1	1	1	1	✓
1	1	1	1	0			

Laura und Mark trinken zum Essen gerne Bier.

Aufgabe 12 **(4 Punkte)**

SAT-Solver sind Programme, die als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform erwarten und diese auf Erfüllbarkeit testen. Als Ausgabe liefern sie die Information „erfüllbar" bzw. „unerfüllbar". Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.
Beispiel: Für die konjunktive Normalform $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar" und eine der Variablenbelegungen $I_1(A) = I_1(B) = 1$ oder $I_2(A) = I_2(B) = 0$.

Angenommen Sie und Ihre Kollegin modellieren das gleiche aussagenlogische Problem. Sie können sich zwar über die benötigten Aussagenvariablen und ihre Bedeutung einigen, für die Problembeschreibung benötigen Sie aber zwei Formeln F und G, während Ihre Kollegin mit einer einzigen Formel H auskommt, die ganz anders aussieht als Ihre Formeln. Wie können Sie mit Hilfe eines SAT-Solvers überprüfen, ob die beiden Beschreibungen gleichwertig (semantisch äquivalent) sind? Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte. Was bedeutet es, wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung findet?

Lösung

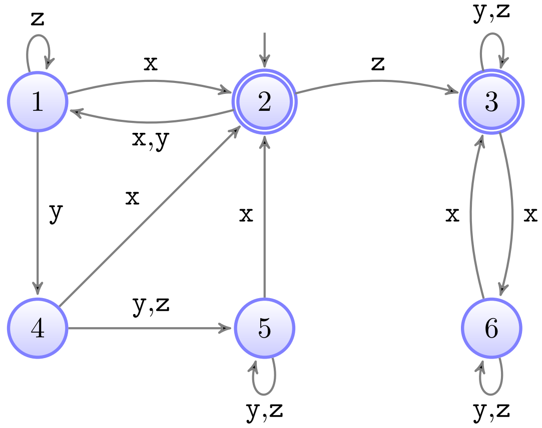
Ihre aussagenlogische Modellierung lautet $F \wedge G$, jene Ihrer Kollegin H. Die Frage, ob diese beiden Formeln semantisch äquivalent sind, ob also $F \wedge G = H$ gilt, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob $(F \wedge G) \equiv H$ eine gültige Formel ist. Da eine Formel genau dann gültig ist, wenn ihre Negation unerfüllbar ist, ist $(F \wedge G) \equiv H$ gültig, wenn $\neg((F \wedge G) \equiv H)$ unerfüllbar ist. Von dieser Formel kann nun ein SAT-Solver feststellen, ob sie erfüllbar ist. Wir haben folgenden Zusammenhang.

$$\begin{aligned} & F, G \text{ ist gleichbedeutend mit } H. \\ \iff & (F \wedge G) \equiv H \text{ ist gültig.} \\ \iff & \neg((F \wedge G) \equiv H) \text{ ist unerfüllbar.} \\ \iff & \text{KNF von } \neg((F \wedge G) \equiv H) \text{ ist unerfüllbar.} \end{aligned}$$

Liefert der SAT-Solver für diese KNF die Antwort „unerfüllbar“, dann sind die beiden Modellierungen F, G einerseits und H andererseits gleichwertig. Liefert der SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“, sind sie es nicht. Die in diesem Fall mitgelieferte erfüllende Variablenbelegung macht die KNF bzw. die Formel $\neg((F \wedge G) \equiv H)$ wahr, die Formel $(F \wedge G) \equiv H$ daher falsch. Das ist dann der Fall, wenn $F \wedge G$ und H verschiedene Wahrheitswerte besitzen. Die erfüllende Variablenbelegung ist also ein Gegenbeispiel zur Behauptung, die beiden Modellierungen wären äquivalent.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `x`, `xx`, `xzzx`, `zyyy`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(2, \texttt{xzyzx})$.

(d) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache.

(e) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert zum Beispiel ε, $\mathtt{z}$, $\mathtt{xx}$, $\mathtt{xyx}$ und $\mathtt{xyzx}$.

(b) $\mathcal{A}$ akzeptiert ε, $\mathtt{xx}, \mathtt{xzzx}$ und $\mathtt{zyyy}$, nicht aber $\mathtt{x}$.

(c)
$$\begin{aligned}
\delta^*(2, \mathtt{xzyzx}) &= \delta^*(\delta(2, \mathtt{x}), \mathtt{zyzx}) \\
&= \delta^*(1, \mathtt{zyzx}) \\
&= \delta^*(\delta(1, \mathtt{z}), \mathtt{yzx}) \\
&= \delta^*(1, \mathtt{yzx}) \\
&= \delta^*(\delta(1, \mathtt{y}), \mathtt{zx}) \\
&= \delta^*(4, \mathtt{zx}) \\
&= \delta^*(\delta(4, \mathtt{z}), \mathtt{x}) \\
&= \delta^*(5, \mathtt{x}) \\
&= \delta^*(\delta(5, \mathtt{x}), \varepsilon) \\
&= \delta^*(2, \varepsilon) \\
&= 2
\end{aligned}$$

(d) Aufgrund einer nachträglichen Änderung der Angabe lässt sich die Sprache des Automaten nicht so einfach beschreiben wie ursprünglich beabsichtigt. Eine präzise, aber nicht unbedingt leicht verständliche Beschreibung ist mittels eines regulären Ausdrucks möglich:

$$((\mathtt{x}+\mathtt{y})(\mathtt{y}+\mathtt{z})^*\mathtt{x})^* \left(\varepsilon + \mathtt{z}(\mathtt{y}+\mathtt{z})^*(\mathtt{x}(\mathtt{y}+\mathtt{z})^*\mathtt{x}(\mathtt{y}+\mathtt{z})^*)^*\right)$$

Verbal lässt sich $\mathcal{L}(EA)$ folgendermaßen beschreiben. Jedes Wort setzt sich aus drei Arten von Teilwörtern zusammen.

$\mathtt{x}$-Teilwörter beginnen und enden mit $\mathtt{x}$, dazwischen können beliebig viele $\mathtt{y}$ und $\mathtt{z}$ in beliebiger Reihenfolge auftreten.

$\mathtt{y}$-Teilwörter beginnen mit $\mathtt{y}$ und enden mit $\mathtt{x}$, dazwischen können beliebig viele $\mathtt{y}$ und $\mathtt{z}$ in beliebiger Reihenfolge auftreten.

$\mathtt{z}$-Teilwörter beginnen mit $\mathtt{z}$, danach darf ein beliebiges Wort folgen, sofern die Anzahl der $\mathtt{x}$ gerade ist.

Ein Wort liegt genau dann in der Sprache des Automaten, wenn es aus einer beliebigen Abfolge von $\mathtt{x}$- und $\mathtt{y}$-Teilwörtern besteht, der optional (also einmal oder gar nicht) ein $\mathtt{z}$-Teilwort folgt.

(e) $\mathcal{A} = \langle\{1,2,3,4,5,6\}, \{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}, \delta, 2, \{2,3\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

δ	x	y	z
1	2	4	1
2	1	1	3
3	6	3	3
4	2	5	5
5	2	5	5
6	3	6	6

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Die *B-Sprache*, auch *Bebe-Sprache* oder *Bebe-Sprabachebe* genannt, ist eine bei Kindern beliebte Geheimsprache, bei der die normale Sprache nach folgenden Regeln verfremdet wird.

- Vokale werden verdoppelt und es wird der Buchstabe „b" eingeschoben. Zum Beispiel ergibt sich aus dem Wort `hallo` das Geheimwort `haballobo`.

  Vokale im Deutschen: a, e, i, o, u, y; die Umlaute ä, ö und ü lassen wir der Einfachheit halber weg.

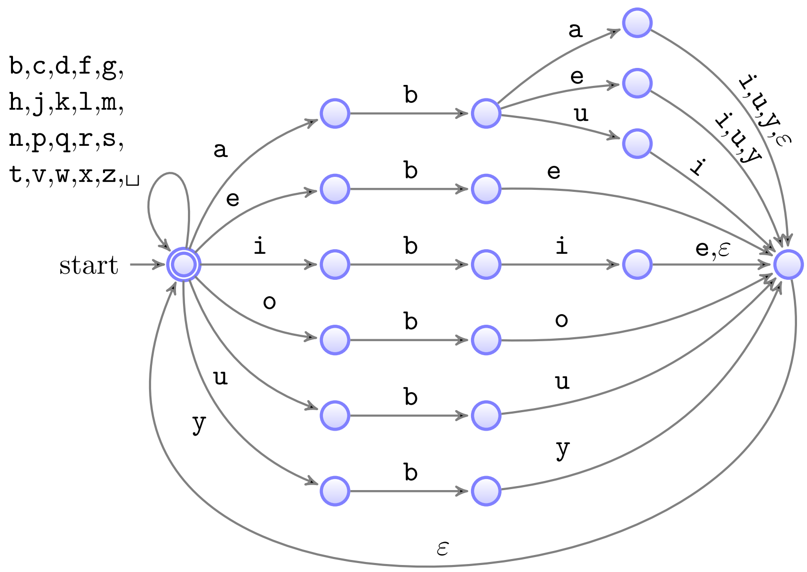
- Zwielauten (Diphtongen) wird „ab" vorangestellt. So wird aus `bauer` das Geheimwort `babaueber`, aus `mais` wird `mabais`., u.s.w.

  Zwielaute im Deutschen: ai, au, ay, ei, ey, eu, und ui; die Variante äu lassen wir der Einfachheit halber weg.

- Das lange I, „ie", zählt als Vokal, dem „ib" vorangestellt wird. Aus `dieb` ergibt sich somit `dibieb`.

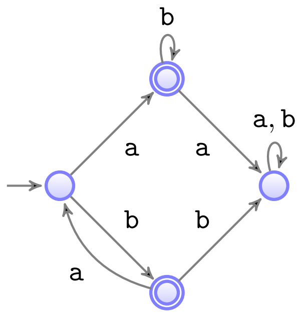
Geben Sie einen endlichen Automaten an, der jene Zeichenfolgen über dem Alphabet {`a`, …, `z`, `␣`} akzeptiert, die diese Regeln befolgen. Beispielsweise soll der Automat das Wort `deber␣babaueber␣eberntebet␣deben␣mabais` akzeptieren, nicht aber das Wort `der␣bauer␣erntet␣den␣mais`.

Lösung



Aufgabe 15 (3 Punkte)

Sei w^r das Spiegelwort zum Wort w, d.h., w^r ist das Wort w von hinten nach vorne gelesen. Beispielsweise gilt $(\texttt{abac})^r = \texttt{caba}$. Sei weiters L^r die Spiegelsprache zur Sprache L, die dadurch entsteht, dass jedes Wort in L gespiegelt wird: $L^r = \{\, w^r \mid w \in L \,\}$.
Sei $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ ein beliebiger deterministischer Automat und $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ die von ihm akzeptierte Sprache. Geben Sie ein Verfahren an, um daraus einen Automaten $\mathcal{A}^r$ für die Spiegelsprache zu erhalten; es soll also $\mathcal{L}(\mathcal{A}^r) = L^r$ gelten. Lässt sich das Verfahren auch auf nicht-deterministische Automaten anwenden? Wenden Sie Ihr Verfahren auf den folgenden Automaten an und konstruieren Sie einen Automaten für die Spiegelsprache.

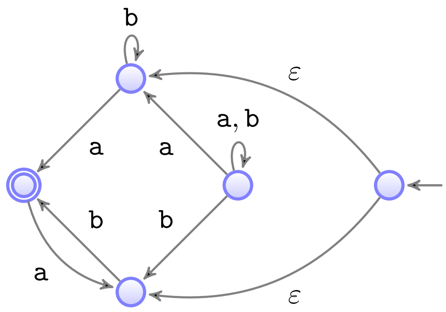


Lösung

Die grundlegende Idee ist, alle Übergänge zu spiegeln und Start- und Endzustände auszutauschen. Falls $\mathcal{A}$ mehrere Endzustände besitzt, gäbe es aber mehrere Startzustände in $\mathcal{A}^r$. Um das zu vermeiden, muss man einen neuen Startzustand einführen, von dem aus man mit dem Leerwort in die ursprünglichen Endzustände wechseln kann. Im Allgemeinen ist $\mathcal{A}^r$ also aus zwei Gründen indeterministisch: einerseits ε-Kanten vom neuen Startzustand zu den alten Endzuständen, andererseits besitzt ein Zustand q für ein Eingabesymbol nun mehrere Folgezustände, wenn man in $\mathcal{A}$ (deterministsch) von diesen Folgezuständen nach q gelangt.
Formale Darstellung: $\mathcal{A}^r = \langle Q \cup \{i\}, \Sigma, \delta^r, i, \{q_0\}\rangle$, wobei die Übergangsrelation δ^r definiert ist durch

$$\delta^r = \{\, (\delta(q,s), s, q) \mid q \in Q,\ s \in \Sigma \,\} \cup \{\, (i, \varepsilon, q) \mid q \in F \,\}$$

Da die regulären Sprachen genau jene Sprachen sind, die sich durch endliche Automaten darstellen lassen, folgt daraus, dass die regulären Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind. Das Verfahren kann auf beliebige Automaten angewendet werden, sie müssen nicht deterministisch sein.
Angewendet auf den Beispielautomaten erhalten wir:


b
ε
a, b
a
a
b
b
a
ε