Runde 2, Beispiel 13

LVA 118.181, Übungsrunde 2, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 27.10.2006

1 Angabe

Man löse das Anfangswertproblem $y(1) = 1$ für folgende Ähnlichkeitsdifferentialgleichung:

$$y' = \frac{y(y+z)}{x^2}$$

2 Theoretische Grundlagen: Bernoulli-Differentialgleichung

Die Bernoulli-Differentialgleichung hat die Form (stetige Funktionen a,b, $\alpha \neq 0, 1$):

$$y'(x) + a(x) \cdot y = b(x) \cdot y^{\alpha}$$

Sie geht nach der Multiplikation mit $(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$ und der Substitution

$$\eta(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

wegen $\eta' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$ inf folgende lineare Differentialgleichung über:

$$\eta' + (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot \eta = (1-\alpha) \cdot b(x)$$

Die allegemeine Lösung $\eta = \eta(x)$ ist zu bestimmen und die Substitution mittels

$$y(x) = \eta(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3 Lösung des Beispiels

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{yx}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

$$v(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y = xv \qquad \Rightarrow \qquad y' = v + xv'$$

$$v + xv' = v^2 + v \qquad \Rightarrow \qquad v' = \frac{1}{x}v^2$$

$$u(x) = v^{-1}\frac{1}{x}$$

$$u' = -\frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad u(x) = -\ln|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad v(x) = -\frac{1}{\ln|x| + C}$$

$$y(x) = -\frac{x}{\ln|x| + C}, \qquad y(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = -1$$

$$\mathbf{y(x) = -\frac{x}{\ln|x| - 1}}$$