3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer und Marion Scholz

unter Mitwirkung von

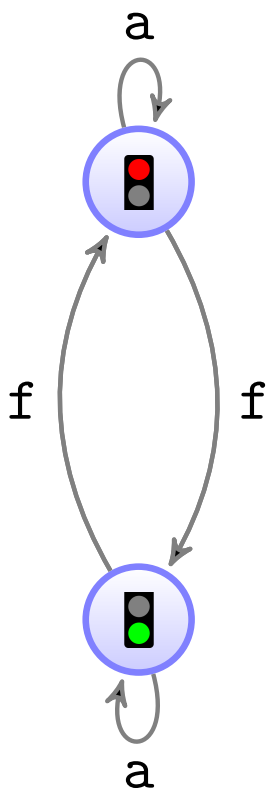
Ch. Fermüller, R. Freund, M. Kröll, M. Oswald
und 15 TutorInnen

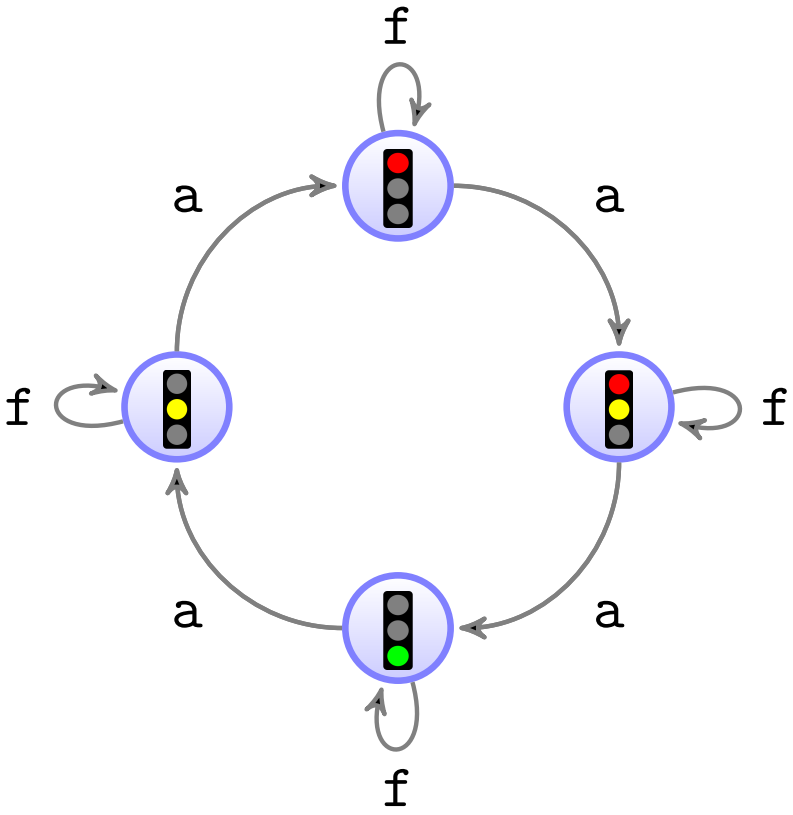
Forschungsbereich Theory and Logic
Institut für Logic and Computation

5.3.2019

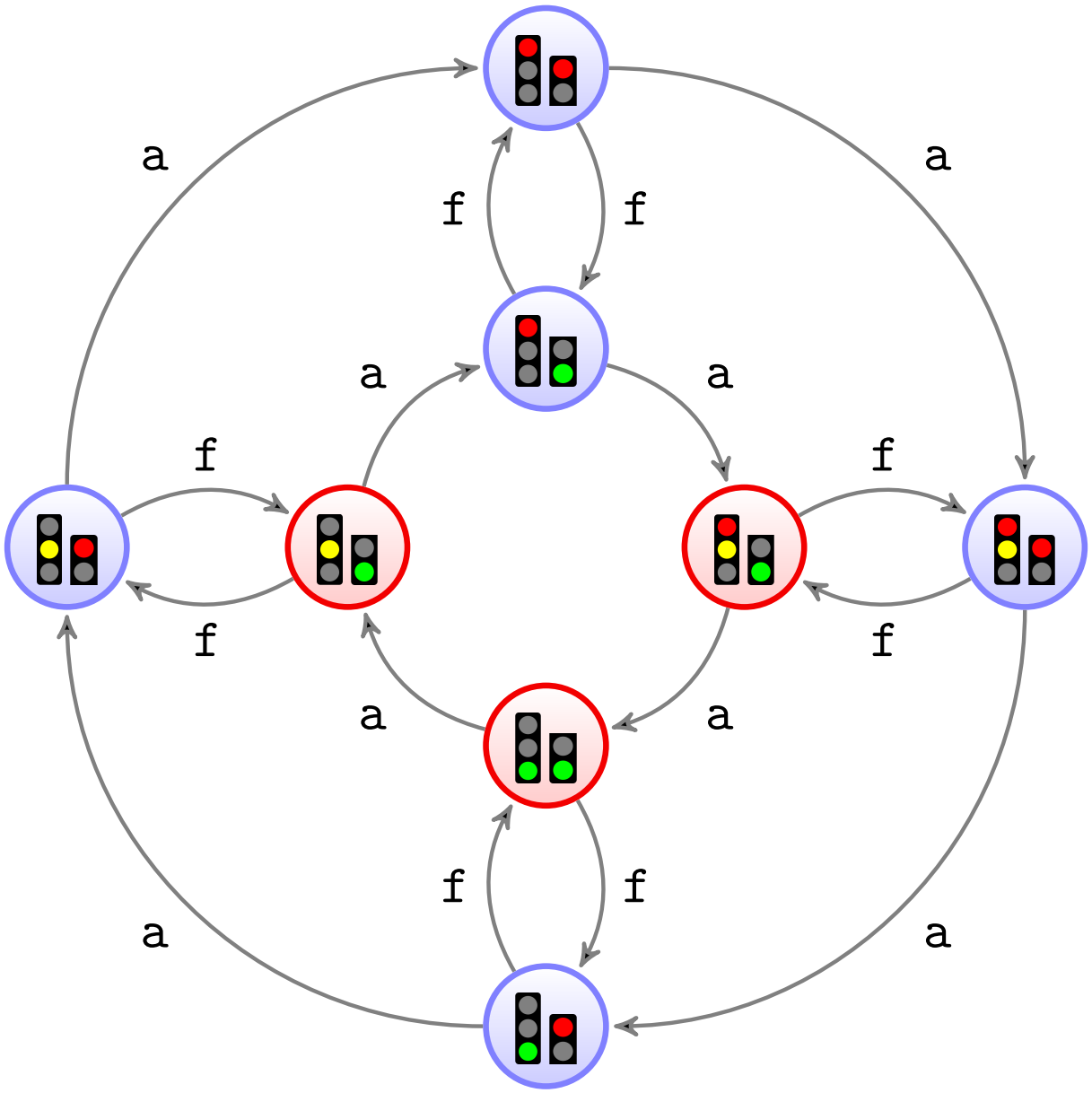
Ampeln und Automaten

a ... Schaltsignal für Autoampel
f ... Schaltsignal für Fußgängerampel

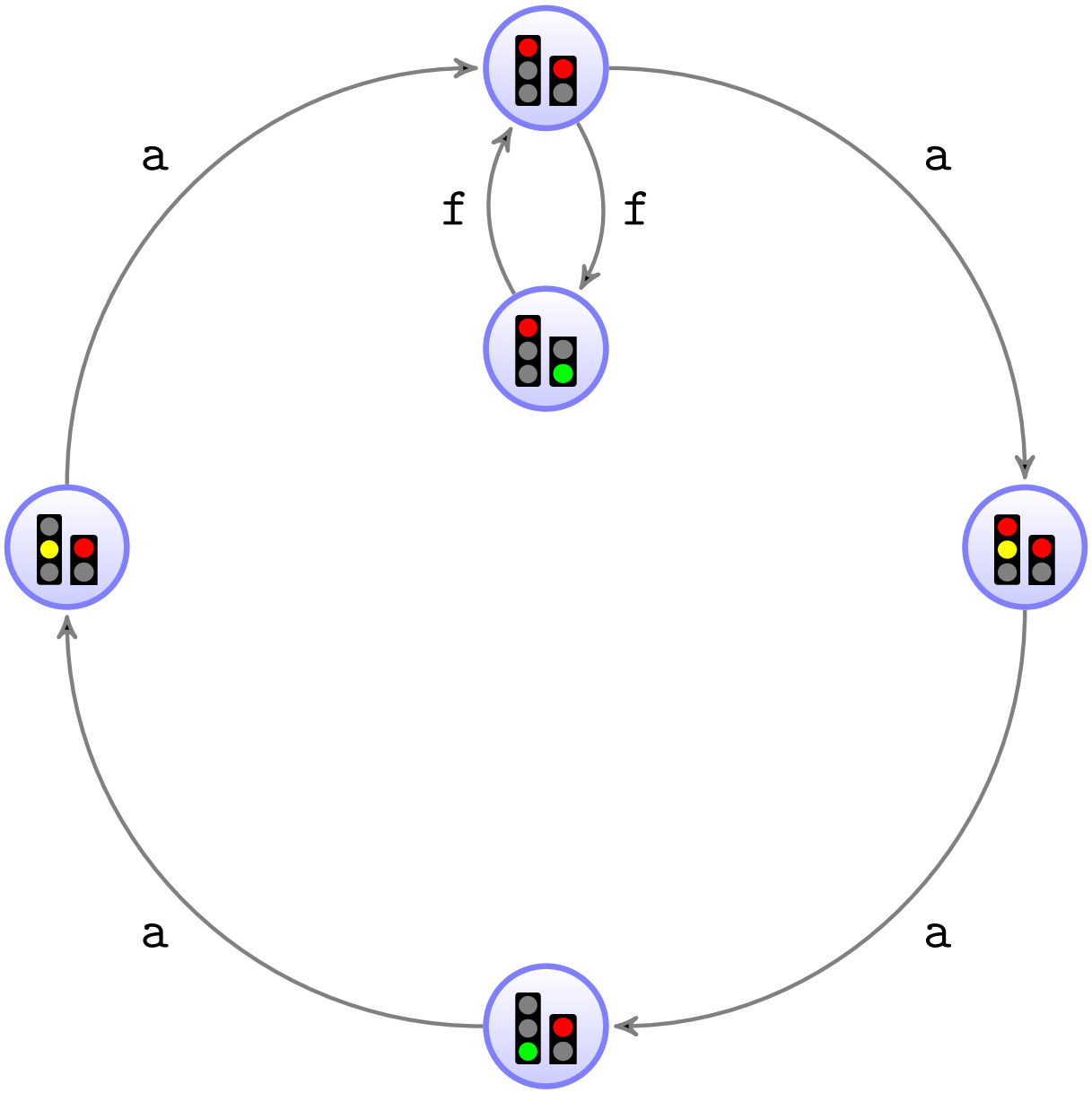




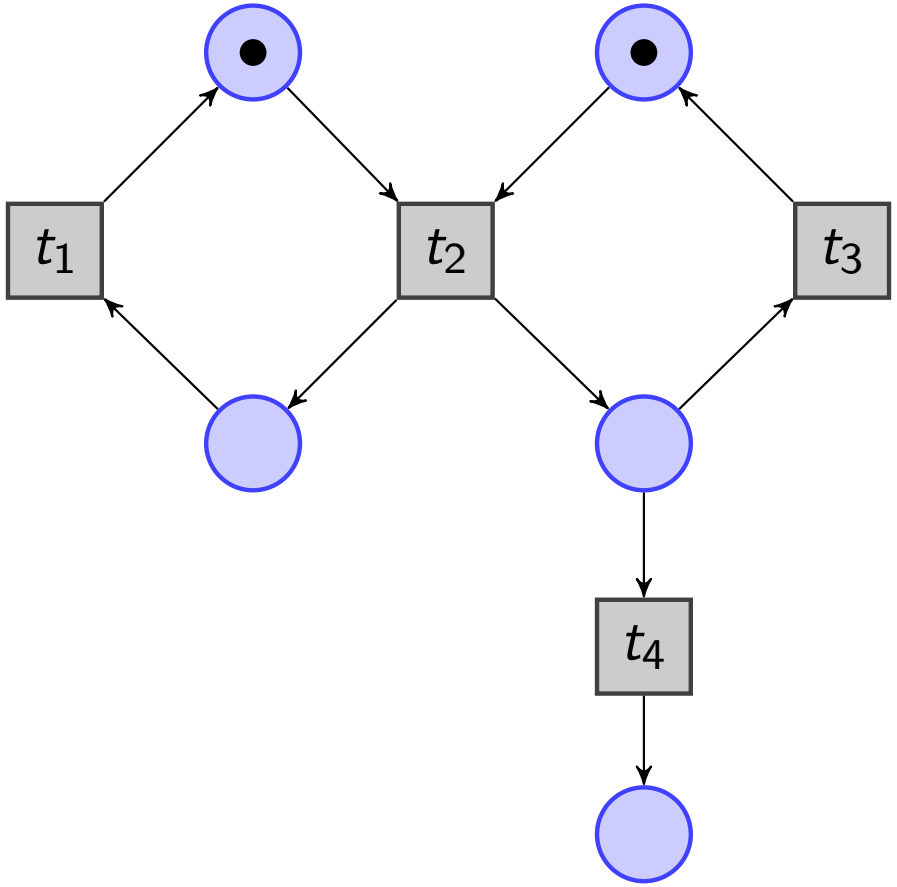
Ampeln und Automaten



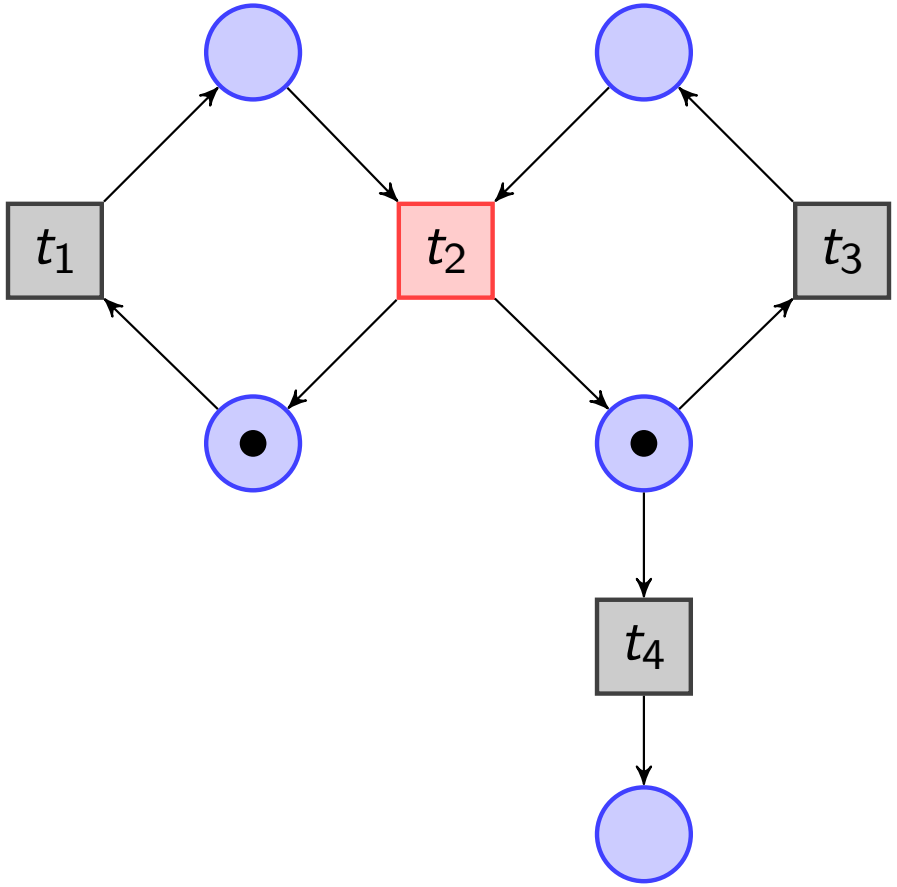
Ampeln und Automaten



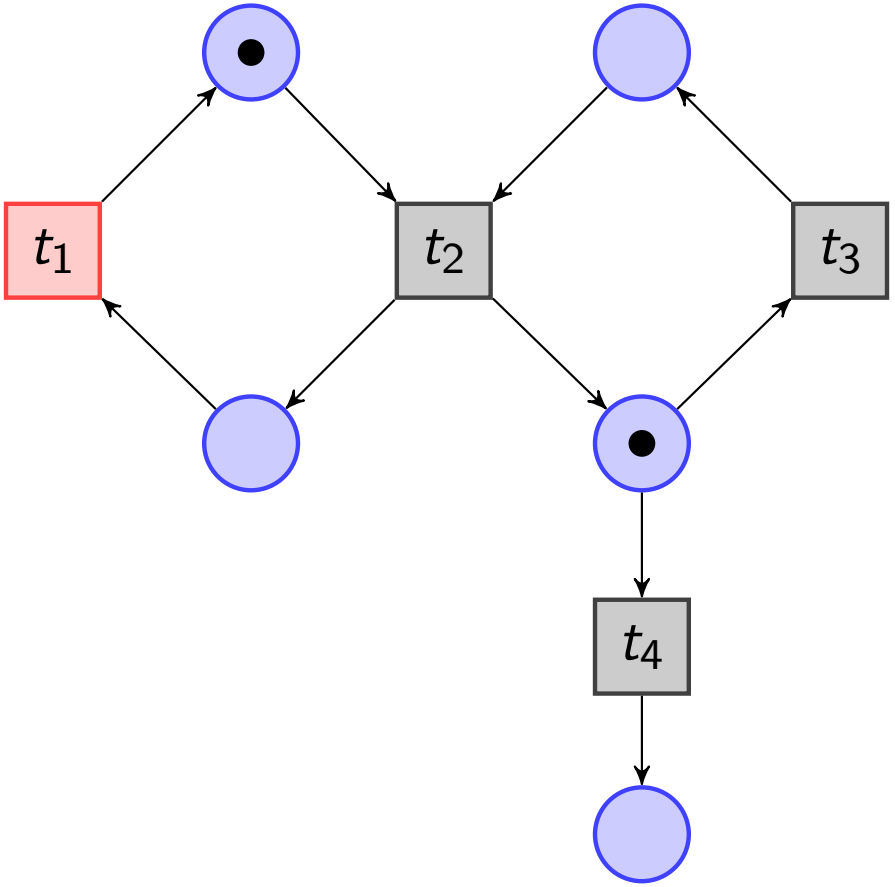
Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



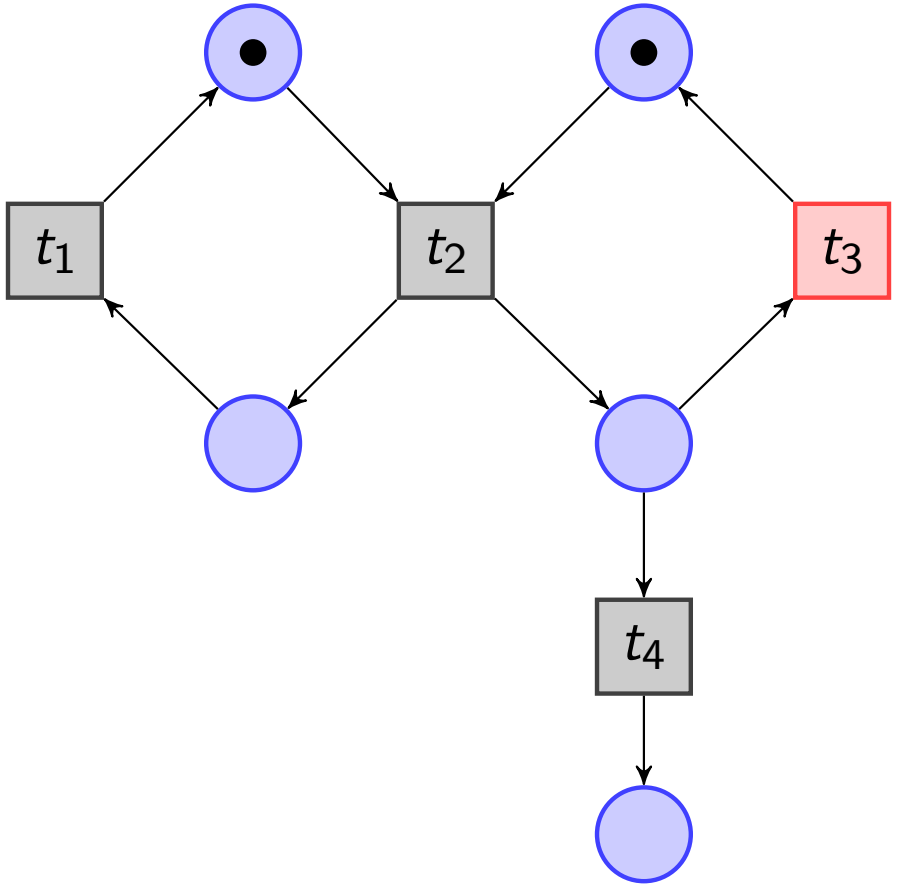
Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



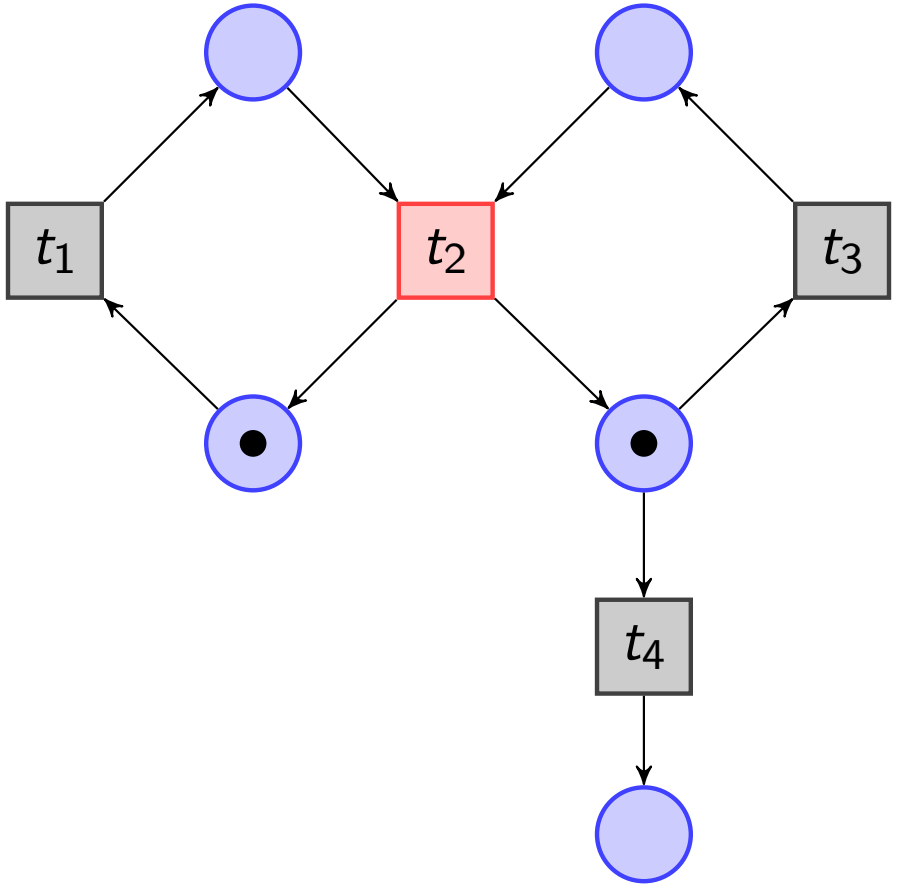
Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



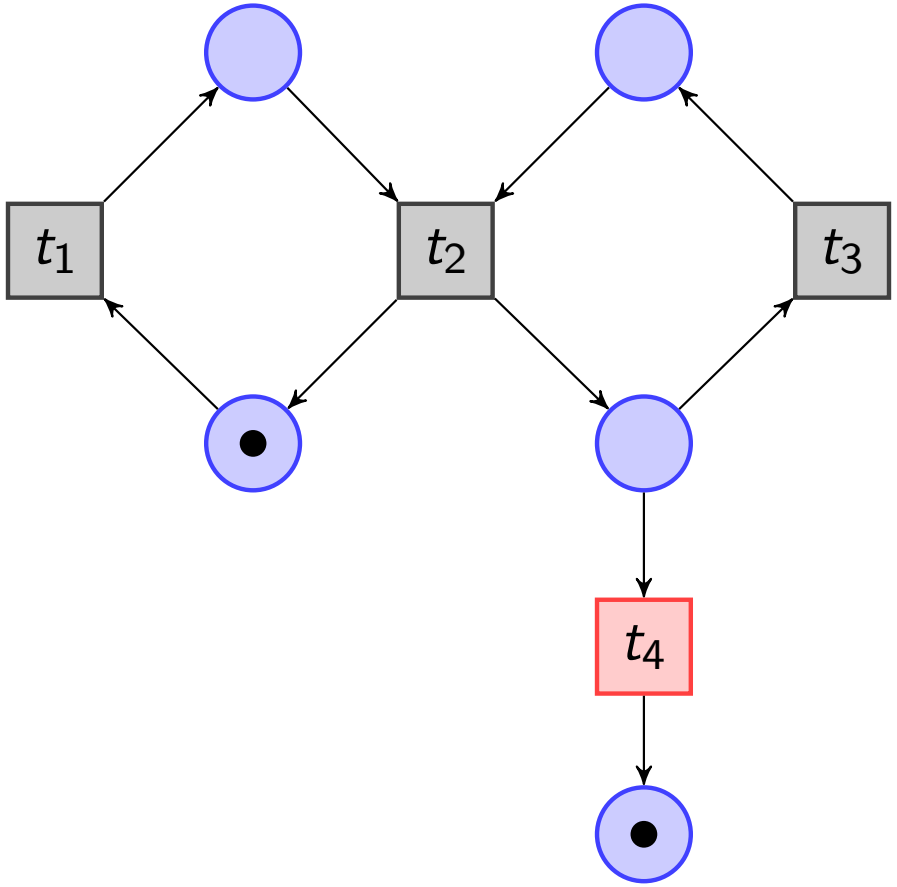
Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



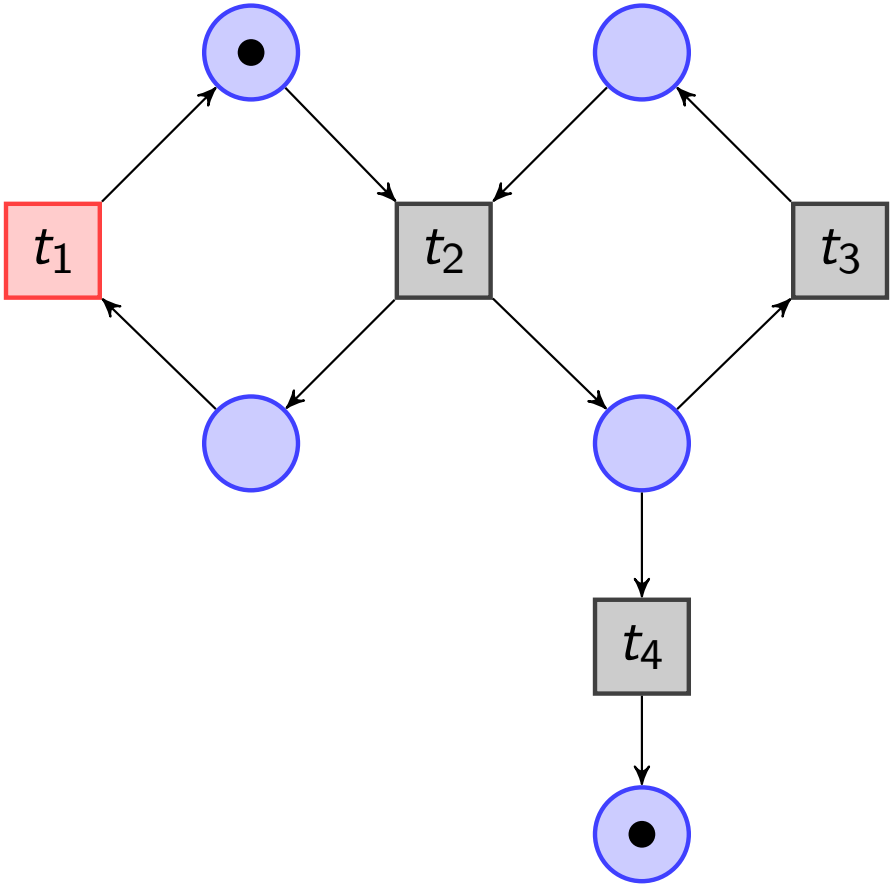
Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



Petrinetze: Automaten mit mehreren Akteuren



Sudoku und Logik

			9	3		6		5
	5	8	1					
7							2	
				1		8		
1	7						4	3
		3		9				
	4							2
					9	4	3	
2		7		4	5			

Regel

In jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der markierten 3×3-Quadrate muss jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

$$\bigwedge_{1\le i,j\le 9} F_{ij} \wedge \bigwedge_{1\le i,k\le 9} Z_{ik} \wedge \bigwedge_{1\le j,k\le 9} S_{jk} \wedge \bigwedge_{1\le k,l\le 9} Q_{lk} \wedge A_{149} \wedge A_{153} \wedge \cdots \wedge A_{965}$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \mathrm{one}(A_{ij1}, \ldots, A_{ij9}) \\ Z_{ik} &= \mathrm{one}(A_{i1k}, \ldots, A_{i9k}) \\ S_{jk} &= \mathrm{one}(A_{1jk}, \ldots, A_{9jk}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{one}(X_1, \ldots, X_9) = {} & (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \cdots) \\ & \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \cdots) \\ & \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge \cdots) \\ & \vee \cdots \end{aligned}$$

Lehrziele und Inhalt

In dieser Lehrveranstaltung lernen Sie

- ... relevante formale Spezifikationsmethoden kennen.
- ... Sachverhalte mit diesen Methoden zu modellieren.
- ... formal-mathematische Beschreibungen zu lesen und zu verstehen, insbesondere die formale Definition der Methoden selbst, wie sie in der Fachliteratur üblich ist.

Themengebiete:

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik als Spezifikationssprache
- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
- Formale Grammatiken
- Petri-Netze

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik

Checkliste für die Teilnahme an der Lehrveranstaltung

1. Inskription in der Studienabteilung $\Longrightarrow$ Matrikelnummer
2. TISS-Anmeldung zur Lehrveranstaltung bis 25.3.2018 (Matrikelnummer erforderlich)
3. 1.Übungsblatt: Abgabefrist Mo, 25.3.2018

TISS

TU Wien Informationssysteme & Services (tiss.tuwien.ac.at)

Information und Kommunikation (1)

TUWEL

E-Learning-Plattform der TU Wien (tuwel.tuwien.ac.at)

- TUWEL-Forum: Diskussionen unter Ihnen und mit uns.
  (Wir verwenden weder TISS- noch Informatikforum.)
- Unterlagen: in TUWEL oder zumindest dort verlinkt.
  - Vorlesungspräsentation
  - Übungsblätter
  - Videoaufzeichnung der Vorlesung
  - weitere Materialen
- Abgabe der gelösten Übungsaufgaben
- Terminvereinbarung für Abgabegespräche

Information und Kommunikation (2)

Stellen Sie Fragen!

- Vor, während oder nach der Vorlesung,
- im TUWEL Diskussionsforum (Sie dürfen auch antworten!),
- per Email an fmod19s@logic.at,
- in den Tutorensprechstunden, und
- in unseren Sprechstunden (siehe Webseiten).

Ablauf

Vorlesung

- jeden Dienstag bis 14. Mai 2019, 15:15–17:00, AudiMax
- außer Dienstag, 30. April: VO entfällt (Tausch mit OOM)
- zusätzlich Mittwoch, 20. März 2019, 15:15–17:00, AudiMax

3 Übungsblätter

- Zeitgerecht abrufbar in TUWEL
- Abgabe der Lösungen in TUWEL bis 25.3., 15.4. bzw. 20.5.
  Textsystem oder leserliche (!) Handschrift gescannt (!) im PDF-Format
- Korrigierte Lösungen nach ein bis zwei Wochen in TUWEL.
- Diskussion ist gut, Abschreiben ist schlecht.
  Keine Plagiate!
- Beurteilt werden vernünftige Lösungsversuche.
  Fehler sind erlaubt, kein Punkteabzug.

Ablauf (2)

3 TutorInnen-Sprechstunden

- zur Klärung von inhaltlichen Fragen
- jeweils vor der Abgabe der Übungsblätter
- nicht verpflichtend

2 Abgabegespräche

- mündlich, etwa eine Stunde
- Fragen zum Stoff der Übungsblätter
- Anfang Mai bzw. Anfang Juni
- Terminvereinbarung über TUWEL

Ablauf (3)

Abschlusstest

- schriftlich, 90 Minuten
- Fragen zum gesamten Stoff
- 4 Termine: 18.6.2019, 25.9.2019, November 2019, Jänner 2020
- Antritt bei 2 Terminen möglich, das bessere Ergebnis zählt
- Nach dem 4.Termin verfallen die Übungsleistungen.
- Anmeldung über TISS

Chronologie

	25.3.2019	Abgabe 1. Übungsblatt
	15.4.2019	Abgabe 2. Übungsblatt
ab	6.5.2019	1. Abgabegespräch
	14.5.2019	letzte Vorlesung
	20.5.2019	Abgabe 3. Übungsblatt
ab	3.6.2019	2. Abgabegespräch
	18.6.2019	1. Termin Abschlusstest
	25.9.2019	2. Termin Abschlusstest

Beurteilung

max. 10 Punkte aus 3 Übungsblättern
max. 20 Punkte aus 2 Abgabegesprächen
max. 50 Punkte beim Abschlusstest

---

max. 80 Punkte insgesamt

Für eine positive Note sind erforderlich:
mind. 25 Punkte (von 50) beim Abschlusstest
mind. 40 Punkte (von 80) insgesamt

Notenschlüssel:
40-49 Punkte: genügend
50-59 Punkte: befriedigend
60-69 Punkte: gut
70-80 Punkte: sehr gut

Gute Taktik: mind. 15 Übungspunkte, mind. 25 Punkte bei Abschlusstest

Riskant: 0 Übungspunkte, 40 Punkte bei Abschlusstest

Aufwandsabschätzung

18.0 h	Vorlesungsbesuch (9 Tage $\times$ 2 h)
21.0 h	3 Übungsblatter (3 $\times$ 7 h)
8.0 h	Vorbereitung auf 1. Abgabegespräch
1.0 h	1. Abgabegespräch
8.0 h	Vorbereitung auf 2. Abgabegespräch
1.0 h	2. Abgabegespräch
16.0 h	Vorbereitung auf Abschlusstest
2.0 h	Abschlusstest
75.0 h	= 3 Ects

Verwenden Sie einen Terminkalender!

Tragen Sie alle Termine ein, von allen Ihren Lehrveranstaltungen!

- Vorlesungs- und Übungstermine
- Anmelde- und Abgabetermine
- Gesprächs- und Prüfungstermine

Warten Sie mit Ihren Auf- und Abgaben nicht bis zum letzten Augenblick!

Probleme in letzter Sekunde:

- Wie erzeuge ich eine einzige PDF-Datei aus meinen Blättern?
- Wie bekomme ich sie ins TUWEL?
- Wieso ist der Server nicht erreichbar?
- Ist die Datei vollständig angekommen?
- Hilfe, mein PC ist hin!

Ausreden, die uns nicht überzeugen

„Ich wollte mich eh anmelden, es war aber kein Termin mehr frei!“

„Mein Abgabegespräch überschneidet sich mit der Mathematik-Übung!“

„. . . und meines mit dem Programmiertest!“

„Ich konnte den Termin nicht wahrnehmen, da ich beruflich zu tun hatte."

„. . . da ich einen Urlaub gebucht hatte.“

„Der Computer/das Internet ist schuld: 1 Minute vor Abgabeschluss brach die Technik zusammen.“

Nutzen Sie Ihren Terminkalender und gönnen Sie sich eine Zeitreserve!

Abschreiben, Plagiate, Schwindeln, Betrug

Plagiat: Übernahme von Absätzen, Abschnitten, Lösungen aus anderen Quellen ohne inhaltliche Notwendigkeit oder ohne Kennzeichnung.

- Kopieren aus dem Internet
- ... aus Büchern
- Abschreiben von KollegInnen

Diskutieren Sie die Aufgaben mit KollegInnen, aber lösen Sie sie eigenständig!

- Sie lernen nur, wenn Sie es selber versuchen.
- Unser Feedback hilft Ihnen nur, wenn es Ihre eigene Lösung war.
- Wir haben weder Zeit noch Lust, mehrfach identische Lösungen zu korrigieren.

Identische Lösungen werden nicht gewertet. Im Zweifelsfall müssen Sie nachweisen, dass Sie nicht abgeschrieben haben bzw. jemanden abschreiben ließen.

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik

Was bedeutet Modellierung?

Modell

Abstrakte, vereinfachte Darstellung eines komplexen Sachverhalts – der „Realität“ – die nur die für relevant erachteten Aspekte enthält.

Aspekte: Komponenten sowie ihre Beziehungen und Eigenschaften

Deskriptive Modelle zur Analyse komplexer Systeme:

- Modell kommt nach der Realität.
- Modell wird angepasst und korrigiert, bis es die Realität wiedergibt.
- Kritischer Vergleich der Voraussagen des Modells mit der Realität.

Präskriptive Modelle zur Konstruktion von Systemen:

- Modell kommt vor dem realen System.
- System wird angepasst und korrigiert, bis es dem Modell entspricht.
- Kritischer Vergleich des Systemverhaltens mit dem Modell.

Modellierungssprachen: zur Beschreibung und Kommunikation des Modells

Natürliche Sprachen

- Basis jeder Kommunikation
- bedeutenste Kulturleistung der Menschenheit
- universell, vielseitig, ausdruckstark
- wandlungsfähig

Ein Albtraum für Modellierung und Spezifikation!

- komplex
- mehrdeutig
- unscharf

Jeder Mann liebt eine Frau.

Jeder Mann liebt mindestens eine Frau?
Jeder Mann liebt genau eine Frau?
Alle Männer lieben dieselbe Frau?
Es gibt genau eine Frau, und alle Männer lieben sie?

Formale Sprachen

- konstruiert, „künstlich“
- eingeschränkte Ausdrucksmöglichkeiten
- spezifische Anwendungsgebiete
- Bedeutung präzise festlegbar

Beispiele:

- Mathematische Notationen
- Programmiersprachen
- logische Formelsprachen

Formale Modellierung / Formalisierung / Formale Spezifikation

Übersetzung unpräziser natürlichsprachiger Problemstellungen in unmissverständliche Beschreibungen in einer formalen Sprache

Formale Modellierungssprachen in dieser Lehrveranstaltung

Textuelle Sprachen:

- Logische Sprachen: Aussagenlogik, Prädikatenlogik
- Reguläre Ausdrücke
- Formale Grammatiken

Graphische Sprachen:

- Endliche Automaten
- Petri-Netze

Kernaspekte:

- Syntax: Was ist eine zulässige Äußerung in dieser Sprache?
- Semantik: Was bedeutet jede der zulässigen Äußerungen?
- Ausdrucksstärke: Was kann ausgedrückt werden, was nicht?
- Verwendung: Wie setzt man die Sprache zur Modellierung ein?

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
   3.1. Was ist Logik?
   3.2. Aussagenlogische Funktionen
   3.3. Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Was ist Logik?

Neulich in der U-Bahn

„Stell dir vor, die Julia hat mit dem Mike Schluss gemacht!“
„Logisch, er hat ja was mit der Laura angefangen.“

Was daran ist logisch?

Es ist nicht logisch,

- dass Mike mit Laura anbandelt
- oder dass man bei Untreue Schluss machen muss
- oder dass sich Julia von Mike trennt.

Diese Aussagen können zutreffen oder auch nicht, sie sind aber nicht „logisch“.

Falls man aber akzeptiert,

- dass Mike untreu war
- und dass Untreue zur Trennung führt

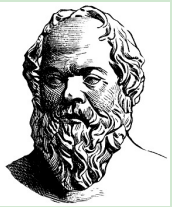
dann ist es logisch schlüssig,

- dass sich Julia von Mike trennt.

Mike ist Julia untreu.	x
Wenn Untreue, dann Trennung.	Wenn x, dann y.
Julia trennt sich von Mike.	y

Die Logik untersucht allgemeine Prinzipien korrekten Schließens.

Schlussfolgerungen (Inferenzen)

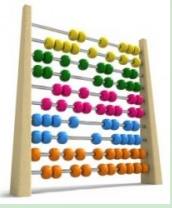


$$\left.\begin{array}{l}\text{Alle Menschen sind sterblich.}\\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\end{array}\right\}\ \text{Prämissen, Annahmen}$$

$$\overline{\text{Sokrates ist sterblich.}}\qquad\text{Konklusion, Folgerung}$$

Clipart courtesy FCIT

- Die Prämissen sind durch „und“ verbunden.
- Die Linie bedeutet „daher“.
- Wahre Prämissen, wahre Konklusion.
- Gültige Inferenz: Die Konklusion folgt logisch aus den Prämissen.



Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
4 ist eine gerade Zahl.

---

4 ist durch 2 teilbar.

- wahre Prämissen, wahre Konklusion
- gültige Inferenz
- Inferenzmuster identisch mit vorigem Beispiel

Alle US-Präsidenten sind in der USA geboren.
Schwarzenegger ist US-Präsident.

Schwarzenegger ist in der USA geboren.

- eine wahre und eine falsche Prämisse
- falsche Konklusion
- trotzdem korrekte Inferenz!

Zugrundeliegende Inferenzregel

Alle x sind y.
z ist ein x.

---

z ist y.

x ... Mensch, US-Präsident, gerade Zahl
y ... sterblich, in USA geboren, durch 2 teilbar
z ... Sokrates, Schwarzenegger, 4

- x, y, z: Platzhalter (Variablen) für Eigenschaften, Individuen, ...
- Die Logik befasst sich mit den Inferenzregeln.
- Das Anwendungsgebiet bestimmt den Wertebereich der Variablen und die Wahrheit der elementaren Aussagen.

Gültigkeit von Inferenzregeln

Unzulässige Inferenzen

Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist sterblich. ——— Sokrates ist ein Mensch.	Sokrates ist ein Mensch. Sokrates ist sterblich. ——— Alle Menschen sind sterblich.

- wahre Prämissen
- wahre Konklusionen
- aber trotzdem keine zulässigen Inferenzen!

Kriterium für die Gültigkeit von Inferenzregeln

Immer wenn alle Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr.

Äquivalentes Kriterium (Umkehrung)

Immer wenn die Konklusion falsch ist, ist mindestens eine Prämisse falsch.

Alle Menschen sind sterblich.		Alle x sind y.
Sokrates ist sterblich.	Inferenzregel:	z ist y.
Sokrates ist ein Mensch.		z ist ein x.

- Diese Regel erfüllt nicht das Kriterium.
- Gegenbeispiel: $x =$ Ball, $y =$ rund, $z =$ Sonne

Alle Fußbälle sind rund.	wahr
Die Sonne ist rund.	wahr
Die Sonne ist ein Fußball.	falsch

- Die Inferenzregel ist daher nicht gültig,
  obwohl sie gelegentlich zu wahren Konklusionen führt.
  Aber eben nicht immer!

Logische Junktoren (Operatoren, Konnektive, Funktionen)

... ermöglichen die Bildung zusammengesetzter Aussagen,
so wie Addition und Subtraktion bei arithmetischen Ausdrücken.

Wenn Feiertag ist oder der Professor krank ist,
findet die Vorlesung nicht statt.

- „es ist Feiertag“ (x), „Prof ist krank“ (y), „VO findet statt“ (z)
  ... elementare Aussagen aus dem Uni-Milieu
- Logische Struktur: „Wenn x oder y, dann nicht z“
- Junktoren: wenn-dann, oder, nicht

Weitere Junktoren in ...

- der Aussagenlogik: und, entweder-oder, genau dann-wenn, ...
- Zeitlogiken: morgen, gestern, im nächsten Moment, bis, ...
- Modallogiken: notwendigerweise, möglicherweise, ...
- ...

Quantoren

... ermöglichen Aussagen über die Anzahl betroffener Individuen, Zeitpunkte etc.

Jeder Mann liebt eine Frau.

- Wertebereiche: Männer (x) , Frauen (y)
- Logische Struktur:
  „Für alle x gibt es mindestens ein y, sodass x y liebt."
- Quantoren: für alle, mindestens ein

Weitere Quantoren: einige, viele, mindestens fünf, höchstens drei, immer, manchmal, irgendwann später, ...

Komponenten einer Logik

- logische Symbole, Variablen:
  notwendig für kompakte und unmissverständliche Schreibung
- Syntax: Regeln für Wohlgeformtheit
  Wann ist eine Folge logischer Symbole eine Formel?
- Semantik: Bedeutung von Formeln
  Welche Wahrheitswerte gibt es?
  Wann ist eine Formel wahr, wann falsch?
  Was bedeuten die Symbole?
- Konsequenzrelation:
  Wann folgt eine Formel logisch aus anderen Formeln?
- Inferenzregeln (logischer Kalkül)
  Wie lassen sich Formeln beweisen?

Unterscheidung von Logiken

... nach Wahrheitswerten:

- Zweiwertige Logik: wahr/falsch
- Mehrwertige Logiken: wahr/falsch/unbekannt/widersprüchlich, ...
- Fuzzy logic: [0,1] (alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1)

... nach Quantoren:

- Aussagenlogik: keine Quantoren
- Quantifizierte Aussagenlogik: Quantoren über Aussagenvariablen
- Prädikatenlogik: Quantoren über Individuenvariablen
- Logiken höherer Stufen: Quantoren über Funktionen und Prädikate

... nach den Ausdrucksmöglichkeiten:

- Elementare Logik: und, oder, nicht, für alle, ...
- Zeitlogiken: im nächsten Moment, für immer, irgendwann später, ...
- Modallogiken: „ich glaube/weiß, dass“, „es ist möglich/notwendig, dass“, ...

... nach wahren/beweisbaren Formeln, nach Kalkülen, ...

Klassische Aussagenlogik (Propositionallogik)

- zwei Wahrheitswerte: wahr/falsch, true/false, verum/falsum, 1/0, ein/aus, ...
- Aussagenvariablen, die wahr oder falsch sein können
- elementare Operatoren wie „und“, „oder“, „nicht“, ...
- keine Quantoren

Geht zurück auf die Antike

Grundlegend für

- Philosophie
- Mathematik
- Informatik

Clipart courtesy FCIT

Aristoteles

384–322 v.Chr.

Was Sie heute erwartet

1. Organisatorisches
2. Was bedeutet Modellierung?
3. Aussagenlogik
   - 3.1. Was ist Logik?
   - 3.2. Aussagenlogische Funktionen
   - 3.3. Syntax und Semantik der Aussagenlogik
   - 3.4. Von der Funktion zur Formel
   - 3.5. Normalformen
   - 3.6. Das Erfüllbarkeitsproblem
   - 3.7. House
   - 3.8. Dualität von Funktionen, Operatoren und Formeln
   - 3.9. Gone Maggie gone

Negation

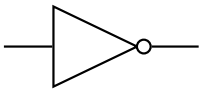
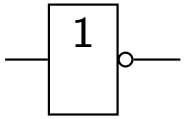
Ich gehe nicht ins Kino.

Ist falsch, wenn ich ins Kino gehe, und wahr andernfalls.

x	not x
1	0
0	1

Andere Bezeichnung: non

Symbole: $\neg x$, $-x$, $\sim x$, x', $!x$, $\overline{x}$, $\mathrm{N}x$, ...

Logikgatter:  

Konjunktion

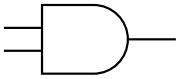
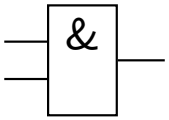
Der Himmel ist blau und die Sonne scheint.

Trifft nur zu, wenn jede der beiden Teilaussagen wahr ist.

x	y	x and y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Andere Bezeichnung: et

Symbole: $x \wedge y$, $x \cdot y$, xy, $x\&y$, $\mathrm{K}xy$, ...

Logikgatter:  

Disjunktion, Alternative

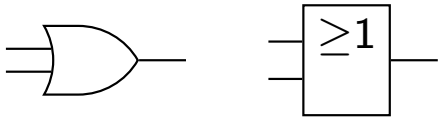
Ich trinke zum Essen Wein oder Bier (oder auch beides).

Nur falsch, wenn ich weder Wein noch Bier trinke.

x	y	x or y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Andere Bezeichnung: vel

Symbole: $x \vee y$, $x + y$, $x \mid y$, Axy

Logikgatter: 

Ausschließende Disjunktion (Antivalenz)

Ich bin entweder gut drauf oder saugrantig,
etwas anderes gibt es bei mir nicht.

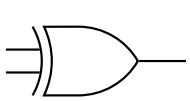
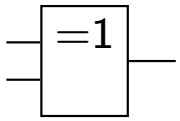
Trifft zu, wenn ich in genau einer der Stimmungslagen bin (die sich ausschließen).

x	y	x xor y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Andere Formulierungen: x oder y

Andere Bezeichnungen: exor, aut

Symbole: $x \not\equiv y$, $x \oplus y$, $x \not\Leftrightarrow y$, $x \not\leftrightarrow y$, $\mathrm{J}xy$, ...

Logikgatter:  

Äquivalenz

Ich springe dann (und nur dann), wenn du es auch tust.

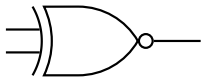
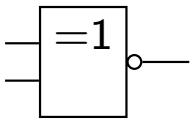
Trifft zu, wenn beide springen oder keiner.

x	y	x iff y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Andere Formulierungen: x genau dann wenn y, x if and only if y, x ist notwendig und hinreichend für y, x ist äquivalent zu y

Andere Bezeichnungen: eq, äq, xnor, nxor, ...

Symbole: $x \equiv y$, $x \Leftrightarrow y$, $x \leftrightarrow y$, Exy, ...

Logikgatter:  

Implikation

Wenn/Falls ich ins Kino gehe, (dann) esse ich dort Popcorn.
Ich gehe nur dann ins Kino, wenn ich dort Popcorn esse.

Falsch, wenn ich im Kino kein Popcorn esse, und wahr, wenn doch.
Keine Festlegung betreffend Popcorn außerhalb des Kinos, daher wahr.

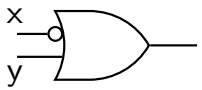
x	y	x implies y
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

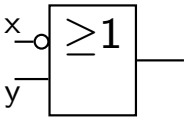
„Verum ex quolibet“: x implies $1 = 1$
„Ex falso quodlibet“: 0 implies $y = 1$

Andere Formulierungen: aus x folgt y, x impliziert y, x hinreichend für y

Andere Bezeichnung: seq (sequi)

Symbole: $x \supset y$, $x \Rightarrow y$, $x \rightarrow y$, Cxy, ...

Logikgatter: 



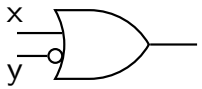
Implikation (Umkehrung)

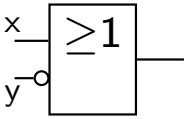
Ich esse (dann) Popcorn, wenn/falls ich ins Kino gehe.

x	y	x if y
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Andere Formulierungen: x folgt aus y, x wird von y impliziert, x ist notwendig für y

Symbole: $x \subset y$, $x \Leftarrow y$, $x \leftarrow y$, ...

Logikgatter: 

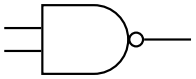
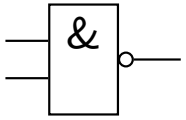


Negierte Konjunktion

x	y	x and y	x nand y
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Andere Bezeichnungen:
Sheffer-Strich, nd (J.Nicod)

Symbole: $x \uparrow y$, $x \mid y$, x/y, Dxy, ...

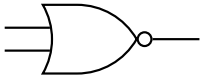
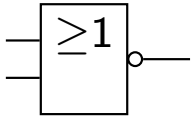
Logikgatter:  

Negierte Disjunktion

x	y	x or y	x nor y
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Andere Bezeichnungen:
Peirce-Pfeil, sh (H.M.Sheffer)

Symbole: $x \downarrow y$, Xxy, ...

Logikgatter:  

Wenn Feiertag ist oder der Professor krank ist,
findet die Vorlesung nicht statt.

Logische Struktur: „Wenn x oder y, dann nicht z."

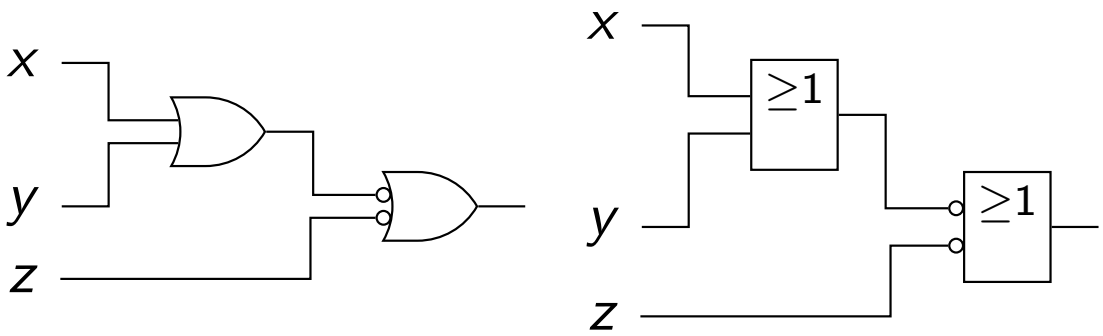
Logische Funktion: $(x \text{ or } y) \text{ implies not } z$ $\quad$ $\text{implies}\,(\text{or}\,(x, y), \text{not}(z))$

Logische Formel: $(x \vee y) \supset \neg z$

Prefix-Notation: $\mathsf{C}\,\mathsf{A}\,x\,y\,\mathsf{N}\,z$

Algebraische Notation: $(x + y) \to -z$ $\quad$ $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{z}$

Logischer Schaltkreis:



Implikation oder Äquivalenz?

Natürlichsprachliche Implikationen sind oft logische Äquivalenzen.

Wenn du mein Auto wäscht, bekommst du 10 Euro.

Und was, wenn ich es nicht tue?
Nur ein Logiker hält in diesem Fall 10 Euro für möglich.
Alle anderen interpretieren den Satz als:

Du bekommst 10 Euro dann und nur dann, wenn du das Auto wäscht.

Der positive Erfolg bei allen Lehrveranstaltungen und Prüfungen der Studieneingangs- und Orientierungsphase berechtigt zur Absolvierung der weiteren Lehrveranstaltungen und Prüfungen sowie zum Verfassen der im Curriculum vorgesehenen Bachelor- oder Diplomarbeiten.

Universitätsgesetz 2002, Stand Bgbl I Nr. 13/2011, § 66(1a)

Logiker: Keine Einschränkung bei nicht bestandener STEOP.
Ministerium: Restliches Studium dann und nur dann, wenn STEOP.

Der Besitz eines Führerscheins berechtigt zum Lenken eines Autos.

Ohne Führerschein keine Berechtigung? (Äquivalenz)
Auch nicht auf Privatgelände? (Doch nur Implikation?)

In formalen Kontexten wird strikt zwischen Implikation und Äquivalenz unterschieden. „Implikation = halbe Äquivalenz“

Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, ist sie gerade.

4-Teilbarkeit ist eine hinreichende Bedingung für Geradheit,
aber keine notwendige.

Äquivalenz führt zu einer falschen Aussage:

Eine Zahl ist durch 4 teilbar genau dann, wenn sie gerade ist.

2 ist eine gerade Zahl, aber nicht durch 4 teilbar.

Inklusive oder exklusive Disjunktion?

Natürlichsprachliche Disjunktionen sind meist ausschließend gemeint.

Falls du mich suchst: Ich bin zu Hause oder in der Arbeit.

Physikalisch kann ein Körper nicht an zwei Orten gleichzeitig sein.
Andererseits: Das Büro kann Teil der Wohnung sein.

„Tee oder Kaffee?“ – „Beides, bitte!“

Eher unüblich, aber der Gast ist König.

Ich besuche dich morgen oder übermorgen.

Ein Besuch an beiden Tagen wäre unerwartet.

Ich fahre entweder Auto oder höre Musik.
(Auf beides gleichzeitig kann ich mich nicht konzentrieren.)

Wirklich ein Beispiel für ausschließende Disjunktion?

Habe ich außerhalb des Autos tatsächlich keine ruhige Minute?

Die exklusive Disjunktion ist hier als Implikation gemeint (und wird auch so verstanden):

Wenn ich Auto fahre, höre ich nicht Musik.

Legt nicht fest, was ich außerhalb des Autos mache.

Rezept für Zweifelsfälle der aussagenlogischen Modellierung

1. Identifiziere die elementaren Aussagen.
2. Analysiere alle Wahrheitsbelegungen.
3. Wähle geeignete logische Funktionen (unbeirrt von Intuition und natürlicher Sprache).

z = Entweder „ich fahre Auto“ (x) oder „ich höre Musik“ (y).

x	y	z	x or y	x xor y	x implies not y	x nand y
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1

x implies not y: Wenn ich Auto fahre, dann höre ich nicht Musik.

x nand y: Es kommt nicht vor, dass ich Auto fahre und Musik höre.

Aussagenlogische Funktionen – Überblick

true	false
1	0
$\top$	$\bot$

x	not
1	0
0	1
	$\neg$

x	y	and	nand	or	nor	iff	xor	implies		if	
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
		$\wedge$	$\uparrow$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\not\equiv$	$\supset$	$\not\supset$	$\subset$	$\not\subset$

2 nullstellige Funktionen (= Konstanten): true, false
4 einstellige Funktionen: not, ...
16 zweistellige Funktionen: and, nand, or, ...

Es gibt 2^{2^n} verschiedene n-stellige logische (Boolesche) Funktionen.

- 2^n verschiedene Argumentkombinationen („Zeilen“)
- 2 Ergebnismöglichkeiten für jede Argumentkombination

Funktionale Vollständigkeit

Eine Menge von Funktionen heißt vollständig (für eine Funktionsklasse), wenn damit alle Funktionen (der Klasse) ausgedrückt werden können.

$\{\text{not}, \text{and}, \text{or}\}$ ist funktional vollständig.

Begründung siehe später.

$\{\text{not}, \text{and}\}$ ist funktional vollständig.

- $\{\text{not}, \text{and}, \text{or}\}$ ist vollständig (siehe oben).
- or kann durch $\{\text{not}, \text{and}\}$ ausgedrückt werden kann:
  $x \text{ or } y = \text{not}(\text{not}\, x \text{ and not}\, y)$

x	y	not x	not y	not x and not y	not(not x and not y)
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

$\{\text{nand}\}$ ist funktional vollständig.

- $\{\text{not}, \text{and}\}$ ist funktional vollständig (siehe oben).
- $\text{not}\, x = x \text{ nand } x$
- $x \text{ and } y = \text{not}(x \text{ nand } y) = (x \text{ nand } y) \text{ nand } (x \text{ nand } y)$

Praktisch relevant: nand ist einfach als Halbleiter-Schaltkreis realisierbar. Somit ist jede logische Funktion als Schaltkreis realisierbar.

Die Mengen $\{\text{nor}\}$, $\{\text{not}, \text{or}\}$, $\{\text{not}, \text{implies}\}$ und $\{\text{implies}, \text{false}\}$ sind ebenfalls funktional vollständig.