Prüfung 2020-01-31

1. Aufgabe

Gegeben ist die sogenannte Pell-Folge mit $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$.
Man beweise mittels vollständiger Induktion:

$$2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = x_n x_{n+1}.$$

2. Aufgabe

Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = \mathbf{A}x$ und die Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis B vom Kern von f.
b) Bestimmen Sie eine Basis C vom Bild von f.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie die Formeln für $A_{n,k}$, $B_{n,k}$ und $C_{n,k}$.
Es geht jeweils um Anzahl Möglichkeiten, k Zahlen $y_1, y_2, y_3, ..., y_k$ zu wählen mit:

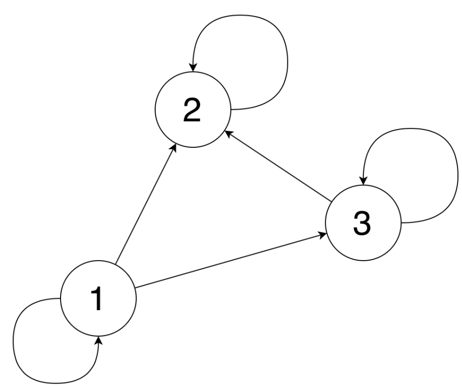
$$\begin{array}{ll} A_{n,k}: & 1 \leq y_1, y_2, y_3, ..., y_k \leq n \\ B_{n,k}: & 1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < ... < y_k \leq n \\ C_{n,k}: & 1 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq ... \leq y_k \leq n \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe

a) Erklären Sie den Begriff einer Restklasse einer Zahl z modulo $n \in \mathbb{N}$.
b) Gegeben ist ein Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.
   i) Wie sieht die Menge $\mathbb{Z}_n$ aus?
   ii) Wie sind die Operationen definiert?
c) Konstruieren Sie die Operationstafeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_4$.
d) Welche Eigenschaft besitzt $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl ist?

5. Aufgabe (Kreuzerlbeispiel)

Bestimmen Sie die Polardarstellung von $-i$.
Sei $z = 1 - i$. Berechnen Sie $1/\bar{z}$.
Kreuzen Sie die zum logischen Ausdruck $\neg b \Rightarrow a$ äquivalente Ausdrücke an.
Kreuzen Sie jene logischen Ausdrücke an, die Tautologien sind.
Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$. Kreuzen Sie wahre Aussagen an: ○ f ist keine Funktion ○ f ist injektiv ○ f ist surjektiv ○ f besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Gegeben ist ein Graph der Relation R.  Ist diese Relation: ○ reflexiv ○ symmetrisch ○ antisymmetrisch ○ transitiv
Gegeben ist die Relation $R = \{(0,0), (1,1), (a,a), (b,b), (0,1), (0,a), (0,b)\}$. Kreuzen Sie das richtige Hassediagramm an.

Lösungen

1. Aufgabe

1) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$2\sum_{i=0}^{0} x_i^2 = 2x_0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = x_0 x_1 \quad \blacksquare$$

2) Induktionsschritt

2.1) Induktionsvoraussetzung

$$2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = x_n x_{n+1} \quad \blacksquare$$

2.1) Induktionsbehauptung

$$2\sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = x_{n+1} x_{n+2} \ ?$$

Für den Induktionsschritt braucht man noch die rekursive Definition der Pell-Folge aus der Angabe, nämlich $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} \;\Leftrightarrow\; x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$.

$$2\sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2x_{n+1}^2 = x_n x_{n+1} + 2x_{n+1}^2 = x_{n+1}(x_n + 2x_{n+1}) = x_{n+1}x_{n+2}. \quad \blacksquare$$

2. Aufgabe

Kern

Der Kern von f ist die Menge aller Elemente aus $\mathbb{R}^4$, die auf das neutrale Element in $\mathbb{R}^3$ abgebildet werden.

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$$

Man muss also die Gleichung $f(x) = 0$ lösen, um den Kern zu bestimmen.

$$\mathbf{A}x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung lässt sich mithilfe von Gaußschen Eliminationsverfahren lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das entspricht dem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben 4 Variablen und $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 2$ und deswegen $4 - 2 = 2$ Freiheitsgrade. Sei $x_3 = a$ und $x_4 = b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_2 + 2a + 3b = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -2a - 3b \\ x_1 - a - 2b = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = a + 2b \end{aligned}$$

$$\ker f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -2a - 3b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$$

Der Kern ist also eine Linearkombination von diesen zwei Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$. Man muss noch überprüfen, ob sie linear abhängig sind, also ob es nichttriviale $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (mindestens ein Koeffizient ist verschieden von 0) gibt mit $\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 = 0$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die einzige Lösung ist offensichtlich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (triviale Lösung). Deswegen sind $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ linear unabhängig und bilden eine Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Bild

Das Bild von f ist die Menge aller Elemente aus $\mathbb{R}^3$, die $f(x)$ annimmt.

$$f(\mathbb{R}^4) = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^4 \}$$

Man muss also die Gleichung $f(x) = y$ betrachten und y beschreiben.

$$\mathbf{A}x = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das heißt, y ist die folgende Linearkombination:

$$y = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 = f(\mathbb{R}^4)$$

Wie mit dem Kern, muss man noch die lineare Unabhängigkeit prüfen. Die Vektoren sind nur dann linear unabhängig, wenn es nur eine triviale Lösung ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$) gibt.

$$\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3 + \lambda_4\mathbf{c}_4 = 0$$

Es gibt nichttriviale Lösungen, zum Beispiel $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = 3$. Deswegen sind die Vektoren linear abhängig und man darf einen Vektor weglassen (z.B. $\mathbf{c}_4$).

Jetzt muss überprüft werden, ob die drei übrigen Vektoren noch linear abhängig sind oder nicht.

$$\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3 = 0$$

Es gibt wieder nichttriviale Lösungen, zum Beispiel $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1 \Rightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig und wir dürfen einen Vektor (z.B. $\mathbf{c}_3$) entfernen.

Man überprüft wieder auf lineare Unabhängigkeit:

$$\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 = 0$$

Die einzige Lösung ist trivial ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Die Vektoren $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ sind deswegen linear unabhängig und bilden eine Basis $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$.

$$C = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \}.$$

3. Aufgabe

$A_{n,k}$	n^k
$B_{n,k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$ oder $\binom{n}{k}$?
$C_{n,k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

4. Aufgabe

a) Erklären Sie den Begriff einer Restklasse einer Zahl z modulo $n \in \mathbb{N}$.

$$\bar{z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv z \mod n\}$$

b) Gegeben ist ein Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

i) Wie sieht die Menge $\mathbb{Z}_n$ aus?
$\mathbb{Z}_n$ ist die Menge aller Restklassen modulo n.

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{x} \mid 0 \leq x < n\}$$

ii) Wie sind die Operationen definiert?

$$\begin{aligned} \overline{a} + \overline{b} &= \overline{a+b} \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{ab} \end{aligned}$$

c) Konstruieren Sie die Operationstafeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_4$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

d) Welche Eigenschaft besitzt $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl ist?
$\mathbb{Z}_p$ ist in diesem Fall ein Körper.
Jede Restklasse besitzt ein multiplikativ inverses Element.

5. Aufgabe

Bestimmen Sie die Polardarstellung von $-i$.
$[1, -\frac{\pi}{2}]$

Sei $z = 1 - i$. Berechnen Sie $1/\bar{z}$.
$\bar{z} = 1 + i$; $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

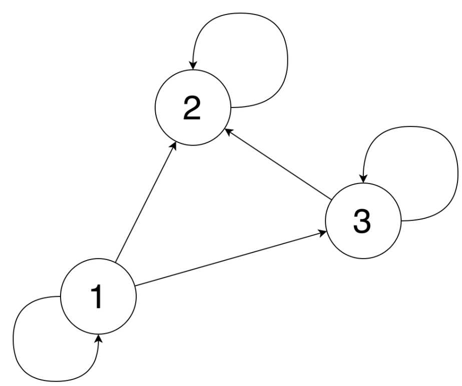
Kreuzen Sie die zum logischen Ausdruck $\neg b \Rightarrow a$ äquivalente Ausdrücke an.
Wahrheitstabellen vergleichen.

Kreuzen Sie jene logischen Ausdrücke an, die Tautologien sind.
Tautologie, wenn für jede Belegung der Variablen in der Wahrheitstabelle der Wert gleich 1 (wahr) ist.

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$. Kreuzen Sie wahre Aussagen an:

○ f ist keine Funktion ⊗ f ist injektiv ⊗ f ist surjektiv
⊗ f besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Gegeben ist ein Graph der Relation R.



Ist diese Relation:

⊗ reflexiv ○ symmetrisch ⊗ antisymmetrisch ○ transitiv

Gegeben ist die Relation $R = \{(0,0), (1,1), (a,a), (b,b), (0,1), (0,a), (0,b)\}$. Kreuzen Sie das richtige Hassediagramm an.