1. komplexe Zahlen:

$z_1 = 1 + 1j \qquad z_2 = -1 + 1j$

$z_3 = -1 - 1j \qquad z_4 = 1 + \dfrac{1}{j}$

Stellen sie diese Zahlen in Polarform dar.
Stellen sie diese Zahlen als Zeiger in der komplexen Ebene dar.

Berechnen Sie: $z_1+z_2,\ z_2+z_4,\ z_1\cdot z_2,\ z_1/z_2,\ z_1\cdot z_3,\ z_1/z_3,\ z_1\cdot z_4,\ z_1/z_4$

(Anmerkung: Berechnen sie die Ergebnisse zunächst im Kopf und überprüfen sie die Rechnung z.B. mit Matlab®.)

allg.: $z = a + jb = |z|\cdot(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = |z|\cdot e^{j\varphi}$ mit $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

! $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ liefert in Quadranten II bis IV nicht die gewollten Werte !

- $z_1 = 1 + j1$ $\qquad |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

- $z_2 = -1 + j1$ $\qquad |z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

  $\varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

  $\varphi = \pi - \varphi' = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad z_2 = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$

- $z_3 = -1 - j1$ $\qquad |z| = \sqrt{2}$

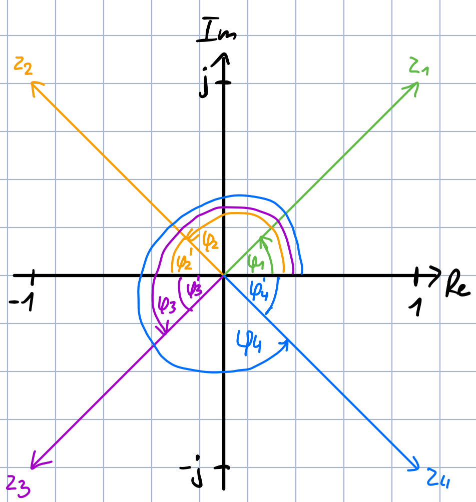
  $\varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}$

  $\varphi = \pi + \varphi' = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $\qquad z_3 = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{5\pi}{4}}$

- $z_4 = 1 + \frac{1}{j} = 1 + (-j)\cdot 1 = 1 - 1j$ $\qquad |z| = \sqrt{2}$

  $\varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

  $\varphi = 2\pi + \varphi' = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ $\qquad z_4 = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{7\pi}{4}}$



allg.: $z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + j(b_1 \pm b_2)$, $\quad z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

$z_1 + z_2 = j2$ $\qquad z_2 + z_4 = 0$

$z_1\cdot z_2 = 2\cdot e^{j\pi} \mathrel{\hat=} -2$ $\qquad \frac{z_1}{z_2} = 1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathrel{\hat=} -j$

$z_1\cdot z_3 = 2\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}} \mathrel{\hat=} -j2$ $\qquad \frac{z_1}{z_3} = 1\cdot e^{j\pi} \mathrel{\hat=} -1$

$z_1\cdot z_4 = 2\cdot e^{j2\pi} \mathrel{\hat=} 2$ $\qquad \frac{z_1}{z_4} = 1\cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} \mathrel{\hat=} j$

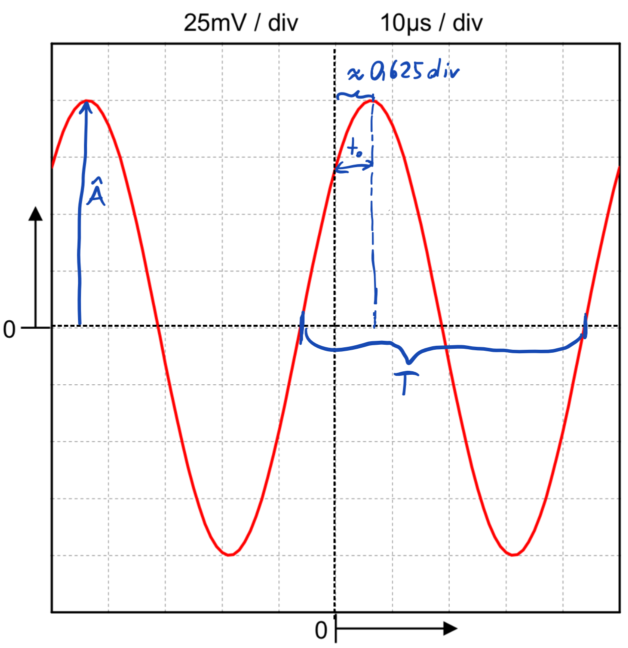
2. LTI – System

Im Labor finden sie eine Box mit einer elektrischen Schaltung. Sie können die Box nicht öffnen, sollten aber feststellen, ob es sich um eine lineare[1] Schaltung handelt. Im Labor stehen ihnen die typischen Geräte zur Verfügung: Sinusgenerator(en), Oszilloskop, … Wie lösen sie diese Aufgabe? Begründen sie Ihre Vorgangsweise.

Zuerst würde ich eine Spannung am Eingang anlegen und die Spannung am Ausgang analysieren. Dann könnte man die Eingangsspannung um einen Faktor verändern (z.B. $U_{neu} = 3 \cdot U_{alt}$) und den Ausgang beobachten. Verdreifacht sich auch das Ausgangssignal, ist die Schaltung in der Box linear.

Würde man auch noch die Zeitinvarianz prüfen wollen, müsste man das Eingangssignal z.B. für 1 Sekunde ausschalten und den Ausgang beobachten. Weißt dieser ebenfalls eine Pause von 1 Sekunde auf, ist das System auch zeitinvariant und somit ein LTI System.

3. „Oszilloskop" – Bild



Schreiben sie die dargestellte Funktion als Kosinus-Funktion an.

Welche Frequenz hat die Schwingung? (Verwenden sie technische Notation.)

allg.: $\hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A_0$

$\hat{A}$ … Amplitude
A_0 … Gleichanteil / Offset
ω … Kreisfrequenz
φ … Phasenverschiebung

$A_0 = 0, \quad \hat{A} = 4\,\text{div} \cdot 25 \frac{\text{mV}}{\text{div}} = 100\,\text{mV} = 0{,}1\,\text{V}$

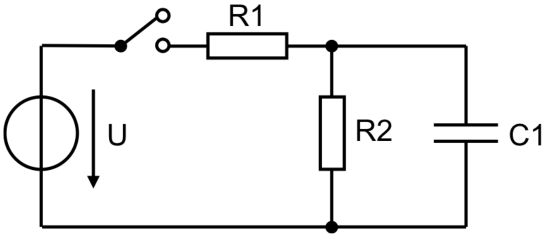
$T = 5\,\text{div} \cdot 10 \frac{\mu s}{\text{div}} = 50\,\mu s \mathrel{\hat{=}} 5 \cdot 10^{-5}\,s$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} = 0{,}2 \cdot 10^5 = 20\,\text{kHz}$, $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\,\text{Hz}$
$\omega = 4\pi \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{s}$

$\frac{\varphi}{2\pi} = -\frac{t_0}{T} \Rightarrow \varphi = -\frac{t_0}{T} \cdot 2\pi = -\frac{0{,}625\,\text{div} \cdot 10 \frac{\mu s}{\text{div}}}{50\,\mu s} \cdot 2\pi$
$\varphi = -\frac{1}{4}\pi$

$\Rightarrow$ Die Schwingung kann durch $0{,}1 \cdot \cos(4\pi \cdot 10^4 \cdot t - \frac{\pi}{4})$ vollständig beschrieben werden.

4. Einschaltvorgang



R1 = 3kΩ
R2 = 1kΩ
C1 = 1µF
U = 12V
Der Schalter wird geschlossen und nach längerer Zeit (t>5τ) wieder geöffnet.

- Berechnen sie die Zeitkonstante τ_1 für den Aufladevorgang.
- Berechnen sie die Zeitkonstante τ_2 für den Entladevorgang.
- Zeichnen sie die Auflade- und Entladekurve der Spannung am Kondensator mit passender Skalierung der Zeitachse.

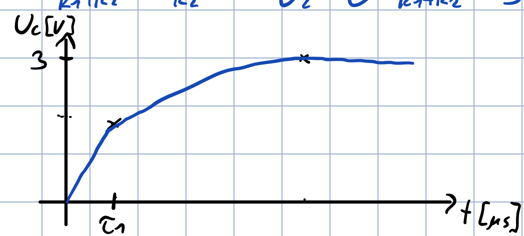
welchen Wdst „sieht" der Kondensator

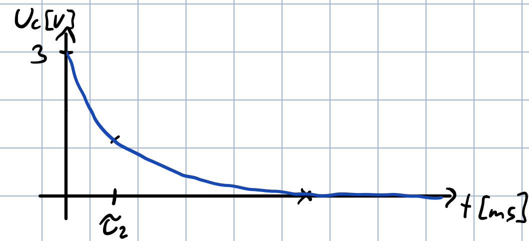
allg.: $\tau = R \cdot C$

$\tau_1 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C_1 = 750\Omega \cdot 1\mu F = 750\mu s$

$\tau_2 = R_2 \cdot C_1 = 1k\Omega \cdot 1\mu F = 1ms$

$\frac{U}{R_1+R_2} = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 3V$



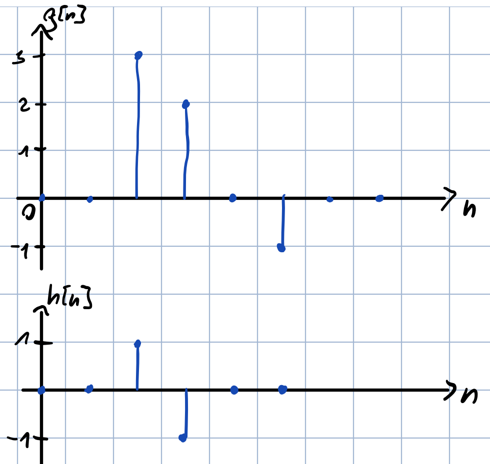


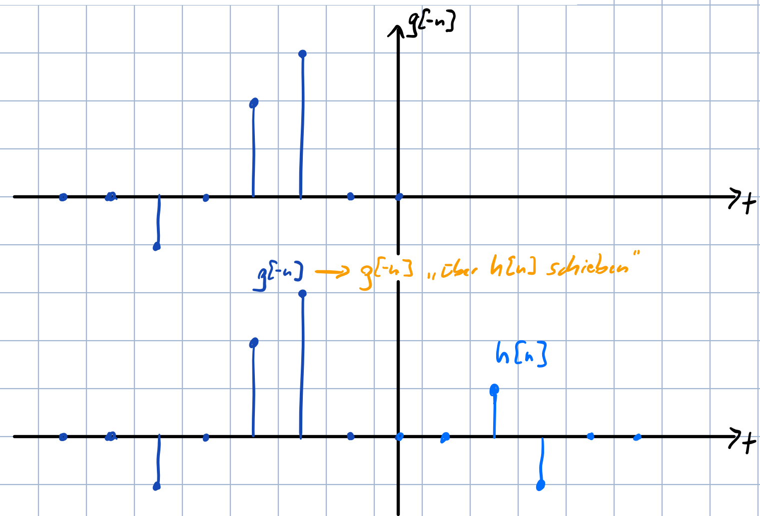
5. diskrete Faltung

Aus analogen Signalen $g(t), h(t)$ werden durch Abtastung Proben entnommen und man erhält die Folgen:

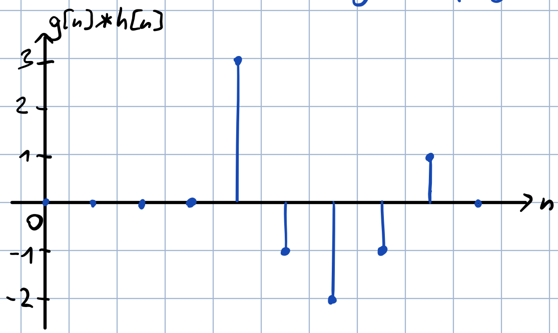
$g[n] = \ldots 0, 0, 3, 2, 0, -1, 0, 0, \ldots$
$h[n] = \ldots 0, 0, 1, -1, 0, 0, \ldots$

Berechnen sie die Faltungssumme[2] und stellen sie die einzelnen Rechenschritte grafisch dar.





k	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8		s[n]
g									0	0	3	2	0	-1	0	0			
h									0	0	1	-1	0	0					
n=0		0	0	-1	0	2	3	0	0										$0\cdot0=0$
n=1			0	0	-1	0	2	3	0	0									$0\cdot0+0\cdot0=0$
2				0	0	-1	0	2	3	0	0								$3\cdot0+0\cdot0+1\cdot0=0$
3					0	0	-1	0	2	3	0	0							0
4						0	0	-1	0	2	3	0	0						$3\cdot1=3$
5							0	0	-1	0	2	3	0	0					$2\cdot1-3\cdot1=-1$
6								0	0	-1	0	2	3	0	0				$2\cdot(-1)=-2$
7									0	0	-1	0	2	3	0	0			$(-1)\cdot1=-1$
8										0	0	-1	0	2	3	0	0		$(-1)(-1)=1$
9											0	0	-1	0	2	3	0	0	0



6. komplexes Signal

Stellen sie das Spannungssignal $u(t)=2\,V\cdot e^{-2000\,sec^{-1}\cdot t}\cdot\cos(4000\,Hz\cdot t+30°)$ in komplexer Schreibweise und unter Verwendung der komplexen Amplitude und der komplexen Frequenz s dar.
Markieren sie die Lage des Signals in der s-Ebene.
Zeichnen sie mit passender Skalierung den Verlauf des Signals im Zeitbereich.

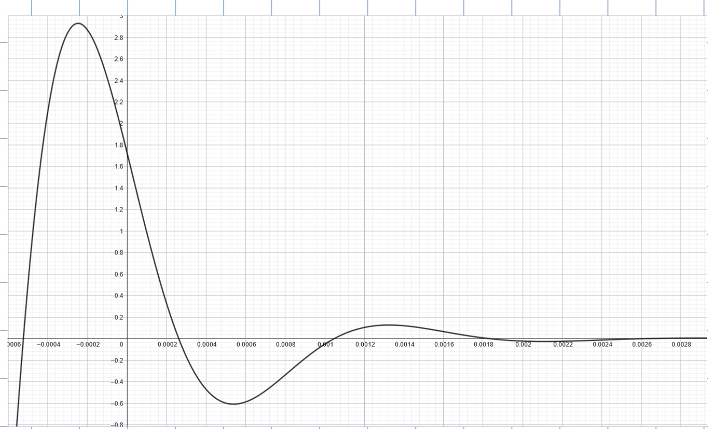
$30° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{6}$

allg.: $s(t)=A\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{(\sigma+j\omega)t}=\underbrace{A\cdot e^{j\varphi}}_{\underline{X}}\cdot\underbrace{e^{\sigma t}\cdot e^{j\omega t}}_{e^{\underline{s}t}}$

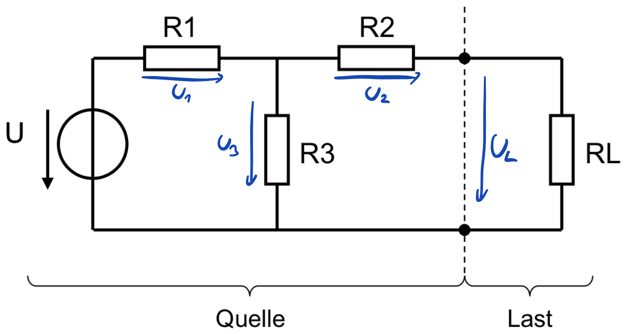
$s(t)=Re\{\underline{X}\cdot e^{\underline{s}t}\}=|\underline{X}|\cdot e^{\sigma t}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$

$u(t)=2\cdot e^{j30°}\cdot e^{-2000t}\cdot e^{j4000t}=$
$=\underbrace{2\cdot e^{j30°}}_{\underline{X}}\cdot\underbrace{e^{(-2000+j4000)\cdot t}}_{e^{\underline{s}t}}$

$e^{j(\omega t+\varphi)}=\cos(\omega t+\varphi)+j\cdot\sin(\omega t+\varphi)$



7. Widerstandsschaltung



$U=12V$, $R1=2k\Omega$, $R2=1k\Omega$, $R3=2k\Omega$, $RL=2k\Omega$

Berechnen Sie:

a) Den Spannungsabfall am Lastwiderstand RL mit der Spannungsteilerregel.

b) Die Kenngrößen der Ersatzspannungsquelle (Leerlaufspannung, Innenwiderstand, Kurzschlussstrom).

a)

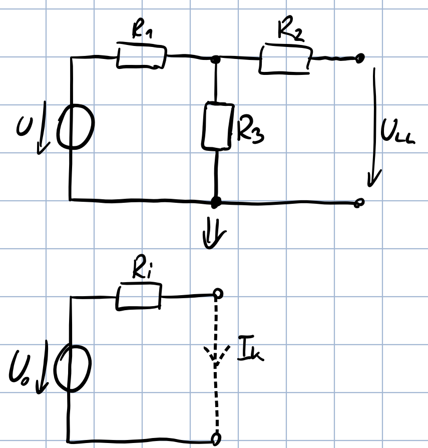
$$R_{2L} = R_2 + R_L = 1k\Omega + 2k\Omega = 3k\Omega$$

$$R_{32L} = R_3 \,||\, R_{2L} = \frac{2k\Omega \cdot 3k\Omega}{2k\Omega + 3k\Omega} = 1{,}2k\Omega$$

$$U_3 = U \cdot \frac{R_{32L}}{R_1 + R_{32L}} = 12V \cdot \frac{1{,}2k\Omega}{2k\Omega + 1{,}2k\Omega} = 4{,}5V$$

$$\underline{\underline{U_L}} = U_3 \cdot \frac{R_L}{R_2 + R_L} = 4{,}5V \cdot \frac{2k\Omega}{1k\Omega + 2k\Omega} = \underline{\underline{3V}}$$

b)



$$R_i = R_2 + (R_1 \,||\, R_3) = 1k\Omega + \frac{2k\Omega \cdot 2k\Omega}{2k\Omega + 2k\Omega}$$

$$\underline{\underline{R_i = 2k\Omega}}$$

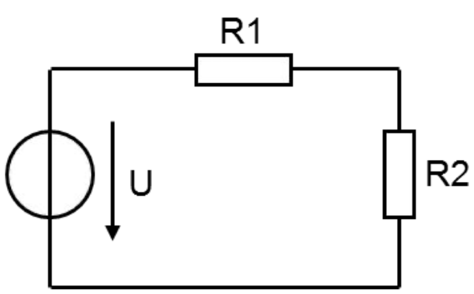
$$U_0 = U_{LL} = U \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 12V \cdot \frac{2k\Omega}{2k\Omega + 2k\Omega}$$

$$\underline{\underline{U_0 = 6V}}$$

$$\underline{\underline{I_K}} = \frac{U_0}{R_i} = \frac{6V}{2k\Omega} = \underline{\underline{3mA}}$$

8. Leistung in einem Widerstandsnetzwerk

Berechnen sie die Leistung (in allgemeiner Form), die im Widerstand R2 umgesetzt wird.



Bei welchem Wert von R2 erreicht die Leistung ein Maximum, wenn R1 = 150 Ω und R2 verändert wird. (Leistungsanpassung!)

allg.: $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$

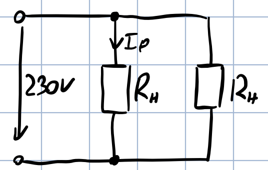
$$P_{R2} = \frac{U_{R2}^2}{R_2} = \frac{\left(U \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2}{R_2} = \frac{\frac{U^2 \cdot R_2^{\cancel{2}}}{(R_1+R_2)^2}}{\frac{\cancel{R_2}}{1}} = \frac{U^2 \cdot R_2}{(R_1+R_2)^2}$$

Leistungsanpassung bei $R_i = R_L$: R_2 muss 150Ω haben (Herleitung d. Extremwertaufgabe: $\frac{dP_{R2}}{dR_2} = 0$

9. Heizlüfter

Ein Heizlüfter wird an einer Haushaltssteckdose (230V) betrieben. Er besitzt zwei gleiche Heizelemente die in Serie oder parallel geschaltet werden können. Bei Parallelschaltung beträgt die Leistung des Heizlüfters 3,5kW.

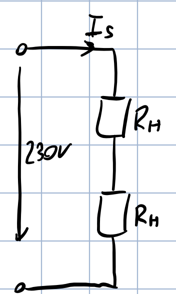
Welche Leistung hat er bei Serienschaltung? Welchen Widerstand haben die beiden Heizelemente? Welche Ströme fließen?



$P_P = 3{,}5\,kW$

$P_P = \frac{U^2}{R} = \frac{230^2}{R_H \| R_H} = \frac{230^2}{\frac{R_H}{2}} = \frac{230^2 \cdot 2}{R_H} \quad | \cdot R_H \quad | : P_P$ $\qquad R \| R = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$

$\underline{\underline{R_H}} = \frac{230^2 \cdot 2}{3500} = 30{,}22857\ldots\,\Omega \approx \underline{\underline{30\,\Omega}}$



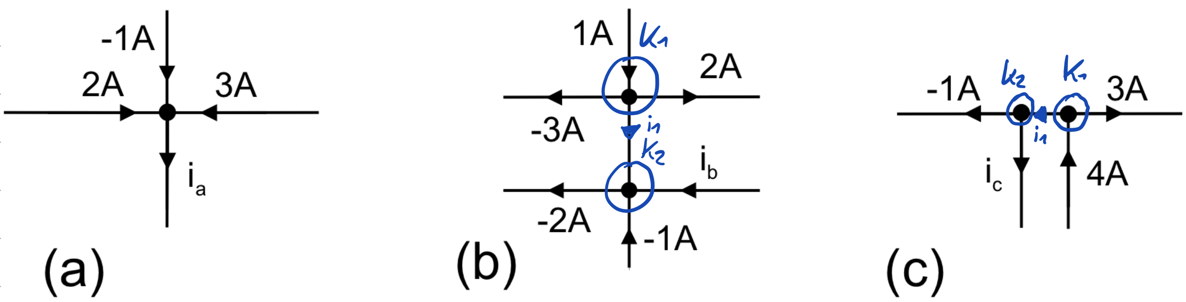
$\underline{\underline{P_S}} = \frac{U^2}{R} = \frac{230^2}{R_H + R_H} = \frac{230^2}{2 \cdot 30{,}22857} = 875{,}0000x\ldots\,W \approx \underline{\underline{875\,W}}$

$\underline{\underline{I_S}} = \frac{230V}{R_H + R_H} = \frac{230V}{2 \cdot 30{,}22857\,\Omega} = 3{,}80434\ldots\,A \approx \underline{\underline{3{,}8\,A}}$

$\underline{\underline{I_P}} = \frac{230V}{R_H} = \frac{230V}{30{,}22857\,\Omega} = 7{,}60869\ldots\,A \approx \underline{\underline{7{,}61\,A}}$

10. Knotenregel

Bestimmen sie die unbekannten Ströme.



allg.: $\Sigma I = 0$

a) $2A + (-1)A + 3A - i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{i_a}} = 2A - 1A + 3A = \underline{\underline{4A}}$

b) $K1: \quad 1A - 2A - i_1 - (-3A) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 1A - 2A + 3A = 2A$

$K2: \quad i_1 + i_b + (-1)A - (-2)A = 0 \quad \Rightarrow -i_b = 2A - 1A + 2A = 3A$

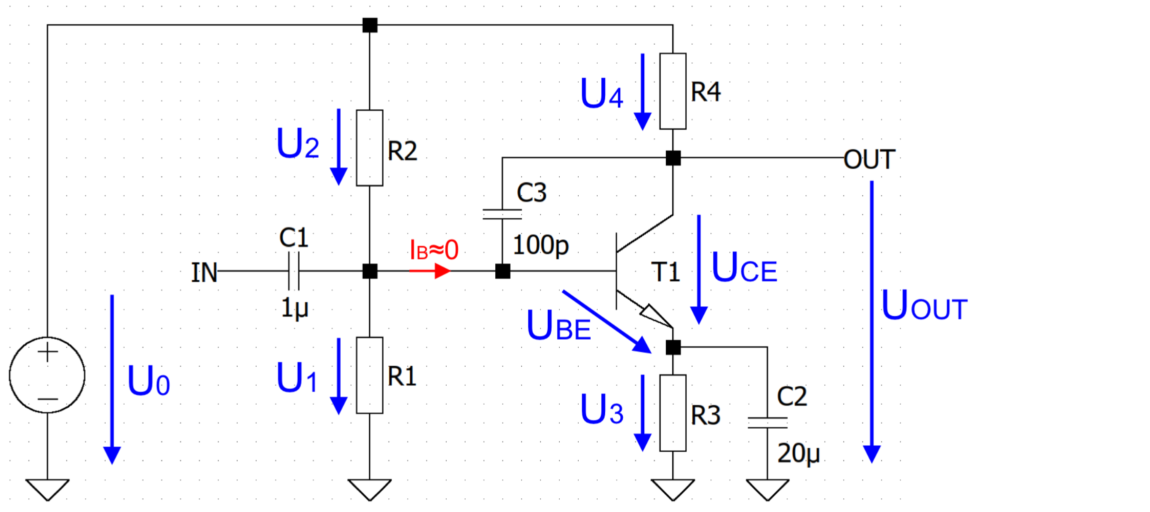
$\underline{\underline{i_b = -3A}}$ fließt eigentlich aus dem Knoten

c) $K1: \quad -3A + 4A - i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 1A$

$K2: \quad i_1 - i_c + 1A = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{i_c = 2A}}$

11. Spannungsteilerregel, Maschenregel

$R_1=10k\Omega$, $R_2=100k\Omega$, $R_3=1k\Omega$, $R_4=15k\Omega$, $U_0=11V$, $U_{BE}=0{,}6V$



Bestimmen sie U_1, U_2, U_3, U_4, U_{CE} und U_{OUT}

allg.: $\Sigma U = 0$, $\frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{U_i}{R_i}$

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R_1}{R_1+R_2} \Rightarrow \underline{U_1} = 11V \cdot \frac{10k\Omega}{10k\Omega+100k\Omega} = \underline{\underline{1V}}$

$U_0 = U_1 + U_2 \rightarrow \underline{\underline{U_2 = 10V}}$

$U_1 = U_{BE} + U_3 \Rightarrow \underline{\underline{U_3 = 0{,}4V}}$

$I_B = 0 \Rightarrow I_4 = I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{0{,}4V}{1k\Omega} = 400\mu A$ $\quad$ $\underline{\underline{U_4}} = R_4 \cdot I_4 = 15k\Omega \cdot 400\mu A = \underline{\underline{6V}}$

$\underline{\underline{U_{CE}}} = U_0 - U_4 - U_3 = \underline{\underline{4{,}6V}}$

$\underline{\underline{U_{out}}} = U_{CE} + U_3 = \underline{\underline{5V}}$

12. Widerstand in einem Fernsehgerät

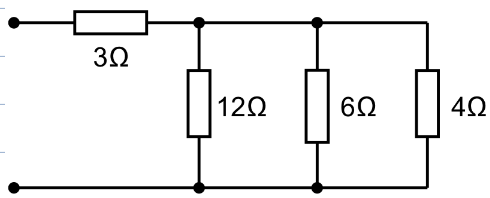
Ein 220Ω Widerstand in einem Fernsehgerät hat eine maximal zulässige Leistung von 0,25W. Bei welcher Spannung und welchem Strom erreicht er seine Belastungsgrenze?

$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow \underline{\underline{U}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{0{,}25W \cdot 220\Omega} = 7{,}416198...V \approx \underline{\underline{7{,}42V}}$

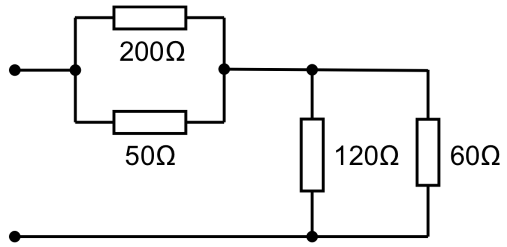
$P = I^2 \cdot R \Rightarrow \underline{\underline{I}} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}25W}{220\Omega}} = 0{,}0337099...A \approx \underline{\underline{33{,}71mA}}$

13. Ersatzwiderstände

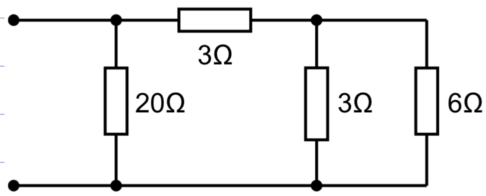
Berechnen sie die Ersatzwiderstände der Schaltungen a) bis d).



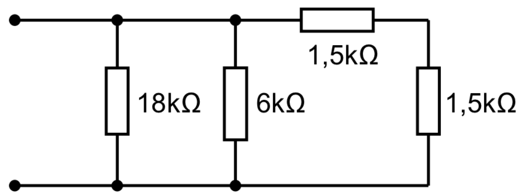
a)



b)



c)



d)

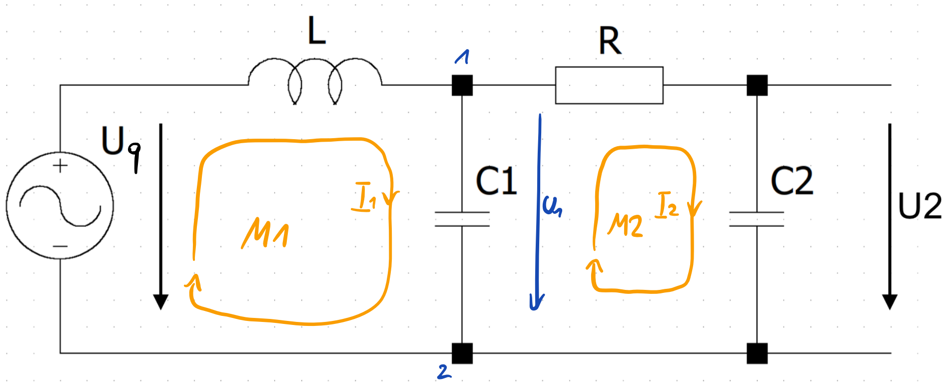
a) $\underline{\underline{R_{ges}}} = 3\Omega + \frac{1}{\frac{1}{12\Omega}+\frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{4\Omega}} = \underline{\underline{5\Omega}}$

b) $\underline{\underline{R_{ges}}} = \frac{1}{\frac{1}{200\Omega}+\frac{1}{50\Omega}} + \frac{1}{\frac{1}{120\Omega}+\frac{1}{60\Omega}} = \underline{\underline{80\Omega}}$

c) $R_1 = \frac{3\Omega \cdot 6\Omega}{3\Omega+6\Omega} = 2\Omega$ $\qquad$ $\underline{\underline{R_{ges}}} = \frac{1}{\frac{1}{20\Omega}+\frac{1}{3\Omega+2\Omega}} = \underline{\underline{4\Omega}}$

d) $\underline{\underline{R_{ges}}} = \frac{1}{\frac{1}{18k\Omega}+\frac{1}{6k\Omega}+\frac{1}{1{,}5k\Omega+1{,}5k\Omega}} = \underline{\underline{1{,}8k\Omega}}$

14. RLC – Filter



a) Um welche Filtertype handelt es sich bei dieser Schaltung?

b) Berechnen sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s}) = U2/U_q$ dieses Filters. Verwenden sie dafür das **Maschenstromverfahren**.

c) Berechnen sie den Betrag des Frequenzgangs $|\underline{H}(j\omega)|$.

a) Tiefpass 3. Ordnung

b) $M1: \; -U_q + U_L + U_1 = 0$

$M2: \; -U_1 + U_R + U_2 = 0$

$U_R = R \cdot I_R$

$U_C = \frac{1}{sC} \cdot I_C$

$U_L = sL \cdot I_L$

$$-U_q + sL \cdot I_1 + \frac{1}{sC_1} \cdot I_1 - \frac{1}{sC_1} I_2 = 0 \qquad (M1)$$

$$-\frac{1}{sC_1} I_1 + \frac{1}{sC_1} \cdot I_2 + R \cdot I_2 + \frac{1}{sC_2} I_2 = 0 \qquad (M2)$$

$M1: I_1\left(sL + \frac{1}{sC_1}\right) + I_2\left(-\frac{1}{sC_1}\right) = U_q$

$M2: I_1\left(-\frac{1}{sC_1}\right) \quad + I_2\left(R + \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} sL + \frac{1}{sC_1} & -\frac{1}{sC_2} \\ -\frac{1}{sC_1} & R + \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{I}: \left(Z_L + Z_{C_1}\right) I_1 - Z_{C_1} \cdot I_2 = U_q \qquad \Rightarrow I_1 = \frac{U_q + I_2 \cdot Z_{C_1}}{Z_L + Z_{C_1}}$

$\text{II}: -Z_{C_1} \cdot I_1 + \left(R + Z_{C_2} + Z_{C_1}\right) \cdot I_2 = 0$

I_1 einsetzen und nach I_2 umformen: $I_2 = U_q \cdot \frac{Z_{C_1}}{R \cdot Z_{C_1} + R \cdot Z_L + Z_{C_1} \cdot Z_{C_2} + Z_{C_1} \cdot Z_L + Z_{C_2} \cdot Z_L}$

$$U_2 = I_2 \cdot Z_{C_2} = U_q \cdot \frac{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}}{R \cdot Z_{C_1} + R \cdot Z_L + Z_{C_1} \cdot Z_{C_2} + Z_{C_1} \cdot Z_L + Z_{C_2} \cdot Z_L} \qquad | : U_q$$

$$\frac{U_2}{U_q} = \frac{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}}{R \cdot Z_{C_1} + R \cdot Z_L + Z_{C_1} \cdot Z_{C_2} + Z_{C_1} \cdot Z_L + Z_{C_2} \cdot Z_L} \cdot \frac{\frac{1}{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}}}{\frac{1}{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}}} = \frac{1}{\frac{R}{Z_{C_2}} + \frac{R \cdot Z_L}{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}} + 1 + \frac{Z_L}{Z_{C_2}} + \frac{Z_L}{Z_{C_1}}}$$

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{sRC_2 + s^3RLC_1C_2 + 1 + s^2LC_2 + s^2LC_1} = \frac{1}{s^3RLC_1C_2 + s^2L(C_1 + C_2) + sRC_2 + 1}$$

c) $$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3RLC_1C_2 + (j\omega)^2L(C_1+C_2) + j\omega RC_2 + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2L(C_1+C_2) + j(\omega RC_2 - \omega^3RLC_1C_2)} \;\hat{=}\; \frac{1}{a+jb} \cdot \frac{a-jb}{a-jb} = \frac{a-jb}{a^2+b^2}$$

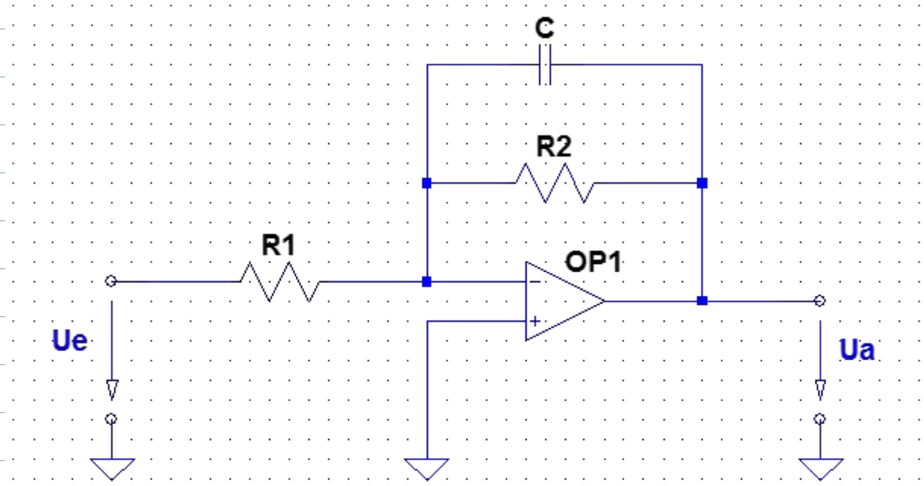
$$\frac{a-jb}{a^2+b^2} = \overbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}^{Re} - j\,\overbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}^{Im}$$

$$|\,| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2L(C_1+C_2))^2 + (\omega RC_2 - \omega^3RLC_1C_2)^2}}$$

15. Integrator mit Operationsverstärker

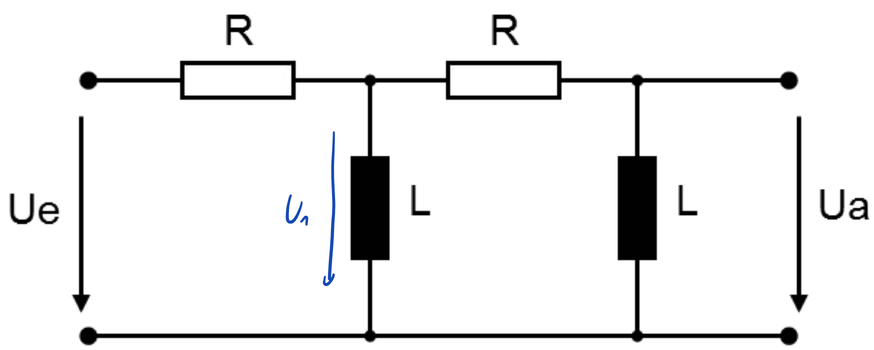
Berechnen sie den Frequenzgang $\underline{V}(j\omega)$ der Schaltung:



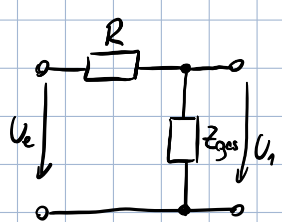
$$\underline{V}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{-R_2 \parallel Z_C}{R_1} = \frac{-\frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_1} = \frac{-\frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{\frac{j\omega R_2 C + 1}{j\omega C}}}{R_1} = \frac{-\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1 + j\omega R_1 R_2 C}$$

16. Passives Filter

Um welche Filtertype handelt es sich? Berechnen sie die Systemfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ (beide R und beide L gleich). Lösen sie diese Aufgabe durch Anwendung der **Spannungsteilerregel**.



Hochpass 2. Ordnung, nicht rückwirkungsfrei



$$Z_{ges} = \frac{Z_L \cdot (R + Z_L)}{Z_L + R + Z_L} = \frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{2 Z_L + R}$$

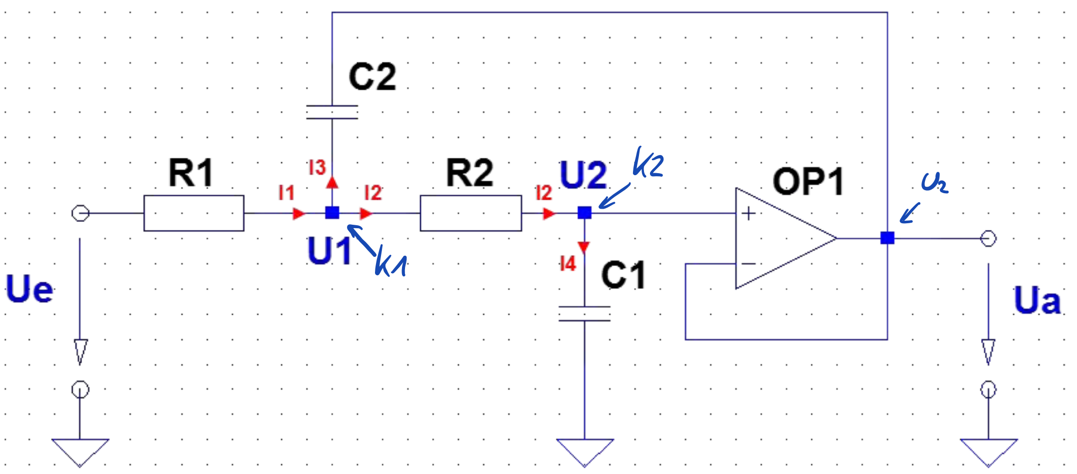
$$\frac{U_1}{U_e} = \frac{Z_{ges}}{R + Z_{ges}} \Rightarrow U_1 = U_e \cdot \frac{\frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{2 Z_L + R}}{R + \frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{2 Z_L + R}} = \frac{\frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{\cancel{2 \cdot Z_L + R}} \cdot U_e}{\frac{2 Z_L R + R^2 + Z_L^2 + R \cdot Z_L}{\cancel{2 \cdot Z_L + R}}} = \frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{3R \cdot Z_L + Z_L^2 + R^2} \cdot U_e$$

$$\frac{U_a}{U_1} = \frac{Z_L}{R + Z_L} \Rightarrow U_a = U_1 \cdot \frac{Z_L}{R + Z_L} = U_e \cdot \frac{Z_L^2 + R \cdot Z_L}{Z_L^2 + 3 Z_L R + R^2} \cdot \frac{Z_L}{R + Z_L} = U_e \cdot \frac{Z_L (\cancel{Z_L + R})}{Z_L^2 + 3 Z_L R + R^2} \cdot \frac{Z_L}{\cancel{R + Z_L}} \quad | : U_e$$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_L^2}{Z_L^2 + 3 Z_L R + R^2} = \frac{s^2 L^2}{s^2 L^2 + s \cdot 3RL + R^2} = \underline{H}(\underline{s})$$

17. Sallen-Key-Tiefpassfilter

Berechnen sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$. Wenden sie das **Knotenpotentialverfahren** an.



$$K1: \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$K2: \quad I_2 - I_4 = 0$$

$$\text{I}: \quad \frac{U_e - U_1}{R_1} - \frac{U_1 - U_2}{R_2} - \frac{U_1 - U_2}{Z_{C2}} = 0 \qquad (K1)$$

$$\text{II}: \quad \frac{U_1 - U_2}{R_2} - \frac{U_2 - 0}{Z_{C1}} = 0 \qquad (K2)$$

$$\text{I}: \quad \frac{U_e}{R_1} - \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_1}{Z_{C2}} + \frac{U_2}{Z_{C2}} = 0$$
$$\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C2}}\right) U_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C2}}\right) U_2 = -\frac{U_e}{R_1}$$
$$\text{II}: \quad \frac{U_1}{R_2} - \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_2}{Z_{C1}} = 0$$
$$\frac{1}{R_2} \cdot U_1 + \left(-\frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C1}}\right) U_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} - sC_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{U_e}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{aus II}: \quad \frac{1}{R_2} \cdot U_1 = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C1}}\right) \cdot U_2$$
$$U_1 = R_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C1}}\right) \cdot U_2 = \left(1 + \frac{R_2}{Z_{C1}}\right) \cdot U_2$$

$$U_1 \text{ in I}: \quad \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_2}{Z_{C1}}\right) \cdot U_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C2}}\right) U_2 = -\frac{U_e}{R_1}$$
$$\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1 \cdot Z_{C1}} - \cancel{\frac{1}{R_2}} - \frac{\cancel{R_2}}{\cancel{R_2} \cdot Z_{C1}} - \cancel{\frac{1}{Z_{C2}}} - \frac{R_2}{Z_{C1} \cdot Z_{C2}} + \cancel{\frac{1}{R_2}} + \cancel{\frac{1}{Z_{C2}}}\right) U_2 = -\frac{U_e}{R_1}$$

$$\frac{U_2}{U_e} = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1 Z_{C1}} - \frac{R_2}{Z_{C1} \cdot Z_{C2}} - \frac{1}{Z_{C1}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{Z_{C1}} + \frac{R_1 R_2}{Z_{C1} Z_{C2}} + \frac{R_1}{Z_{C1}}} = \frac{1}{1 + sR_2C_1 + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + sR_1C_1} = \underline{H}(\underline{s})$$

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1C_1 + R_2C_1) + 1}$$

18. Matlab®

Finden Sie mit Hilfe von Matlab® die Systemfunktionen eines Besselfilters 5. Ordnung und eines Cauerfilters 5. Ordnung (Welligkeit im Durchlassbereich 1 dB, Sperrdämpfung mindestens 40 dB).

Wenn sie keine Matlab® Lizenz besitzen, benutzen sie die Matlab® 30 Tage Testversion oder alternative Software, z.B. freie Software „GNU Octave“ oder „Scilab“.

Anm.: Die grafischen Darstellungen der Netzwerkfunktionen lassen sich über entsprechende Menüpunkte nach Rechtsklick einstellen, um anschaulichere Darstellungen zu gewinnen.

Zeichnen Sie ein Bode-Diagramm des Bessel- und des Cauerfilters. Klicken Sie den Phasengang weg, zeichnen Sie ein Gitter, stellen Sie die Dämpfung von 0 bis – 60 dB ein. Wählen Sie für beide Filter denselben Frequenzbereich.

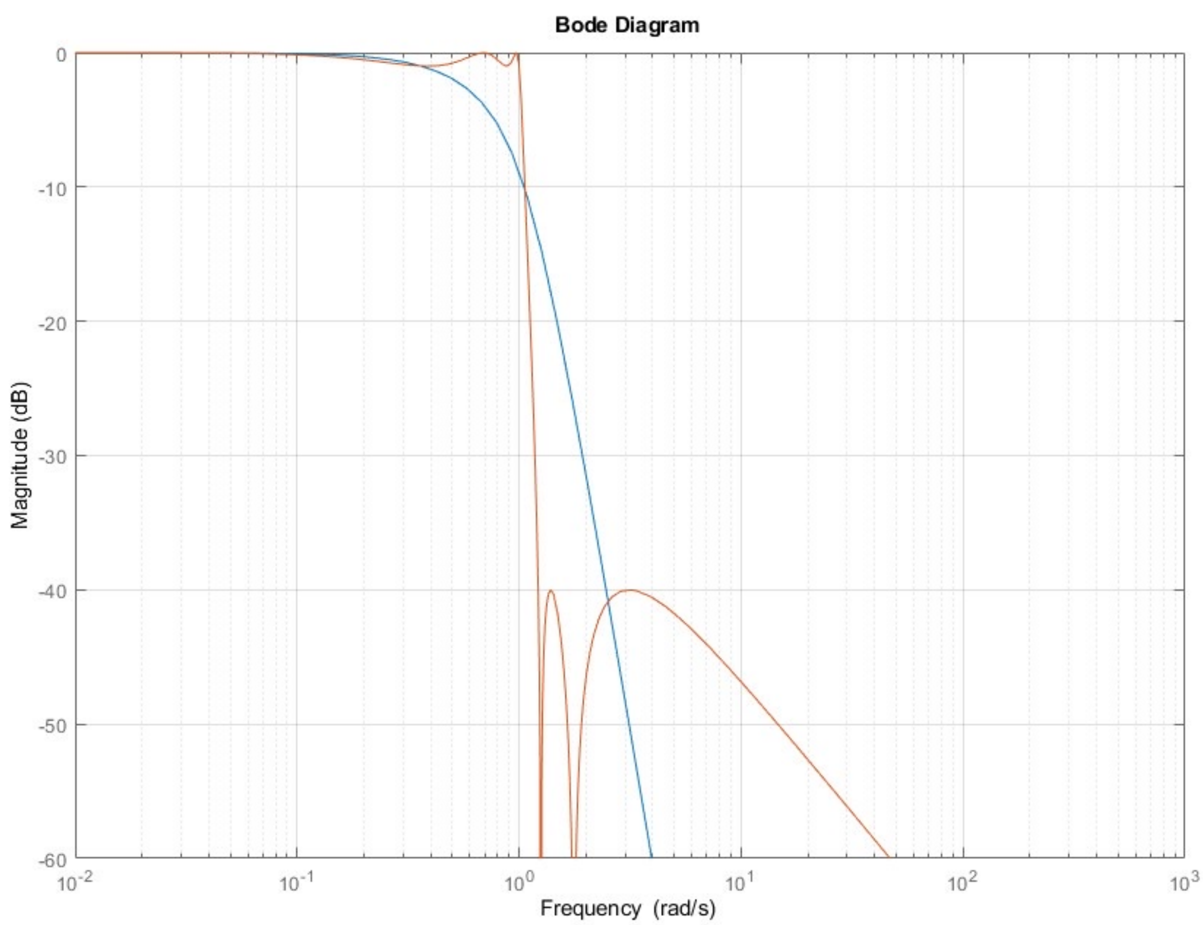
Vergleichen Sie die beiden Filterkennlinien.

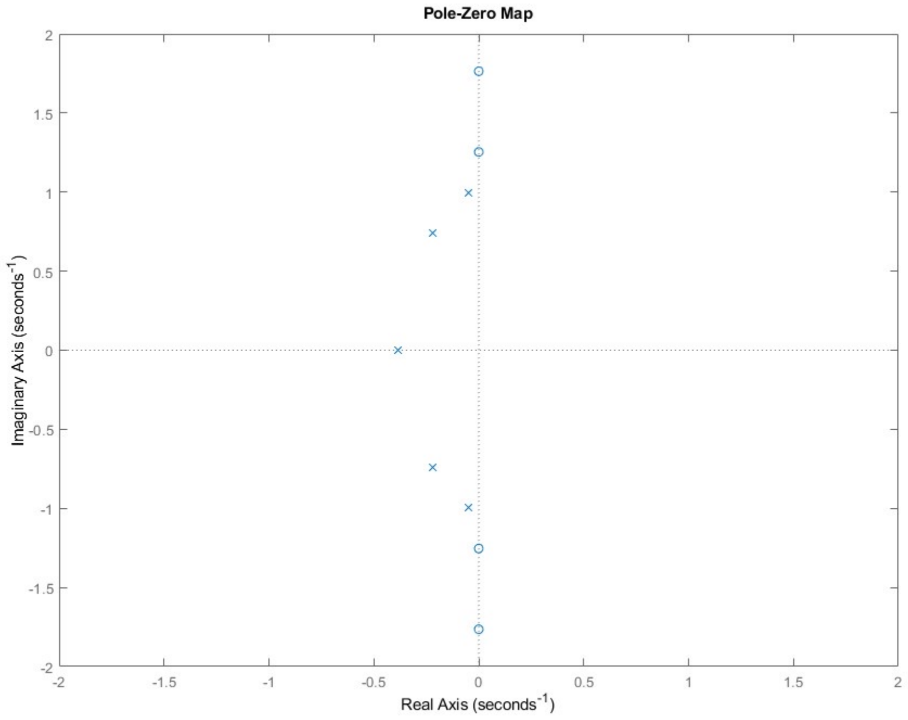
Zeichnen Sie ein Pol-/Nullstellendiagramm des Cauerfilters. Wählen Sie denselben Maßstab für die reelle und die imaginäre Achse. Vergleichen Sie die Lage der Nullstellen im PN-Diagramm mit der Lage der Nullstellen im Bode-Diagramm.

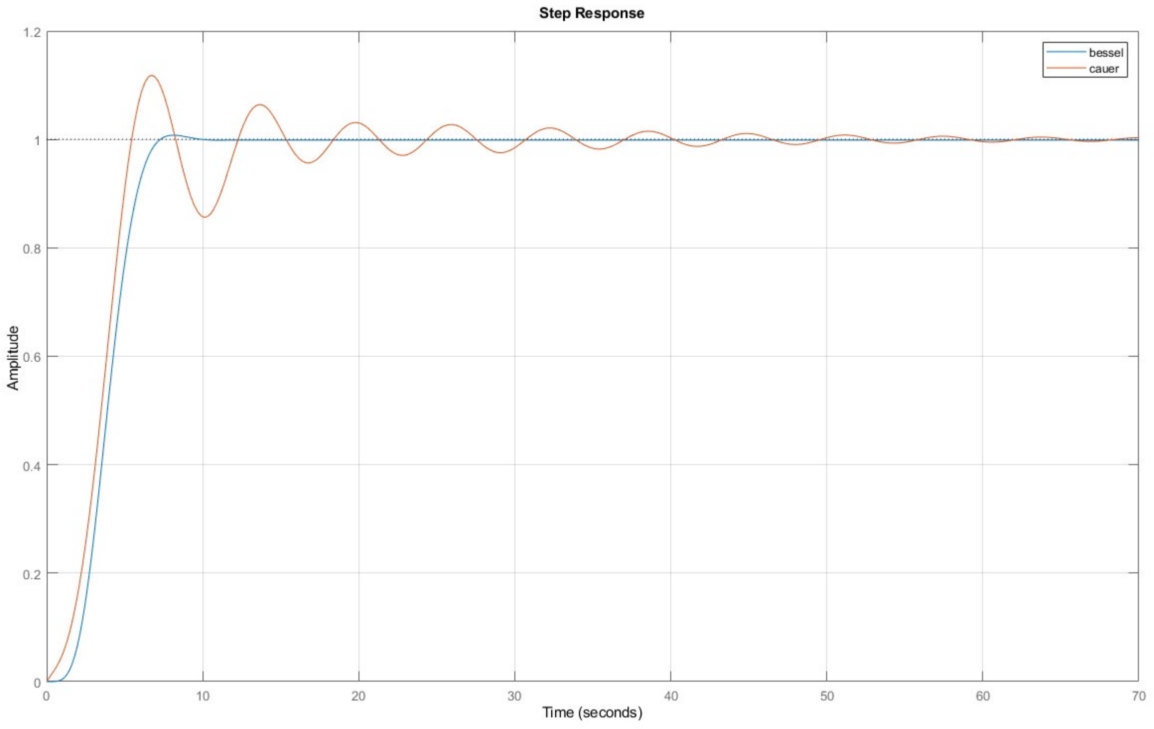
Vergleichen Sie die Sprungantwort von Bessel- und Cauerfilter. Wählen Sie für beide Filter denselben Zeitbereich.

1) Bessel : $\frac{1}{s^5+3{,}81s^4+6{,}78s^3+6{,}89s^2+3{,}94s+1}$

Cauer : $\frac{0{,}05s^4+0{,}22s^3}{s^5+0{,}92s^4+1{,}85s^3+1{,}13s^2+0{,}79s+0{,}23}$








```
[Z1,P1,K1] = besselap(5);
[num1,den1] = zp2tf(Z1,P1,K1);
bessel=tf(num1, den1)

[z2,p2,k2] = ellipap(5,1, 40);
[num2,den2] = zp2tf(z2,p2,k2);
cauer=tf(num2, den2)

bode(bessel, cauer)
```

```
pzplot(cauer)

step(bessel, cauer)
```