

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 3

(GITTENBERGER)

- 1)(8 P.) Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$y'' - 7y' + 10y = \frac{\sin(2x)}{x}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$$

Bemerkung: Für festes a gilt $\mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$ und $\mathcal{L}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \arctan \frac{a}{s}$.
Die auftretenden Faltungsintegrale müssen nicht ausgerechnet werden.

- 2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der PDG

$$12u_x + 4u_y = xy.$$

- 3)(8 P.) Berechnen Sie alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = y \left(4 \frac{y}{y+1} - 0.5y - 1 \right)$$

und überprüfen sie diese auf Stabilität. Untersuchen Sie ferner das globale Lösungsverhalten für die Lösungen dieser Differentialgleichung in der (y, y') -Phasenebene.

- 4)(8 P.) Was versteht man unter der eindimensionalen Schwingungsgleichung? Beschreiben Sie die durch so eine Gleichung beschriebene physikalische Problemstellung, die Differentialgleichung und die Anfangs- und Randbedingungen (mit Begründung)!

- 5)(8 P.) Wie ist die Fourierreihe einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert? Was versteht man unter Konvergenz im quadratischen Mittel? Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f an, deren Fourierreihe S_f nicht gegen f konvergiert! Wie lautet in diesem Beispiel die Grenzfunktion S_f ?

Wien, am 1. Februar 2008 (Ab hier freilassen!)

- 1)
2)
3)
4)
5)

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 3

(GITTENBERGER)

- 1)(8 P.) Berechnen Sie die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion

$$f(t) = t \sin(2t).$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert $F(s)$?

- 2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der PDG

$$u_{xx} - 4u_{yy} = \sin x.$$

- 3)(8 P.) Benutzen Sie die Formeln

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{ und } \pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

zur numerischen Berechnung von π . Verwenden Sie dazu die Regel von Simpson mit $n = 2$ und $n = 4$ Teilintervallen. Welche Formel ist genauer? Geben Sie eine heuristische Begründung (siehe Hinweis) dafür an, warum das so ist?

Hinweis:

$$\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = 24 \cdot \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(1+x^2)^5}, \quad \frac{d^4}{dx^4} \sqrt{1-x^2} = -\frac{3(4x^2+1)}{(1-x^2)^{7/2}}.$$

- 4)(8 P.) Was versteht man unter einer partiellen Differentialgleichung m -ter Ordnung? Was versteht man unter einem ersten Integral? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen ersten Integralen und linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
- 5)(8 P.) Wie funktioniert die Fast Fourier Transform? Welche Anwendungen der FFT gibt es?

Wien, am 14. März 2008 (Ab hier freilassen!)

- | | |
|----|----|
| 1) | 4) |
| 2) | 5) |
| 3) | |

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 3

(GITTENBERGER)

- 1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden PDG für $u(x, y)$:

$$u_x + u_y = x^2 + y^2.$$

- 2)(8 P.) Man stelle $\cos(x)$ im Intervall $(0, \pi)$ durch eine Fourierreihe, die nur Sinusterme enthält, dar.

- 3)(8 P.) Man bestimme für die Differentialgleichung $y' = 3xy^2$ drei Strecken des Eulerschen Polygonzugs beginnend bei $(1, 1)$ mit Schrittweite $\Delta x = 0.5$. Bestimmen Sie auch die exakte Lösung der Differentialgleichung und vergleichen Sie die Ergebnisse.

- 4)(8 P.) Was versteht man unter der Laplace-Transformierten einer Funktion $f(x)$? Unter welchen Voraussetzungen an $f(x)$ existiert die Laplace-Transformierte? Wie ist die Fourier-Transformierte definiert? Nennen Sie Anwendungen von Laplace- und Fourier-Transformation?

- 5)(8 P.) Wozu dient die Regel von Simpson? Beschreiben Sie die Funktionsweise der Regel von Simpson, d.h. welche Idee liegt der Formel zugrunde (gefragt ist nicht die Formel selbst). Für welche Funktionenklasse erhält man damit exakte Resultate?

Wien, am 25. April 2008 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 3

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2)(8 P.) Wie lautet die diskrete Fouriertransformierte des Vektors $(1, 0, 2, 0, 1, 0)$?

3)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der quasilinearen Differentialgleichung

$$u_x + u_y = u$$

in expliziter Form!

Hinweis: Drücken Sie die implizite Lösung $F(g_1(x, y, u), g_2(x, y, u)) = 0$ so aus, daß nur eines der beiden Argumente g_1 und g_2 von u abhängt, indem Sie nicht u als freie Variable der Phasengleichungen wählen. Wenden Sie dann den Hauptsatz über implizite Funktionen an.

4)(8 P.) Wozu dienen das Euler- und das Runge-Kutta-Verfahren? Beschreiben Sie diese beiden Verfahren? Wie groß sind die lokalen Fehler dieser beiden Verfahren und wie läßt sich daher die Genauigkeit verbessern? Läßt sich die Genauigkeit beliebig verbessern? (Begründung!)

5)(8 P.) Was versteht man unter Polynom- bzw. Splineinterpolation (Verfahren, Eigenschaften, Unterschiede)?

Wien, am 1. Juli 2008 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 3

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

2)(8 P.) Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 20)$ und $(6, 3)$ durch Lagrange-Interpolation.

3)(8 P.) Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$y'' + 5y' + 6y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Bemerkung: Für festes a ist $\frac{1}{s-a}$ die Laplacetransformierte von e^{at} .

4)(8 P.) Was versteht man unter einer Quadraturformel? Nennen Sie zwei Quadraturverfahren und beschreiben Sie diese. Wie läßt sich der Fehler solcher Formeln quantifizieren, wenn man das qualitative Verhalten des Fehlers kennt (gefragt sind keine Formeln, nur die praktische Vorgangsweise)?

5)(8 P.) Was versteht man unter einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Beschreiben Sie ein Lösungsverfahren einer solchen Gleichung für Funktionen in zwei Variablen! Wie lautet die eindimensionale Wellengleichung? Sei $u(x, t)$ Lösung einer Wellengleichung. Wie lassen sich dann u , x und t physikalisch interpretieren?

Wien, am 10. Oktober 2008 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)