Zur VO Pruefung kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.

Jegliche Antworten stammen vom tuwel-test. Es sind keine eigenen Lösungsversuche inkludiert.

1 Definition von Konvergenz

Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge a_n sind äquivalent zu “a_n ist konvergent” (in $\mathbb{R}$)?

Dazu können Eigenschaften der Form “Q l R r” abgefragt werden, wobei es folgende Möglichkeiten gibt:

Q
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, ✓
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \geq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \neq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$,
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 1)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, ✗
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$, ✓ M kann auch beliebig sein
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M+1)$, ✓ M kann beliebig sein
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n > M)$, ✗
- $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\exists n > M)$, ✗ existiert ein n is nonsense

l
- $|a_n - a|$, ✓
- $|a - a_n|$, ✓
- $a_n - a$, ✗ würde negativ werden
- $a - a_n$ ✓ dann ists immer gültig, außer e ist auch IMMER negativ

R
- $<$, ✓
- $\leq$, ✓
- $>$ ✗

r
- ε, ✓
- $\varepsilon + 1$, ✓
- ε^2, ✓
- $\frac{\varepsilon}{2}$, ✓
- $\sqrt{\varepsilon}$; ✓

alles fallabhängig!!

per Definition:

$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists M)(\forall n > M)\,|a - a_n| < \varepsilon$

(laut den Folien)

Ebenfalls gefragt werden können Cauchyfolgen-Varianten, d.h., “Q l R r” mit R und r wie oben, und:

Q
- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n, m > M)$ ✓
- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall M)\,(\exists n, m > M)$ ✗ existiert ist falsch
- $(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n, m > M)$ ✗

l
- $|a_n - a_m|$, ✓
- $|a_m - a_n|$, ✓
- $a_n - a_m$, ✗
- $a_m - a_n$ ✓

Beispiel: Q sei $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$ und l sei $a_n - a$ und R sei $>$ und r sei ε^2; dann ergibt sich die Frage:

> Ist folgende Aussage äquivalent zu “a_n ist konvergent:” $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)\,a_n - a > \varepsilon^2$.

Formal sind das also 660 “verschiedene” Fragen.

Hinweise: Das sollte alles offensichtlich sein; beachte allerdings folgende möglicherweise überraschende Kombinationen:
$\dots(\forall\varepsilon \neq 0)\dots < \varepsilon^2$
$\dots(\forall n, m > M)\dots a_n - a_m < \varepsilon$ (ohne Betrag-Striche!)

2 Logik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ, ψ, für beliebige Menge A)

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt “wenn dann” bzw “impliziert”; $\leftrightarrow$ heißt “gdw”, $\wedge$ heißt “und”, $\vee$ “oder” und $\neg$ “nicht”.

(a) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$. ✗

(b) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$. ✓

(c) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$. ✗

(d) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\varphi \to \neg\psi$. ✗

(e) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\psi \to \neg\varphi$. ✓

(f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ impliziert $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. ✓

Und dieselben Fragen nochmals für “gdw” statt “impliziert”.
(Antworten gleich bei impliziert & gdw)

3 Ordnungen, Vollständigkeit

Welche der folgenden Aussagen gilt in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:

(a) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(b) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(c) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(d) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(e) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(f) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(g) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

(h) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

4 Wachtumsraten

Ordne die folgenden Folgen nach Ihrer Wachstumsrate ($\ll$), wobei $k > 2$ und $1 < \ell < 2$

$$\log(n) \ll \sqrt[k]{n} \ll \sqrt{n} \ll \sqrt[l]{n} \ll n \ll n \cdot \log(n) \ll n^l \ll n^2 \ll n^k \ll 2^n$$

(a) $\log n$

(b) $\sqrt[k]{n}$

(c) $\sqrt{n}$

(d) $\sqrt[l]{n}$

(e) n

(f) $n\log(n)$

(g) n^ℓ

(h) n^2

(i) n^k

(j) 2^n

(Allenfalls gefragt in der Form: Gilt $\log(n) \ll n^k$ etc, das sind dann 56 “verschiedene” Fragen.)

5 Arithmetik mit Limiten

Wir setzen voraus dass die Folge a_n konvergiert und die dazugehörige Reihe konvergiert, und dasselbe für b_n. Was gilt dann allgemein:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ ✓

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ ✓

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ ✓

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert ✗

(e) a_n hat einen Häufungspunkt ✓

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ✓

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$ ✗

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ ✓

6 Konvergenzkriterien

Sei a_n eine Folge. Was gilt allgemein: (Alternierend heißt dass a_n abwechselnd ≥ 0 und ≤ 0 ist.)

(a) Wenn a_n beschränkt ist, dann konvergiert a_n. ✗

(b) Wenn a_n beschränkt ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓

(c) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann konvergiert a_n. ✓

(d) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓

(e) Wenn a_n einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n. ✗

(f) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓

(g) Wenn a_n genau einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n. ✗

(h) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n genau einen Häufungspunkt. ✓

(i) Wenn a_n konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗

(j) Wenn a_n eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗

(k) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert a_n. ✓

(l) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann is a_n eine Nullfolge. ✓

wenn die Reihe konvergiert, muss a_n eine Nullfolge sein

(m) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✓

(n) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ✗

konvergent vs absolutkonvergen

(o) Wenn a_n alternierend ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗

aus altanierend kann nichts geschlossen werden

(p) Wenn a_n alternierend und eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗

Aus der Nullfolge kann nichts geschlossen werden

(q) Wenn a_n alternierend ist und $|a_n|$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✓

Laibniz Kriterium

7 Mehr Konvergenz

Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Was gilt dann allgemein:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. ✗

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot a_n$ konvergiert. ✓

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$ konvergiert. ✗

sqrt n würde nicht gegen 0 gehen => keine Nullfolge mehr

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konvergiert. ✓

a_n/sqrt n geht wieder gegen null => Nullfolge

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. ✗

8 Mengenschreibweise

Welche der Folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen wir hier mit (a, b) etc reelle Intervalle, und $\langle a, b\rangle$ das geordnete Paar.

(a) $\langle 2, 3\rangle = \langle 3, 2\rangle$ ✗

(b) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$ ✓

(c) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$ ✓

(d) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3]$ ✗

(e) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3)$ ✗

(f) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$ ✗

(g) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3] \setminus \{2\}$ ✗

(h) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$ ✓

9 Topologie metrischer Räume (dazu gibts alle Antworten in den Folien)

Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein in jedem metrischen Raum (X, d):

- $\emptyset$ ist offen. ✓
- X ist offen. ✓
- Die Vereinigung offener Mengen ist offen. ✓
- Die Vereinigung endlich vieler offener Mengen ist offen. ✓
- Die Vereinigung zweier offener Mengen ist offen. ✓
- Der Schnitt offener Mengen ist offen. ✗
- Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. ✓
- Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen. ✓
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist offen. ✓
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist offen. ✓
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist offen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist offen. ✗
- $\emptyset$ ist abgeschlossen.
- X ist abgeschlossen. ✓
- Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✗
- Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✓
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✓

10 De Morgan Regeln

Seien A, B und C_i (für $i \in I$) Teilmengen von X: Welche der folgenden Aussagen gilt für alle solche Mengen:

1) Wenn sich die Vereinigung/Schnitt nicht ändert, dann ist es falsch
2) Das X\C_i steht nie in der Vereinigung/Schnitt Funktion
3) X \ (A U B) = A ^ B ist falsch

- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$ ✓
- $X \setminus \bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i)$ ✗
- ~~$X \setminus \bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$~~ ✗
- $\bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcap_{i\in I} C_i$ ✓
- $X\setminus\bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i)$ ✗
- ~~$X\setminus\bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcup_{i\in I} C_i$~~ ✗
- $X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcup_{i\in I} C_i$ ✓
- $X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i)$ ✗
- ~~$X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = \bigcap_{i\in I} C_i$~~ ✗
- $\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcup_{i\in I} C_i$ ✓
- $X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcup_{i\in I}(X\setminus C_i)$ ✗

- ~~$X\setminus\bigcap_{i\in I}(X\setminus C_i) = X\setminus\bigcap_{i\in I} C_i$~~ ✗
- $X\setminus(A\cup B) = (X\setminus A)\cap(X\setminus B)$ ✓
- ~~$X\setminus(A\cup B) = (X\setminus A)\cup(X\setminus B)$~~ ✗
- $X\setminus(A\cup B) = A\cap B$ ✗

gleich

- $X\setminus((X\setminus A)\cup(X\setminus B)) = A\cap B$ ✓
- ~~$X\setminus((X\setminus A)\cup(X\setminus B)) = (X\setminus A)\cup(X\setminus B)$~~ ✗
- ~~$X\setminus((X\setminus A)\cup(X\setminus B)) = A\cap B$~~

gleich

- $(X\setminus A)\cup(X\setminus B) = X\setminus(A\cap B)$ ✓
- ~~$(X\setminus A)\cup(X\setminus B) = X\setminus((X\setminus A)\cup(X\setminus B))$~~ ✗
- ~~$(X\setminus A)\cup(X\setminus B) = X\setminus(A\cap B)$~~

11 Bild und Urbild

Sei $f : X \to Y$ und A, B Teilmengen von X und C, D von Y. Welche Aussagen gelten allgemein:

- $f''A \cup f''B = f''(A\cup B)$ ✓
- $f''A \cap f''B = f''(A\cap B)$ ✗
- $f''(A)\setminus f''(B) = f''(A\setminus B)$ ✗
- $f''A \cup f''B \subseteq f''(A\cup B)$ ✓
- $f''A \cap f''B \subseteq f''(A\cap B)$ ✗
- $f''(A)\setminus f''(B) \subseteq f''(A\setminus B)$ ✓

- $f''A \cup f''B \supseteq f''(A\cup B)$ ✓
- $f''A \cap f''B \supseteq f''(A\cap B)$ ✓
- $f''(A)\setminus f''(B) \supseteq f''(A\setminus B)$ ✗
- $f^{-1}C \cup f^{-1}D = f^{-1}(C\cup D)$ ✓
- $f^{-1}C \cap f^{-1}D = f^{-1}(C\cap D)$ ✓
- $f^{-1}C \setminus f^{-1}D = f^{-1}(C\setminus D)$ ✓

1) f^-1 ist immer richtig
2) f''(A U B) ist immer richtig
3) die Markierten sind richtig

12 Exponentiation und Logarithmus

Welche der folgenden Aussagen gilt für alle x, y in $\mathbb{R}$ und a, b in $\mathbb{R}^{>0}$:

- $e^{(x^y)} = e^{x\cdot y}$ ✗
- $(e^x)^y = e^{x\cdot y}$ ✓
- $e^{x\cdot y} = e^x \cdot e^y$ ✗
- $e^{x\cdot y} = e^x + e^y$ ✗

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ✓
- $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$ ✓
- $a^x = \ln(a)\cdot e^x$ ✗
- $e^x = a^{x\cdot\ln(a)}$ ✗

- $\ln_a(x) = \ln(x)\cdot\ln(a)$ ✗
- $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ ✓
- $\ln_a(x) = \ln(x)+\ln(a)$ ✗
- $\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y)$ ✓

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ ✗
- $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$ ✗
- $\ln(x+y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ ✗
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$ ✓

- $\ln(x)^r = \ln(r \cdot x)$ ✗
- $\ln(x)^r = \ln(r) \cdot \ln(x)$ ✗
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ✓
- $e^{-n} = \sqrt[n]{e}$ ✗
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$ ✓

- $\ln(-x) = \frac{1}{\ln(x)}$ ✗
- $\ln(-x) = -\ln(x)$ ✗
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ ✓
- $\ln(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\ln(x)}$ ✗

13 Beispiele für (Un)stetigkeit

An welchen Punkten ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig? An welchen $x \cdot f(x)$?

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \begin{cases} 2022 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

14 Eigenschaften stetiger Funktionen

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle stetigen $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $f''A$ ist ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$. ✗

Die richtigen starten immer mit "Wenn A = [a, b]"

- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A$ ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$. ✓
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. ✓
- Wenn $A = (a, b)$, dann ist $f''A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. ✗
- Wenn $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$. ✗
- Wenn $A = [a, b]$ and $x < y < z$ in $\mathbb{R}$ und x, z in $f''A$, dann ist $y \in f''A$. ✓
- Wenn $A = [a, b]$ und f injektiv, dann ist f streng monoton. ✓
- Wenn f injektiv, dann ist f streng monoton. ✗

15 Monotonie und Extrema

Welche der folgenden Aussagen gelten:

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar. ✗
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig. ✓
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. Wenn f differenzierbar ist und bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$. ✓
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. Wenn f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Extremum hat. ✗ weil es auch ein Sattelpunkt sein kann
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. Wenn f' bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist f bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$. ✗ muss nicht sein, dass es differenzierbar ist
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist f streng monoton steigend. ✓ f'(x) > 0 --> streng monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ genau dann wenn f streng monoton steigend ist. ✗ f'(x) > 0 <-> streng monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f streng monoton steigend ist, dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. ✗ f'(x) > 0 <-- streng monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist f monoton steigend. ✓ f'(x) >= 0 --> monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ genau dann wenn f monoton steigend ist. ✓ f'(x) >= 0 <--> monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f monoton steigend ist, dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. ✓ f'(x) >= 0 <-- monoton steigend
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. ✗ Von der Monotonie kann nicht auf differenzierbarkeit geschlossen werden

16 Konkrete Funktionen

Sind die folgenden Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ (mit dem natürlichen Definitionsbereich A) injektiv, surjektiv, bijektiv, stetig, differenzierbar?

i s b t d

- $\frac{1}{x}$ isbtd
- $\frac{1}{x^2}$ isbtd
- $\frac{1}{x^{2022}}$ isbtd
- $\frac{1}{x^{2023}}$ isbtd
- x^{-2023} isbtd
- x^{-2022} isbtd
- x^{-2} isbtd
- x^{-1} isbtd
- $\ln(x)$ isbtd
- $\ln(x^2)$ isbtd
- $\ln(|x|)$ isbtd
- $\ln(\frac{1}{x})$ isbtd

- e^x isbtd
- $\frac{1}{e^x}$ isbtd
- $|x|$ isbtd
- $\sqrt{x}$ isbtd
- $\sqrt[3]{x}$ isbtd
- $\sqrt[2022]{x}$ isbtd
- $\sqrt[2023]{x}$ isbtd
- $\sqrt{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[3]{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[2022]{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[2023]{|x|}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{3}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $|x|^{\frac{1}{2}}$ isbtd
- $|x|^{\frac{1}{3}}$ isbtd
- $|x|^{\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $|x|^{\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{|x|}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{3}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{3}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $\sin(x)$ isbtd
- $\sin(\cos(\sin(\cos(\sin(x)))))$ isbtd
- $\sin(|x|)$ isbtd
- $\cos(|x|)$ isbtd

Hinweis: Differenzierbar heißt "auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar." $\frac{1}{x}$ ist z.B. differenzierbar (0 ist ja nicht im Definitionsbereich). Dagegen sind die Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ nicht differenzierbar (sie sind bei 0 definiert, aber nicht differenzierbar. Bei $x \neq 0$ sind sie natürlich schon differenzierbar). Achtung: $\sin(|x|)$ und $\cos(|x|)$ sind überall (auch bei 0) stetig. Sind sie bei 0 auch differenzierbar?

(kann sein, dass Sachen teilweise falsch sind, da es leicht ist, sich in der zeile zu verschauen)

(stetigkeit wurde wegen 15.2 aus der differenzierbarkeit abgeleitet; bijektivität folgt aus injektivität und surjektivität (falls beide gelten); stetigkeit der Betragsfunktion folgt aus Aufgabe 13)

1) sin () ohne Bruch ist undef
2) 1/x ist undef

17 Limiten

Ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, oder undefiniert? (Wenn definiert, gib c an.) Dabei wird $f : A \to \mathbb{R}$ angenommen für das natürliche A.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ 1
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ undef.
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ ∞
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}$ undef.
- $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}$ $-\infty$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ 0
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(|x|)}{x^2}$ 0
- $\lim_{x\to \infty} \sin(x)$ undef.
- $\lim_{x\to \infty} e^x$ ∞
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x}$ 0
- $\lim_{x\to -\infty} e^x$ 0
- $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ undef.
- $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$ 0
- $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln(x)}$ ∞
- $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ 0
- $\lim_{x\to \infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 1
- $\lim_{x\to \infty} e^{-x^2}$ 0
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$ $-\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x)}$ 0

Achtung: Der Definitionsbereich von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und der von $\frac{\ln(x)}{x}$ etc nur $\mathbb{R}^{>0}$).

18 Partielle Ableitungen

Berechne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, wobei $f(x,y)$ Summe und/oder Produkt und/oder Komposition ist aus: x, y, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln(x)$. Also z.B.

(a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y) - x^2 y$

(b) $f(x,y) = y^2 \sin(x) + y\cos(y)$

(c) $f(x,y) = e^{xy^2} + \sin(\cos(x+y))$

19 De l'Hospital (oder auch nicht)

Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, wobei f und g aus den folgenden Funktionen gewählt sind:

(a) $\cos(x) - 1$

(b) $1 - \sin(x)$

(c) $x + \sin(x)$

(d) $x - \sin(x)$

(e) $x + \cos(x)$

(f) $\cos(x) - x$

(g) $x\sin(x)$

(h) $x\cos(x)$

(i) $\sin(x)\cos(x)$

(j) $\sin(x)e^x$

(k) $\cos(x)e^x$

(l) $\cos(x) + e^x$

(m) $e^x - \cos(x)$

(n) $x^2 + 2x$

(o) $x^3 + x$

(p) $x^3 + 1$

OBEN

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t		
	a	/																				a	
	b		/							0	0										0	b	
	c			/					½													c	
	d				/																	d	
	e			0		/	1			0	0											e	
	f						/															f	
	g							/														g	
	h	0							/												1	h	
U	i									/									0		1	i	U
N	j								1		/											j	N
T	k											/						0				k	T
E	l	0			0								/									l	E
N	m				0									/								m	N
	n							0	½						/							n	
	o															/						o	
	p																/					p	
	q																	/				q	
	r																		/			r	
	s																			/		s	
	t	0																1			/	t	
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t		

OBEN

z.B.

		OBEN	
		a	b
UNTEN	n	0	1
	o	1	0

⇒ $\frac{a}{n} = 0$ $\frac{b}{n} = 1$

$\frac{a}{o} = 1$ $\frac{b}{o} = 0$

wobei $\frac{a}{n} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2+2x}$

(Dies ist nur ein Beispiel mit erfundenen Werten. Die tatsächliche Lösung befindet sich in der Tabelle.)

(q) $e^x - 1$

(r) $e^x - x - 1$

(s) $e^x + 1$

(t) xe^x

1) f'' am Anfang ist richtig
2) f konkav und f'' existiert
3) f darf nicht strickt konkav sein

20 Konkav und Konvex 1

$f(x)$ ist strikt konvex wenn $f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0, 1]$, konvex wenn $\leq$ gilt, analog für (strikt) konkav. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein:

(a) Wenn f konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) \underset{\sim}{\geq} 0$ für alle x. ✗

(b) Wenn f konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) \underset{\sim}{\geq} 0$ für alle x. ✓

(c) Wenn f'' existiert und $f''(x) \underset{\sim}{\geq} 0$ für alle x, dann ist f konkav. ✓

(d) Wenn f strikt konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) \underset{\sim}{>} 0$ für alle x. ✗

(e) Wenn f strikt konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) \underset{\sim}{>} 0$ für alle x. ✗

(f) Wenn f'' existiert und $f''(x) \underset{\sim}{>} 0$ für alle x, dann ist f strikt konkav. ✓

Vorzeichen sind im tuwel-test verkehrt herum (< statt >)

21 Konkav und Konvex 2

Ist die Funktionen $f(x)$ auf ihrem natürlichen (oder dem explizit angegebenen) Definitionsbereich D strikt konvex, d.h. $f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0, 1]$, oder ist sie konvex aber nicht strikt konvex (dh es gilt zumindest noch $\leq$), oder ist sie strikt konkav, oder konkav aber nicht strikt konkav, oder weder noch? Dabei kann f eine der folgenden Funktionen g, oder $-g$, sein:

(a) 12 kv & kh

(b) $2x$ kv&kh

(c) ~~x^2 kv&kh~~ skv

(d) x^3 /

(e) x^4 skv

(f) $\frac{1}{x}$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(g) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(h) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(i) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(j) $\frac{1}{x}$ auf $D = (-\infty, 0)$ skh

(k) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = (-\infty, 0)$ skh

(l) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = (-\infty, 0)$ skh

(m) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = (-\infty, 0)$ skh

(n) e^x skv

(o) e^{-x} skv

(p) $\ln(x)$ skh

(q) $\sin(x)$ /

(r) $\sin(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$ /

(s) $\sin(x)$ auf $D = [0, \pi]$ skh

(t) $\sin(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$ /

(u) $\sin(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ /

(v) $\cos(x)$ /

(w) $\cos(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$ /

(skv = strikt kv, kv = konvex, / = weder noch, kh = konkav, skh = strikt kh)

1) 1/x am Anfang und R^(>0)-> skv
1/x am Anfang und (-ue, 0)-> skk
2) sin ist immer weder noch, außer wenn D = [0, PI] dann skk
3) cos ist immer weder noch, außer wenn D = [-pi/2, pi/2] dann skk
4) alles mit e/ln/x^4 ist skv
5) x^3 -> /
6) der rest ist kv und kk

Merke

Formal lässt sich das **Krümmungsverhalten** einer Funktion folgendermaßen kategorisieren:

$f''(x) > 0$ → streng konvex

$f''(x) < 0$ → streng konkav

$f''(x) \geq 0$ → konvex

$f''(x) \leq 0$ → konkav

$f''(x) = 0$ → konvex und konkav

(x) $\cos(x)$ auf $D = [0, \pi]$ /

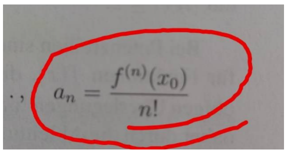
(y) $\cos(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$ /

(z) $\cos(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ slh

22 Taylorreihen

Ableiten und in die Formel einsetzen. Es startet mit f(x) als n = 0

Berechne die ersten drei Terme (d.h., für x^0 bis x^2) der Taylorreihe (um 0) von


$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

(a) $\sin(\pi \cos(x))$ $0, 0, \frac{\pi}{2}$

(b) $\cos(\pi \sin(x))$ $1, 0, -\frac{\pi}{2}^2$

(c) $-\cos(\pi \cos(x))$ $1, 0, 0$

(d) $\sin(\sin(x))$ $0, 1, 0$

(e) $\sin(\pi e^{-x})$ $0, \pi, -\frac{\pi}{2}$

(f) $\cos(\pi e^{x})$ $-1, 0, \frac{\pi}{2}^2$

(g) $\cos(\sin(x))$ $1, 0, -\frac{1}{2}$

(h) $\ln(1 + \sin(x))$ $0, 1, -\frac{1}{2}$

(i) $\ln(\cos(x))$ $0, 0, -\frac{1}{2}$

(j) $\ln(1 + \pi \sin(x))$ $0, \pi, -\frac{\pi}{2}$

(k) $\sin(\ln(1 + x))$ $0, 1, -\frac{1}{2}$

(l) $\cos(\ln(1 + x))$ $1, 0, -\frac{1}{2}$

23 Uneigentliche Integrale

Berechne: (Es ist auch ±∞ oder "undefiniert" möglich)

(a) $\int_0^\infty e^{-x} dx$ 1

(b) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$ $\frac{1}{2}$

(c) $\int_0^\infty 2^{-x} dx$ $\frac{1}{\ln(2)}$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ∞

(e) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 1

(f) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ $\frac{1}{2}$

(g) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ∞

(h) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ ∞

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ ∞

(j) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ ∞

(k) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ ∞

(l) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 2

(m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ $\frac{3}{2}$

(n) $\int_0^1 \ln(x) dx$ -1

(o) $\int_0^\infty \sin(x) dx$ undef.

24 Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden Integrale sind endlich; sind ∞, oder sind undefiniert? (Genauer Wert muss nicht berechnet werden.)

(a) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ endlich

(b) $\int_{-\infty}^\infty e^{x} dx$ ∞

(c) $\int_0^\infty x\,dx$ ∞

(d) $\int_0^\infty x^2 dx$ ∞

(e) $\int_0^\infty x^3 dx$ ∞

(f) $\int_0^\infty x^4 dx$ ∞

(g) $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ undef.

(h) $\int_{-\infty}^\infty x^2 dx$ undef.

(i) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$ undef.

(j) $\int_{-\infty}^\infty x^4 dx$ ∞

(k) $\int_0^\infty \sqrt{x} \sin(x) dx$ undef.

(l) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ endlich

(m) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\ln x} dx$ endlich

(laut wolfram alpha undefiniert)

25 Anfangswertprobleme

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$?

(a) $f(x) = 0$ ✓

(b) $f(x) = 1$ ✗

(c) $f(x) = x^2$ ✗

(d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$ ✓

(e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗

(f) $f(x)$ is $(x-1)^2$ für $x > 1$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓

(g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(1) = 1$?

(a) $f(x) = 0$ ✗

(b) $f(x) = 1$ ✗

(c) $f(x) = x^2$ ✗

(d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$ ✓

(e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗

(f) $f(x)$ is $(x-1)^2$ für $x > 1$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗

(g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x+1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = \frac{3}{x}y + x^5$ $(x > 0)$, $y(1) = 1$?

(a) x^3 ✗

(b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^6$ ✗

(c) $x^3 + \frac{1}{3}x^6$ ✗

(d) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6$ ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $xy' + 2y = 4x^2$ $(x > 0)$, $y(1) = 2$?

- (a) $\frac{1}{x^2} + x^2$ ✓
- (b) $\frac{1}{x} + x$ ✗
- (c) $\frac{1}{x^3} + x^3$ ✗
- (d) $\frac{2}{x^2} + x^2$ ✗

26 Länge konkreter Kurven

Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

(a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$ $\sqrt{5}$

(b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ $\sqrt{5}$

(c) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$ $\sqrt{5}$

(d) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 2t \end{pmatrix}$ $\sqrt{8}$

(e) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$ $\sqrt{8}$

(f) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ 2x^{\frac{3}{2}} \\ 6x \end{pmatrix}$ $3\sqrt{5}$

(g) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ $\sqrt{6}$

Summe der Konstanten < 5 -> sqrt(5)
> 5 -> sqrt(8)
Summe der Hochzahlen == 6 -> sqrt(6)
sonst 3* sqrt(5)

27 Volumen

Berechnen Sie $\iint_R f(x,y)dA$ für $R = [0,1] \times [0,1]$ und das folgende $f(x,y)$:

- (a) $x^2y - xy^2$ 0
- (b) $x^2 + y^2$ $\frac{2}{3}$
- (c) $y^2 + 2xy^2$ $\frac{2}{3}$
- (d) $x^2 + 2x^2y$ $\frac{2}{3}$
- (e) $3x^2y^2 - x^2y$ $\frac{1}{6}$
- (f) $x^2 - xy^2$ $\frac{1}{6}$
- (g) $x^2 - x^2y$ $\frac{1}{6}$
- (h) $x^2y + xy^2$ $\frac{1}{3}$
- (i) $x - y^2x$ $\frac{1}{3}$
- (j) $2x^2y^2 + \frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$
- (k) $y^3x + \frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$
- (l) $x^3 + y^3x$ $\frac{3}{8}$

Antwortmöglichkeit:
0
2/3
1/6
1/3
3/8

Hände zeichnen ist so schwer