

Beispiel 157 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 11, 19.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man löse die homogene lineare Differentialgleichung:

$$y' - y \tan x = 0$$

2 Theoretische Grundlagen: Trennung der Veränderlichen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Trennung der Veränderlichen: dx und dy jeweils auf eine Seite bringen
2. Integration auf beiden Seiten
3. Auflösung nach y (wenn möglich)

Wichtig sind dabei folgende **Rechenregeln bezüglich Logarithmieren**:

1. $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$
2. $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$
3. $n \cdot \ln a = \ln a^n$
4. $\ln e^n = n$
5. $e^{\ln a} = a$
6. Entlogarithmierung: $\ln a = b \quad \Rightarrow \quad a = e^b$
7. Entlogarithmierung: $\ln a = \ln b \quad \Rightarrow \quad a = b$

3 Lösung des Beispiels

Wir bringen zunächst alle x und y auf eine Seite:

$$\frac{y}{y'} = \tan x$$

Nun vollziehen wir die Umformung nach der Formel $\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$:

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{y}$$

Nun führen wir die Integration durch ($\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c$):

$$-\ln |\cos x| + c = \ln |y|$$

$$\ln |y| = \ln \frac{c}{|\cos x|}$$

Wir entlogarithmieren und 'verstecken' alle Vorzeichen in c :

$$y = \frac{c}{\cos x}$$