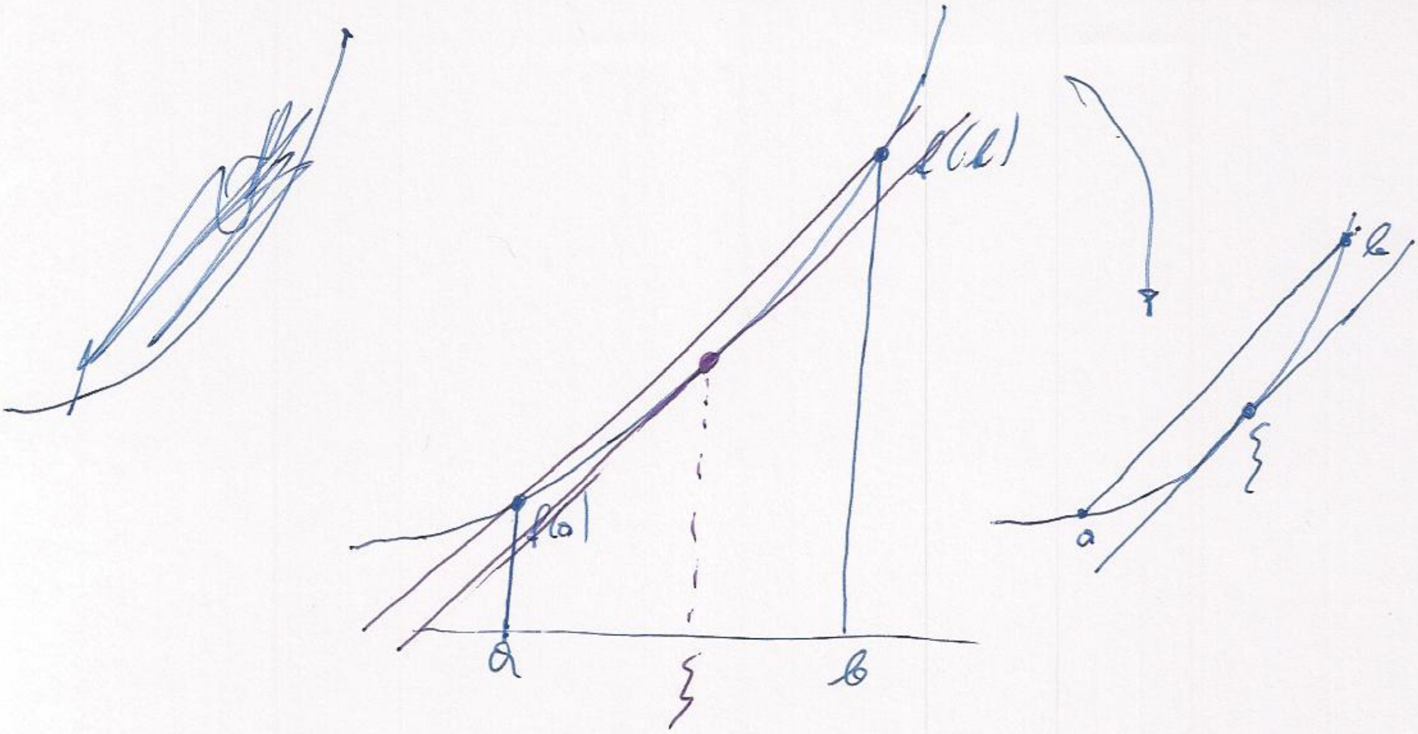


Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

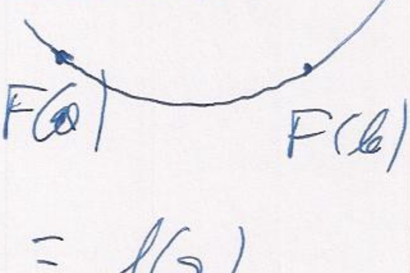
f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beweis:

$$\boxed{F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}$$



$$F(a) = f(a)$$

$$F(b) = \cancel{f(b)} - \frac{(\cancel{f(b)}-f(a))}{\cancel{b-a}}\cdot(\cancel{b-a}) = f(a)$$

$F(x)$ differenzierbar

$F(a) = F(b)$

- $F = \text{const} \Rightarrow$ Gerade $\Rightarrow$ ✓
- $F \neq \text{const.}$

  $\Rightarrow \exists \max, \exists \min : F$

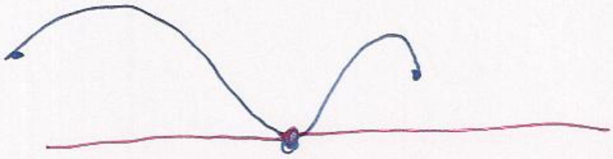
zumindest eines dieser Punkte

max. oder min.

ist NICHT am Rand

$\Downarrow$

im Inneren : (a, b)



Extrem ξ nicht am Rand

$\Rightarrow F'(\xi) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot 1$$

$$\underset{\displaystyle 0}{\overset{\displaystyle F'(\xi)}{\shortparallel}} = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Satz von Rolle:

f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).

es gelte: $f(a)=f(b)$.

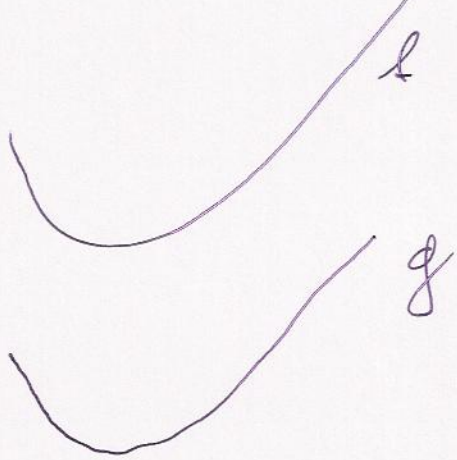
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.

Satz: f,g: auf I stetig und $\mathring{I}$ differenzierbar

es gelte $f'(x)= g'(x)$, $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ $f(x) - g(x) =$ const. auf I

d.h.: $f(x)= g(x) + C$



$f = g + C$

Beweis: Mittelwertsatz:

wähle Punkt $x_0 \in I$

betrachte Differenz:

$$F(x) := f(x) - g(x)$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \underset{\displaystyle 0}{\overset{}{\underset{\parallel}{F'(\xi)}}}, \quad \xi \in [x_0, x]$$

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

$$F(x) - F(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \underset{=: C}{\underline{\underline{F(x_0)}}}, \quad \forall x \in I$$

$$f(x) - g(x) = C, \quad \forall x \in I$$

$$f(x) = g(x) + C, \quad \forall x \in I$$

Taylorreihen

geg. Fkt. $f(x)$

gesucht: Polynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$, welches $f(x)$ um $\underline{x_0}$ "möglichst gut approximiert"

Ansatz: $p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x-x_0)^n$

"Idee": Fkt. $f(x)$ und Polynom $p_n(x)$ stimmen bei x_0 für erste n Ableitungen überein

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= p_n(x_0) \\
f'(x_0) &= p_n'(x_0) \\
f''(x_0) &= p_n''(x_0) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x_0) &= p_n^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

Wie müssen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ vom Polynom $p_n(x)$ gewählt werden?

$$P_n'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4\cdot(x-x_0) + \dots$$
$$+ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-3}$$

$$P_n'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + 0 + 0 + 0 \dots$$
$$= 3!\cdot a_3$$
$$\Downarrow$$
$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$\parallel$$
$$f'''(x_0)$$

---

iterieren

$$f^{(k)}(x_0) = k!\cdot a_k$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$\Rightarrow$ Approximation:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$
$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

n-te Taylor Polynom

$$f(x_0) = P_n(x_0)$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \ldots + a_n \cdot (x-x_0)^n$$

$$P_n(x_0) = a_0 + 0 + 0 + \ldots = \boxed{a_0}$$

$$\shortparallel$$

$$\boxed{f(x_0)}$$

$$P_n'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x-x_0) + 3 \cdot a_3 \cdot (x-x_0)^2 + \ldots + n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n'(x_0) = a_1 + 0 + 0 + \ldots = \boxed{a_1}$$

$$\shortparallel$$

$$\boxed{f'(x_0)} \qquad P_1(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)}^{\text{lineare Approx.}}$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 (x-x_0) + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot (x-x_0)^2 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n''(x_0) = 2 \cdot a_2 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 2 \cdot a_2$$

$$\shortparallel$$

$$f''(x_0) \rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2}_{\text{quadrat. Approx.}}$$

ähnlich bei Potenzreihen:

Satz: $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$ Potenzreihe

mit Radius R.

$\Rightarrow$ $f(x)$ im Konvergenzbereich
$(|x - x_0| < R)$
differenzierbar.

Ableitung:

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0 (1)} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}, \quad |x - x_0| < R$$

Satz (Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen):

falls $f(x)$ in Umgebung von x_0 eine Darstellung als Potenzreihe besitzt, also:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n, \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Falls Potenzreihendarstellung existiert

$\Rightarrow$ ist eindeutig.

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + a_3 \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

erreicht:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot a_2$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3$$

$$\vdots$$

Def.:

- Reihe $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \dots$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

heißt **Taylorreihe** von $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0

- Bricht man Reihe nach n Gliedern ab:

$$\underbrace{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}_{T_n(x)\ldots\text{ Taylorpolynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{R_n}_{\text{Restglied}}}_{\text{Taylor'sche Formel mit Restglied}}$$

Satz (Satz von Taylor)

Sei • f auf Intervall $I = [x_0, x]$
n-mal stetig differenzierbar

• im Inneren $\mathring{I}$ $(n+1)$-mal differenzierbar.

$\Rightarrow$ $\exists \xi \in \mathring{I}$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{\text{n-te Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{= R_n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$: Restglied von Lagrange

---

Falls f unendlich oft stetig differenzierbar

$\Downarrow$

Taylorreihe von f definiert

Taylorreihe $= f(x)$

$\Updownarrow$

$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ (Restglied konv. gegen 0)

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$

$\cos x$

$-\sin x$

$-\cos x$

$\vdots$

$x_0 = 0$

$x_0 = 0$
0
1
0
−1
0
1
0
−1
0
$\vdots$

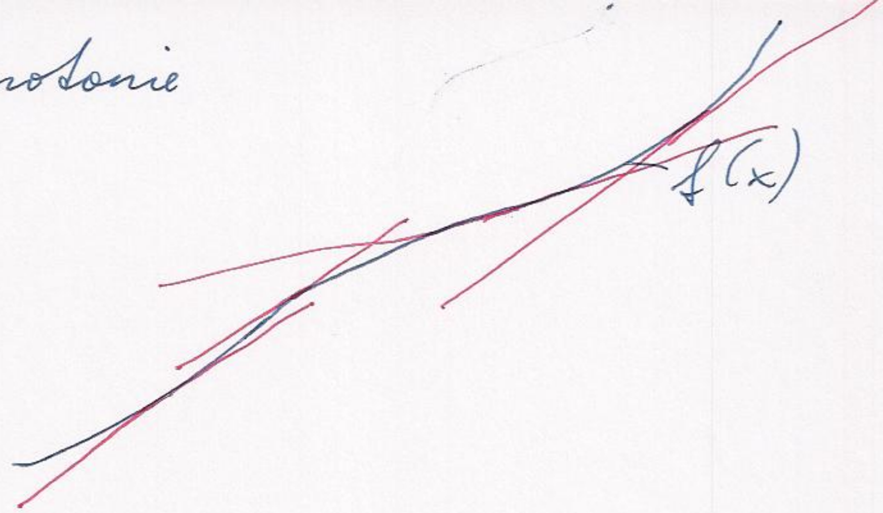
Taylorreihe:

$$T(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!}$$

$$+ 1 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots$$

Monotonie



Satz: f auf I differenzierbare Fkt.

- $f(x)$ monoton wachsend auf I

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I$$

- $f(x)$ monoton fallend auf I

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in I$$

- $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ streng mon. wachsend

$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ streng mon. fallend

$f(x) = x^3$

streng mon. wachs.

$f'(0) = 0$

Beweis: Mittelwertsatz

$$f'(x) \geq 0 , \forall x \in I$$

$y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{\underbrace{y - x}_{>0}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} , \quad \xi \in (x,y)$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0$$

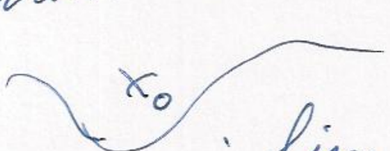
$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow \text{mon. wachsend}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(y) > f(x)$$

streng mon. wachsend

---

f mon. wachsend z.z. $f'(x) \geq 0$



bzw. rechtsseitig

$$: \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}}}_{>0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

Bsp.: $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$

$$f'(x) = e^{-x} + (x+2)\cdot e^{-x}\cdot(-1) =$$
$$= (1-x-2)\cdot e^{-x} =$$
$$= -(x+1)\cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

Monotonieverhalten?

$-(x+1) \geq 0 \Rightarrow$ mon. wachsend

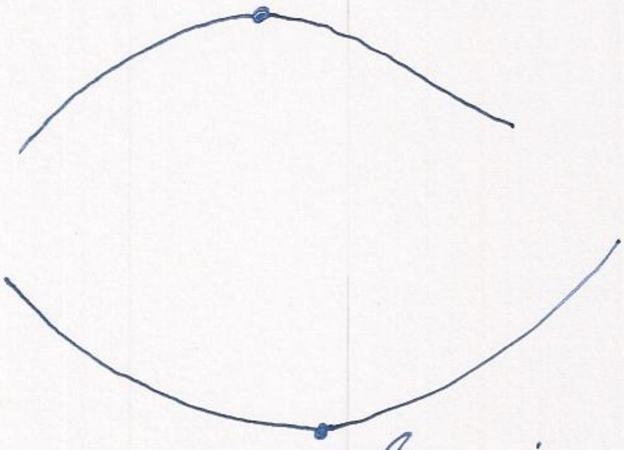
$\Updownarrow$

$x+1 \leq 0$

$x \leq -1$

---

lokale Extrema:



$$-(x+1)\cdot e^{-x} = f'(x) = 0$$

<u>$x = -1$:</u> Kandidat für lok. Extrema.

Satz: Sei f zwei mal stetig differenzierbar und $f'(x_0)=0$.

$\Rightarrow$

- $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x)$ bei x_0 relatives Maximum
- $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x)$ bei x_0 relatives Minimum

$f(x)=x^3$

$f'''(x)=6$

$f'''(0)=6$

$\Leftarrow$

$f(x)=x^3$

$f''(0)=0$

$f'(0)=0$

$f(x)=x^4$

$f''(0)=0$

$f'(0)=0$

$f^{(4)}(x)=24$

Beweis: S. v. Taylor mit Restglied

Fall: $f''(x_0)<0$

$$f(x)=f(x_0)+\cancel{\underbrace{f'(x_0)}_{=0}\cdot(x-x_0)}+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2,$$

$\xi\in(x_0,x)$

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\underbrace{(x-x_0)^2}_{>0}}_{<0}$$

$x>x_0$

x nahe bei x_0

$f''(\xi)<0$

$f''(x_0)<0$, f'' stetig

$\Rightarrow \exists U_\varepsilon(x_0): f''(x)<0 \quad \forall x\in U$

$\Rightarrow f(x_0)>f(x), \ \forall x\in U_\varepsilon(x_0),\ x\neq x_0$

$$f'(x) = -(x+1)\cdot e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x} =$$

$$= e^{-x}\cdot(-1+x+1) =$$

$$= x\cdot e^{-x}$$

$$f''(-1) = -\frac{1}{e} < 0$$

$\Rightarrow$ rel. max.

Falls $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ Höhere Ableitungen betrachten!

Satz: n-mal stetig differenzierbare Fkt. mit:

$$f'(x_0) = 0, \ f''(x_0) = 0, \ldots, \ f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$

(i): n gerade:

- $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ relatives max.
- $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ relatives min

(ii): n ungerade

$f(x)$ bei x_0 kein relatives Extremum!

- $\exists$ ε-Umgebung U von x_0:
  f in U streng monoton
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend

Beweis: n gerade

analog Beweis $n=2$

Taylorreihenentw. bis Ordnung n mit Restglied

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} +$$

$$\cancel{+ \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

n gerade

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\overbrace{f^{(n)}(\xi)}^{>0}}{n!}\cdot\underbrace{(x-x_0)^{n}}_{>0}$$

$\underline{f^{(n)}(x_0)>0} \Rightarrow f^{(n)}(\xi)>0$ in Umgebung von x_0

$$f(x) = f(x_0) + R, \quad R>0$$

$\Rightarrow f(x_0)$ rel. min.