

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik
Teil 1 + 2 WS 2020 23. Februar 2020

Sie haben 90 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben beider Angabenteile.
 (Teil1: Aufgaben 1-4, Teil2: Aufgaben 5-8)

Viel Erfolg!

1.) Sei $L = \{\underline{b}^k \underline{c}^{2n} \underline{a}^n \mid k, n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

2.) Sei $L_1 = \{\underline{a}^{4n} \underline{b}^{4n} \underline{c}^k \underline{a}^{2m} \mid n, m, k \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{a}^{2n} \underline{b}^{2k} \underline{a}^{4n} \mid n, k \geq 0\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L_1 erzeugt. **(2 Punkte)**

b) Geben Sie $L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

c) Ist das Komplement von $L_1 \cap L_2$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

d) Gibt es eine unbeschränkte Grammatik, die $L_1 \cap L_2$ erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

3.)

a) Argumentieren Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass folgendes Problem nicht entscheidbar ist:

Ist das Komplement der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ rekursiv (entscheidbar)?

Geben Sie dabei insbesondere eine konkrete Sprache L_1 an, die die entsprechende Eigenschaft hat, sowie eine konkrete Sprache L_2 , die die entsprechende Eigenschaft nicht hat.

(5 Punkte)

b) Geben Sie für die unter a) gefundenen Sprachen L_1 und L_2 jeweils an, ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar und/oder rekursiv aufzählbar sind.

(Es reicht z.B., *sämtliche* Markierungen in einer der untenstehenden ähnlichen Tabelle vorzunehmen.)

	regulär	kontextfrei	kontextsensitiv	rekursiv	rekursiv aufzählbar
L_1					
L_2					

(3 Punkte)

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ dann gibt es eine Sprache, die in \mathbf{P} aber nicht in \mathbf{NP} liegt.
- Ist L in exponentiell beschränkter Zeit von einer deterministischen Turingmaschine entscheidbar, so gilt dies auch für jede Teilmenge von L .
- Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

(6 Punkte)

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur (gemeinsam für beide Sätze) und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

- (1) Aishas Mutter ist eine Mathematikerin, die an mehr als einer Universität forscht.
(*Aishas mother is a mathematician who does research at more than one university.*)
- (2) Aisha kennt eine Mathematikerin, die an genau einer Universität forscht.
(*Aisha knows a mathematician, who does research at exactly one university.*)

(7 Punkte)

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$$\forall x([P(x, y) \supset Q(a, f(x))] \vee [\exists zQ(z, a) \supset \forall yP(y, x)])$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifizieren Sie beide Interpretationen vollständig und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:

$$\forall x\exists y Q(y, g(x)) \text{ ist eine logische Konsequenz der Annahmen } \exists x\forall y[P(x, y) \supset Q(y, f(y))], \\ \forall x\forall yP(x, y) \text{ und } \forall x f(x) = g(x).$$

Kennzeichnen Sie alle γ - und δ -Formeln als solche und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln. **(8 Punkte)**

8.) Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.

(Punkte gibt es nur für hinreichend begründete und korrekte Antworten.)

Hinweis: Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren.

- Das Programm $\{x \leq 4\}$ **while** $y \geq 2x$ **do** **begin** $y \leftarrow y + x$ **end** $\{y < 9\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp \mathbb{Z} partiell, aber nicht total korrekt.
- Folgende Aussage gilt für alle P, Q und α bezüglich partieller, aber nicht bezüglich totaler Korrektheit: $\{Q \vee P\}$ **while** Q **do** α $\{\neg Q \wedge P\}$.

(8 Punkte)