Testvorbereitung: Trennbare DGL

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.02.2007

1 Theoretische Grundlagen: Trennbare DGL

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

   $$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion ($x, x_0 \in I$, $y, y_0 \in J$):

   $$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta$, $x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung

2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

   $$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

   $$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\, dx.$$

   Allgemeine implizite Lösung lautet:

   $$G(y) - F(x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c_0$ nach y auflösen.

   Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

2 Beispielangaben

2.1 Beispiel 1

Quelle: `http://www.staff.uni-marburg.de/~germano/2004WSmathe3/07.pdf`, Bsp. 1 a-d; textscPapula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig 2001, S. 607, Beispiel 4 a-d

$$\text{a } x^2y' = y^2, \qquad \text{b } y'(1+x^2) = xy,$$
$$\text{c } y' = (1-y)^2, \qquad \text{d } y' \sin x = -x$$

2.2 Beispiel 2

Quelle: `http://www.mathepedia.de/DGL_mit_getrennten_Variablen.aspx`

$$\text{a } y' = -\frac{x}{y}, \qquad \text{b } y' = \frac{x}{y}$$

2.3 Beispiel 3

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Trennung_der_Veränderlichen`

$$y' = 2xy - x$$

2.4 Beispiel 4

Quelle: `http://www.mathematik.uni-ulm.de/analysis/lehre/analysis3_ws0506/AnmBlatt12.pdf`, Beispiel 2.

$$\mathrm{d}\, y - \sqrt{y}\, \mathrm{d}\, x = 0$$

2.5 Beispiel 5

Quelle: Meyberg und Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2001, S. 31, Beispiel 4.a.; Übungstunde 1 Beispiel 4.
Man löse das folgende AWP durch Trennung der Variablen: $1 + y^2 - xy' = 0$, $y(1) = 1$.

2.6 Beispiel 6

Übungsrunde 2, Beispiel 9.
Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = x_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Vorraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

2.7 Beispiel 7

Übungsrunde 2, Beispiel 8.
Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1 + x^3) \cdot y' - x^2 \cdot y = 0, \qquad y(1) = 2$$

3 Lösungen

3.1 Beispiel 1

Quelle: `http://www.staff.uni-marburg.de/~germano/2004WSmathe3/07.pdf`, Bsp. 1 a-d; textscPapula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig 2001, S. 607, Beispiel 4 a-d

$$\text{a } x^2y' = y^2, \qquad \text{b } y'(1+x^2) = xy,$$
$$\text{c } y' = (1-y)^2, \qquad \text{d } y' \sin x = -x$$

Zu a.:

$$x^2y' = y^2$$
$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \qquad | \int -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$
$$\mathbf{y = \frac{x}{cx+1}}$$

Zu b.:

$$y'(1+x^2) = xy$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2} \qquad | \int$$
$$\ln y = \frac{1}{2} ln(1+x^2) + c$$
$$\mathbf{y = c\sqrt{1+x^2}}$$

Zu c.:

$$y' = (1-y)^2$$
$$\frac{y'}{(1-y)^2} = 0 \qquad | \int$$
$$-\frac{1}{1+y} = x + c$$
$$-\frac{1}{x+c} = 1 + y - \mathbf{\frac{1}{x+c} - 1 = y}$$

Zu d.:

$$y' \sin x = -x \qquad | \int$$
$$-\cos y = -\frac{x^2}{2} + c$$
$$\cos y = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\mathbf{y} = \arccos(\mathbf{\frac{x^2}{2} + c})$$

3.2 Beispiel 2

Quelle: `http://www.mathepedia.de/DGL_mit_getrennten_Variablen.aspx`

$$\text{a } y' = -\frac{x}{y}, \qquad \text{b } y' = \frac{x}{y}$$

Zu a.:

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y'y = -x \qquad \Big| \int$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$
$$\mathbf{2c = x^2 + y^2}$$

(Kreisgleichung)
Zu b.:

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y'y = x \qquad \Big| \int$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\mathbf{2c = y^2 - x^2}$$

(Hyperbelgleichung)

3.3 Beispiel 3

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Trennung_der_Veränderlichen`

$$y' = 2xy - x$$

Lösung:

$$y' = 2xy - x$$
$$y' = x(2y - 1)$$
$$\frac{y'}{2y - 1} = x \qquad | \int$$
$$\frac{1}{2}\ln(2y - 1) = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\ln(2y - 1) = x^2 + c2y - 1 = ce^{x^2}\mathbf{y} = \mathbf{\frac{1}{2}ce^{x^2} + \frac{1}{2}}$$

3.4 Beispiel 4

Quelle: `http://www.mathematik.uni-ulm.de/analysis/lehre/analysis3_ws0506/AnmBlatt12.pdf`, Beispiel 2.

$$\mathrm{d}\,y - \sqrt{y}\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,y - \sqrt{y}\,\mathrm{d}\,x &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{y}} &= \mathrm{d}\,x \qquad \Big| \int \\
2\sqrt{y} &= x + c \\
\mathbf{y} &= \mathbf{\frac{(x^{+}c)^2}{4}}
\end{aligned}$$

0

3.5 Beispiel 5

Quelle: MEYBERG UND VACHENAUER, *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2001, S. 31, Beispiel 4.a.; UE Runde 1 Beispiel 4.
Man löse das folgende AWP durch Trennung der Variablen: $1 + y^2 - xy' = 0$, $y(1) = 1$.

3.5.1 Nullstellenbestimmung

Es sind keine Nullstellen in dem von y abhängigen Funktionsteil vorhanden.

3.5.2 Umformung (Trennung der Veränderlichen)

$$\begin{aligned} xy' &= 1 + y^2 \\ y' &= \frac{1 + y^2}{x} \\ \frac{y'}{1 + y^2} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

3.5.3 Beide Seiten unbestimmt integrieren

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y$$

(Integrationsergebnis lt. angegebener Literatur, S. 167).

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

Die allgemeine Lösung in impliziter Form lautet somit:

$$G(y) - F(x) = c, c \in \mathbb{R}, \qquad \arctan y = \ln x + c \qquad \mathbf{y} = \tan(\ln \mathbf{x} + \mathbf{c})$$

3.5.4 Lösung des Anfangswertproblems

Es gilt: $y(1) = 1$, daher errechnet sich c aus $c = G(y_0) - F(x_0) = 0.7854 - 0 = 0.7854$.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit:

$$\arctan \mathbf{y} = \ln \mathbf{x} + \mathbf{0.7854}$$

3.6 Beispiel 6

Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = x_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Vorraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

3.6.1 Umformung für Trennung der Variablen

$$(x^2 - 1)y' = y$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

3.6.2 Unbestimmte Integration beider Seiten

Integration der linken Seite:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Integration der rechten Seite:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Entweder man führt die Partialbruchzerlegung durch und erhält:

$$\frac{1}{2} \cdot \int (-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1})\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} + \tilde{C}$$

Oder man betrachtet die folgende Regel und formt entsprechend um (x und 1 vertauscht!):

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x}{1-x} + c$$

Das Endergebnis ist dann (Allgemeine Lösung):

$$\mathbf{y(x) = C \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

3.6.3 Anfangswerte, die mit EE-Satz kollidieren

1. Nicht lösbar für $(1, y \leq 0)$ bzw. $(-1, y_0)$
2. $y' = f(x, y)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$

3.7 Beispiel 7

Übungsrunde 2, Beispiel 8.
Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1+x^3)\cdot y' - x^2 \cdot y = 0, \qquad y(1) = 2$$

Lösung:

3.7.1 Umformung für Trennung der Variablen

$$(1+x^3)\cdot y' - x^2 \cdot y = 0, \qquad y(1) = 2$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}$$

3.7.2 Unbestimmte Integration beider Seiten

Integration der linken Seite:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Integration der rechten Seite:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx =$$
$$1+x^3 = u \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2 = \frac{du}{dx}$$
$$\int \frac{x^2}{u}\cdot\frac{1}{3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\ln|u| = \frac{1}{3}\cdot\ln|1+x^3|$$
$$\ln|y| = \ln|1+x^3| + \check{C} \qquad |\text{Entlogarithmieren}$$
$$\mathbf{y(x) = C \cdot \sqrt[3]{1+x^3}} \qquad \text{Allgemeine Lösung}$$

3.7.3 Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$

$$y(1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = C\cdot\sqrt[3]{1+1^3} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \qquad \Rightarrow$$
$$\mathbf{y(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2}}}$$