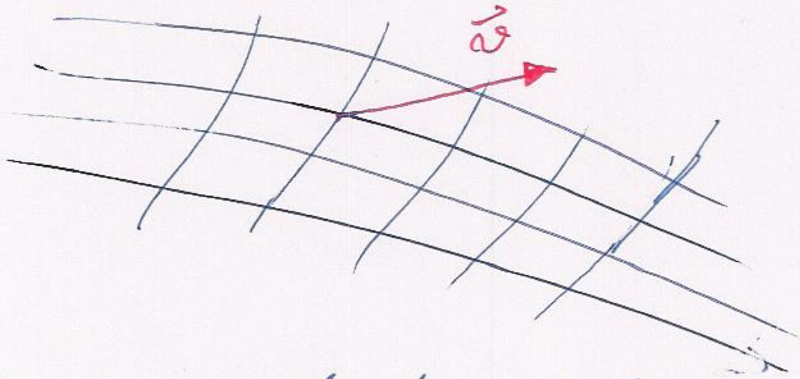
## Richtungsableitung:



Wie ändert sich $f$ entlang bestimmter Richtung?

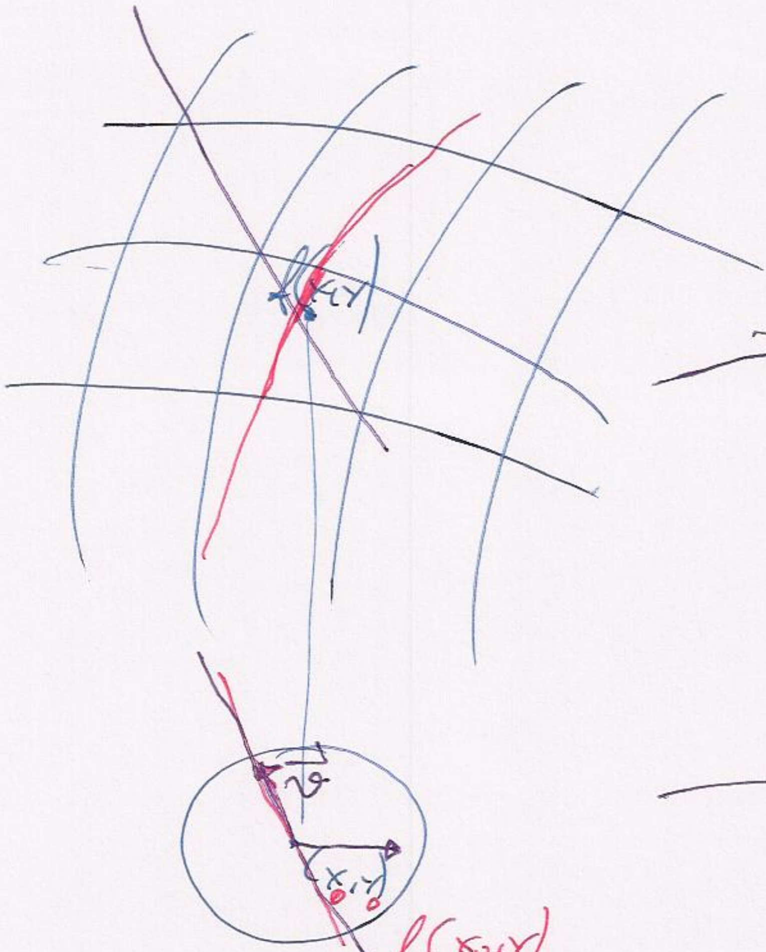
**Def.:** $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge,

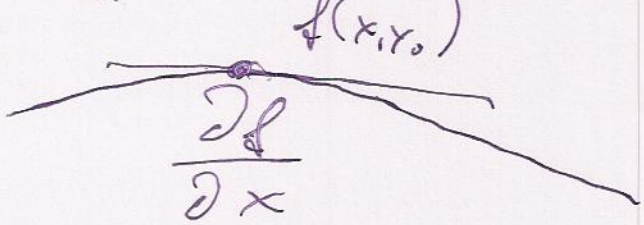
$f : D \to \mathbb{R}$ skalarwert. Fkt.

$\vec{v} \in \mathbb{R}$ ein normierter Vektor, $\|\vec{v}\| = 1$
(Richtungsvektor)

**Richtungsableitung** von $f$ an Stelle $\vec{x} \in D$ nach $\vec{v}$:

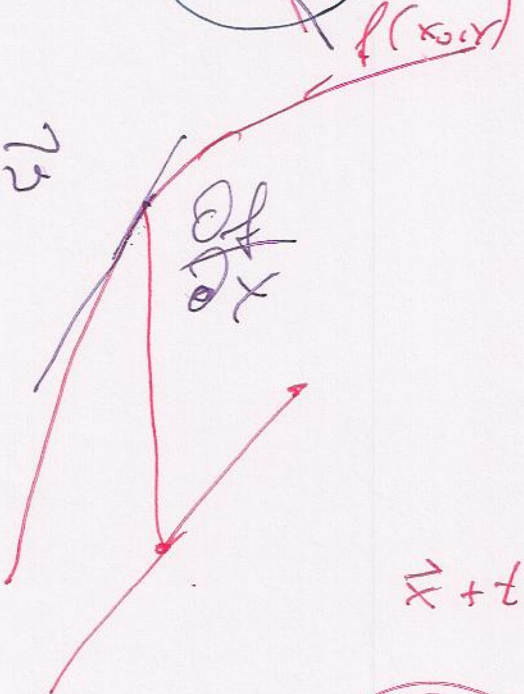
Grenzwert:
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t}}$$

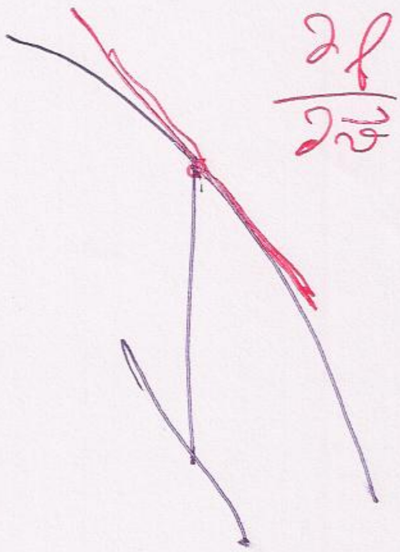


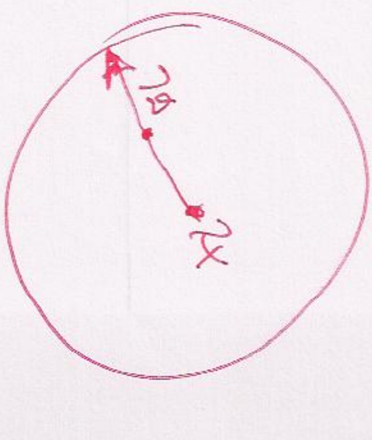


$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\vec{v}$$




$\vec{x}+t\cdot\vec{v}$



Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$f: D \to \mathbb{R}$ an $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$

total differenzierbar

$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ normierter Vektor

$\Rightarrow$ • Richtungsableitung nach $v$ existiert

• geg. durch:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) &= f_{x_1}(\vec{x}) \cdot v_1 + \dots + f_{x_n}(\vec{x}) \cdot v_n = \\ &= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \end{aligned}}$$

Beweis $\frac{\partial f}{\partial v}(\vec{x}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t} =$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(\vec{x})} + f_{x_1}(\vec{x}) (t \cdot v_1) + f_{x_2}(\vec{x}) \cdot t \cdot v_2 + \dots + f_{x_n}(\vec{x}) \cdot t \cdot v_n + R(\vec{x}) \cancel{- f(\vec{x})}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left( f_{x_1}(\vec{x}) \cdot v_1 + f_{x_2}(\vec{x}) \cdot v_2 + \dots + f_{x_n} \cdot v_n + \frac{R(\vec{x})}{t} \right)$$

$=$

$$f_{x_1} \cdot v_1 + f_{x_2} \cdot v_2 + \dots + f_{x_n} \cdot v_n$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$t \lim_{t \to 0} \frac{R(\vec{x})}{t} =$$

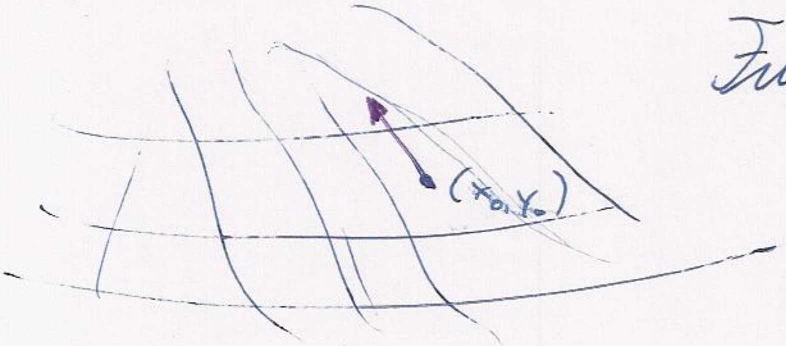
$$= \lim_{t \to 0} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} + t \cdot \vec{v} - \vec{x}\|} = 0$$

$\downarrow$

total diffbar.

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

In welcher Richtung steigt $f$ (fällt) Funktion am stärksten?




$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \underbrace{\text{grad } f \cdot \vec{v}}_{max}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ in Richtung des Gradienten

$\Rightarrow$ stärksten Anstieg

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$$

Satz: Richtung des größten Anstieges ist genau in Richtung des Gradienten grad $f$.

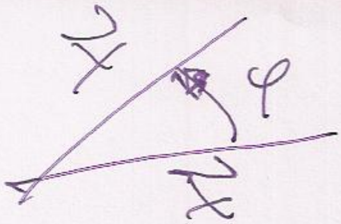
Wert des größten Anstieges ist $\|\text{grad } f\|$

Falls grad $f = 0$ $\Rightarrow$ alle Richtungsabl. $= 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \ \forall \vec{v}$$

Skalarprodukt

$f \cdot \vec{v}$ $\quad \langle \operatorname{grad} f, \vec{v} \rangle$



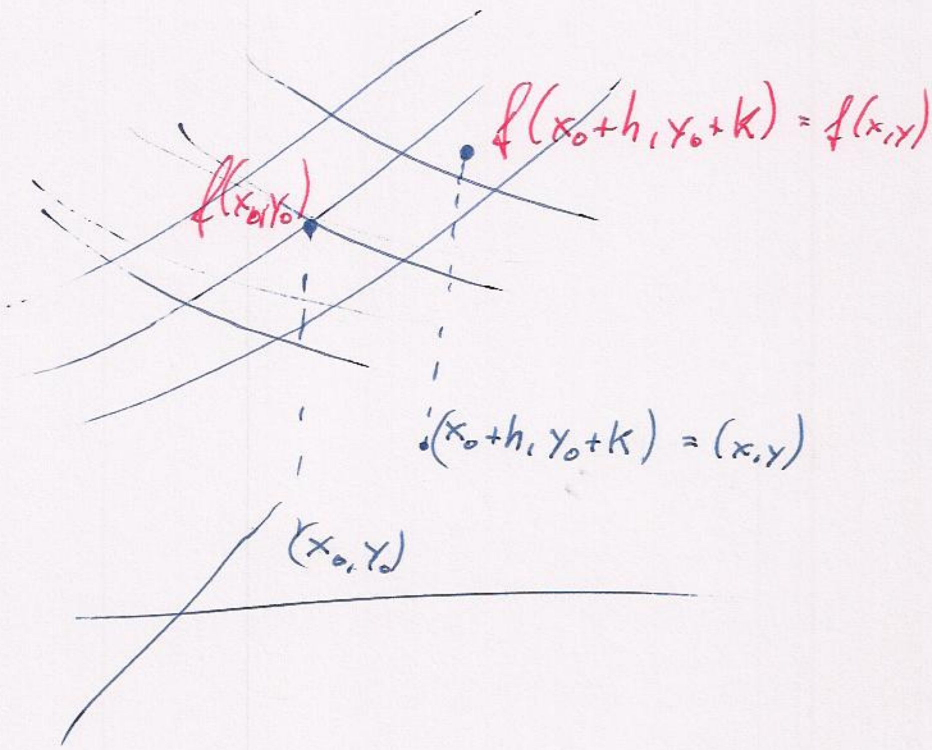

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$$

$$\varphi = 0$$


d.h.: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ am größten,

wenn grad $f$ und $\vec{v}$
"in selbe Richtung schauen"

# Taylorentwicklung




Wie kann man $f(x,y)$

in Umgebung von $(x_0,y_0)$

durch Polynome (oder Potenzreihen)

„möglichst gut" approximieren?

## eine Variable:

$$F(x) = \underbrace{F(x_0) + F'(x_0)\cdot(x-x_0) + F''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + F'''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots + F^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}}_{T_n(x)} + \underbrace{F^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)}$$

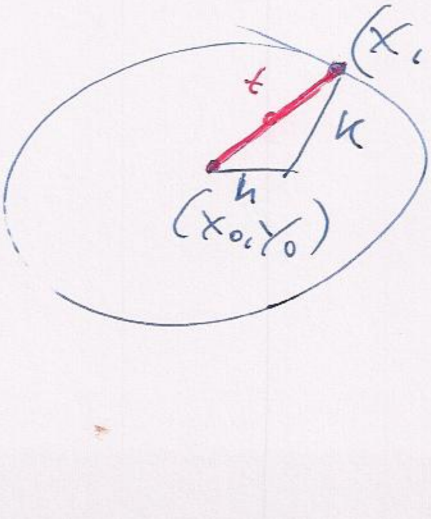
Idee: Problem reduzieren auf 1 Variable

---

neue Fkt. in Var.:

$$F(t) := f(x_0 + t\cdot h,\ y_0 + t\cdot k)$$

$t$ neue Var.




$(x, y) = (x_0 + t\cdot h,\ y_0 + t\cdot k)$

$0 \le t \le 1$

$$F(0) = f(x_0, y_0)$$

$$F(1) = f(x_0 + 1\cdot h, y_0 + 1\cdot k) =$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$

$$= f(x, y)$$

$$F(t) = f(x_0 + t\cdot h, y_0 + t\cdot k)$$

$$F(1) = f(x, y) = F(0) + F'(0)\cdot 1 + F''(0)\cdot \frac{1^2}{2!} +$$

$$+ \frac{F'''(0)}{3!}\cdot 1^3 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\cdot 1^n$$

$$+ \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1} =$$

$$T_1 = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot \frac{dx}{dt} + f_y(x_0, y_0)\cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k$$

$$= \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k}_{\text{Lineare Approximation}}$$

$$F''(0) =$$

$$F'(t) = f_x(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k) \cdot h + f_y(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k) \cdot k$$

$$F''(t) = \left( f_{xx}(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k) \cdot h + f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \right) \cdot h$$

$$+ \left( f_{yx} \cdot h + f_{yy} \cdot k \right) \cdot k$$

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + f_{xy}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + f_{yx}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot k^2$$

$$= f_{xx} \cdot h^2 + 2 f_{xy} \cdot h \cdot k + f_{yy} \cdot k^2$$

$$T_2 = f(x_0, y_0) + f_x(\,)\cdot h + f_y(\,)\cdot k + \underbrace{+\frac{1}{2!}\cdot\left(f_{xx}\cdot h^2 + 2 f_{xy}\, h\cdot k + f_{yy}\cdot k^2\right)}_{\text{Quadratische Approx.}}$$

---

$$F'''(0) = f_{xxx}\cdot h^3 + 3\cdot f_{xxy}\cdot h^2\cdot k$$
$$+ 3\cdot f_{xyy}\cdot h\cdot k^2 + f_{yyy}\cdot k^3$$

---

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 6

$$F''''(0) = 1 f_{xxxx}\cdot h^4 + 4\cdot f_{xxxy}\cdot h^3 k + \ldots$$

$$D_x : f \to f_x$$

$$D_y : f \to f_y$$

---

$$(h \cdot D_x + k \cdot D_y)^n f =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot (h D_x)^m \cdot (k D_y)^{n-m} f =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot h^m \cdot D_x^m \cdot k^{n-m} \cdot D_y^{n-m} \cdot f =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot h^m \cdot k^{n-m} \cdot D_x^{m} D_y^{n-m} \cdot f$$

Satz (Satz von Taylor in zwei Variablen)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(hD_x + k\cdot D_y)^\ell f(x_0,y_0)}{\ell!} +$$

$$+ \frac{(hD_x + kD_y)^{n+1} f(x_0+\xi h, y_0+\xi k)}{(n+1)!}, \text{ mit } \xi \in (0,1)$$

Vor.: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge, $f: D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar

$(x_0,y_0)$, $(x,y) = (x_0+h, y_0+h) \in D$

weiters $(x_0+t\cdot h, y_0+th) \in D$, $\forall t: 0 \leq t \leq 1$.

---

falls $f$ unendlich oft differenzierbar:

Taylorreihe $\quad f(x_0,y_0) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(hD_x + kD_y)^\ell f(x_0,y_0)}{\ell!}$

Taylorreihe konvergiert gegen $f(x,y)$, falls Folge der Restglieder eine Nullfolge ist.