Beispiel 53 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7, 11.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = 4(x - 2)(y^2 + 10y) + 3x^3$.

2 Theoretische Grundlagen: Relative und lokale Extremwerte

Unter den **relativen Maxima und Minima** einer Funktion versteht man jene Punkte auf der Bildfläche von $z = f(x, y)$, die im Vergleich zur unmittelbaren Nachbarschaft eine höchste und eine tiefste Lage einnehmen.

Definition: Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) ein **relatives Maximum bzw. relatives Minimum**, wenn in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) stets

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

ist $((x, y) \neq (x_0, y_0))$.

Anmerkungen dazu:

- Die relativen Maxima und Minima einer Funktion werden unter dem Sammelbegriff 'Relative Extremwerte' zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden Flächenpunkte heißen Hoch- bzw. Tiefpunkte.
- Ein relativer Extremwert wird auch als lokaler Extremwert bezeichnet, da die extreme Lage meist nur auf die unmittelbare Umgebung zutrifft.
- Wenn die in der obenstehenden Definition erwähnte Ungleichung an jeder Stelle (x, y) des Definitionsbereiches von $z = f(x, y)$ erfüllt ist, so liegt ein **absolutes Maximum bzw. Minimum** vor,

Wir vermuten dass die in einem Hoch-bzw. Tiefpunkt an die Fläche $z = f(x, y)$ angelegte Tangentialebene immer parallel zur x-y-Koordinatenebene verläuft, denn alle in einem Hoch- oder Tiefunkt P angelegten Flächtentangenten haben die Steigung 0. Daher müssen die ersten Ableitungen von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) verschwinden, damit die Tangentialebene parallel zur x-y-Koordinatenebene verlaufen kann. Somit können wir die **notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert** wie folgt definieren:

Definition: In einem relativen Extremum (x_0, y_0) der Funktion $z = f(x, y)$ besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur x-y-Ebene parallele Tangentialebene. Die Bedingungen

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

sind daher die notwendige Voraussetzung für die Existenz eines relativen Extremwertes an der Stelle (x_0, y_0).
Jedoch ist dies nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, denn es existieren auch Punkte, welche nicht Hoch- oder Tiefpunkte sind und dennoch eine waagrechte Tangentialebene besitzen. Man betrachte z.B. $(0, 0)$ in $z = x^2 - y^2$. Die **hinreichenden Bedingungen für einen relativen Extremwert** sind wie folgt:

Definition: Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) mit Sicherheit einen relativen Extremwert, wenn die folgenden Bedingungen zugleich erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden in (x_0, y_0):

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung

$$\triangle = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ist, so liegt ein relatives Maximum vor, für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein relatives Minimum.

Einige Anmerkungen:

1. Wie bei den Funktionen mit einer Variablen entscheiden auch hier die (partiellen) Ableitungen 1. und 2. Ordnung über Existenz und Art von Extremwerten.

2. Die Diskriminante $\triangle$ kann auch als zweireihige Determinante geschrieben werden:

$$\triangle = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

3. In den Fällen von $\triangle < 0$ und $\triangle = 0$ gilt:

   - $\triangle < 0$: Es liegt kein Exremwert, sondern ein Sattelpunkt vor.
   - $\triangle = 0$: Es kann keine Entscheidung über Existenz und Art eines Extremwertes gefällt werden.

3 Lösung des Beispiels

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen der gegebenen Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$:

$$f_x = 4(y^2+10y)+9x^2 \qquad f_{xx} = 18x$$
$$f_y = 4(x-2)(2y+10) = 8(x-2)(y+5) \qquad f_{yy} = 8(x-2)$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 8(y+5)$$

Zunächst betrachten wir $f_y = 0$:

$$f_y: \qquad 8(x-2)(y+5) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 2, y = -5$$

Wir setzen nun $x = 2$ in f_x ein:

$$f_y(2): \qquad 4(y^2+10y)+36 = 0$$
$$y^2+10y+9 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100}{4} - \frac{36}{4}} = -\frac{10}{2} \pm \frac{8}{2}$$
$$y_1 = -1, y_2 = -9$$

Nun setzen wir $y = -5$ in f_x ein:

$$f_x(-5): \qquad 4(25-50+9x^2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \pm\frac{10}{3}$$

Wir haben nun Art und Existenz der Extremwerte anhand folgender Punkte zu betrachten: $P_1(2,-9)$, $P_2(2,-1)$, $P_3(\frac{10}{3},-5)$, $P_4(-\frac{10}{3},-5)$:

1. $P_1(2,-9)$

   $$f_{xx}(2,-9) = 36 \qquad f_{yy}(2,-9) = 0 \qquad f_{yx}(2,-9) = -32$$

   Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

   $$\triangle_{P_1}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

   Somit ist P_1 ein Sattelpunkt.

2. $P_2(2,-1)$

   $$f_{xx}(2,-1) = 36 \qquad f_{yy}(2,-1) = 0 \qquad f_{yx}(2,-1) = 32$$

   Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

   $$\triangle_{P_2}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

   Somit ist P_2 ein Sattelpunkt.

3. $P_3(\frac{10}{3}, -5)$

$$f_{xx}(\frac{10}{3}, -5) = 60 \qquad f_{yy}(\frac{10}{3}, -5) = \frac{32}{4} \qquad f_{yx}(\frac{10}{3}, -5) = 0$$

Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

$$\triangle_{P_3}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

Weil $f_{xx}(\frac{10}{3}, -5) > 0$ liegt ein **Minimum** vor.

4. $P_4(-\frac{10}{3}, -5)$

$$f_{xx}(-\frac{10}{3}, -5) = -60 \qquad f_{yy}(-\frac{10}{3}, -5) = -\frac{16}{3} \qquad f_{yx}(-\frac{10}{3}, -5) = 0$$

Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

$$\triangle_{P_4}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

Weil $f_{xx}(-\frac{10}{3}, -5) < 0$ liegt ein **Maximum** vor