7. Man prüfe nach, ob die gemischte partielle Ableitung f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:

a) $f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2} = x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2}$

$f_x = 2x \cdot \frac{1}{1+y^2}$

$f_y = x^2 \cdot \frac{0 \cdot (1+y^2) - 1 \cdot (2y)}{1+y^2} = x^2 \cdot \frac{-2y}{1+y^2}$ Quotientenregel!

$$\left.\begin{array}{l} f_{xy} = 2x \cdot \frac{0 \cdot (1+y^2) - 1 \cdot (2y)}{1+y^2} = \frac{-4xy}{1+y^2} \text{ Quotientenregel!} \\ f_{yx} = 2x \cdot \frac{-2y}{1+y^2} = \frac{-4xy}{1+y^2} \end{array}\right\} f_{xy} = f_{yx}$$

b) $f(x,y) = x^3 \cdot e^{y^2}$

$f_x = 3x^2 \cdot e^{y^2}$

$f_y = x^3 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$ Kettenregel!

$$\left.\begin{array}{l} f_{xy} = 3x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y \\ f_{yx} = 3x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y \end{array}\right\} f_{xy} = f_{yx}$$

c) $f(x,y) = \sqrt{xy^3} = \left(xy^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy^3}} \cdot y^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{\sqrt{xy^3}}$

$$f_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3y^2 \cdot \sqrt{xy^3} - y^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy^3}} \cdot x \cdot 3y^2}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{6y^2 \cdot \left(\sqrt{xy^3}\right)^2 - x \cdot 3y^5}{2 \cdot \sqrt{xy^3}}}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) =$$

$$f_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6xy^5 - 3xy^5}{2 \cdot \sqrt{xy^3}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6xy^5 - 3xy^5}{2 \cdot \sqrt{xy^3}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3xy^5}{2 \cdot \sqrt{xy^3} \cdot xy^3} \right) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{xy^3}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy^3}} \cdot x \cdot 3y^2 = \frac{3xy^2}{2 \cdot \sqrt{xy^3}} = \frac{3y^2}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{xy^3}}$$

$$f_{yx} = \frac{3y^2}{2} \cdot \left(\frac{1 \cdot \sqrt{xy^3} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy^3}} \cdot y^3}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) = \frac{3y^2}{2} \cdot \left(\frac{\frac{2 \cdot \left(\sqrt{xy^3}\right)^2 - x \cdot y^3}{2 \cdot \sqrt{xy^3}}}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) = \frac{3y^2}{2} \cdot \left(\frac{2xy^3 - xy^3}{2 \cdot \sqrt{xy^3}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{xy^3}\right)^2} \right) =$$

$$f_{yx} = \frac{3y^2}{2} \cdot \left(\frac{xy^3}{2 \cdot \sqrt{xy^3} \cdot xy^3} \right) = \frac{3y^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{xy^3}} \right) = \frac{3y^2}{4 \cdot \sqrt{xy^3}} \rightarrow f_{xy} = f_{yx}$$