Mathematik III

Vorlesung 12, 19.01.2007 (letzte VO)

Markus Nemetz

Jänner 2007

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

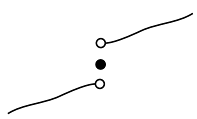
Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
29.01.2007

2 Umkehr- und Eindeutigkeitssatz

Gilz für eine Funktion $f(t)$

- $f(t)$ ist absolut integrierbar
- $f(t$ ist auf endlichen Intervallen stückweise stetig differenzierbar
- $f(t)$ ist Mittelwerteigenschaft $f(t) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$



Dann gilt, dass neben $f(t)$ auch $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ $\mathcal{F}$-transformierbar ist, und es gilt:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(-\omega)\} = \frac{1}{2\pi}(\text{CHW})\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot F(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$$

3 Rechenregeln für die $\mathcal{F}$-Transformation

$f(t)$, $g(t)$ seien absolut integrierbare Funktionen; $F(\omega)$, $G(\omega)$ entsprechende Spektralfunktionen:

- Linearität:
$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\} = alphaF(\omega) + \beta G(\omega)$$

- Streckung:
$$\mathcal{F}\{f(c \cdot t)\} = \frac{1}{|c|}F(\frac{\omega}{c}), \qquad c \neq 0$$

- Verschiebung im Zeitbereich:
$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega}F(\omega), \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich:
$$\mathcal{F}\{e^{i\Omega t}f(t)\} = F(\omega\Omega), \qquad \Omega \in \mathbb{R}$$

- Differentiation im Zeitbereich:
$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$
Voraussetzung; $f(t)$ stetig,$f'(t)\mathcal{F}$-transformierbar

- Differentiation im Frequenzbereich:
$$\mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = i \cdot F'(\omega)$$
Voraussetzung; $t \cdot f(t)$ ist $\mathcal{F}$-transformierbar

- Faltungsprodukt $f(t) \ast g(t)$
$$(f \ast g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

- Faltung:
$$\mathcal{F}\{\{\ast\}\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

- Konjugation:
$$\mathcal{F}\{\overline{f(t)}\} = \mathcal{F}(-\omega)$$

- Symmetrien:
$$\begin{aligned} f(t) = f(-t) \qquad &\Leftrightarrow \qquad F(\omega) = F(-\omega) \\ f(t) = -f(-t) \qquad &\Leftrightarrow \qquad -F(\omega) = F(-\omega) \end{aligned}$$

4 Anwendung der $\mathcal{F}$-Transformation

4.1 Hilfsmittel zum Lösen von DGL

Anmerkung: i.A: ist $\mathcal{L}$-Transformation vorzuziehen. Ein Beispiel von Bedeutung: Lösen bestimmter PDGen, z.B. Wärmeleitungsgleichungen.

4.2 Lösen von Integralgleichungen

Die im Gegensatz zur $\mathcal{L}$-Transformation anmdere Form des Faltungsproduktes ermöglicht die Lösung von Integralen vom Fredholm-Typ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau - \lambda x(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Wenn alle Funktionen absolut integrierbar sind, lautet die Gleichung für die zugehörigen Spektralfunktionen:

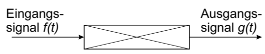
$$K(\omega)X(\omega) - \lambda X(\omega) = F(\omega)$$

Wenn $x(t)$ dem Umkehr und Eindeutigkeitssatz genügt, erhält man die Lösung $X(\omega)$ dieser Gleichung mit der inversen $\mathcal{F}$-Transformation als Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)-\lambda} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

4.3 Nachrichtentechnik

Betrachten idealen 'Tiefpassfilter':



Wirkung eines Filters: Für eine periodisches Eingangssignal wird nur die Amplitude des Signals verändert, aber die Frequenz unverändert gelassen.

Idealer Tiefpassfilter: Alle Frequenzen $|\omega| > \Omega$ werden gesperrt, aber alle Frequenzen $|\omega| \leq \Omega$ werden unverändert durchgelassen,

Betrachten Spektralbereich:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\},\, G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

Wirkung: $G(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega)$. Dabei ist $H(\omega)$ die Übertragungsfunktion für den idealen Tiefpassfilter;

$$H(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases}$$

Betrachte $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$. Im Zeitbereich liefert dies:

$$g(t) = g(t) \, * \, f(t)$$
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot H(\omega) \, \mathrm{d}\, \omega =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} 1 e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\, \omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{it}|_{-\Omega}^{\Omega} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{it} = \frac{1}{2\pi i t}(i(\sin(\Omega t) + \sin(\Omega t)) =$$
$$\frac{\sin(\Omega t)}{\pi t} = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} =$$
$$\frac{\Omega}{\pi} \cdot \sin(\Omega t)$$

$\sin(\Omega t)$ ist die Spaltfunktion. Daraus folgt weiter:

$$g(t) = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \sin(\Omega t) * f(t)$$

5 Partielle Differentialgleichungen (PDG)

Eine Gleichung der Form

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_x, \ldots, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, x_1^{m1} x_1^{m2} \ldots x_1^{mm}} u = 0$$

in der neben der unbekannten Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ auch partielle Ableitungen vorkommen heißt PDG.

Ordnung der PDG; Die größte $m := m_1 + \cdots + m_n$ heißt Ordnung der PDG,

Definition: EIne Funktion $u : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der DGL, wenn die m-ten Ableitungen von n existieren und u auf G die obige DGL erfüllt.

Anmerkung: Die Lösungen $u(x, y)$ einer PDG in 2 Variablen sind Flächen in $\mathbb{R}^3$. (Lösungsflächen, Integralflächen).

5.1 PDGen, die sich wie gewöhnliche DGLen behandeln lassen

Einzige Schwierigkeit; Die Integrationskonstanten hängen i.A. von allen übrigen Variablen ab.

Beispiel; Gegeben $u(x, y)$:

- $u_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = c(y)$. Daraus folgt weiter nach $\int \mathrm{d}\, x$: $c(y)x + \mathrm{d}\, y$.

  Dabei ist $\mathrm{d}\, y$ eine beliebige, differenzierbare Funktion.

- $u_{xy} = 0$. Daraus folgt weiter nach $\int \mathrm{d}\, y$: $u_x = \breve{c}(x)$. Daraus folgt weiter nach $\int \mathrm{d}\, x$: $c(x) + \mathrm{d}\, y$.

  Dabei ist $\breve{c}(x)$ eine beliebige Funktion.

5.2 Lineare PDH 1. Ordnung mit Konstanten Koeffizienten

2 Variablen, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$au_x + bu_y = f(x, y)$$

Idee: geeignete Variablensubstitution, so dass gewöhnliche DGL entsteht:

$$\xi = bx + ay, \qquad \eta = bx - ay$$

$$x = \frac{\xi + \eta}{2b}, \qquad y = \frac{\xi - \eta}{2a}$$

$$(x, y) \mapsto (\xi, eta), \qquad U(\xi, \eta) = u(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}) = u(x, y)$$

$$\neq F(\xi, \eta) f(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}) = f(x, y)$$

Nach Anwendung der Kettenregel ergibt sich:

$$F(\xi, \eta) = au_x + bu_y = a(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(U_\xi + \xi_y + U_\eta \eta_y) =$$

$$a(U_\xi b + U_\eta b) + b(U_\xi a + U_\eta(-a)) = abU_\xi + abU_\eta + abU_\xi - abU_\eta = 2abU_\xi$$

$$\Rightarrow U_\xi = \frac{1}{2ab} \cdot F(\xi, \eta)$$

$$\Rightarrow U(\xi, \eta) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, \eta) \,\mathrm{d}\, \xi + G(\eta)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, bx - ay) \,\mathrm{d}\, \xi + G(\eta)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int_{bx_0 + ax_0}^{bx+ay} F(\xi, bx - ay) \,\mathrm{d}\, \xi + G(\eta)$$

Beispiel:

$$2u_x + 3u_y = e^{x+y}$$

$$\xi = 3x + 2y, \qquad \eta = 3x - 2y, \qquad x = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad y = \frac{\xi - \eta}{2}$$

$$U_\xi = \frac{1}{12} F(\xi, \eta) = \frac{1}{12} e^{\frac{4+\eta}{6} + \frac{\xi-\eta}{6}} = \frac{1}{12} e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta}$$

$$\Rightarrow U(\xi, \eta) = \frac{1}{12} \int e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta} \,\mathrm{d}\,\xi + G(\eta) = \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{12}\eta} \int e^{\frac{5}{12}\xi} \,\mathrm{d}\,\xi + G(\eta) =$$

$$\frac{1}{12} e^{-\frac{1}{12}\eta} \frac{e^{\frac{5}{12}\xi}}{\frac{5}{12}} + G(\eta) = \frac{1}{5} e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta} + G(\eta) =$$

$$\frac{1}{5} e^{x+y} + G(3x - 2y)$$

G ist eine beliebig differenzierbare Funktion.

5.3 Eindimensionale Schwingungsgleichung (Wellengleichung)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

u_{tt} ist Auslenkung (Elongation) der Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x.
c^2 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
$f(x, t)$ bezeichnet den Einfluss der äusseren Kräfte.

Geeignete Substitution: $\xi = x - ct$, $\tau = x + ct$. Daraus folgt weiter: $x = \frac{\xi+\tau}{2}$, $t = \frac{\xi-\tau}{2}$:

$$U(\xi, \tau) = u(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi - \tau}{2}) = u(x, t)$$

$$F(\xi, \tau) = f(x, t)$$

$$U_t = U_\xi \cdot \xi_t + U_\tau \cdot \tau_t = U_\xi(-x) + U_\tau c = -cU_\xi + cU_\tau$$

$$u_{tt} = (-cU_\xi + cU_\tau) = -c(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\tau\xi}\tau_t) + c(c(U_{\tau\xi}\xi_t + U_{\tau\tau}\tau_t)) =$$

$$-c(U_{\xi\xi}(-c) + U_{\tau\xi}c) + (U_{\tau\xi}(-c) + U_{\tau\tau}c) = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau})$$

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\tau \tau_x = U_\xi + U_\tau$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x + U_{\tau\xi}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x = U_{\xi\xi} + 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau}$$

$$F(\xi, \eta) = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\tau} + U_{\tau\tau}) - c^2(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\tau}UI_{\tau\tau}) = -4c^2 U_{\xi\tau}$$

$$\Rightarrow U_{\xi\tau} = -\frac{1}{4c^2} F(\xi, \tau)$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL:

$$\Rightarrow U(\xi,\tau) = -\frac{1}{4c^2}\int\int F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,\tau$$

Dies ergibt eine Partikulärlösung. Die allgemeine Lösung setzt sich aus der Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer Partikulärlösung zusammen (Summe).

$$U_{\xi\tau} = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}\,\tau \;\Rightarrow U_{\xi})\breve{\psi}(\xi)$$
$$\Rightarrow \int \breve{\psi}\,\mathrm{d}\,\xi + \varphi(\tau) = U(\xi,\tau) = \varphi(\tau) + \psi(\xi)$$
$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Das ist die Lösungsformel von d'Alembert (Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen).