Runde 10, Beispiel 66

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Gesucht ist das trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad n, welches im Intervall $[0; 2\pi]$ an den 3 Stützstellen $t_j = \frac{2\pi}{3} j$, $j = 0, 1, 2$ die vorgegebenen Funktionswerte $y(t_j)$ annimmt:

$$y(0) = 0, \qquad y(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der Sinus-Cosinus-Form.

2 Trigonometrische Interprolation durch die DFT

Gegeben sind Werte $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = \vec{y}$.
Gesucht ist ein trigonometrisches Polynom von kleinstem Grad

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t},$$

sodass dieses an den Stützstellen $\frac{2\pi}{N} \cdot j$ genau die Werte y_j annimmt.
Falls N ungerade ist, so ist das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt und es gilt dann $N = 2n + 1$.
Einsetzen der Werte an den Stützstellen liefert N Gleichungen:

$$\mathbf{y_j = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \omega^{k \cdot j}}, \qquad \mathbf{0 \leq j \leq 2n}, \omega = \mathbf{e^{\frac{2\pi i}{N}}}$$

$$y_j = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{(k-n) \cdot j} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj} \cdot \omega^{-nj}$$

$$\Rightarrow \omega^{nj} \cdot y_j = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj}, \qquad 0 \leq j \leq 2n = N - 2$$

$$\Rightarrow (\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \mathrm{IDFT}(c_{k-n})$$

$$\Rightarrow c_{k-n} = \mathrm{IDFT}((\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}})$$

Liefert schließlich $(c_0 . c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n}) = \mathrm{DFT}(y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$.

3 Lösung des Beispiels

In unserem Fall ist $N = 3$, also ungerade. Es sind daher $2n + 1$ Koeffizienten ($n = 1$) zu bestimmen mit $k = 0, 1$.
Wir müssen für die Anwendung der Formel

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$$

berechnen:

- a_0,$k = 0$:

$$a_0 := c_0 + c_{-0} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos \frac{2\pi kj}{N} = 0$$

- a_1,$k = 1$:

$$a_1 := c_1 + c_{-1} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos \frac{2\pi kj}{N} = 0$$

- b_0,$k = 0$:

$$b_0 := i(c_0 - c_{-0}) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin \frac{2\pi kj}{N} = 1$$

- b_1,$k = 1$:

$$b_1 := i(c_1 - c_{-1}) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin \frac{2\pi kj}{N} = 0$$

Ergibt somit $\mathbf{f(t)} = \sin(\mathbf{t})$.