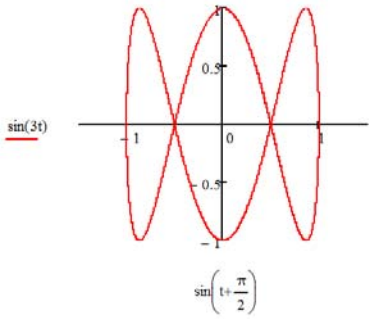
Aufgabe 5

Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\,(3t) \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner betrachten man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch Wendepunkte dieser Kurve bestimmen? (Verwenden Sie dabei ein Computeralgebrasystem oder WolframAlpha).

Lissajous-Figuren zeigen die Überlagerung harmonischer Schwingungen. Die gegebene Funktion ist:



Kettenregel

Für die Kettenregeln benötigen wir zuerst die ersten und zweiten Ableitungen von $x(t)$ und $y(t)$.

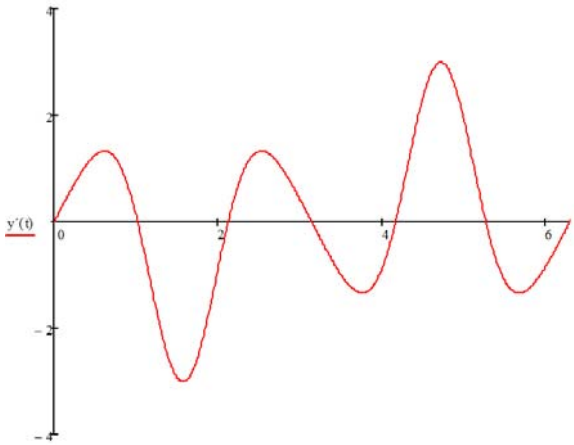
$$\frac{dx}{dt} = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos(3t) \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -9\sin(3t)$$

Die Kettenregel ist definiert mit:

$$\frac{d}{dt}y\big(x(t)\big) = y'\big(x(t)\big) * x'(t)$$
$$\frac{d^2}{dx^2}y\big(x(t)\big) = y''\big(x(t)\big) * x'(t) * x'(t) + y'\big(x(t)\big) * x''(t)$$

Durch Einsetzten erhält man:

$$\frac{d}{dt}y\big(x(t)\big) = 3\cos\left(3\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) * \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Waagrechte Tangenten

Die Kurve hat waagrechte Tangenten, wenn die Steigungskurve die x-Achse schneidet, also 0 wird. Das ist dann der Fall, wenn

$$3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\ \text{ oder }\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=0\ \text{ gilt.}$$

Aus dem Cosinus erfahren wir, dass das bei $t=0,\pi,2\pi$ der Fall ist. Für die restlichen Punkte müssen wir etwas umformen:

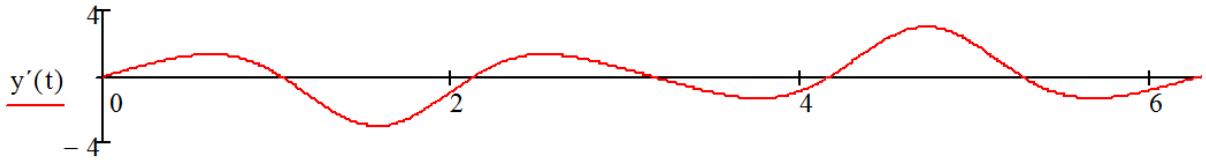
$$3\cos\left(3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)=0\Rightarrow\cos\left(3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)=0\Rightarrow 3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\pm\frac{\pi}{6}$$

Wir können eine Addition in der Sinusfunktion umschreiben:

$$\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t)=\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow\cos(t)=\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{matrix}t=\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)\approx 1{,}0197\\ t=\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\approx 2{,}1219\end{matrix}$$

Somit haben wir 5 der 7 in der Graphik eingezeichneten Nullstellen ermittelt. Schieben wir die letzten zwei um π nach rechts, erhalten wir alle Nullstellen:

$$t_1=0;t_2=\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right);t_3=\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right);t_4=\pi;t_5=\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\pi;t_6=\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi;t_7=2\pi$$



Senkrechte Tangenten

Die senkrechten Tangenten ergeben sich aus der 1. Grafik. Bei -1 bzw. 1 „wechselt“ die Funktion ihre Richtung.

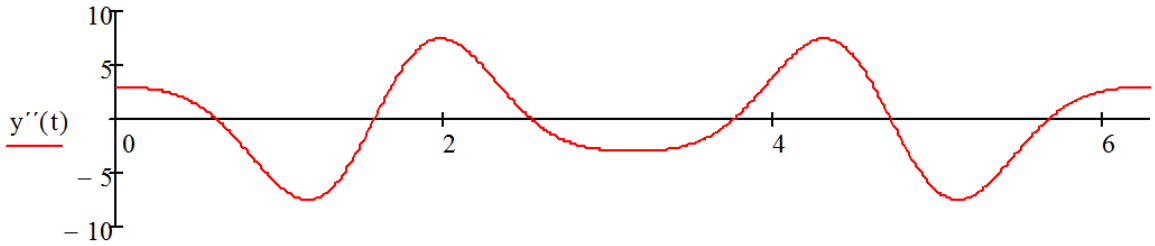
$$\begin{aligned}&\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1\\&\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(t)=\pm 1\\&\cos(t)=\pm 1\\&t=\arccos(\pm 1)\Rightarrow\begin{matrix}t_1=0\\t_2=\pi\end{matrix}\end{aligned}$$

Wendepunkte

Für die Wendepunkte benötigen wir die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x(t))=y''(x(t))*x'(t)*x'(t)+y'(x(t))*x''(t)$$

$$=-9\sin\left(3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)*\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)*\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$



Berechnet man mithilfe von WolframAlpha die Nullstellen erhält man:

$$t_1=0{,}6133;\ t_2=1{,}5708;t_3=2{,}5282;t_4=3{,}7549;t_5=4{,}7124;t_6=5{,}6698$$