# Beispiele des Skriptums

*Raimund Rittnauer (1201230)*

*02 Oktober 2017*

# Beispiele



# Optimierung ohne Nebenbedingungen (S. 74)

Ein Unternehmen versorgt zwei voneinander separierte Märkte mit den folgenden Preis-Absatz-Relationen:

$$p_1 = 200 - 2x_1$$

$$p_2 = 100 - x_2$$

Die Kostenfunktion des Unternehmens ist

$$K(x_1, x_2) = 20(x_1 + x_2)$$

Wie soll das Unternehmen optimal die Preise in den beiden Märkten setzen, um den Gewinn zu maximieren?

$$G(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - K(x_1, x_2) \underset{x_1, x_2}{\rightarrow} max$$

Zuerst nehmen vereinfachen wir die Gewinnfunktion, damit wir dann daraus die partiellen Ableitungen für $x_1$ und $x_2$ bilden können.

$$G(x_1, x_2) = (200 - 2x_1)x_1 + (100 - x_2)x_2 - 20(x_1 + x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = 200x_1 - 2x_1^2 + 100x_2 - x_2^2 - 20x_1 - 20x_2$$

$$G(x_1, x_2) = 180x_1 - 2x_1^2 + 80x_2 - x_2^2$$

Nun können wir die partiellen Ableitungen für $x_1$ und $x_2$ bilden.

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 180 - 4x_1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 80 - 2x_2$$

Der Gradient wäre nun

$$\nabla G = \begin{pmatrix} 180 - 4x_1 \\ 80 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Der Gradient einer Funktion ist der Grad der Veränderung

- Zeigt in die Richtung der maximalen Erhöhung
- Ist 0 bei lokalen Minima / Maxima
- Wird für Funktionen mit mehreren Inputs aber nur einem Output verwendet

Kandidaten für ein Extremum finden wir also, indem wir den Gradienten $\nabla G$ 0 setzen.

$$\nabla G = 0$$

$$180 - 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 45$$

$$80 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 40$$

Unsere Kandidaten sind also

$$x^* = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Nun benötigen wir die Hesse Matrix, bei der wir einfach die zweite Ableitung bilden müssen. Mit den Minoren der Hesse Matrix können wir die Funktion beschreiben.

$$H_G = \begin{pmatrix} G_{x_1x_1} & G_{x_1x_2} \\ G_{x_2x_1} & G_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

$$H_G = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Minoren dieser Hesse Matrix lauten nun

$$B_1 = -4$$

$$B_2 = (-4) * (-2) - 0 * 0 \Rightarrow B_2 = 8$$

Die Hauptminoren sind alternierend, das heißt, dass die Funktion KONKAV ist und der ermittelte Kandidat für das Extrema ist ein Maximum.

Wenn wir nun in die Preisfunktionen von $x_1$ und $x_2$ einsetzen erhalten wir die optimalen Preise.

$$p_1 = 200 - 2x_1 \Rightarrow p_1 = 200 - 2 * 45 \Rightarrow p_1 = 110$$

$$p_2 = 100 - x_2 \Rightarrow p_2 = 100 - 40 \Rightarrow p_2 = 60$$

# Optimierung ohne Nebenbedingungen (S. 78)

Mike hat mit der PRODUKTION eine Monopolstellung mit folgenden konstanten Grenzkosten (Produzent)

$$c = \text{EUR } 20 \text{ / Einheit}$$

Mick hat mit dem VERTRIEB eine Monopolstellung mit folgender Preis-Absatz-Funktion (Händler)

$$p = 60 - \frac{x}{100} \text{EUR / Einheit}$$

Deckungsbeitrag des Händlers (Mick)

$$\text{Erlös: } HE = px = (60 - \frac{x}{100})x$$

$$\text{Kosten: } HK = p'x$$

$$\Rightarrow HDB = HE - HK = (60 - p')x - \frac{x^2}{100}$$

Optimale Wahl der Absatzmenge durch den Händler (Mick)

$$\frac{\partial HDB}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 3000 - 50p'$$

Nun “sieht” der Produzent folgende lineare Preis-Absatz-Relation

$$p' = 60 - \frac{x}{50}$$

Diese Preis-Absatz-Relation können wir nun für die Erlös-Funktion des Produzenten heranziehen

$$\text{Erlös: } PE = p'x = (60 - \frac{x}{50})x$$

$$\text{Kosten: } PK = cx = 20x$$

$$\Rightarrow PDB = PE - PK = 40x - \frac{x^2}{50}$$

Die optimale Wahl der Absatzmenge des Produzenten wäre also

$$\frac{\partial PDB}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1000$$

$$p' = \text{EUR } 40 \text{ / Einheit}$$

Nun können wir die optimale Absatzmenge des Produzenten hernehmen und in die Preis-Absatz-Relation des Endverbrauchermarktes einsetzen

$$p = 60 - \frac{x}{100}$$

$$p = \text{EUR } 50 \text{ / Einheit}$$

Die Deckungsbeiträge wären also

$$HDB = (60 - p^{'})x - \frac{x^2}{100} = \text{EUR } 10000$$

$$PDB = 40x - \frac{x^2}{50} = \text{EUR } 20000$$

Die Konsumentenrente wäre

$$CS = (p_0 - p) * \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow (60 - 50) * \frac{10000}{2}$$

$$\Rightarrow 10 * 500 = \text{EUR } 5000$$

Was passiert nun, wenn beide Unternehmen als ein gemeinsames Unternehmen auftreten? Der Zwischenhandel würde wegfallen, also maximiert das Unternehmen den gesamten Deckungsbeitrag

$$\text{Erlös: } E = px = 60x - \frac{x^2}{100}$$

$$\text{Kosten: } K = cx = 20x$$

$$\Rightarrow DB = E - K = 40x - \frac{x^2}{100}$$

Die optimale Wahl der Absatzmenge

$$\frac{\partial DB}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 2000$$

$$p = \text{EUR } 40 \text{ / Einheit}$$

Der neue Deckungsbeitrag

$$DB = 40 * 2000 - \frac{2000^2}{100} = 40000$$

```
(40 * 2000) - (2000^2)/100
```

```
## [1] 40000
```

Die Konsumentenrente wäre dann

$$CS = (p_0 - p) * \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow (60 - 40) * \frac{2000}{2} = \text{EUR } 20000$$

# Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (S. 116)

Der Produktionsprozess eines Unternehmens wird durch die Produktionsfunktion beschrieben, welche den Einsatz der Produktionsfaktoren (Inputs) $r_1 r_2$ in Relation zur Produktionsmenge (Output) $x_A$ setzt.

$$x_A = f(r_1, r_2) = 9\sqrt{r_1} r_2$$

Die variablen Kosten lauten

$$K_v = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

$$q_1 = 6 \text{ EUR / Einheit}$$

$$q_2 = 4 \text{ EUR / Einheit}$$

Nun wollen wir die optimalen Faktorkombinationen finden, welche den Output bei gegebenen Kosten von $K_v = 18$ [EUR] maximiert.

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = 9\sqrt{r_1} r_2 + \lambda(18 - q_1 r_1 - q_2 r_2)$$

$$\Rightarrow 9r_1^{\frac{1}{2}} r_2 + 18\lambda - \lambda q_1 r_1 - \lambda q_2 r_2$$

Die partiellen Ableitungen davon sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = 9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} - \lambda q_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = 9\sqrt{r_1} - \lambda q_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 18 - q_1 r_1 - q_2 r_2$$

Nun können wir die Werte für $q_1 = 6$ und $q_2 = 4$ einsetzen und die partiellen Ableitungen $0$ setzen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = 9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} - 6\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = 9\sqrt{r_1} - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 18 - 6r_1 - 4r_2 = 0$$

Die Ableitung nach den Produktionsfakoren (Inputs) $r_1$ und $r_2$ nennt man Genzproduktivität (marginal productivity)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = MP_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = MP_2$$

Im Optimum muss die Relation zwischen Grenzproduktivität und Faktorpreis für alle Faktoren ($ r_1, r_2 $) den gleichen Wert annehmen. Also setzen wir die Grenzproduktivität und den Faktorpreis in Relation zu einander und mit den anderen Faktoren gleich.

$$\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2}$$

$$\frac{1}{6}9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{4}9\sqrt{r_1}$$

$$\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} = 3\sqrt{r_1}$$

$$r_2 = 3r_1$$

Nun wissen wir, dass wir bei den gegebenen variablen Kosten von $K_v = 18$ die Produktionsfaktoren im Verhältnis von $r_2 = 3r_1$ kombinieren müssen.

Nun können wir das Verhältnis in die Budgerestriktion (Nebenbedingung) einsetzen und die optimalen Faktorkombinationen errechnen.

$$K_v = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

$$18 = 6r_1 + 4r_2$$

$$18 = 6r_1 + 12r_1$$

$$18 = 18r_1$$

$$r_1 = 1$$

Nun den Wert von $r_1$ einsetzen und $r_2$ berechnen

$$\Rightarrow 18 = 6 + 4r_2$$

$$12 = 4r_2$$

$$r_2 = 3$$

Den Wert für den Lagrange Multiplikator erhalten wir, indem wir in die Relationen von Produktionsfaktoren zu Faktorpreisen einsetzen.

$$\lambda = \frac{MP_1}{q_1} = \frac{1}{6}9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{6}9\frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{1}} = \frac{9}{4}$$

$$\lambda = \frac{MP_2}{q_2} = \frac{1}{4}9\sqrt{r_1} = \frac{1}{4}9\sqrt{1} = \frac{9}{4}$$

Wenn die Budgerestriktion um eine Geldeinheit angehoben wird, steigt der Output um $\frac{9}{4}$ Einheiten.

# Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (S. 151)

$$ = (

0.02
0.06
0.09

),

= (

0.04 0.00 0.00 0.00 0.04 0.00 0.00 0.00 0.04

) $$

# Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (S. 182)

Eine ausführliche Lösung: http://showcase.imw.tuwien.ac.at/BWOpt/BeispielKT1.html (http://showcase.imw.tuwien.ac.at/BWOpt/BeispielKT1.html)

Betrachte ein Unternehmen, das ein nicht lagerfähiges Gut in zwei aufeinanderfolgenden Zeitperioden erzeugt. Die variablen Produktionskosten sind konstant EUR 10,- pro produzierter Einheit. Mit $x_1$ und $x_2$ bezeichnen wir die Produktionsmenge in den Perioden 1 und 2. Die inverse Nachfrage in den beiden Perioden ist gegeben durch

$$p_1 = 100 - 1.5x_1$$

$$p_2 = 50 - 2x_2$$

Während der Produktion sind Emissionen unvermeidbar. Gesetzliche Beschränkungen erlauben maximal 33 Einheiten zu erzeugen (Summe von $x_1$ und $x_2$). Kapazitätsbeschränkungen bewirken, dass in jeder Periode maximal 28 Einheiten produziert werden können. Der Zeitwert des Geldes ist gleich 0.

## Bestimme die optimale Produktionsentscheidung $x_1$ und $x_2$, welche den Gesamtgewinn des Unternehmens maximiert.

Zielfunktion = Gesamtgewinn Für die erste Periode wäre das (Erlös - Kosten)

$$G_1(x_1) = p_1x_1 - 10x_1$$

$$\Rightarrow (100 - 1.5x_1)x_1 - 10x_1$$

$$\Rightarrow 90x_1 - 1.5x_1^2$$

Für die zweite Periode wäre das

$$G_2(x_2) = p_2 x_2 - 10x_2$$

$$\Rightarrow (50 - 2x_2)x_2 - 10x_2$$

$$\Rightarrow 40x_2 - 2x_2^2$$

Der Gesamtgewinn wäre dann r ist die Diskontrate, da der Gewinn von $G_2$ erst später dazu fließt. Bei uns ist aber $r = 0$, also fällt dies dann weg.

$$G(x_1, x_2) = G_1(x_1) + \frac{1}{1+r} G_2(x_2)$$

$$\Rightarrow 90x_1 - 1.5x_1^2 + 40x_2 - 2x_2^2$$

Und diese gehört maximier.

Es gibt folgende drei Nebenbedingungen

- die Gesamtproduktion darf 33 nicht übersteigen
- in Periode 1 darf die Produktion 28 nicht übersteigen
- in Periode 2 darf die Produktion 28 nicht übersteigen

$$g^1 : x_1 + x_2 \leq 33 \Rightarrow g^1(x_1, x_2) = 33 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g^2 : x_1 \leq 28 \Rightarrow g^2(x_1) = 28 - x_1 \geq 0$$

$$g^3 : x_2 \leq 28 \Rightarrow g^3(x_2) = 28 - x_2 \geq 0$$

Daraus können wir die Lagrange Funktion bilden

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2) = 90x_1 - 1.5x_1^2 + 40x_2 - 2x_2^2 + \lambda_1(33 - x_1 - x_2) + \lambda_2(28 - x_1) + \lambda_3(28 - x_2)$$

$$\Rightarrow 90x_1 - 1.5x_1^2 + 40x_2 - 2x_2^2 + 33\lambda_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_2 + 28\lambda_2 - \lambda_2 x_1 + 28\lambda_3 - \lambda_3 x_2$$

Und bilden danach die partiellen Ableitungen für die Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda_1} = 33 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda_2} = 28 - x_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda_3} = 28 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} = 90 - 3x_1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_2} = 40 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3$$

Mit den partiellen Ableitungen können wir die Kuhn-Tucker Bedingungen aufstellen. Ist ein Punkt

$$(\lambda^*, x^*) = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, x_1^*, x_2^*)$$

eine optimale Lösung des Produktionsproblems, dann müssen pro partielle Ableitung folgendes erfüllt sein (nehmen wir einmal die Ableitung nach $\lambda_1$ als Beispiel)

1. die Nebenbedingung muss erfüllt sein

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda_1} \geq 0 \Rightarrow 33 - x_1 - x_2 \geq 0 \text{ (NB)}$$

2. die Vorzeichenrestriktion muss erfüllt sein

$$\lambda_1 \geq 0 \text{ Schattenpreis}$$

3. die Complementary-Slackness Bedingung, welche den Zusammenhang darstellt, muss erfüllt sein. Wenn die linke Seite von (1) echt größer als 0 ist (NB ist nicht bindend), dann muss der Schattenpreis gleich 0 sein, ansonsten ist (3) verletzt.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda_1}\lambda_1 = 0 \Rightarrow 33 - x_1 - x_2 = 0 \text{ (Comp. Slack.)}$$

Bei den Produktionsmengen gehört der relative Deckungsbeitrag betrachtet

1. die linke Seite stellt den relativen Deckungsbeitrag dar. Die Gewinnfunktion $90 - 3x_1$ weniger dem Ressourcenverbrauch $\lambda_1 + \lambda_2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} \leq 0 \Rightarrow 90 - 3x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \text{ (rel. DB)}$$

2. diese Ungleichung gibt an, dass die Produktionsmenge nicht negativ sein darf

$$x_1 \geq 0$$

3. die Complementary-Slackness-Bedingung stellt den Zusammenhang dar.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_1}x_1 = 0 \Rightarrow (90 - 3x_1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0 \text{ (Comp. Slack.)}$$

Bei Nebenbedingungen sehen die Kuhn-Tucker-Bedingungen so aus

$$\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) \geq 0$$

$$\lambda^* \geq 0$$

$$\lambda^{*\prime}\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) = 0$$

Bei den Produktionsmengen hingegen sehen die Kuhn-Tucker-Bedingungen so aus

$$\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) \leq 0$$

$$x^* \geq 0$$

$$x^{*\prime}\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) = 0$$

Jetzt müssen wir dieses System von Ungleichungen lösen. Allererst versuchen wir die Lösung des unbeschränkten Problems, d.h. alle Nebenbedingungen sind bindend.

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Wenn wir so das Gleichungssystem auflösen, erhalten wir die Lösungen

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, x_1 = 30, x_2 = 10$$

Hier werden Nebenbedingungen $g^1$ und $g^2$ verletzt, also ist das keine Lösung des Gesamtproblems. Bei ein bisschen herumprobieren, abwechselnd die Nebenbedingungen bindend und nicht bindend, findet man eine Lösung, wenn Nebenbedingung $g^1$ bindend ist.

Die Lösungen hier sind

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, x_1 = 26, x_2 = 7$$

## Interpretiere das Ergebnis. Was kann man aus der Größenordnung der Lagrange-Multiplikatoren ablesen?

- Die Lagrange Multiplikatoren heißen auch Schattenpreise der Nebenbedingungen. Sie geben Auskunft über die (ökonomische) Konsequenz der Beschränkung, die sie vermitteln.
- Der Schattenpreis hat die Dimension [Dimension der Zielfunktion / Dimension der Beschränkung].
- Im gegebenen Produktionsproblem ist die Dimension der Zielfunktion (=Unternehmensgewinn) gleich [EUR] und die Dimension der Beschränkungen ist [produzierte Einheiten]. Daher ist die Dimension der Lagrange Multiplikatoren gleich [EUR / produzierter Einheit]. Das ist notwendig, damit die Lagrange Funktion von den Dimensionen her richtig definiert ist.
- Der Schattenpreis von $\lambda_1 = 12$ gibt also an, wieviel das Unternehmen pro zusätzlicher Einheit für eine geringfügige Lockerung der Produktionsbeschränkung maximal zu zahlen bereit wäre.
- Die beiden anderen Nebenbedingungen sind nicht bindend, d.h., es gibt überschüssige Kapazität sowohl in der ersten als auch in der zweiten Periode.
- Daher ist es auch ökonomisch sinnvoll, dass die zugehörigen Schattenpreise gleich 0 sind, $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Denn wenn man die Maximalkapazität in den einzelnen Perioden geringfügig ändert, hätte das keine Auswirkung auf die optimale Produktionsentscheidung. Sollte das Unternehmen bereit sein, in die Ausweitung der Produktionskapazität zu investieren? Nein, denn die Nebenbedingungen sind nicht bindend und der Schattenpreis gibt die ökonomische Bewertung der Ressource “Produktionskapazität” korrekt mit 0 an.

# Lineare Optimierung (S. 196)

Tischlermeister H. plant sein kommendes Arbeitsjahr. Maximal 1200 Stunden will er sich der Erzeugung von Tischen bzw. Sesseln widmen, den Rest der Zeit reserviert er für Reparaturarbeiten. Auf Grund der räumlichen Enge der Werkstatt kann er höchstens 320 Tische im Jahr erzeugen. Die Produktion eines Tisches dauert 2 Stunden und benötigt 0.8 Einheiten Holz, für die Fertigung eines Sessels benötigt er 4 Stunden und verbraucht 0.4 Einheiten Holz. Es stehen ihm maximal 282 Einheiten Holz pro Jahr zur Verfügung.

Der Deckungsbeitrag eines Tisches beträgt EUR 90, der Deckungsbeitrag eines Sessels beträgt EUR 60. (Darin sind alle Kosten - z.B. für Holz - berücksichtigt.)

Erstellen Sie ein Lineares Programm, mit dem Ziel, durch einen optimalen Produktmix den gesamten Deckungsbeitrag zu maximieren.

Die Zielfunktion, welche maximiert gehört lautet

$$f(x_t, x_c) = 90x_t + 60x_c$$

Die Nebenbedingungen lauten

$$g^1(x_t) = 320 - x_t \geq 0$$

$$g^2(x_t, x_c) = 1200 - 2x_t - 4x_c \geq 0$$

$$g^3(x_t, x_c) = 282 - 0.8x_t - 0.4x_c \geq 0$$

Lösen wir nun mit Hilfe von lpSolve, erhalten wir folgende Ergebnisse

```
# Koeffizienten der Zielfunktion
obj <- c(90,60)
# Nebenbedingungen
# Raumbeschr ankung
lhs <- matrix(c(1,0),nrow=1)
rhs <- 320
dir <- "<="
# Zeitbeschr ankung
lhs <- rbind(lhs,c(2,4))
rhs <- c(rhs,1200)
dir <- c(dir,"<=")
# Holzbeschr ankung
lhs <- rbind(lhs,c(0.8,0.4))
rhs <- c(rhs,282)
dir <- c(dir,"<=")
# Errechne die L osung
sol <- lp("max",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- die maximale Zielfunktion

```
sol$objval
```

```
## [1] 34200
```

- den optimalen Produktionsplan

```
sol$solution
```

```
## [1] 270 165
```

- die dualen Variablen der Nebenbedingungen (zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen: Raum, Zeit, Holz, dann die der Variablen (rel. DB): $x_1, x_2$)
  - Die $\lambda$ sagen uns, dass der Tischlermeister eine zusätzliche Arbeitsstunde mit EUR 5 und eine zusätzliche Einheit Holz mit EUR 100 bewertet.
  - Zusätzlicher Platz hat einen Wert von EUR 0, weil die Platzbeschränkung nicht bindend ist.
  - Die relativen Deckungsbeiträge stellen die marginalen Opportunitätskosten dar, wenn man vom optimalen Plan abweicht und eine zusätzliche marginale Einheit erzeugt.
  - Beide Variablen sind strikt positiv, daher sind beide relative Deckungsbeiträge gleich 0.

```
sol$duals
```

```
## [1]   0   5 100   0   0
```

Nun suchen wir nach der *minimalen* internen Bewertung, welche das erfüllt.

$$320\lambda_1 + 1200\lambda_2 + 282\lambda_3 \rightarrow \min$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0.8\lambda_3 \geq 90$$

$$4\lambda_2 + 0.4\lambda_3 \geq 60$$

Wenn wir dies nun mit lpSolve lösen, erhalten wir

```
obj <- c(320,1200,282)
lhs <- matrix(c(1,0,2,4,0.8,0.4),nrow=2)
rhs <- c(90,60)
dir <- c(">=",">=")
sol <- lp("min",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- der minimal bewertete Ressourcenverbrauch

```
sol$objval
```

```
## [1] 34200
```

- die optimalen Ressourcenbewertungen (Raum, Zeit, Holz)

```
sol$solution
```

```
## [1]   0   5 100
```

- die dualen Variablen der Nebenbedingungen (zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen: Tische, Sessel, dann die der Variablen (freie Ressourcen, Slack): Raum, Zeit, Holz $)
    - die Raum-Restriktion hat einen Slack von 50, die beiden anderen sind voll ausgeschöpft.

```
sol$duals
```

```
## [1] 270 165  50   0   0
```

# Das Bellman Prinzip - Eiswaffeln (S. 240)

$$S \text{ ... der Zustandsraum des Problems mit den Elementen s}$$

$$A \text{ ... der Aktionsraum des Problems mit den Elementen a}$$

$$T \text{ ... der Horizont des Problems}$$

```
r <- 0.05
Na <- (49-13)/(144-108)
Na
```

```
## [1] 1
```

```
Nb <- (144*13-108*49)/((1+r)*(144-108))
Nb
```

```
## [1] -90.47619
```

```
Na*120+Nb*1
```

```
## [1] 29.52381
```

```
(1/1.05)*(0.5*29.5238+0.5*6.1904)
```

```
## [1] 17.00676
```

# Extremwerte bei Lagrange

- Die Hessematrix $H_f$ muss wie folgt aufgebaut sein
  - Zuerst die Variablen der Nebenbedingungen
  - Danach die Variablen der Funktion

$$H_f = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} \\ \mathcal{L}_{x\lambda} & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{y\lambda} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$$

- Optimalitätsbedingung 1. Ordnung
  - Die 1. Ableitung der Funktion + die Summe aller 1. Ableitungen der Nebenbedinungen ergibt 0
  - D.h. an einem Maximum müssen alle partiellen Ableitungen von $f$ gleich 0 sein. Die Tangentialebene an $f$ im Punkt $x^*$ muss flach sein.

$$f_x + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_x^j = 0$$

- Für ein Minimum müssen die *letzten* $(n-m)$ Minoren von *B* dasselbe Vorzeichen haben wie $(-1)^m$.
- Für ein Maximum müssen die *letzten* $(n-m)$ Minoren von *B* im Vorzeichen alternieren, beginnend mit dem Vorzeichen von $(-1)^{m+1}$.

$$n \text{ ... Anzahl der Variablen}$$

$$m \text{ ... Anzahl der Nebenbedingungen}$$

# Nebenbedingungen und Schattenpreise

Nehmen wir an, wir produzieren 2 Güter und haben eine Beschränkung der Produktion auf 300 Stück.

$$x + y \leq 300$$

Das wär eine Nebenbedingung

$$g_1 : 300 - x - y$$

Ändert man nun die Beschränkung um 300 + dp, dann ändert sich die optimale Menge um $\lambda dp$ (des entsprechenden Schattenpreises, bei dem die Beschränkung verändert wurde).

# Beispielsammlung - Beispiel 15

```
obj <- c(4000,4500,5400)
(lhs <- matrix(c(1,50,1,70,1,100),nrow=2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    1    1
## [2,]   50   70  100
```

```
rhs <- c(800,54000)
dir <- c("<=","<=")
sol <- lp("max",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- der optimale Gesamtdeckungsbeitrag

```
sol$objval
```

```
## [1] 3592000
```

- die optimalen Ressourcenbewertungen (A, C, E)

```
sol$solution
```

```
## [1] 520   0 280
```

- die dualen Variablen der Nebenbedingungen (zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen: Autos, Zeit, dann die der Variablen (freie Ressourcen, Slack): A, C, E $)
  - C hat einen rel. DB von -60

```
sol$duals
```

```
## [1] 2600   28    0  -60    0
```

# Beispielsammlung - Beispiel 16

```
obj <- c(1000,700)
(lhs <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 1),nrow=3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    1
## [2,]    2    1
## [3,]    3    1
```

```
rhs <- c(120,200,250)
dir <- c(">=",">=",">=")
sol <- lp("min",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- der optimale Gesamtdeckungsbeitrag

```
sol$objval
```

```
## [1] 108000
```

- die optimalen Ressourcenbewertungen (Schleiferei, Montage)

```
sol$solution
```

```
## [1] 80 40
```

- die dualen Variablen der Nebenbedingungen (zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen: $q_1, q_2, q_3$ , dann die der Variablen (freie Ressourcen, Slack)): Schleiferei, Montage)

```
sol$duals
```

```
## [1] 400 300   0   0   0
```

# Theorie

- Isoquante - der selbe Output kann mit unterschiedlichen Faktorkombinationen kombiniert werden
- Isokostenlinie - Unterschiedliche Ausbringungsmengen verursachen die selben variablen Kosten
- Optimierung - Minimalkosten-Kombination - Maximal-Ausbringungs-Kombination

# Videos

- Arbitrage - Khan Academy (https://www.youtube.com/watch?v=AuCH7fHZsZ4)
- Put-Call 1 - Khan Academy (https://www.youtube.com/watch?v=SCM4A0rBeOQ)
- Put-Call 2 - Khan Academy (https://www.youtube.com/watch?v=MHWmBggmIU0)
- Portfolio-Replication 1 (https://www.youtube.com/watch?v=ptwLHP9paqM)

- Portfolio-Replication 2 (https://www.youtube.com/watch?v=ptwLHP9paqM)