Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 10$:

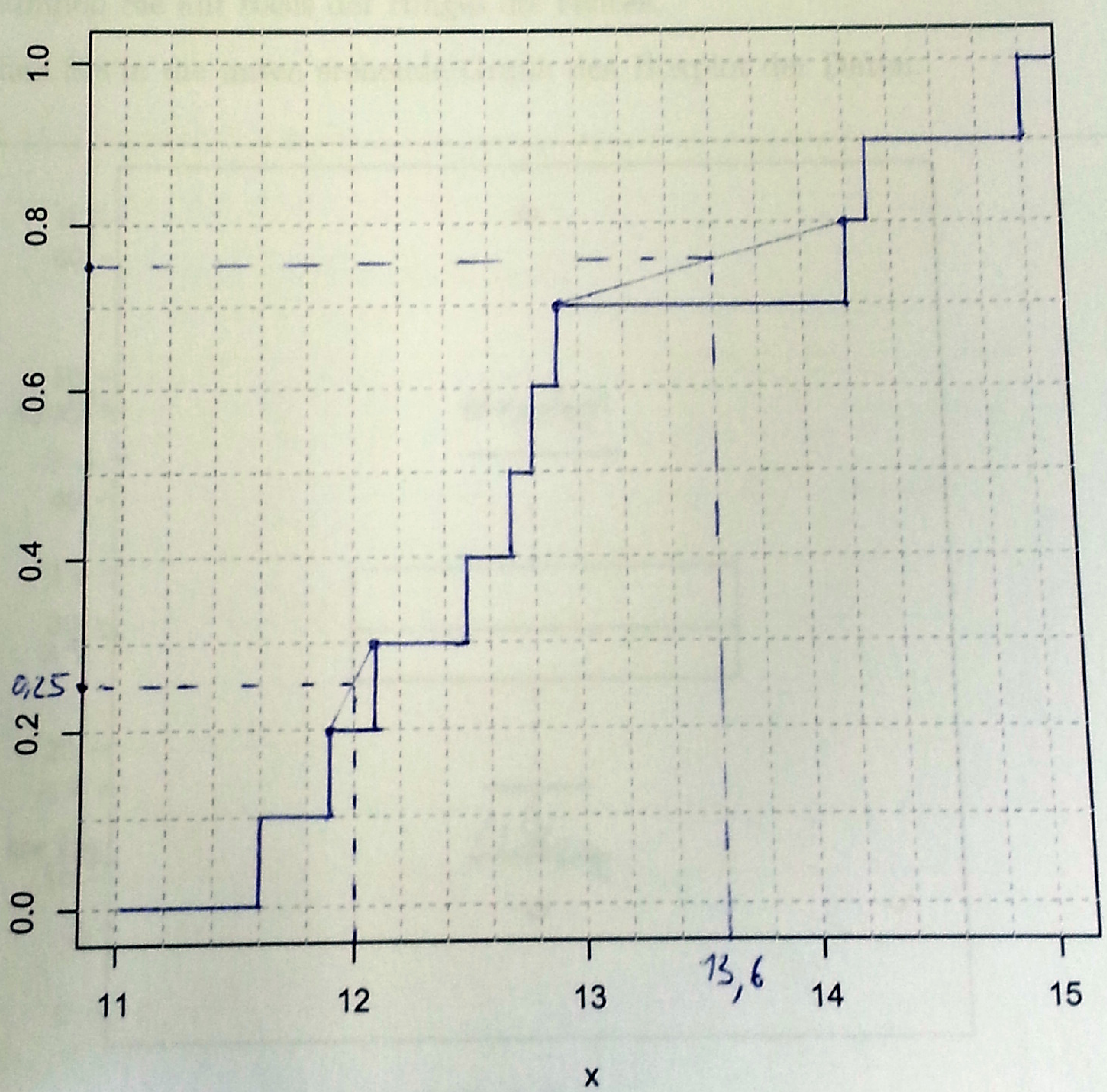
11.6 11.9 12.1 12.5 12.7 12.8 12.9 14.2 14.3 15.0

[2] Zeichnen Sie in die unten stehende Grafik die empirische Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie grafisch das 25%– und 75%–Quantil vom Typ 4.
12 13,6

[1] Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert.

[1] Bestimmen Sie die Stichprobenvarianz und -streuung.



$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{130}{10} = 13$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 13)^2 = \frac{11,5}{9} = 1,2778$$

$$S_n = \sqrt{S_n^2} = 1,1304$$

✓

Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 22$:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Daten	7	17	20	21	24	25	26	27	27	28	28

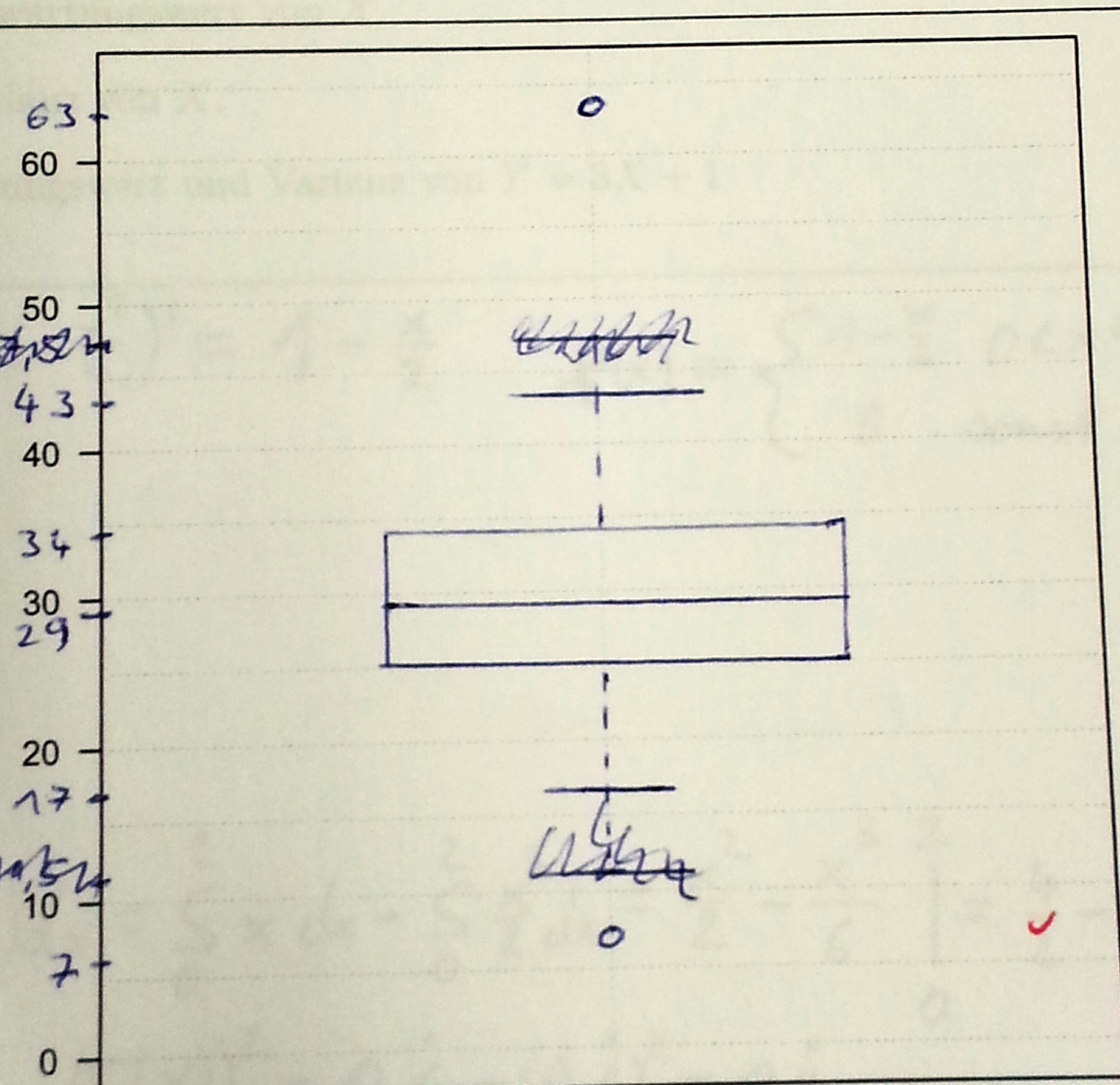
Rang	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Daten	30	31	31	32	33	34	36	39	41	43	63

[1] Bestimmen Sie den Median.

[1] Bestimmen Sie die Hinges.

[1] Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

[2] Zeichen Sie in die unten stehende Grafik den Boxplot der Daten.



Median = $\frac{28+30}{2} = 29$

lower Hinge = 25

upper Hinge = 34

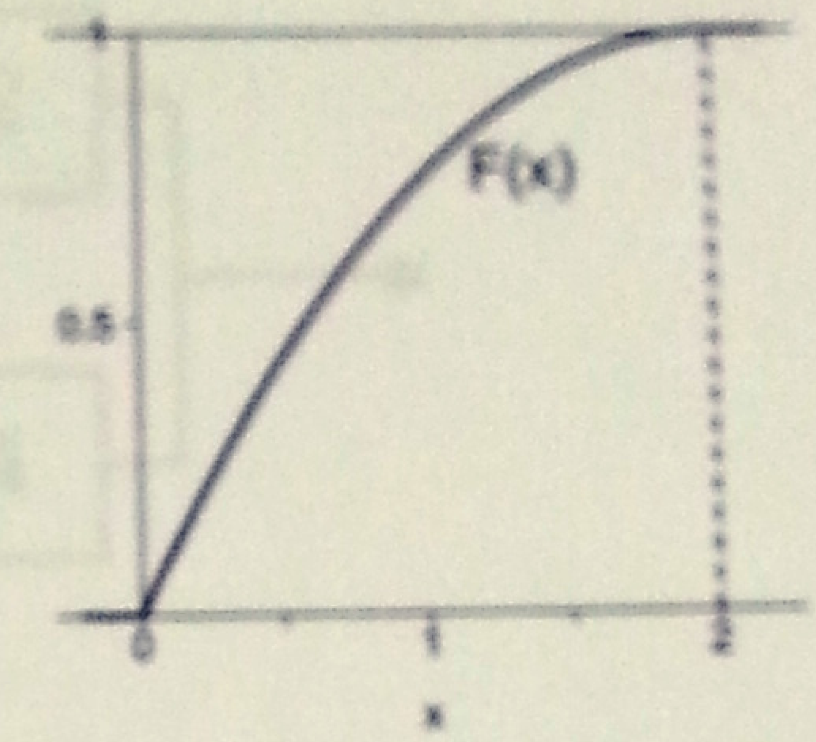
lower Fence = $Q_1 - h = 25 - 13{,}5 = 11{,}5$

upper Fence = $Q_3 + h = 34 + 13{,}5 = 47{,}5$

$h = 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 1{,}5(34 - 25) = 13{,}5$

Die Verteilungsfunction einer sG X lautet wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



Bestimmen Sie:

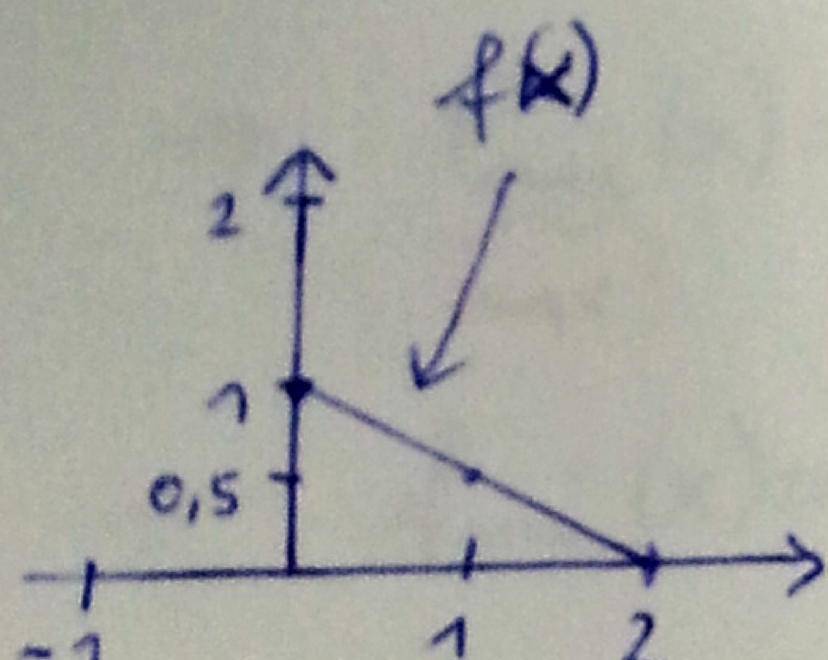
[2] die Dichte von X (plus Zeichnung).

[1] den Erwartungswert von X.

[1] die Varianz von X.

[1] Erwartungswert und Varianz von $Y = 3X + 1$

$f(x) = F'(x) = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)' = 1 - \frac{x}{2}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$E(X) = \int_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = 2 - 1{,}\dot{3} = 0{,}\dot{6}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0{,}\dot{6} - (0{,}\dot{6})^2 = 0{,}\dot{2}$

$E(X^2) = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} = 2{,}\dot{6} - 2 = 0{,}\dot{6}$

$E(3X+1) = \int_0^2 (3x+1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 3x - \frac{3x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2}\,dx = \int_0^2 -\frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 1\,dx =$

$= -\frac{3x^3}{3 \cdot 2} + \frac{5x^2}{4}\Big|_0^2 = -4 + 5 = 1$

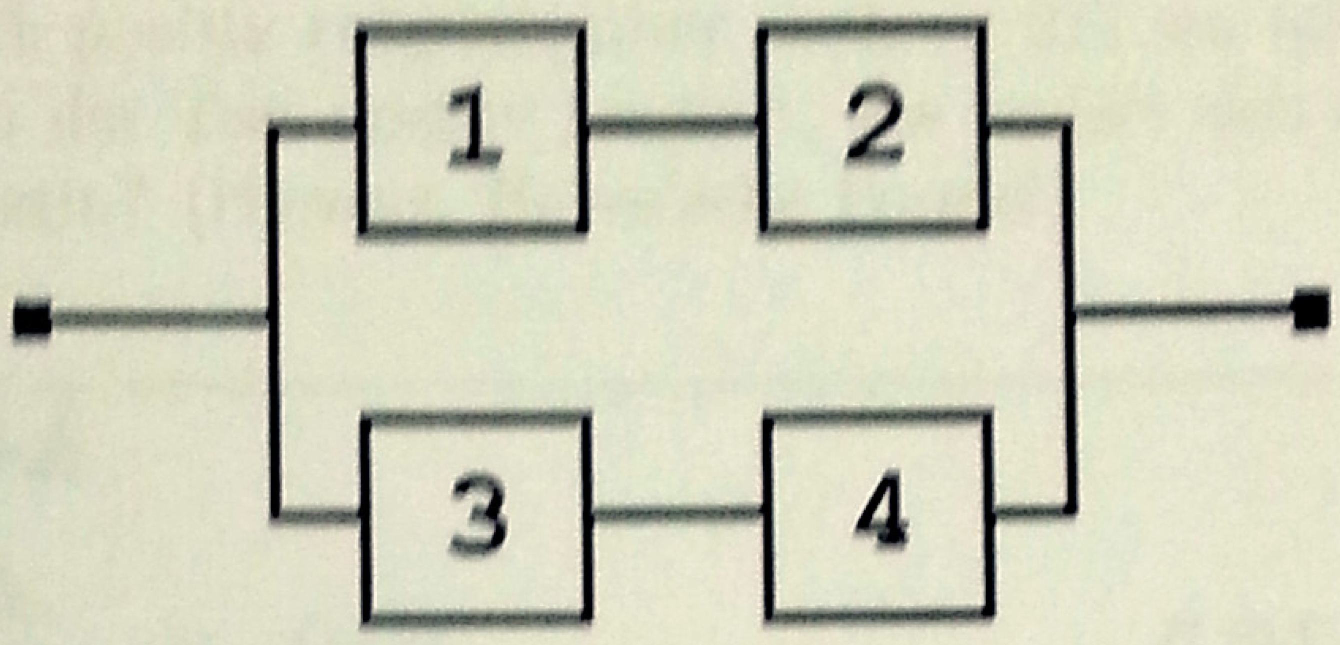
einfacher?

$E(9X^2+6X+1) = \int_0^2 (9x^2+6x+1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 9x^2 + 6x + 1 - \frac{9x^3}{2} - 3x^2 - \frac{x}{2}\,dx =$

$= \int_0^2 -\frac{9x^3}{2} + 6x^2 + \frac{11x}{2} + 1\,dx = -\frac{9x^4}{8} + 2x^3 + \frac{11x^2}{4}\Big|_0^2 = 9$

$Var(Y) = 9 - 1^2 = 8$

Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}$ ($\widehat{=}$ Exp(1)). Wenn X die Lebensdauer des Systems ist, bestimmen Sie:

$F(x) = 1 - e^{-x}$

→ [3] die Verteilungsfunktion von X

→ [1] die Dichte von X

[1] den Erwartungswert von X

$$F_{min12}(x) = F_{min34}(x) = 1 - e^{-n\lambda x} = 1 - e^{-2x}$$

→ $$F_{min}(x) = F_{min12}(x) \cdot F_{min34}(x) = (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}) = 1 - e^{-2x} - e^{-2x} + e^{-4x} =$$
$$= 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x}$$

max?

→ $$f_{min}(x) = (1 - 2e^{-2x} + e^{-4x})' = 4e^{-2x} - 4e^{-4x}$$

$$E(X) = \int_0^\infty x(4e^{-2x} - 4e^{-4x})\,dx = \frac{4e^{-2x}}{-2} - \frac{4e^{-4x}}{-4} \Big|_0^\infty = -2e^{-2x} + e^{-4x} \Big|_0^\infty =$$
$$= 2 - 1 = 1$$

2

[2] Eine Ärztin ist zu 30% davon überzeugt, dass eine Person eine bestimmte Krankheit hat. Zur genaueren Abklärung führt sie einen Bluttest durch, der bei Vorliegen der Krankheit zu 95% positiv reagiert, aber auch zu 2% ein falsch positives Resultat liefert. Wenn nun der Test positiv reagiert, wie ändert sich dadurch die erste Einschätzung der Ärztin? (Hinweis: Bayes'sche Formel)

A... Person ist krank

B... Test ist pos.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)} = \frac{0{,}95\cdot 0{,}3}{0{,}95\cdot 0{,}3 + 0{,}02\cdot 0{,}7} =$$

$$= \frac{0{,}285}{2{,}999} = 95{,}32\,\%$$

✓

1/2

[1] Die Dichte der sG X sei $f_X(x) = 2x\, I_{(0,1)}(x)$. Wie lautet die Dichte von $Y = \sqrt{X}$? (Hinweis: Transformationssatz)

$g(x) = \sqrt{x}$

$g^{-1}(x) = x^2$

$$f_Y = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = 2y^2 \cdot |2y| = 4y^3 \quad , y \in ?$$

2

[2] Welche der folgenden R–Commands generiert $n = 100$ unabhängige Beobachtungen einer sG X mit der Dichte $f(x) = 2x\, I_{(0,1)}(x)$? (Hinweis: Inversionsmethode)

☒	☐	☐
`u <- runif(100)` `x <- sqrt(u)`	`u <- runif(100)` `x <- u/2`	`u <- runif(100)` `x <- 2*u`

$$F(x) = \int_0^x 2t\, dt = t^2 \Big|_0^x = x^2$$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

✓

1

[1] Der Korrelationskoeffizient ρ von zwei sGn X, Y mit der gemeinsamen W–Funktion:

$$p(x,y) = \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad (x,y) = (0,0),\ (1,1),\ (2,2)$$

($p(x,y) = 0$ sonst) ist gegeben durch:

☐ $\rho = 0$ ☐ $\rho = -1$ ☒ $\rho = 1$ ✓

1

[1] X_1, X_2, X_3, X_4 seien ua. nach N(0, 1) verteilte sGn. Wie ist $X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4$ verteilt? (Hinweis: Additionstheorem)

$\mu_n = 0$

$\sigma_n^2 = 1^2 \cdot 1 + (-2)^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + (-4)^2 \cdot 1 = 1+4+9+16 = 30$

$N(0,30)$ ✓

–

[1] Angenommen, die Bedienungszeit an der Kassa eines Supermarkts ist eine sG mit einem Mittelwert und einer Streuung von 3 Minuten. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit wird für die Bedienung von 16 Kunden insgesamt mehr als 1 Stunde benötigt? (Hinweis: ZGVS).

$n = 16 \quad \mu = \sigma = \frac{3}{60}$

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \phi\left(\frac{1 - \frac{3}{60}}{\frac{\frac{3}{60}}{\sqrt{16}}}\right) = 0$

2

[2] Eine symmetrische Münze wird 20 Mal unabhängig geworfen. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit bekommt man exakt 10 Köpfe? (Hinweis: ZGVS mit Stetigkeitskorrektur).

$n = 20 \quad p = 0{,}5$

$P(X=10) = 1 - P(X<10) - P(X>10) = 1 - P(X \leq 9) - 1 + P(X \leq 10) =$

$P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = \phi\left(\frac{10{,}5 - 20 \cdot 0{,}5}{\sqrt{20 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) - \phi\left(\frac{9{,}5 - 20 \cdot 0{,}5}{\sqrt{20 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) =$

$= \phi(0{,}224) - \phi(-0{,}224) = 2\phi(0{,}224) - 1 = 2 \cdot 0{,}5871 - 1 = 0{,}1742 = 17{,}42\%$

✓

Für eine Stichprobe x der Größe $m = 8$ von $X \sim \mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(m=length(x), mean=mean(x), var=var(x), sd=sd(x))
  m  mean   var    sd
  8 11.79 7.687 2.773
```

2 [2] Testen Sie zum Niveau 5%: $\mathcal{H}_0 : \mu_X = 10$ gegen $\mathcal{H}_1 : \mu_X > 10$

H_0 verwerfen wenn:

$T_0 > t_{m-1;1-\alpha} = t_{7;0,95}$

$1{,}82578 \not> 1{,}895$

$$T_0 = \frac{\overline{X}_m - \mu_0}{\frac{S_m}{\sqrt{m}}} = \frac{11{,}79 - 10}{\frac{2{,}773}{\sqrt{8}}} = 1{,}82578$$

✓

$\Rightarrow H_0$ kann nicht verworfen werden

Für eine von der obigen Stichprobe unabhängige zweite Stichprobe y der Größe $n = 10$ von $Y \sim \mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(n=length(y), mean=mean(y), var=var(y), sd=sd(y))
   n  mean   var    sd
  10 15.14 10.19 3.193
```

Bestimmen Sie unter der Annahme $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$:

3

[1] den gepoolten Varianzschätzer S_p^2.

[2] ein 95% Konfidenzintervall für $\mu_Y - \mu_X$.

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2} = \frac{7 \cdot 7{,}687 + 9 \cdot 10{,}19}{16} = 9{,}09494$$

✓

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

$t_{16;0,975} = 2{,}12$

$$11{,}79 - 15{,}14 \pm 2{,}12 \cdot \sqrt{9{,}09494} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} = [-6{,}383; -0{,}3173]$$

✓

2

[2] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Verteilung mit der Dichte:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \quad (= 0 \text{ sonst})$$

Bestimmen Sie den ML-Schätzer von θ (> 0). (Genaue Herleitung!)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L(\theta) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{\theta}\right) + \left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$(\ln L(\theta))' = -n\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad ✓$$

$$\theta n = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1

[1] Bei einer Meinungsbefragung von 300 Personen waren 55% für ein bestimmtes Projekt. Bestimmen Sie ein 95% Konfidenzintervall für den Anteil der Befürworter.

$\hat{p} = 0{,}55 \quad n = 300 \qquad z_{0,975} = 1{,}96$

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}55 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{300}} =$$

$$= [0{,}494; 0{,}606] \quad ✓$$

1/2

[2] Bei der Kreuzung von bestimmten Planzen ergeben sich laut Theorie drei Genotypen im Verhältnis 9 : 12 : 4. Ist die Theorie haltbar, wenn bei einem Experiment mit 100 Planzen 26 vom Typ1, 57 vom Typ2 und 17 vom Typ3 sind? (Testen Sie zum Niveau $\alpha = 10\%$.)

$\frac{100}{9+12+4} = 4 \qquad p_{i1} = 9 \cdot 4\% = 36\%$

$p_{i2} = 12 \cdot 4\% = 48\%$

$p_{i3} = 4 \cdot 4\% = 16\%$

Klasse	x_i	p_{i0}	np_{i0}	$(x_i - np_{i0})^2/np_{i0}$
1	26	0,36	9,36	29,5822
2	57	0,48	27,36	32,11
3	17	0,16	2,72	74,97
			=100?	$136{,}662 = Q_2$

H_0 verwerfen wenn:

$Q_2 > \chi^2_{2;0,9}$

$136{,}662 > 4{,}6$

$\Rightarrow H_0$ wird verworfen