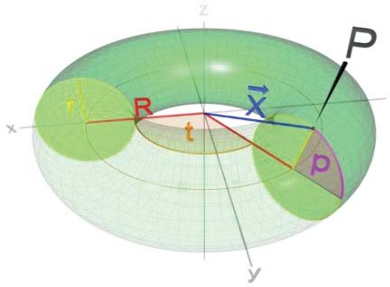
Aufgabe 4

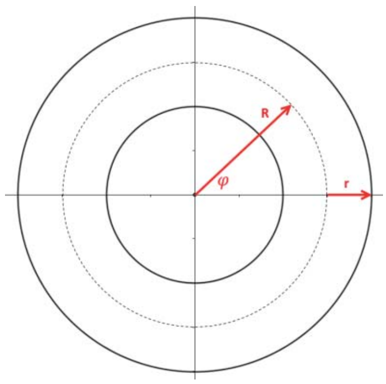
Zeigen Sie, dass die Funktion: $\vec{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\vec{x}(\Theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\Theta,\varphi) \\ y(\Theta,\varphi) \\ z(\Theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\Theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\Theta)\sin\varphi \\ r\sin\Theta \end{pmatrix} \quad mit\ 0 \le \Theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$$

als Parametrisierung der Oberfläche eines Torus angesehen werden kann. Erklären Sie diese Darstellung anhand einer geeigneten Skizze. Wie lautet die Jakobi-Matrix dieser Funktion?



Ein Torus besitzt die Form eines „Donuts". Seine Grundfläche besteht aus zwei Kreisen mit $x = 0, y = 0$ als Mittelpunkt. Für die x und y Funktion betrachtet man am besten die Grundfläche:



Beginnen wir mit der x-Funktion, die Andere unterscheidet sich bis auf den Drehwinkel nicht. Gehen wir davon aus, dass $y = 0$ und $z = 0$ ist. Der Vektor zeigt nach rechts. Seine Länge ist $R + r$. Belassen wir $y = 0$ und setzen $z = r$, folgt logischerweise $x = R$, da der Vektor immer nur auf die Mantelfläche zeigen kann. Somit ist die x-Funktion von einem Drehwinkel Θ abhängig, der angibt, wie groß z ist. Aus der Definition wissen wir, dass Θ bei 0 startet und damit ist die z-Funktion "$r * \sin 0 = 0$". x ist also bei $\Theta = 0$ am Größten. Deshalb verwenden wir $r * \cos\Theta$:

$$x(\Theta) = R + r * \cos\Theta$$

Analog kann die y-Funktion definiert werden. Setzen wir $x = 0$, folgt auf dem gleichen Weg wie die x-Funktion:

$$y(\Theta) = R + r * \cos\Theta$$

Das Verhältnis in einem Kreis ist $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Wir brauchen einen weiteren Drehwinkel φ, mit dem wir zwischen x und y variieren können.

$$x(\Theta,\varphi) = (R + r * \cos\Theta)\cos\varphi$$
$$y(\Theta,\varphi) = (R + r * \cos\Theta)\sin\varphi$$

Somit bleibt nur noch die z-Funktion übrig. Da z bei $\Theta = 0$ auch 0 annimmt, können wir den Sinus verwenden:

$$z(\Theta,\varphi) = r * \sin\Theta$$

Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix ist eine m x n Matrix einer differenzierbaren Funktion, die alle partiellen Ableitungen beinhaltet. Unsere Funktion ist definiert mit:

$$\vec{x}(\Theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\Theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\Theta)\sin\varphi \\ r\sin\Theta \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta\Theta} & \frac{\delta y}{\delta\Theta} & \frac{\delta z}{\delta\Theta} \\ \frac{\delta x}{\delta\varphi} & \frac{\delta y}{\delta\varphi} & \frac{\delta z}{\delta\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\Theta\cos\varphi & -r\sin\Theta\sin\varphi & r\cos\Theta \\ -(R + r\cos\Theta)\sin\varphi & (R + r\cos\Theta)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$