Bitte frei lassen! **Punkte:** **Note:**

Analysis für Informatik und WI - Vorlesungsprüfung

Prüfer: Panholzer Arbeitszeit: 100 min.

Familienname: Vorname:

Einziges erlaubtes Hilfsmittel:
Mathematische Formelsammlung von Götz/Kraft/Unfried des öbv-Verlages

(1) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zu **elementaren Funktionen bzw. asymptotischer Vergleich von Folgen** (bitte ankreuzen).

Die folgenden 4 Fragen beziehen sich auf die reelle Funktion $h(x)$, welche wie folgt definiert sei:

$$h(x) = \sqrt{(1+x)^2}.$$

(a)	An welchen/r der folgenden Stellen ist $h(x)$ stetig? ○ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(b)	An welchen/r der folgenden Stellen ist $h(x)$ differenzierbar? ○ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(c)	Welchen Wert besitzt das bestimmte Integral $\int_{-2}^{0} h(x)dx$? ○ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(d)	An welchen/r der folgenden Stellen besitzt $h(x)$ ein relatives Minimum? ○ -2 ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2

In den folgenden 4 Fragen wird der asymptotische Vergleich der Folgen $(p_n)_{n\ge1}$, $(q_n)_{n\ge1}$ und $(r_n)_{n\ge1}$ für $n \to \infty$ untersucht, wobei die Folgen wie folgt definiert sind ($\binom{n}{k}$ bezeichnet dabei den Binomialkoeffizienten):

$$p_n = \binom{n+1}{2}, \qquad q_n = n^2 \cdot \ln n, \qquad r_n = \frac{n^2}{2}.$$

(e)	Welche der folgenden asymptotischen Gleichheiten gelten? ○ $p_n \sim q_n$ ○ $q_n \sim r_n$ ○ $r_n \sim p_n$
(f)	Welche der folgenden klein o-Beziehungen gelten? ○ $p_n = o(q_n)$ ○ $q_n = o(r_n)$ ○ $r_n = o(p_n)$
(g)	Welche der folgenden groß $\mathcal{O}$-Beziehungen gelten? ○ $p_n = \mathcal{O}(q_n)$ ○ $q_n = \mathcal{O}(r_n)$ ○ $r_n = \mathcal{O}(p_n)$
(h)	Welche der folgenden Theta-Beziehungen gelten? ○ $p_n = \Theta(q_n)$ ○ $q_n = \Theta(r_n)$ ○ $r_n = \Theta(p_n)$

(2) [8 Punkte] Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Folgengliedern:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^3+1^2} + \frac{n^2-2}{n^3+2^2} + \frac{n^2-3}{n^3+3^2} + \cdots + \frac{n^2-n}{n^3+n^2} = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}, \quad \text{mit} \quad a_{n,k} = \frac{n^2-k}{n^3+k^2}.$$

(a) Man bestimme für jedes n den größten Summanden in der Summe für a_n, ermittle also:

$$\overline{a_n} := \max_{1\leq k\leq n} \frac{n^2-k}{n^3+k^2}.$$

(b) Man bestimme für jedes n den kleinsten Summanden in der Summe für a_n, ermittle also:

$$\underline{a_n} := \min_{1\leq k\leq n} \frac{n^2-k}{n^3+k^2}.$$

(c) Definieren wir Folgen $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ durch $c_n := n\cdot\overline{a_n}$ und $b_n := n\cdot\underline{a_n}$. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$c := \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(d) Man formuliere jenen Satz, mit dem sich nun der Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ bestimmen lässt und ermittle diesen.

(3) [8 Punkte] Wir betrachten für $x \in (-1,1)$ die reelle Funktion

$$f(x) = \ln\Big(\frac{1}{1-x}\Big).$$

(a) Unter Zuhilfenahme der Ableitungsregelen berechne man $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ und daraus $f'(0)$, $f''(0)$ sowie $f'''(0)$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für $n\geq 1$ wie folgt gegeben ist:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

(c) Bestimmen Sie daraus die Taylorreihe $T(x)$ von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(4) [8 Punkte]

(a) Unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung kennengelernten Methoden bestimme man die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot y(x).$$

Hinweis: Zum Berechnen des auftretenden Integrals ist die Substitution $u = \sin x$ zielführend.

(b) Unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung kennengelernten Methoden bestimme man die Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung, welche den angegebenen Anfangswert besitzt:

$$y'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot y(x) + \sin x\cdot\cos x, \qquad \text{mit} \quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

(5) [8 Punkte] Reelle Funktionen in mehreren Variablen.

(a) Man gebe eine hinreichende Bedingung dafür an, dass die Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) ein lokales Extremum besitzt.

(b) Man formuliere, wie man die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) in Richtung eines normierten Richtungsvektors $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ermitteln kann.

(c) Wie kann man feststellen, an welchen Stellen eine Funktion $y(x)$, welche die Gleichung $f(x,y(x)) = 0$ erfüllt, dadurch lokal eindeutig bestimmt ist, d.h., die Gleichung eindeutig nach $y(x)$ auflösbar ist?