1. (a) (5 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper (mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{C}$) mit $\mathbb{R} \subseteq K$. Außerdem existieren ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a + \mathrm{i}b \in K$. Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{C}$ gilt. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{i} \in K$ gilt. Sie dürfen die üblichen Rechenregeln in Körpern ohne Beweis verwenden.

   (b) (2 Punkte) Folgern Sie aus (a), dass es keinen Körper $(K, +, \cdot)$ mit $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$ gibt, sodass $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ sind.

2. Geben Sie drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ an, sodass

   (a) (3 Punkte) $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist und

   (b) (3 Punkte) die Mengen $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ jeweils linear unabhängig sind.

   Beweisen Sie die entsprechenden Aussagen.

3. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass f linear ist.

   (b) (3 Punkte) Geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ an.