Mathematik III

Vorlesung 9, 01.12.2006

Markus Nemetz

basierend auf den Aufzeichnungen von Michael Birsak

Dezember 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

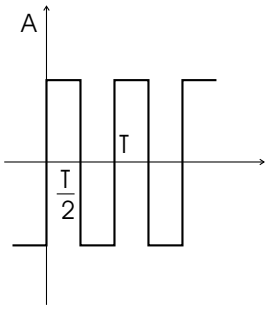
Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
04.12.2006

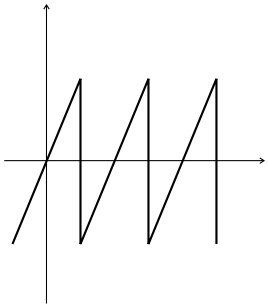
2 Fourier-Analysis - Fourier-Reihen

Periodische Funktiom: $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

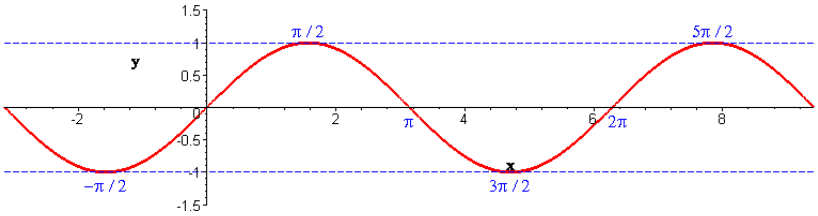
Periode $T : f(t+T) = f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Beispiel Rechtecksschwingung:



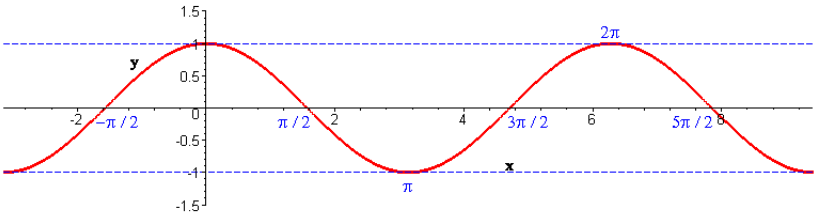
Beispiel Sägezahnschwingung:



Wichtig ist die genaue Kenntnis des Verlaufs von Sinus ...



... und Cosinus:



Idee: Wir wollen periodische Funktionen durch Überlagerung von sin- und cos-Funktion verschiedener Amplituden und Frequenzen darstellen.

$f(t)$ ist eine T-periodische Funktion. Aus $\omega := \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$F(x) := f(\frac{x}{\omega}) \text{ ist } 2\pi\text{-periodische Funktion}$$

Nachweis:

$$F(x+2\pi) = f(\frac{x+2\pi}{\omega}) = f(\frac{x}{\omega} + \frac{2\pi T}{2\pi}) = f(\frac{x}{\omega}) = F(x)$$

Tringonometrische Polynome. Sinus-Cosinus-Term

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{N=1}^{n} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{N=1}^{n} a_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

In der Exponentialform:

$$\sum_{K=-N}^{N} c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T}$$

N ist dabei der Grad des tringonometrischen Polynoms.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Tringonometrische Polynome sind T-periodische Funktionen

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Umrechnen zwischen beiden Formen:

$$e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} = \cos(\omega \cdot K \cdot T) + i \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T)$$

$$\sum_{K=-N}^{N} c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} = \sum_{K=-N}^{N} c_k \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=-N}^{N} i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) =$$

$$\sum_{K=1}^{N} c_k \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + c_0 + \sum_{K=1}^{N} c_k \cdot \cos(-\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=1}^{N} i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) +$$

$$+ i \cdot \sin(0) \cdot c_0 + \sum_{K=1}^{N} i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T)$$

$$\Rightarrow \sum_{K=-N}^{N} c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} = \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{K=1}^{N} \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=1}^{N} \underbrace{(c_k - c_{-k})}_{b_k} \cdot i \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T)$$

Koeffizientenvergleich: Umrechnen $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n + c_{-n} = a_n, n \geq 1$, $c_n - c_{-n} = b_n, n \geq 1$:

$$a_n, b_n \text{ geg.} \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + i \cdot b_k}{2}$$

Beispiel: Gegeben sind $\sin^3 t$, $\cos^3 t$. Gesucht sind tringonometrische Po-

lynome, die diese darstellen.

$$e^{i\cdot t} = \cos t + i \cdot \sin t \mid x^3$$

$$\cos 3 \cdot t + i \cdot \sin 3 \cdot t = (\cos t + i \cdot \sin t)^3 = \cos^3 t + 3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t \cdot i - 3 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t - i \cdot \sin^3 t$$

$$\text{Re, Im: } \cos 3 \cdot t = \cos^3 t - 3 \cdot \cos t \cdot \underbrace{\sin^3 t}_{1-\cos^2 t} \quad \square$$

$$\sin 3 \cdot t = \underbrace{3 \cdot \cos^2 t}_{1-\sin^2 t} \cdot \sin t - \sin^3 t \Rightarrow \dots$$

$$\square \ = \cos^3 t - 3 \cdot \cos t + 3 \cdot \cos^3 t = 4 \cdot \cos^2 - 3 \cdot \cos t$$

$$\Rightarrow \ \cos^3 t = \frac{\cos 3 \cdot t + 3 \cos t}{4} \text{ tringonometr. Polynom Grad 3}$$

Frage: Gegebene T-periodische Funktion $f(t)$. Wir setzen voraus: $f(t)$ lässt sich durch tringonometrische Polynome vom Grad N darstellen.

Wie bestimmt man die Koeffizienten a_n,b_n bzw. c_k? Antwort: Mit Hilfe der **Formeln von Euler-Fourier**, d.h.:

$$\mathbf{a_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt}$$

$$\mathbf{b_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt}$$

$$\mathbf{c_k = \frac{1}{T} \cdot \int f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}$$

Beweisidee: Funktion $\{1\} \cup \{\cos(n \cdot \omega \cdot t), n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \sin(n \cdot \omega \cdot t), n = 1, 2, 3, \dots\}$ bilden ein Orthogonalsystem bezüglich:

$$(f(t), g(t)) \mapsto \int_0^T f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$$

$$\text{d.h. } \int_0^T \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \dot{\cos}(m \cdot \omega \cdot t)\, dt, = 0 \qquad m \neq n$$

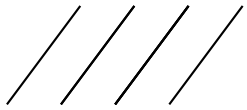
$$\int_0^T \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \dot{\sin}(m \cdot \omega \cdot t)\, dt = 0, \qquad \forall m, n$$

$$\text{d.h. } \int_0^T \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \dot{\sin}(m \cdot \omega \cdot t)\, dt, = 0 \qquad m \neq n$$

Analog: Funktion $\{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t}, k \in \mathbb{Z}\}$ bilden ein Orthonormalsystem, d.h.:

$$\int e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}\, dt = \begin{cases} 0 & K \neq l \\ T & K = l \end{cases}$$

Nachteil: Tringonometrische Funktionen sind immer differenzierbare Funktionen, d.h.



... oder

... können nicht als tringonometrische Polynome dargestellt werden.
Definition tringonometrische Reihen:

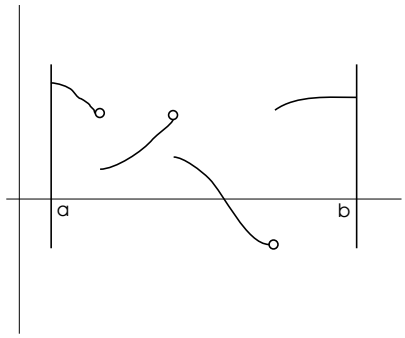
$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T} := \lim_{N \to \infty} \sum_{K=1}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{K=1}^{+\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

Nachteil: Reihen müssen nicht notwendigerweise konvergieren.

Eigenschaften für T-periodische Funktionen $f(t)$:

- Stückweie stetig auf Intervall $I = [a, b]$



  Stetig auf $[a, b]$ bis auf endlich viele Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zbd der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert $f(t^+)$ bzw. $f(t^-)$ existiert für $t_1, t_2, \ldots, t_n$

- Stückweise stetig differenzierbar auf $I = [a, b]$. Stetig differenzierbar (differenzierbar und Ableitung stetig) bis auf endlich viele Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$, für die aber die rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwerte $f(t^+)$, $f(t^-)$, $f'(t^+)$, $f'(t^-)$ existieren.

Definition: Gegeben T-periodische Funktion $f(t)$, die stückweise stetig auf $[0, T]$ sein soll. Dann ist die Fourierreihe $S_f(t)$ von $f(t)$ definiert als tringonometrische Reihe

$$S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \; S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

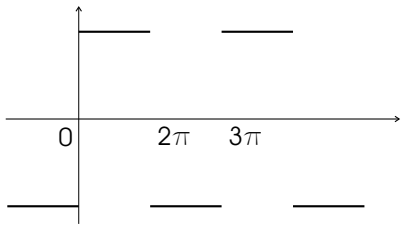
wobei die Koeffizienten c_K bzw. a_n, b_n über die Formeln von Euler-Fourier berechnet werden:

$$\mathbf{a_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt}$$
$$\mathbf{b_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt}$$
$$\mathbf{c_k = \frac{1}{T} \cdot \int f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}$$

Beispiel Rechtecksschwingung:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \pi < t < 2pi \end{cases} \quad f(t) \ldots 2\pi\text{-periodisch fortges.}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$



Gesucht: Fourier-Reihe von $f(t)$ - wähle Sinus-Cosinus-Form:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot [\int_0^{\pi} 1\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\, dt] = \frac{1}{\pi} \cdot [t|_0^{\pi} + (-t)|_{\pi}^{2\pi}] = \frac{1}{\pi} \cdot (\pi - 0 - 2\pi + \pi) = 0$$

$$n \geq 1: \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot [\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt] =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot [\frac{\sin(n \cdot t)}{n}|_0^{\pi} - \frac{\sin(n \cdot t)}{n}|_{\pi}^{2\pi}] =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{[\frac{\sin(n \cdot \pi)}{n} - \frac{\sin(0)}{n} - \frac{\sin(2 \cdot n \cdot \pi)}{n} + \frac{\sin(n \cdot \pi)}{n}]}_{0} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot [\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt] =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot [\frac{-\cos(n \cdot t)}{n}|_0^{\pi} + \frac{\cos(n \cdot t)}{n}|_{\pi}^{2\pi}] =$$

$$\frac{1}{n \cdot \pi} \cdot [\underbrace{-\cos(n \cdot \pi)}_{\Diamond} + \underbrace{\cos(0)}_{1} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n) - \cos(n \cdot \pi)] = \ldots$$

$$\Diamond \qquad 1, n \text{ gerade}, \ -1, n \text{ ungerade} \Rightarrow (-1)^n$$

$$\cdots = \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot [1 - 2 \cdot (-1)^n + \underbrace{(-1)^{2 \cdot n}}_{1}] = \frac{2}{n \cdot \pi}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n \cdot \pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe von $f(t)$ lautet:

$$S_f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot (\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5} + \ldots)$$

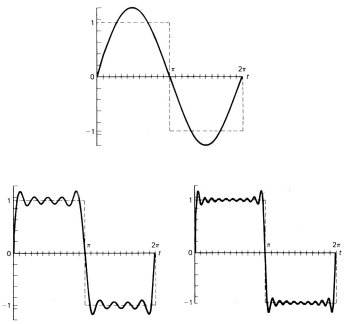
Als **Gibbssches Phänomen** oder 'Ringing' bezeichnet man in der Mathematik das typische Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungsstellen. Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer unstetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger, die sich auch dann nicht verringern, wenn man versucht, die Funktion noch besser zu approximieren. Dies liegt daran, dass die Reihe an der Unstetigkeitsstelle nicht mehr gleichmäßig, sondern nur punktweise konvergiert.

Die Höhe des Überschwingers in einer Richtung lässt sich bestimmen zu:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{1}{2} = 0.089490\ldots$$

womit sich ein prozentueller Fehler von 17,898%, gerundet 18%, der Sprunghöhe ergibt.

Der Effekt wurde nach seinem Entdecker, dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs, benannt.



Rechenregeln für Fourier-Reihen: $f(t)$, $g(t)$ stückweise stetige Funktionen:

$$S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \; S_g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Linearität

  $\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$ besitzt Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{K=-\infty}^{+\infty} (\alpha \cdot c_K + \beta \cdot d_K) \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$

- Zeitumkehr, Konjugation

$$f(-t) \curvearrowright \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \; \overline{f(t)} \curvearrowright \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \overline{c_K} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Streckung

$$f(c \cdot t) \curvearrowright \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot c \cdot \omega \cdot T} \qquad c > 0$$

$$f(c \cdot T) \ldots \frac{T}{c} \text{ -periodische Funktion}$$

- Verschiebung im Zeitbereich

$$f(t + a) \curvearrowright \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (c_K \cdot e^{i \cdot a \cdot K \cdot \omega \cdot T}) \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T} \cdot f(t) \curvearrowright sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_{K-n} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

Beweise: Über Definition des Euler-Fourier-Integrals

Satz: Betrachte $f(t)$, periodisch mit Periode T, stetig auf $\mathbb{R}$ und stückweise stetig differenzierbar. $f(t)$ besitzt die Fourier-Reihe

$$S_f(t) \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe $S_{f'}(t) \curvearrowright f'(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot i \cdot K \cdot \omega \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$.

Satz: Betrachte periodisch mit Periode T, stetig auf $[0, T]$, $S_f(t) \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$. Fourier-Reihe der Stammfunktion:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

$F(t)$ i.A. nicht mehr periodisch, nur wenn

$$\int_0^\tau f(t)\, dt = 0 \;\Leftrightarrow c_0 = 0 \;\Rightarrow$$

$$S_F(t) = -\frac{1}{T} \cdot \int : 0^T f(t)\, dt + \sum_{K=-\infty, K \neq 0}^{\infty} \frac{c_K}{i \cdot K \cdot \omega} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$