

2. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung SS2023

Gernot Salzer, Marion Scholz

11. Juni 2023

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei Σ das Alphabet $\{d, m, n, t, u\}$ und L die Menge aller Wörter über Σ , die entweder mit **mut** oder **mund** enden. Beispiele für solche Wörter sind **mut** und **mund** selber, aber auch die Wörter **numut** und **mmund** liegen in L .

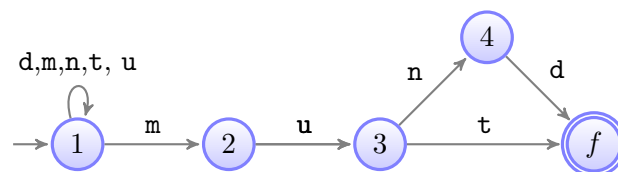
- (a) Geben Sie eine POSIX Extended Regular Expression an, die die Sprache L beschreibt.
- (b) Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten an, der die Sprache L akzeptiert. Der Automat soll der Definition der Sprache direkt entsprechen, sodass die Korrektheit der Modellierung unmittelbar einsichtig ist.
- (c) Konstruieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen Determinisierungsverfahrens zu Ihrem nichtdeterministischen Automaten einen äquivalenten deterministischen.

Lösung

- (a) $[dmntu]^*(mut|mund)$ oder $\wedge[dmntu]^*(mut|mund)\$$ (falls die Zeichenkette die gesamte Zeile einnehmen soll)

Die Darstellung ist nicht eindeutig, etwa stellt der Ausdruck $(d|m|n|t|u)^*mu(t|nd)$ dieselbe Sprache dar.

- (b) Ein indeterministischer Automat, der diese Sprache darstellt, ist der folgende:



- (c) Wir stellen die Übergangsfunktion als Tabelle dar, da diese besser als Ausgangsbasis für die Determinisierung geeignet ist. (Genauer: Wir bestimmen das Ergebnis der erweiterten Übergangsfunktion δ^* für jeden Zustand und jedes Eingabesymbol. Wenn es ε -Übergänge gibt, müssen auch längere Pfade betrachtet werden.)

δ^*	d	m	n	t	u
1	{1}	{1, 2}	{1}	{1}	{1}
2	{}	{}	{}	{}	{3}
3	{}	{}	{4}	{f}	{}
4	{f}	{}	{}	{}	{}
f	{}	{}	{}	{}	{}

Einen deterministischen Automaten erhalten wir, indem wir den indeterministischen Automaten simulieren. Ein Zustand des deterministischen Automaten repräsentiert dabei jene Zustände des indeterministischen, in denen sich dieser zu diesem Zeitpunkt befinden kann. Der Startzustand wird mit {1} bezeichnet, da sich der indeterministische Automat zu Beginn im Zustand 1 (und nur in diesem) befindet. Von diesem Zustand ausgehend erstellen wir zeilenweise die Tabelle für die Übergangsfunktion des deterministischen Automaten.

$\hat{\delta}$	d	m	n	t	u
{1}	{1}	{1, 2}	{1}	{1}	{1}
{1, 2}	{1}	{1, 2}	{1}	{1}	{1, 3}
{1, 3}	{1}	{1, 2}	{1, 4}	{1, f}	{1}
{1, 4}	{1, f}	{1, 2}	{1}	{1}	{1}
{1, f}	{1}	{1, 2}	{1}	{1}	{1}

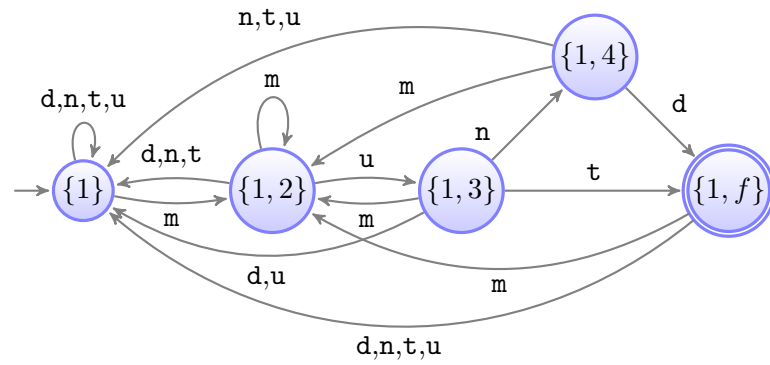
Jene Zustände, die einer Situation entsprechen, in der der indeterministische Automat einen Endzustand erreicht hat, sind die Endzustände des deterministischen Automaten; in diesem Beispiel ist das der Zustand {1, f}. Der Automat wird somit durch das Tupel $\langle \hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \{1\}, \hat{F} \rangle$ beschrieben, wobei

$$\Sigma = \{d, m, n, t, u\}$$

$$\hat{F} = \{\{1, f\}\}$$

$$\hat{Q} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\} \cup \hat{F}$$

Graphische Darstellung des deterministischen Automaten:



Aufgabe 2 (2 Punkte)

Geben Sie endliche Automaten an, die dieselben Sprachen beschreiben wie die folgenden regulären Ausdrücke in algebraischer Notation.

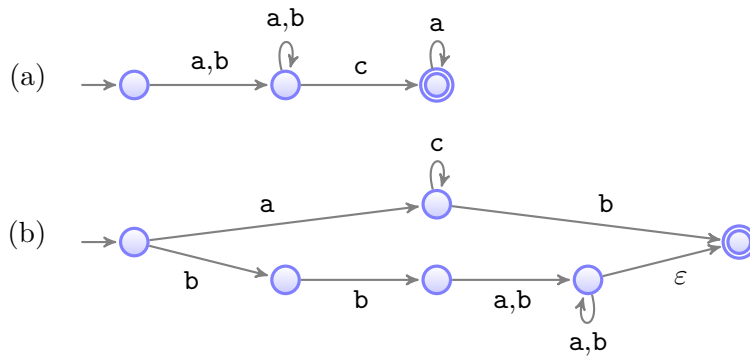
(a) $(a + b)^+ ca^*$

(b) $ac^*b + bb(a + b)^+$

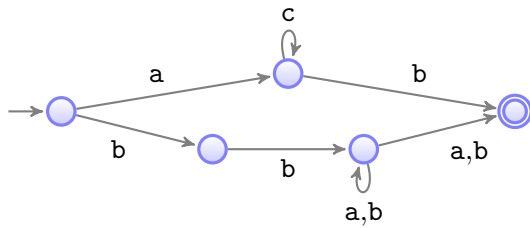
Genaugenommen ist der Ausdruck $(a + b)^+$ syntaktisch nicht korrekt, da die Definition der regulären Ausdrücke in algebraischer Notation nur den Stern-, nicht aber den Plus-Operator berücksichtigt. Betrachten Sie $(a + b)^+$ als Kurzschreibweise für $(a + b)(a + b)^*$.

Lösung

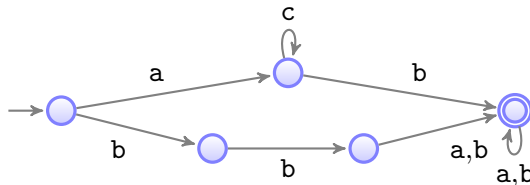
Die gesuchten Automaten können mit dem allgemeinen Verfahren konstruiert werden, enthalten dann aber in der Regel mehr Zustände und ε -Übergänge als notwendig.



oder auch



Falsch hingegen wäre



da dieser Automat z.B. auch das Wort *aba* akzeptiert. Der reguläre Ausdruck legt aber fest, dass Wörter, die mit *a* beginnen, mit *b* enden müssen. Um sicherzustellen, dass die *a,b*-Schleife nur für Wörter gemäß zweitem Teilausdruck durchlaufen werden kann, besitzt der erste Automat oben einen ε -Übergang, wohingegen die Schleife im zweiten Automaten gemäß der Äquivalenz $r \cdot r^* = r^* \cdot r$ zum vorhergehenden Zustand verschoben wurde.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

- (a) $\{xy, z\} \cdot \{\} \cdot \{zx\}$
- (b) $\{x, zy\} \cup \{\}^* \cup \{xz\}$
- (c) $\{x\}^* \cdot (\{x\} \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{y\}$
- (d) $\{z\}^* \cdot (\{z\}^+ \cdot \{z\}^*)$
- (e) $((\{x, z\} \cup \{y\}) \cdot (\{\varepsilon, zz, yy\} \cup \{\varepsilon\})) \cup \{x, y\}$

Lösung

- (a) $\{xy, z\} \cdot \{\} \cdot \{zx\} \quad L \cdot \{\} = \{\}$
 $= \{\} \cdot \{zx\} \quad \{\} \cdot L = \{\}$
 $= \{\}$
- (b) $\{x, zy\} \cup \{\}^* \cup \{xz\} \quad \{\}^* = \{\varepsilon\}$
 $= \{x, zy\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{xz\} \quad \text{Mengenvereinigung}$
 $= \{\varepsilon, x, xz, zy\}$

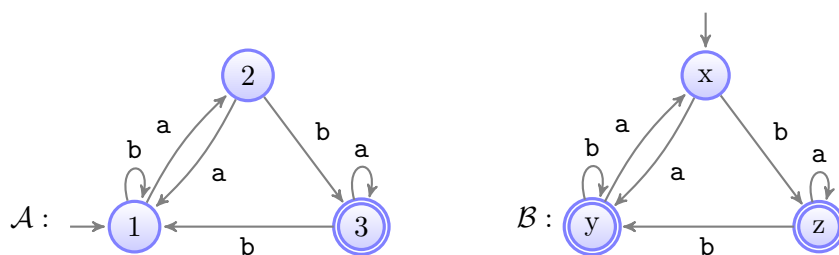
(c) $\{x\}^* \cdot (\{x\} \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{y\}$ $L \cdot (L' \cup L'') = L \cdot L' \cup L \cdot L''$
 $= (\{x\}^* \cdot \{x\} \cup \{x\}^* \cdot \{\varepsilon\}) \cdot \{y\}$ $L^* \cdot L = L^+$
 $= (\{x\}^+ \cup \{x\}^* \cdot \{\varepsilon\}) \cdot \{y\}$ $L \cdot \{\varepsilon\} = L$
 $= (\{x\}^+ \cup \{x\}^*) \cdot \{y\}$ $L \cup L' = L'$, wenn $L \subseteq L'$; es gilt $\{x\}^+ \subseteq \{x\}^*$.
 $= \{x\}^* \cdot \{y\}$

(d) $\{z\}^* \cdot (\{z\}^+ \cdot \{z\}^*)$ $L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$
 $= \{z\}^* \cdot (\{z\}^+ \cdot (\{\varepsilon\} \cup \{z\}^+))$ $L \cdot (L' \cup L'') = L \cdot L' \cup L \cdot L''$
 $= \{z\}^* \cdot (\{z\}^+ \cdot \{\varepsilon\} \cup (\{z\}^+)^2)$ $L \cdot \{\varepsilon\} = L$
 $= \{z\}^* \cdot (\{z\}^+ \cup (\{z\}^+)^2)$ $L \cup L' = L$, wenn $L' \subseteq L$; es gilt $(\{z\}^+)^2 \subseteq \{z\}^+$.
 $= \{z\}^* \cdot \{z\}^+$ $L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$
 $= (\{\varepsilon\} \cup \{z\}^+) \cdot \{z\}^+$ $(L' \cup L'') \cdot L = L' \cdot L \cup L'' \cdot L$
 $= \{\varepsilon\} \cdot \{z\}^+ \cup (\{z\}^+)^2$ $\{\varepsilon\} \cdot L = L$
 $= \{z\}^+ \cup (\{z\}^+)^2$ $L \cup L' = L$, wenn $L' \subseteq L$; es gilt $(\{z\}^+)^2 \subseteq \{z\}^+$.
 $= \{z\}^+$

(e) $(\{x, z\} \cup \{y\}) \cdot (\{\varepsilon, zz, yy\} \cup \{\varepsilon\}) \cup \{x, y\}$
 $= (\{x, y, z\} \cdot (\{\varepsilon, zz, yy\} \cup \{\varepsilon\})) \cup \{x, y\}$
 $= \{x, y, z\} \cdot \{\varepsilon, zz, yy\} \cup \{x, y\}$
 $= \{x, y, z, xyy, yyy, zyy, xzz, yzz, zzz\} \cup \{x, y\}$
 $= \{x, y, z, xyy, yyy, zyy, xzz, yzz, zzz\}$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben seien die folgenden beiden deterministischen endlichen Automaten.



Konstruieren Sie einen endlichen Automaten \mathcal{C} , der genau jene Wörter akzeptiert, die Automaten \mathcal{A} aber nicht Automaten \mathcal{B} akzeptiert; es soll also $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{B})$ gelten. Verwenden Sie dazu die Methode, die in der Übungsstunde am 11.5.2023 bzw. im 2. Übungsblatt des Vorjahres beschrieben wurde. Zu beidem finden Sie die entsprechenden Unterlagen in TUWEL, einmal unter der Überschrift *LVA-Inhalte Teil 1B* und einmal beim *2. Übungsblatt*.

Lösung

Der gesuchte Automat \mathcal{C} simuliert die beiden gegebenen Automaten \mathcal{A} und \mathcal{B} . \mathcal{C} befindet sich im Zustand pq , wenn sich \mathcal{A} im Zustand p und \mathcal{B} im Zustand q befindet. Der Startzustand von \mathcal{C} ist $1x$, da sich \mathcal{A} anfangs im Zustand 1 und \mathcal{B} im Zustand x befindet. Ausgehend von diesem Zustand verfolgen wir die Zustandsänderungen der gegebenen Automaten für jedes der Eingabesymbole.

δ	a	b
1x	2y	1z
2y	1x	3y
1z	2z	1y
3y	3x	1y
2z	1z	3y
1y	2x	1y
3x	3y	1z
2x	1y	3z
3z	3z	1y

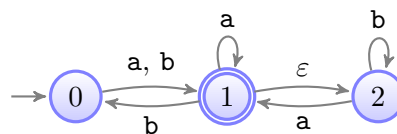
Automat \mathcal{C} soll genau jene Wörter akzeptieren, die Automat \mathcal{A} aber nicht Automat \mathcal{B} akzeptiert. Das ist für jene Wörter der Fall, bei denen sich \mathcal{A} im Zustand 3 befindet (der einzige Endzustand) und \mathcal{B} im Zustand x (dem einzigen Nicht-Endzustand). Der einzige Endzustand von \mathcal{C} ist somit $3x$. Automat \mathcal{C} wird daher durch das Tupel

$$\langle \{1x, \dots, 3z\}, \{a, b\}, \delta, 1x, \{3x\} \rangle$$

beschrieben.

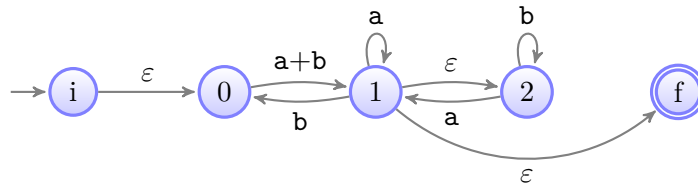
Aufgabe 5 (3 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem endlichen Automaten einen regulären Ausdruck. Orientieren Sie sich am Algorithmus, der in der Vorlesung besprochen wurde und geben Sie den Automaten nach jeder Zustandselimination an.



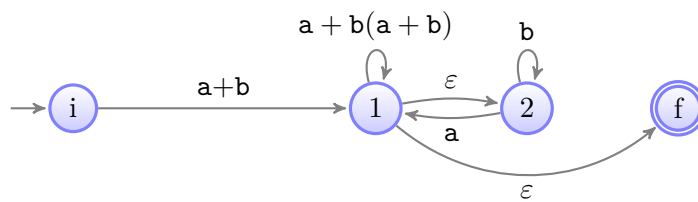
Lösung

- Neuer Anfangs- und Endzustand:

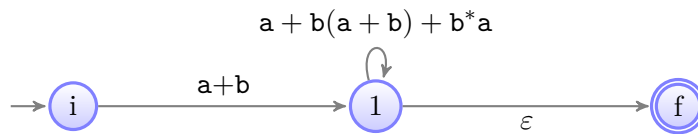


Bei der Elimination von Zuständen bevorzugen wir Zustände ohne Schleifen bzw. Zustände mit wenigen Übergängen, um die Anzahl der entstehenden Ausdrücke niedrig und die Ausdrücke selber so einfach wie möglich zu halten. Wir entscheiden uns für die Reihenfolge 0, 2 und 1. Die anderen Reihenfolgen liefern äquivalente Ausdrücke.

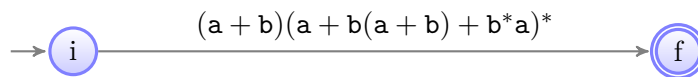
- Elimination von Zustand 0:



- Elimination von Zustand 2:



- Elimination von Zustand 1:



Die Sprache des ursprünglichen Automaten wird also durch den Ausdruck

$$(a + b)(a + b(a + b) + b^*a)^*$$

beschrieben. Er lässt sich noch geringfügig vereinfachen:

$$\begin{aligned} &= (a + b)(a + ba + bb + b^*a)^* \\ &= (a + b)(bb + b^*a)^* \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Die Modellnummer eines Panasonic-Geräts gibt Aufschluss über dessen grundlegende Kenndaten. Für Fernsehgeräte besitzt sie folgenden Aufbau:¹



Beschreiben Sie den Aufbau derartiger Modellnummern für Fernseher mit den folgenden Methoden. Treffen Sie sinnvolle Annahmen, wenn Ihnen Informationen fehlen.

- Geben Sie einen regulären Ausdruck in algebraischer Notation an.
- Geben Sie einen regulären Ausdruck in POSIX-Notation an, der alle Zeilen beschreibt, die *ausschließlich* eine derartige Modellnummer-Zeile enthalten.
- Zeichnen Sie das Syntaxdiagramm, das Ihrem regulären Ausdruck aus Teil a entspricht.

Lösung

- (a) Eine derartige Reifenbeschriftung kann durch den Ausdruck

$$"T" \text{ Region } "-" \text{ Größe Jahr Auflösung Land Serie Modell}$$

beschrieben werden, wobei wir folgende Abkürzungen verwenden:

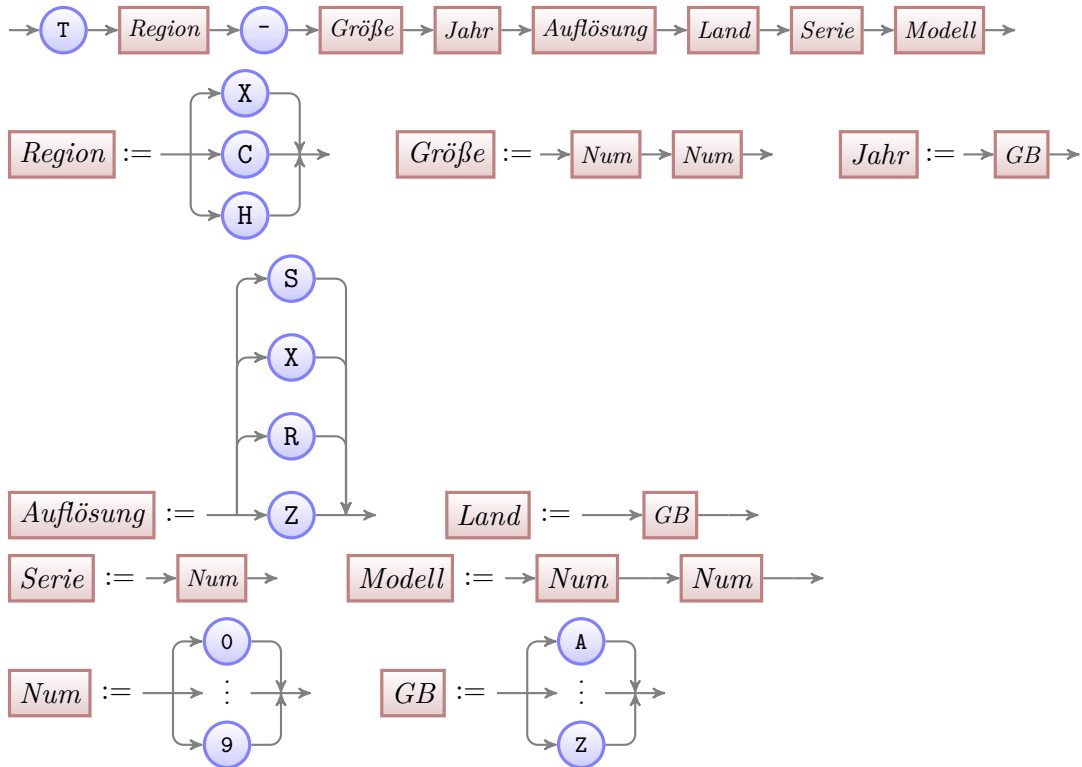
$$\begin{aligned} \textit{Region} &:= ("X" + "C" + "H") \\ \textit{Größe} &:= \textit{Num Num} \\ \textit{Jahr} &:= \textit{GB} \\ \textit{Auflösung} &:= ("S" + "X" + "R" + "Z") \\ \textit{Land} &:= \textit{GB} \\ \textit{Serie} &:= \textit{Num} \\ \textit{Modell} &:= \textit{Num Num} \\ \textit{Num} &:= ("0" + \dots + "9") \\ \textit{GB} &:= ("A" + \dots + "Z") \end{aligned}$$

¹<https://de.tab-tv.com/?p=12177>

Wir schreiben Symbole des Alphabets unter Anführungszeichen, um sie von algebraischen Symbolen (Metanotation) zu unterscheiden.

(b) $\sim T[XCH] - [0-9] \{2\} [A-Z] [SXRZ] [A-Z] [0-9] \{3\} \$$

(c) Syntaxdiagramm:



Aufgabe 7 (7 Punkte)

Weit, weit weg, tief drinnen im düsteren Hexenwald, gibt es ein kleines, dunkles Loch mit stinkendem, blubberndem Schlamm. Hexe Kniesebein badet jeden Morgen in diesem Loch und hat sich zahlreiche Spitznamen dafür ausgedacht. Sie nennt es liebevoll „mein kleines bluber-Loch“, oder „du schöner blubberblubberblubbernderbluber“. Einem fleißigen Studierenden gelingt es, die blubber-Wörter durch die Grammatik $G = \langle N, T, P, A \rangle$ zu beschreiben, wobei

$$\begin{aligned}
 N &= \{A, B, C, D, E\} \\
 T &= \{\text{blub}, \text{ber}, \text{er}, \text{nder}\} \\
 P &= \{A \rightarrow \text{blub } B \\
 &\quad B \rightarrow \text{ber } C \mid \text{er} \\
 &\quad C \rightarrow \text{blub } B \mid \text{nder } D \\
 &\quad D \rightarrow \text{blub } E \\
 &\quad E \rightarrow \text{ber } D \mid \text{er} \}
 \end{aligned}$$

- (a) Überprüfen Sie für die nachfolgenden Wörter, ob sie in der von der Grammatik G spezifizierten Sprache $\mathcal{L}(G)$ liegen. Falls ja, geben Sie eine Parallelableitung an. Falls nein, argumentieren Sie, warum nicht.
- (1) blubbernderbluber
 - (2) blubbernderblubber
 - (3) blubbernderblubbernderbluber
- (b) Sind folgende Aussagen über die Sprache $\mathcal{L}(G)$ korrekt? Wenn ja, warum? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel!
- (1) Jedes Wort endet mit **bluber**.
 - (2) Die Anzahl der **blubber** vor bzw. nach **nder** im Wort sind gleich.
 - (3) Jedes Wort beginnt mit **blub**.
- (c) Ist es möglich, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ auch durch einen endlichen Automaten zu beschreiben? Falls ja, geben Sie einen derartigen Automaten an. Falls nein, begründen Sie, warum das nicht geht.

Lösung

- (a) (1) Ja, das Wort liegt in der Sprache $\mathcal{L}(G)$:

$$\begin{aligned}
 A &\Rightarrow_P \text{blub } B \\
 &\Rightarrow_P \text{blub } \text{ber } C \\
 &\Rightarrow_P \text{blub } \text{ber } \text{nder } D \\
 &\Rightarrow_P \text{blub } \text{ber } \text{nder } \text{blub } E \\
 &\Rightarrow_P \text{blub } \text{ber } \text{nder } \text{blub } \text{er}
 \end{aligned}$$

- (2) Das Wort ist nicht Teil der Sprache $\mathcal{L}(G)$, da jedes Wort dieser Sprache mit **bluber** enden muss. Das lässt sich folgendermaßen sehen.

Jede Ableitung endet durch Anwendung der Produktion $B \rightarrow \text{er}$ oder $E \rightarrow \text{er}$. Die Nonterminale B und E treten aber immer nur unmittelbar nach der Symbolfolge **blub** auf. Somit endet jede Ableitung auf eine der folgenden Arten:

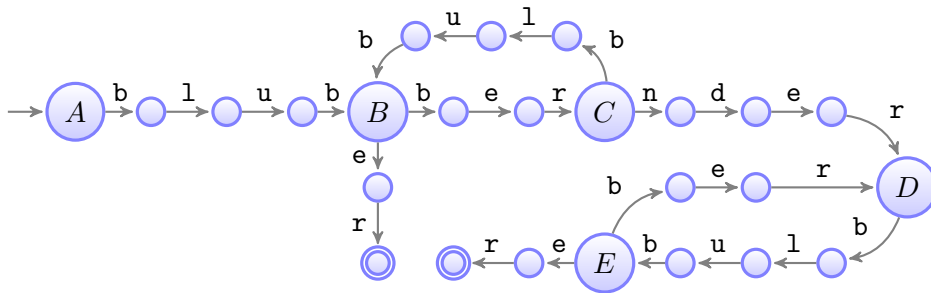
$$\begin{aligned}
 \dots A &\Rightarrow \dots \text{blub } B \Rightarrow \dots \text{bluber} \\
 \dots C &\Rightarrow \dots \text{blub } B \Rightarrow \dots \text{bluber} \\
 \dots D &\Rightarrow \dots \text{blub } E \Rightarrow \dots \text{bluber}
 \end{aligned}$$

- (3) Das Wort ist nicht Teil der Sprache $\mathcal{L}(G)$, da es zwei **nder** enthält, jedes Wort der Sprache aber höchstens ein **nder** besitzt. Das lässt sich folgendermaßen argumentieren.

Zunächst gilt, dass **nder** nur durch die Produktion $C \rightarrow \mathbf{nder} D$ eingeführt werden kann. Für D gibt es aber nur die Produktion $D \rightarrow \mathbf{blub}E$, für E nur die Produktionen $E \rightarrow \mathbf{ber}D$ und $E \rightarrow \mathbf{er}$; das heißt, dass durch D kein weiteres **nder** eingeführt werden kann. Da nach jedem Ableitungsschritt höchstens ein Nonterminal im Ausdruck vorkommt, daher insbesondere höchstens ein C , enthält das erzeugte Wort der Sprache maximal ein **nder**.

- (b) (1) Richtig. Argumentation siehe die Lösung zu Aufgabe a2.
 (2) Falsch. Ein Gegenbeispiel ist das Wort aus Aufgabe a1, das in der Sprache liegt und ein **blubber** vor, aber kein **blubber** nach **nder** aufweist.
 (3) Richtig. Die einzige Produktion für das Startsymbol A ersetzt es durch **blub** B , daher fängt jedes Wort der Sprache mit **blub** an.
- (c) Ja, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ kann auch durch einen endlichen Automaten beschrieben werden.

Im Wesentlichen werden die Nonterminale zu den Zuständen des Automaten. Weiters müssen wir, da das Alphabet aus einzelnen Buchstaben besteht und Übergänge nur für einzelne Symbole definiert sind, die Silben mit Hilfe von zusätzlichen Zuständen in einzelne Buchstaben zerlegen.



Aufgabe 8 (3 Punkte)

Seien die folgenden Mengen von Variablen-, Funktions- und Prädikatsymbolen gegeben.

$$\mathcal{V} = \{x, y, z\}$$

$$\mathcal{F} = \{max/0, liz/0\}$$

$$\mathcal{P} = \{Klein/1, Groß/1, Verrückt/1, Mag/2\}$$

- (a) Geben Sie eine strukturierte kontextfreie Grammatik für die Sprache der prädikatenlogischen Formeln über diesen Symbolmengen an. Beispiele für Wörter, die in dieser Formelsprache liegen:

$$\forall x (Groß(x) \supset \exists y (Klein(y) \wedge Mag(y, x)))$$

$$\exists x (\neg Mag(x, x) \wedge Mag(x, max))$$

- (b) Lässt sich die Sprache der prädikatenlogischen Formeln über diesem Alphabet auch mit Hilfe eines regulären Ausdrucks beschreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

- (a) Die Sprache der prädikatenlogischen Formeln wurde in der Vorlesung mittels einer induktiven Definition eingeführt. Wir übersetzen die Abschlusseigenschaften der induktiven Definition in die Produktionen einer Grammatik. Diese wird durch das Tupel $\langle V, T, P, \text{Formel} \rangle$ beschrieben, wobei

$$\begin{aligned}
 V &= \{ \text{Formel}, \text{Op}, \text{Qu}, \text{Term}, \text{PS}_1, \text{PS}_2, \text{FS}_0, \text{Var} \} , \\
 T &= \{ "(", ")", \dots \text{alle Zeichen zwischen Anführungszeichen} \dots, "x", "y", "z" \} , \\
 P &= \{ \text{Formel} \rightarrow \text{PS}_1 "(\text{Term})" \mid \text{PS}_2 "(\text{Term}, \text{Term})" \mid "\top" \mid "\perp" \\
 &\quad \mid "\neg" \text{Formel} \mid "(\text{Formel Op Formel})" \\
 &\quad \mid \text{Qu Var Formel} , \\
 \text{Op} &\rightarrow "\wedge" \mid "\uparrow" \mid "\vee" \mid "\downarrow" \mid "\equiv" \mid "\neq" \mid "\supset" \mid "\subset" , \\
 \text{Qu} &\rightarrow "\forall" \mid "\exists" , \\
 \text{Term} &\rightarrow \text{Var} \mid \text{FS}_0 , \\
 \text{PS}_1 &\rightarrow "\text{Klein}" \mid "\text{Groß}" \mid "\text{Verrückt}" , \\
 \text{PS}_2 &\rightarrow "\text{Mag}" , \\
 \text{FS}_0 &\rightarrow "\text{max}" \mid "\text{liz}" , \\
 \text{Var} &\rightarrow "x" \mid "y" \mid "z" \} .
 \end{aligned}$$

- (b) Nein, diese Sprache lässt sich nicht durch einen regulären Ausdruck beschreiben. Angenommen wir könnten es. Da reguläre Ausdrücke und endliche Automaten äquivalent sind,² müssten wir für die Sprache auch einen endlichen Automaten angeben können. Durch die Produktion $\text{Formel} \rightarrow "(\text{Formel Op Formel})"$ ist es aber möglich, beliebig tief geschachtelte geklammerte Formeln zu konstruieren, wie beispielsweise

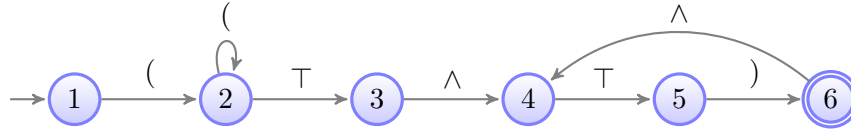
$$\begin{aligned}
 &(\top \wedge \top) \\
 &((\top \wedge \top) \wedge \top) \\
 &(((\top \wedge \top) \wedge \top) \wedge \top) \\
 &((((\top \wedge \top) \wedge \top) \wedge \top) \wedge \top) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Diese Wörter bestehen aus n öffnenden Klammern, dem Symbol " \top " und n Kopien des Wortes " $\wedge \top$ ". Ein endlicher Automat müsste sich, um die richtige Zahl an schließenden Klammern sicherzustellen, die Zahl der öffnenden Klammern merken. Da die Zahl der Zustände beschränkt ist, muss der Automat bei zu vielen öffnenden Klammern einen der bisherigen Zustände wiederverwenden. Dadurch würde eine

²Das heißt: Wenn eine Sprache durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann, dann auch durch einen endlichen Automaten, und umgekehrt.

Schleife entstehen und der Automat würde auch Wörter akzeptieren, die nicht richtig geklammert sind. Da es keinen endlichen Automaten für die Sprache gibt, ist sie nicht regulär.

Betrachten wir zur Illustration den folgenden Automaten.



Dieser Automat akzeptiert alle oben angeführten Wörter. Allerdings akzeptiert er auch Wörter, die nicht in der Sprache liegen, wie etwa $((((T \wedge T))$. Das liegt daran, dass die Anzahl der Schleifendurchläufe bei Zustand 2 unabhängig von der Anzahl der Durchläufe der Schleife 6-4-5-6 ist. Um diese beiden zu koppeln, müsste jede öffnende Klammer in einen neuen Zustand führen, der die Zahl der bisherigen Klammern repräsentiert. Da sich diese Zahl nicht beschränken lässt, die Zahl der Zustände eines endlichen Automaten aber beschränkt ist, akzeptiert jeder derartige Automat entweder nicht alle erforderlichen Wörter, oder er enthält mindestens eine Schleife und akzeptiert dadurch zu viele Wörter.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Wählen Sie geeignete Prädikaten- und Konstantensymbole und übersetzen Sie die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln.

- (a) Hans ist der Vater von Franz.
- (b) Franz ist der Vater von jemandem.
- (c) Wenn Hans der Vater von Franz ist, ist Franz nicht der Vater von Hans.
- (d) Zwei unterschiedliche Personen sind genau dann Geschwister, wenn sie einen gemeinsamen Vater haben.
- (e) Eine Person ist der Großvater von jemandem, wenn er der Vater dessen Vaters ist.

Lösung

Seien $Vater/2$, $Geschwister/2$, $Großvater/2$ und $=/2$ Prädikatensymbole sowie $hans$ und $franz$ Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

- $Vater(x, y)$... x ist der Vater von y
- $Geschwister(x, y)$... x und y sind Geschwister
- $Großvater(x, y)$... x ist der Großvater von y
- $=(x, y)$... x ist identisch mit y
- $hans$... Hans
- $franz$... Franz

- (a) $Vater(hans, franz)$
- (b) $\exists x Vater(franz, x)$
- (c) $Vater(hans, franz) \supset \neg Vater(franz, hans)$
- (d) $\forall x \forall y (Geschwister(x, y) \equiv \exists z (Vater(z, x) \wedge Vater(z, y) \wedge \neg = (x, y)))$
- (e) $\forall x \forall y (Großvater(x, y) \subset \exists z (Vater(x, z) \wedge Vater(z, y)))$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Seien *Besitzt*/2, *Zauberer*/1, *Magisch*/1 und *Waffe*/1 Prädikatensymbole sowie *schwert* und *stab* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

<i>Zauberer</i> (x) ... x ist ein Zauberer	<i>Besitzt</i> (x, y) ... x besitzt y
<i>Magisch</i> (x) ... x ist magisch	<i>schwert</i> ... Schwert
<i>Waffe</i> (x) ... x ist eine Waffe	<i>stab</i> ... Zauberstab

Sei weiters folgende Interpretation gegeben:

$$\mathcal{U} = \{\text{Draco, Harry, Hermine, Ron, Zauberstab, Drache, Kessel, Teppich, Schwert, Pistole, Zaubertrank}\}$$

$$I(\text{Zauberer}) = \{\text{Harry, Hermine, Ron}\}$$

$$I(\text{Magisch}) = \{\text{Zauberstab, Drache, Kessel, Teppich}\}$$

$$I(\text{Waffe}) = \{\text{Zauberstab, Drache, Schwert, Pistole, Zaubertrank}\}$$

$$I(\text{Besitzt}) = \{(\text{Harry, Drache}), (\text{Harry, Schwert}), (\text{Harry, Zauberstab}), (\text{Harry, Kessel}), (\text{Harry, Teppich}), (\text{Draco, Zaubertrank}), (\text{Draco, Drache}), (\text{Hermine, Drache}), (\text{Hermine, Zauberstab}), (\text{Hermine, Schwert}), (\text{Ron, Kessel}), (\text{Ron, Drache}), (\text{Ron, Zauberstab})\}$$

$$I(\text{schwert}) = \text{Schwert} \quad I(\text{stab}) = \text{Zauberstab} \quad I(\text{drache}) = \text{Drache}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

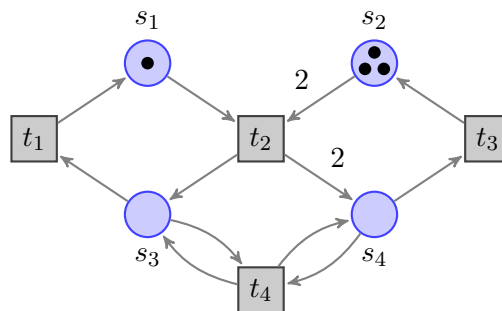
- (a) $\exists x (Zauberer(x) \wedge \forall y (Magisch(y) \supset Besitzt(x, y)))$
- (b) $\forall x (Zauberer(x) \wedge Besitzt(x, stab))$
- (c) $\exists x (Zauberer(x) \wedge Besitzt(x, drache) \wedge \neg Besitzt(x, schwert))$
- (d) $\forall x (Besitzt(x, stab) \vee Besitzt(x, drache))$

Lösung

- (a) Übersetzung: Es gibt Zauberer, die alles Magische besitzen.
Diese Aussage ist wahr, da Harry ein Zauberer ist ($\text{Harry} \in I(\text{Zauberer})$) und alles Magische besitzt ($(\text{Harry}, x) \in I(\text{Besitzt})$ für alle $x \in I(\text{Magisch})$).
- (b) Übersetzung: Jeder/Alles ist ein Zauberer und besitzt einen Zauberstab.
Diese Aussage ist falsch, da etwa der Drache kein Zauberer ist.
- (c) Übersetzung: Es gibt Zauberer, die einen Drachen aber kein Schwert besitzt.
Diese Aussage ist wahr, da Ron ein Zauberer ist ($\text{Ron} \in I(\text{Zauberer})$), einen Drachen besitzt ($(\text{Ron}, \text{Drache}) \in I(\text{Besitzt})$), aber kein Schwert ($(\text{Ron}, \text{Schwert}) \notin I(\text{Besitzt})$).
- (d) Übersetzung: Jeder/Alles besitzt einen Zauberstab oder einen Drachen.
Diese Aussage ist falsch, da etwa der Kessel weder Zauberstab noch Drachen besitzt ($(\text{Kessel}, \text{Zauberstab}) \notin I(\text{Besitzt})$ und $(\text{Kessel}, \text{Drache}) \notin I(\text{Besitzt})$).

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung.



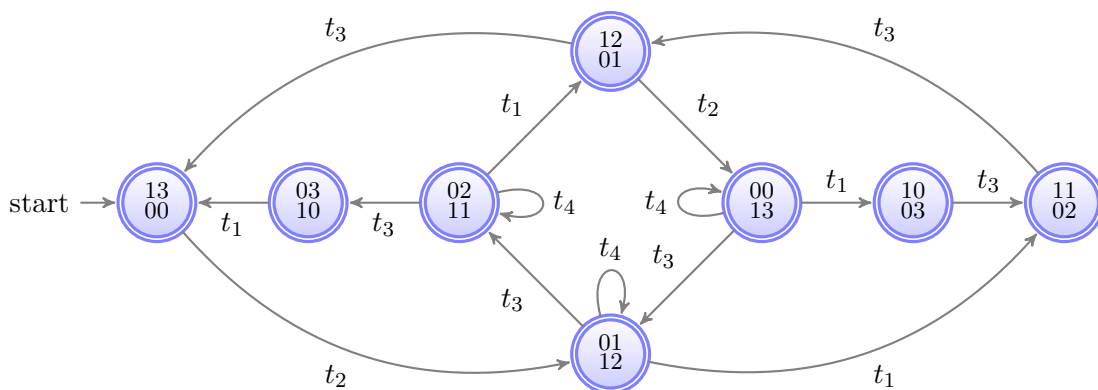
Fassen Sie die Bezeichnungen der Transitionen als Alphabet auf und die Markierungen (also die jeweiligen Belegungen der Stellen mit Marken) als Zustände.

- (a) Beschreiben Sie die möglichen Reihenfolgen, in der die Transitionen feuern und die Markierungen auftreten können, mit Hilfe eines endlichen Automaten. Der Automat soll also Wörter wie $t_2t_4t_3$ akzeptieren, weil die Transitionen in dieser Reihenfolge feuern können, nicht aber t_1t_2 .
- (b) Wir modifizieren das Petrinetz, indem wir den Zweier von der Kante zwischen s_2 und t_2 entfernen. Erklären Sie, warum es nun nicht mehr möglich ist, die Abfolgen der Transitionen mit einem endlichen Automaten zu beschreiben.

Lösung

- (a) Die Abläufe im Petrinetz lassen sich durch einen Automaten mit (in diesem Fall) endlich vielen Zuständen beschreiben. Die Markierungen bilden die Zustände, die Transitionen das Alphabet. Erhält man aus einer Markierung m durch Feuern einer Transition t eine Markierung m' , dann gibt es einen Übergang beschriftet mit t vom Zustand für m zu jenem für m' .

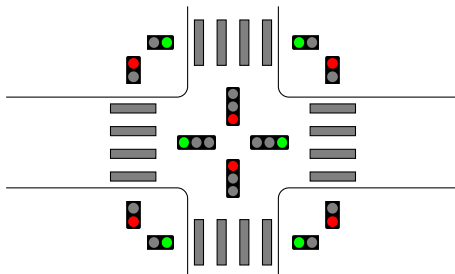
Wir stellen jede Markierung durch vier Zahlen $\begin{smallmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{smallmatrix}$ dar, wobei n_i die Anzahl der Marken in der Stelle s_i angibt. Die endlichen Reihenfolgen, in denen die Transitionen feuern können, entsprechen der Sprache des folgenden Automaten.



- (b) Wenn wir den 2er von der Kante $s_2 - t_2$ entfernen, konsumiert t_2 nur mehr eine Marke von s_2 , generiert aber zwei Marken in s_4 . Damit kann die Markenzahl im Petri-Netz beliebig groß werden, das Petri-Netz kann eine unbeschränkt große Zahl an Zuständen annehmen. Daher ist ein endlicher Automat (das Attribut „endlich“ bezieht sich ja auf die Zahl der Zustände) nicht mehr in der Lage, dieses System zu modellieren.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Eine kreuzförmige Straßenkreuzung ist mit Fahrzeugampeln (vier Phasen) und Fußgängerampeln (zwei Phasen) für alle Richtungen ausgestattet. Es gibt keine speziellen Ampeln für Abbieger.



Modellieren Sie die Schaltfolgen der Ampeln mit Hilfe eines Petri-Netzes. Geben Sie eine geeignete Anfangsmarkierung an. Geben Sie den Stellen und Transitionen geeignete Bezeichnungen, die ihre Rolle beschreiben.

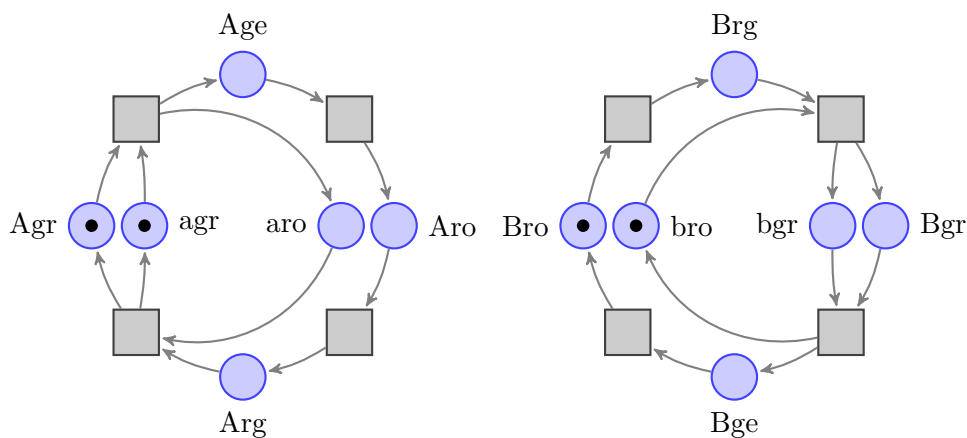
Hinweis: Ampeln, die sich identisch verhalten, können als eine einzige Ampel betrachtet werden.

Lösung

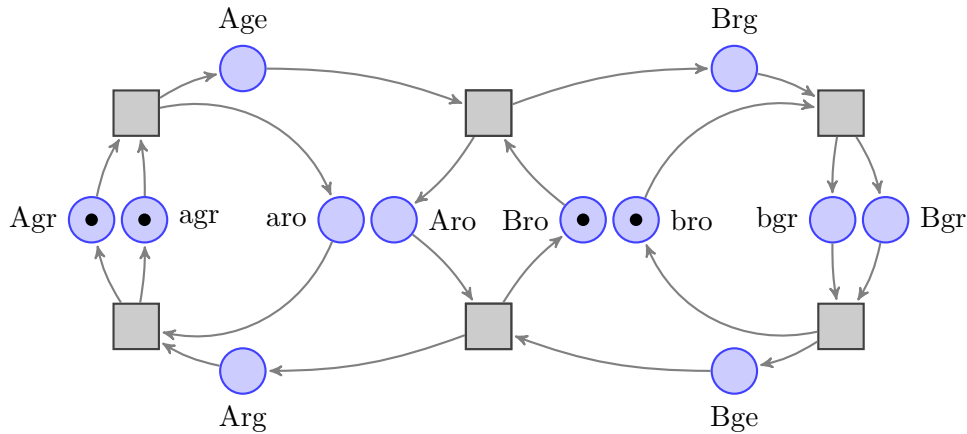
Fahrzeugampeln können vier Phasen durchlaufen, die wir gr (grün), ge (gelb), ro (rot) und rg (rot-gelb) nennen. Analog durchlaufen Fußgängerampeln die Phasen ro und gr. Wir müssen in unserer Modellierung vier Ampeln unterscheiden: zwei Fahrzeugampeln (A und B), die gegengleich geschaltet sind, und zwei Fußgängerampeln (a und b), die jeweils parallel zu den jeweiligen Fahrzeugampeln geschaltet sind. Gegengleich soll hier bedeuten, dass die eine Fahrzeugampel rot ist, während die andere die Nicht-Rot-Phasen durchläuft. Parallel soll bedeuten, dass die Fußgängerampel nur grün ist, wenn die zugehörige Fahrzeugampel grün ist, und rot sonst. In unserer Modellierung werden wir keine überlappenden Rot-Phasen gegengleicher Ampeln vorsehen, und keine unterschiedlichen Grünphasen paralleler Ampeln.

Im Petri-Netz sehen wir eine Stelle für jede Ampel und jede Phase vor. Somit benötigen wir 12 Stellen, die wir Agr, Age, Aro, Arg, agr, aro, Bgr, Bge, Bro, Brg, bgr und bro nennen.

Wenn wir die beiden Ampelpaare A/a und B/b zunächst noch nicht synchronisieren, erhalten wir die folgenden beiden Petri-Netze.



Nun müssen wir noch dafür sorgen, dass immer eine der beiden Ampelpaare rot ist, indem wir die Transitionen zusammenziehen.



Aufgabe 13 (5 Punkte)

Auf Wikipedia ist folgende Definition zu finden:

Eine *links-lineare Grammatik* wird durch ein 4-Tupel $G = (N, \Sigma, P, S)$ beschrieben, wobei

- N und Σ endliche, disjunkte Mengen von Symbolen sind ($N \cap \Sigma = \{\}$),
- S ein Symbol aus N ist ($S \in N$) und
- $P \subseteq N \times (N \cdot \Sigma^* \cup \Sigma^*)$ eine endliche Menge von Paaren ist.

Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt $(x, y) \in P$ wird auch $x \rightarrow y$ geschrieben. Die Notation $x \rightarrow y_1 \mid \dots \mid y_n$ ist eine Abkürzung für die Produktionen $x \rightarrow y_1, \dots, x \rightarrow y_n$.

Seien $u, v \in (N \cup \Sigma)^*$ beliebige Wörter. Das Wort $u y v$ ist aus dem Wort $u x v$ in einem Schritt ableitbar, geschrieben $u x v \Rightarrow u y v$, wenn $x \rightarrow y$ eine Produktion in P ist. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist die Menge $\{w \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow{*} w\}$, wobei $\xRightarrow{*}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von \Rightarrow bezeichnet.³

Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln eine links-lineare Grammatik gemäß der obigen Definition darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort, falls es sich um keine links-lineare Grammatik handelt. Entspricht das Tupel der Definition, geben Sie die Sprache an, die durch die Grammatik generiert wird.

- (a) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xab\}, X)$

³Das heißt, dass $\xRightarrow{*}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \xRightarrow{*} v$.
- Es gilt $u \xRightarrow{*} u$ für alle Wörter $u \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Aus $u \xRightarrow{*} v$ und $v \xRightarrow{*} w$ folgt $u \xRightarrow{*} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\xRightarrow{*}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.

- (b) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}, X)$
- (c) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow abX \mid \varepsilon\}, X)$
- (d) $(\{a\}, \{X, b\}, \{a \rightarrow abX \mid a\}, a)$
- (e) $(\{X, Y\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xa \mid Yb \mid \varepsilon, Y \rightarrow Yb\}, X)$

Lösung

- (a) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xab\}, X)$
Ja, das ist eine links-lineare Grammatik. Sie generiert die Sprache $\{ \}$.
- (b) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}, X)$
Nein, das ist keine links-lineare Grammatik, da die rechte Seite der Produktion $X \rightarrow aXb$ weder mit einem Nonterminal beginnt ($aXb \notin N \cdot \Sigma^*$) noch ausschließlich aus Terminalsymbolen besteht ($aXb \notin \Sigma^*$).
- (c) $(\{X\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow abX \mid \varepsilon\}, X)$
Nein, das ist keine links-lineare Grammatik, da die rechte Seite der Produktion $X \rightarrow abX$ weder mit einem Nonterminal beginnt ($abX \notin N \cdot \Sigma^*$) noch ausschließlich aus Terminalsymbolen besteht ($abX \notin \Sigma^*$).
- (d) $(\{a\}, \{X, b\}, \{a \rightarrow abX \mid a\}, a)$
Ja, das ist eine links-lineare Grammatik. Sie generiert die Sprache $\{ \}$.
- (e) $(\{X, Y\}, \{a, b\}, \{X \rightarrow Xa \mid Yb \mid \varepsilon, Y \rightarrow Yb\}, X)$
Ja, das ist eine links-lineare Grammatik. Sie generiert die Sprache $\{a\}^*$.