Beispiel 83 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 10, 08.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen:

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36, \qquad x_0 = 6, x_1 = 3$$

2 Theoretische Grundlagen: Imhomogene Differenzengleichungen n-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung (Störfunktion in unserem Fall $s_n = f(n) = 36$) in der Form

$$a_n + d_{k-1}a_{n-1} + \cdots + d_o a_{n-k} + f(n) = 0 \qquad n \geq k$$

ist die Addition der Lösung der allgemeinen homogenen Differenzengleichung ($x_n^{(h)}$) und der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ($x_n^{(p)}$):

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung kann durch die Ansatzmethode gewonnen werden - abhängig von der Gestalt der Störfunktion - man erhält unbestimmte Koeffizienten:

- $\mathbf{s_n = f(n) = c, c \in \mathbb{R}}$

  Anwendung der Versuchslösung A

- $\mathbf{s_n = f(n) = r^n}$

  Anwendung der Versuchslösung Ar^n

- $\sin(\mathbf{rn})$ oder $\cos(\mathbf{rn})$

  Anwendung der Versuchslösung $A\sin(rn) + B\cos(rn)$

- n^k oder Polynom n-ten Grades:

  Anwendung der Versuchslösung $A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots$

- $n^k \cdot r^n$

  Anwendung der Versuchslösung $(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots) \cdot r^n$

- $\mathbf{s_n} = \mathbf{f(n)} = \mathbf{P}_\mu\mathbf{(n)}$ (Polynom mit Grad μ in der Form $f(n) = P_\mu(n) \cdot q^n$; $q \in \mathbb{R}$ - ist q eine Nullstelle?
  - ja, ist Nullstelle - Ansatz: $a_n^{(p)} = n^\lambda \cdot Q_\mu(n) \cdot q^n$ ($Q_\mu(n)$ ist Polynom vom Grad μ)
  - nein - Ansatz wie oben, jedoch $\lambda = 0$
- $\mathbf{f(n)} = \mathbf{P}_\mu\mathbf{(n)} \cdot \mathbf{q^n} \cdot \cos(\mathbf{n}\alpha)$ bzw. $\mathbf{f(n)} = \mathbf{P}_\mu\mathbf{(n)} \cdot \mathbf{q^n} \cdot \sin(\mathbf{n}\alpha)$ - Ansatz anhängig von q:
  - $\bar{q}_{1,2} = q(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$ sind konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit λ, so lautet der Ansatz ($R_\mu(n)$ und $S_\mu(n)$ Polynome vom Grad μ):
  $$a_n^{(p)} = n^\lambda R_\mu(n) q^n \cos(n\alpha) + n^\lambda S_\mu(n) q^n \sin(n\alpha)$$
  - $\bar{q}_{1,2}$ keine Nullstellen, dann $\lambda = 0$ (Ansatz sonst wie oben)

3 Lösung des Beispiels

Um die Ansatzmethode verwenden zu können formen wir die Angabe um zu:

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - \frac{7}{4}x_n = 9$$

Mit dem Ansatz $x_n = \lambda$ finden wir zunächst die **allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung**

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - \frac{7}{4}x_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 + 3\lambda - \frac{7}{4} = 0$$

Nullstellen nach Wurzelsatz von Vieta: $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} \qquad \lambda_1 = -\frac{7}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$

Beide Lösungen sind reell und unterschiedlich - daher gilt folgende allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung:

$$x_n^{(h)} = c_1 \cdot (-\frac{7}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1}{2})^n$$

Nun wenden wir uns der **partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung** für die Störfunktion $s_n = 36$ zu. Für diese wählen wir die Versuchslösung $x_n^{(p)} = A$ und setzen diese in die inhomogene Gleichung ein:

$$4A + 12A - 7A = 36 \qquad \Rightarrow \qquad A = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_n^{(p)} = 4$$

Wir fassen nun die homogene und partikuläre Lösung zur **allgemeinen Lösung** zusammen:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = c_1 \cdot (-\frac{7}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1}{2})^n + 4$$

Nun noch die **spezielle Lösung (gegebene Anfangsbedingungen $\mathbf{x_0 = 6, x_1 = 3}$)**:

$$x_0 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad 6 = c_1 \cdot (-\frac{7}{2})^0 + c_2 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 4 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 4$$
$$x_1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 3 = c_1 \cdot (-\frac{7}{2})^1 + c_2 \cdot (\frac{1}{2})^1 + 4 = c_1 \cdot (-\frac{7}{2}) + c_2 \cdot \frac{1}{2} + 4$$

Durch Elimination erhält man die Lösung dieses linearen Gleichungssystems:

$$I: \; c_1 + c_2 = 2 \qquad II: \; -1 = -\frac{7}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 \qquad II \cdot 2$$
$$I: \; c_1 + c_2 = 2 \qquad II: \; -2 = -7c_1 + c_2$$
$$\text{Umformen II:} \qquad c_2 = -2 + 7c_1 \qquad \text{in I einsetzen} \ldots$$
$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x_n = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{7}{2})^n + \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2})^n + 4}$$