3 Grundbegriffe der Dynamik: Masse und Kraft

Zur vollständigen Beschreibung von Bewegungen müssen die Ursachen für diese Bewegungen (Kräfte, Drehmomente) und die Eigenschaften der sich bewegenden Körper (Masse, Trägheitsmoment) hinzugenommen werden.

3.1 Eigenschaften von Masse und Kraft

Eine grundlegende physikalische Größe wird am besten durch eine Auflistung ihrer wesentlichen Eigenschaften charakterisiert.

(a) Die Masse m

- Die Masse ist eine *allgemeine Eigenschaft* aller Körper. Jeder Körper besitzt eine Masse. Dies gilt für die gewöhnlichen makroskopischen Körper genauso wie für mikroskopische Körper wie Atome, Elektronen etc.
- Die Masse eines Körpers ist verantwortlich für seine *Trägheit.* Jeder Körper widersetzt sich auf Grund seiner Trägheit einer Änderung seines Bewegungszustands.
- Die Masse eines Körpers bestimmt sein *Gewicht.* Dies ist eine Eigenschaft, die dem Körper nur auf Grund der Erdanziehung zukommt. Allgemeiner müßte man sagen: Zwischen zwei Körpern besteht wegen ihrer Eigenschaft, eine Masse zu besitzen, eine Anziehungskraft (Gravitation).
- Die Masse ist eine *skalare Größe.*

(b) Die Kraft F

- Mit einer Kraft kann man Körper *verformen.* Die Verformung kann bleibender (plastischer) und vorübergehender (elastischer) Natur sein.
- Mit einer Kraft lassen sich bewegliche Körper in Kraftrichtung *beschleunigen* (2. Newtonsches Axiom)[1]. Ohne Einwirkung einer Kraft ändert sich der Bewegungszustand eines Körpers nicht (1. Newtonsches Axiom).

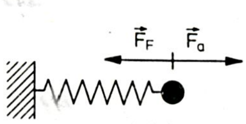

Fig. 3.1: Das dritte Newtonsche Axiom besagt, daß die Federkraft $\vec{F}_F$ dem Betrage nach genauso groß ist wie die von außen angreifende Kraft $\vec{F}_a$.

[1] Sir Isaak Newton 1643–1727

- Die Kraft ist eine *vektorielle Größe.*
- Kräfte treten nur *paarweise* auf (3. Newtonsches Axiom, actio = reactio). Drückt man z. B. mit der Hand gegen eine Wand, dann antwortet die Wand mit einer gleich großen Gegenkraft. Oder: Zieht man mit einer Kraft $\vec{F}_a$ an einer Feder, dann dehnt sie sich so lange, bis die von ihr auf die Hand ausgeübte Kraft genauso groß ist wie die angreifende.

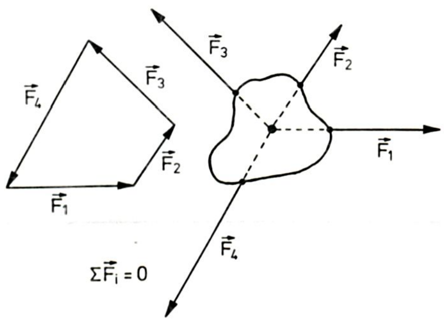

Fig. 3.2: Kräfte, deren vektorielle Summe verschwindet und deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, lassen einen Körper in Ruhe.

3.2 Das statische Gleichgewicht: Kräfte und Drehmomente

Greifen mehrere Kräfte $\vec{F}_i$ an einem starren Körper an, dann lassen sie sich vektoriell zu einer Gesamtkraft $\vec{F}_{ges} = \sum \vec{F}_i$ addieren. Ist diese Gesamtkraft speziell gleich null, dann würden wir zunächst erwarten, daß der Körper sich so verhält, als greife überhaupt keine Kraft an ihm an; ein ruhender Körper z. B. sollte weiterhin in Ruhe bleiben. Dies gilt jedoch nur, wenn sich die Verlängerungen aller Kraftvektoren über ihre Angriffspunkte hinaus in einem Punkt schneiden (Fig. 3.2). Ist dies nicht der Fall, dann dreht sich der Körper. Die Lage der Angriffspunkte der Kräfte muß berücksichtigt werden.

Wenn der Körper wie in Fig. 3.3 z. B. in O drehbar gelagert ist, wird die Wirkung der im Punkt A angreifenden Kraft um so stärker sein, je größer die Kraft selbst und je größer der wirksame Kraftarm $r_\perp$ ist. Wir definieren das Drehmoment (das in Kap. 8 noch eingehender betrachtet wird):

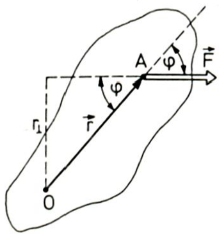

Fig. 3.3: Eine Kraft $\vec{F}$ greift an einem Punkt A eines beliebig geformten Körpers an, der in O drehbar gelagert ist.

Drehmoment = Kraft × wirksamer Kraftarm

$$M = F \cdot r_\perp = F \cdot r \cdot \sin\varphi \tag{3.1}$$

vektoriell: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, Einheit: N m

Greifen mehrere Drehmomente an einem Körper an, dann können auch sie wieder vektoriell zu einem Gesamtdrehmoment zusammengefaßt werden. Der Körper wird sich dann nicht drehen, wenn die vektorielle Summe aller angreifenden Drehmomente verschwindet.

Zusammenfassend kann man feststellen:

Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn die vektorielle Summe aller an ihm angreifenden Kräfte und Drehmomente verschwindet:

$$\vec{F}_{ges} = \sum \vec{F}_i = 0$$
$$\vec{M}_{ges} = \sum \vec{M}_i = \sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \tag{3.2}$$

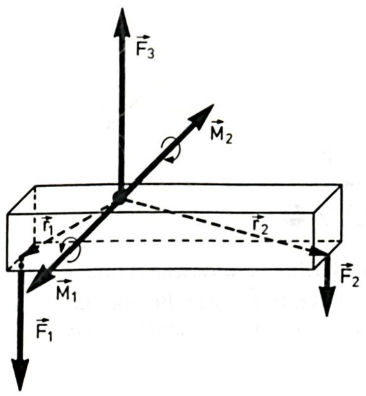

Fig. 3.4: Kräfte- und Drehmomentengleichgewicht an einem Balken.

Ein Beispiel zeigt Fig. 3.4: Der Balken befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn gilt:

Betragsmäßig $F_3 = F_1 + F_2$ und $M_1 = M_2$

und vektoriell $-\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ und $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$.

Also $\sum_i \vec{F}_i = 0$ und $\sum_i \vec{M}_i = 0$.

3.3 Verknüpfung zwischen Kraft und Masse (Einheiten und Meßmethoden)

Massen und Kräfte werden mit *Waagen* gemessen. Zwei Körper besitzen die gleiche Masse, wenn sie am gleichen Ort auf der Erde eine Federwaage um die gleiche Strecke x auslenken. Oder: Zwei Körper mit gleicher Masse besitzen am gleichen Ort das gleiche Gewicht; ein Körper mit der doppelten Masse besitzt das doppelte Gewicht. Wollte man dies mit einer Federwaage nachprüfen, dann sollte sie einem linearen Kraftgesetz gehorchen (s. u.); nur dann entspricht einer doppelten Masse (einem doppelten Gewicht) auch eine doppelt so große Auslenkung. Ortsunabhängige Massen- (und damit Gewichts-) vergleiche lassen sich mit der Balkenwaage vornehmen. Auch dies funktioniert natürlich nur in einem Gravitationsfeld (z. B. der Erde). Auf einen auch davon unabhängigen Massenvergleich kommen wir später noch zurück (Abschnitt 6.2).

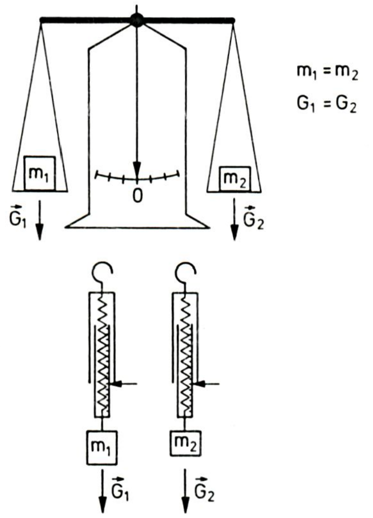

Fig. 3.5: Kräfte- und Massenvergleich mit Balkenwaage (oben) und mit Federwaagen (unten).

Einheit der Masse

Die Einheit der Masse im SI-System ist das Kilogramm (1 kg). Sie wird durch einen Standardkörper aus Platin-Iridium verkörpert. Dies entspricht mit hoher Genauigkeit der ursprünglich beabsichtigten Festlegung, nach der 1 kg die Masse von 1 dm^3 reinen Wassers bei der Temperatur von 3,98 °C sein sollte (Genauigkeit: 10^{-5}). Kleinere und größere Einheiten sind

$$1\ \text{mg} = 10^{-3}\ \text{g} = 10^{-6}\ \text{kg}; \qquad 1\ \text{t (Tonne)} = 10^3\ \text{kg}.$$

Es ist praktisch, für die Einheit der Kraft eine dem Kilogramm nachempfundene Einheit zu verwenden, das *Kilopond* (1 kp). 1 kp ist die auf einen Körper mit der Masse 1 kg am Normalort (s. Seite 13) wirkende Gewichtskraft. Diese Einheit besitzt den Vorteil großer Anschaulichkeit (tägliche Erfahrung), paßt aber nicht ins SI-System. Sie wird nur im unmittelbar folgenden Experiment verwendet.

Zum Messen von Kräften werden vornehmlich Federwaagen verwendet. Zum Vergleich verschiedener Kräfte miteinander ist es jedoch zweckmäßig, daß die Federn einem linearen Kraftgesetz gehorchen:

$$\text{doppelte Kraft} \longrightarrow \text{doppelte Auslenkung}$$

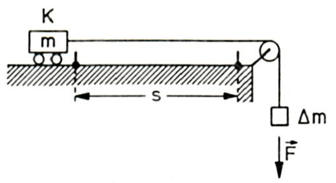

Fig. 3.6: Experiment zur Ermittlung der Beschleunigung, die ein Körper K mit der Masse m durch die Kraft $\vec{F}$ erfährt.

oder

$$F = D \cdot x \qquad (D\text{: Federkonstante}). \tag{3.3}$$

Dies ist ein Spezialfall vieler in der Physik auftretender Kraftgesetze.

Bei der grundsätzlichen Festlegung der SI-konformen Einheit der Kraft wird man sich jedoch nicht auf den Spezialfall des linearen Federkraftgesetzes stützen, sondern besser ihre Eigenschaft verwenden, bewegliche Körper beschleunigen zu können. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der Masse m eines Körpers K und der Beschleunigung a, die er durch eine angreifende Kraft F erfährt. Das Experiment wird auf einer exakt waagerecht justierten Bahn ausgeführt, auf der Gewichts- und Reibungskräfte praktisch vollständig ausgeschaltet sind (Fig. 3.6).

Gesucht ist: $a = a(m, F)$.

i. W.: Wie hängt die Beschleunigung von der Masse m des Körpers und von der beschleunigenden Kraft F ab?

Die Beschleunigung a wird durch eine Weg-Zeit-Messung ermittelt. Als Zugkraft F wird das Gewicht (die Schwere) eines kleinen Körpers mit der Masse Δm verwendet, die so klein ist, daß sie gegenüber der Masse m des Körpers K vernachlässigt werden kann. Bei der experimentellen Variation der Kraft F wird selbstverständlich angenommen, daß z. B. eine Verdoppelung von Δm eine Verdoppelung der Zugkraft zur Folge hat, die hier der Einfachheit halber in *Kilopond* gemessen wird. Experimentell wird festgestellt:

$$a \sim F \quad \text{bei} \quad m = \text{const.} \qquad \text{und} \qquad a \sim 1/m \quad \text{bei} \quad F = \text{const.}$$

Zusammengefaßt:

$$a = C \cdot \frac{F}{m}.$$

Die Proportionalitätskonstante ergibt sich zu $C = 9{,}81\ \text{kg m/kp s}^2$, wenn man die Zugkraft wie vereinbart in kp mißt.

Das Ergebnis zeigt, daß die Einheit kp der Kraft zwar anschaulich und praktisch, aber vom Maßsystem her gesehen nicht zweckmäßig ist. Das abgeleitete fundamentale Gesetz wird besser ohne einheitenbehaftete Proportionalitätskonstante unter Neufestlegung der Krafteinheit formuliert:

Grundgesetz der Mechanik (2. Newtonsches Axiom)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.4}$$

Einheit der Kraft: 1 Newton = 1 N = 1 kg m/s^2

1 Newton *ist diejenige Kraft, die einen Körper mit der Masse* 1 kg *mit* 1 m/s^2 *zu beschleunigen vermag.*

Die Gewichtskraft $\vec{G}$ erscheint jetzt als ein Spezialfall. Berücksichtigt man die in Abschnitt 2.2 zitierte Feststellung, daß alle Körper am gleichen Ort auf der Erde dieselbe Beschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ erfahren, dann kann man für die Gewichtskraft schreiben

$$\boxed{\vec{G} = m \cdot \vec{g}.} \tag{3.5}$$

Der Zahlenwert der im obigen Experiment zunächst erhaltenen Proportionalitätskonstanten C wird damit unmittelbar verständlich und liefert die Umrechnung zur neuen Krafteinheit.

$$\text{Masse } 1\ \mathrm{kg} \mathrel{\widehat{=}} \text{Gewichtskraft } 1\ \mathrm{kp} = 9{,}81\ \mathrm{N}$$

Die beiden Eigenschaften eines massebehafteten Körpers, nämlich Schwere und Trägheit zu besitzen, sind damit auf das gleiche Grundgesetz zurückgeführt. Man muß jedoch beachten, daß $\vec{F} = m\vec{a}$ allgemein gültig ist, $\vec{G} = m\vec{g}$ mit konstantem $\vec{g}$ aber nur in der Nähe der Erdoberfläche gilt. In diesem Zusammenhang würde man das erste als ein „dynamisches", das zweite aber als ein „statisches" Gesetz ansehen.

Abschließend sei noch einmal festgehalten: Das Grundgesetz Gl. (3.4) besagt, daß Kräfte Beschleunigungen zur Folge haben. Verschwinden die Kräfte, sind auch die Beschleunigungen null; die Körper verharren in ihrem Bewegungszustand.

3.4 Körpereigenschaften: Dichte und Massenmittelpunkt

Körper verschiedener Stoffe mit gleichen Massen besitzen i. allg. unterschiedliche Volumina. Man charakterisiert die Stoffe am besten durch ihre *Dichte* ρ (spezifische Masse).

Definition:

$$\boxed{\text{Dichte} = \frac{\text{Masse des Körpers}}{\text{Volumen des Körpers}}, \qquad \rho = \frac{m}{V} \qquad \text{Einheit: } \mathrm{kg/m^3}.} \tag{3.6}$$

Bei vielen in der Natur vorkommenden Körpern ist die Dichte an verschiedenen Stellen unterschiedlich: $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$. Derartige Körper nennt man inhomogen. Man muß dann differentiell definieren. Die lokale Dichte am Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ ist:

$$\rho(x, y, z) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}. \tag{3.7}$$

Die Gesamtmasse m eines Körpers von vorgegebenem Volumen berechnet sich durch Integration:

$$m = \int_{\text{Körper}} \mathrm{d}m = \int \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3.8}$$

Die Integration läßt sich nur in einfachen Fällen ausführen. Die Messung von Gesamtmasse m und Gesamtvolumen V eines Körpers ergibt nur eine mittlere Dichte $\bar{\rho}$.

Bemerkung: Hier tritt zum ersten Mal ein Dreifachintegral auf. Man sollte sich aber nicht schrecken lassen: Da ein Körper nun einmal dreidimensional ist, wird man sehr schnell zu solchen Ausdrücken geführt. *Aufschreiben* lassen sie sich leicht, *ausrechnen* kann man sie nur in seltenen einfachen Fällen. Wir werden später Beispiele derartiger Dreifachintegrale berechnen.

Tab. 3.1: Dichte einiger fester und flüssiger Stoffe ($1\ g/cm^3 = 10^{-3}\ kg/m^3$).

Dichte fester Körper in g/cm^3		Dichte von Flüssigkeiten in g/cm^3		
Aluminium	2,69	Wasser	1,0	(4 °C)
Eisen	7,7	Äthanol	0,79	(20 °C)
Kupfer	8,93	Quecksilber	13,55	(20 °C)
Messing	8,3			
Silber	10,5			
Gold	19,3			
Platin	21,4			
Glas	2,6			

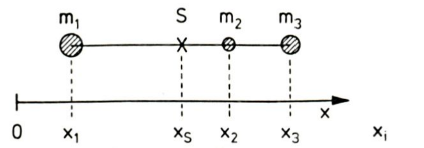

Fig. 3.7: Massenmittelpunkt eines „eindimensionalen Körpers", der aus mehreren Massenpunkten m_i besteht.

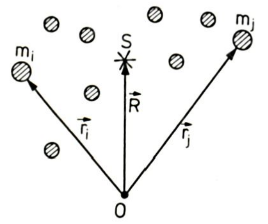

Fig. 3.8: Schwerpunkt S eines „dreidimensionalen Körpers", der aus vielen Massenpunkten besteht.

Bei der Beschreibung der Bewegung von Körpern kann man die Verteilung der Masse auf ein ausgedehntes Volumen oft außer acht lassen (siehe Kinematik) und sie sich in einem Punkt konzentriert denken, den man den Massenmittelpunkt nennt (Konzept des „Massenpunktes"). Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) besitzt darüber hinaus bei vielen mechanischen Problemen eine ausgezeichnete Bedeutung. Seine Lage (Ortskoordinaten) läßt sich experimentell und rechnerisch bestimmen. Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall eines „Körpers", der aus einer masselosen Stange besteht, auf der an den Stellen x_i mehrere kleine Körper mit den Massen m_i angebracht sind (Fig. 3.7). Die Koordinate des Massenmittelpunktes ergibt sich dann als *gewichtetes Mittel* aller Koordinaten x_i.

$$x_S = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot x_2 + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot x_3,$$

allgemein

$$x_S = \sum_i \left(\frac{m_i}{\sum m_j} \right) \cdot x_i. \tag{3.9}$$

Beim entsprechenden dreidimensionalen Problem gilt Analoges für die Koordinaten y und z. Vektoriell zusammengefaßt mit $\vec{r} = (x_i, y_i, z_i)$ und $\vec{R} = (x_S, y_S, z_S)$ erhält man also den Ortsvektor des Massenmittelpunkts:

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_j} = \sum \left(\frac{m_i}{M}\right) \cdot \vec{r}_i, \quad M = \sum m_j\text{: Gesamtmasse.} \tag{3.10}$$

Im Fall der kontinuierlichen Massenverteilung eines starren Körpers teilt man diesen gedanklich in Massenelemente dm auf. Aus der Summation über einzelne Massenpunkte wird dann eine Integration über den gesamten Körper.

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \lim_{\Delta m \to 0} \sum \vec{r}_i \cdot \Delta m_i = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \mathrm{d}m. \tag{3.11}$$

Mit Hilfe der Dichte ρ läßt sich dies in ein Volumenintegral verwandeln,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho \cdot \mathrm{d}V,$$

das in einfachen Fällen, vornehmlich bei konstanter Dichte, ausgewertet werden kann.

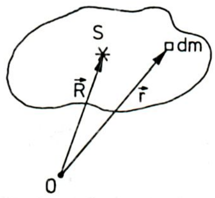

Fig. 3.9: Schwerpunkt S einer kontinuierlichen Massenverteilung.

Die besondere Bedeutung des Massenmittelpunktes wird anhand des folgenden einfachen Beispiels klar. Wieder seien zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 mit einer masselosen Stange zu einem Gesamtkörper verbunden (Fig. 3.10). An ihnen greifen die Gewichtskräfte $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$ und $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ an, die nach unten gerichtet sind. An welcher Stelle x_S der Stange müßte eine Gegenkraft $\vec{F}$ angreifen, die der gesamten Gewichtskraft $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ das Gleichgewicht hält und den Gesamtkörper in der waagerechten Lage beläßt?

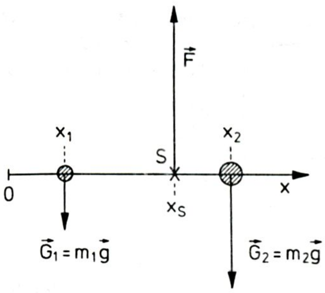

Fig. 3.10: Die Resultierende paralleler Kräfte kann im Massenmittelpunkt angreifend gedacht werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen fordern

1) für die Kräfte $\sum \vec{F}_i = 0$ und 2) für die Drehmomente $\sum \vec{M}_i = 0$ (S als Drehpunkt).

Das heißt bei dem in Fig. 3.10 skizzierten Beispiel:

1) $\vec{F} = -(\vec{G}_1 + \vec{G}_2)$

2) $G_1 \cdot (x_S - x_1) = G_2 \cdot (x_2 - x_S)$

oder

$$x_S = \frac{x_1 G_1 + x_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{x_1 m_1 g + x_2 m_2 g}{m_1 g + m_2 g} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Koordinate des Angriffspunktes der Kraft $\vec{F}$ erweist sich also gerade als die des Massenmittelpunktes[2]. Man kann allgemeiner formulieren:

[2] Massenmittelpunkt und Schwerpunkt erscheinen hier als zwei Bezeichnungen für denselben Punkt. Man macht sich jedoch leicht klar, daß dies nur dann gilt, wenn g über den Gesamtkörper als konstant angesehen werden kann. Das muß nicht mehr der Fall sein, wenn der Körper sehr große Ausmaße besitzt.

Im Gleichgewicht kann die Resultierende paralleler Kräfte (hier: Schwerkräfte) im Massenmittelpunkt angreifend gedacht werden.
(Massenmittelpunkt = Schwerpunkt).

Oder: Ein im Schwerpunkt unterstützter Körper ist in jeder Lage im statischen Gleichgewicht.

3.5 Reibungskräfte zwischen festen Körpern

Bei der experimentellen Herausarbeitung der grundlegenden Gesetze der Mechanik versucht man, Reibungskräfte möglichst auszuschalten, vor allem weil sie meist mit der Erzeugung von Wärme verbunden sind, für die es in der Mechanik keinen Platz gibt. Sie sind nichtsdestoweniger sehr wichtig für viele Bewegungsabläufe. Ohne Reibung könnte man nicht laufen, nicht fahren, nicht bremsen. Im Gegensatz zur *inneren Reibung*, die bei Flüssigkeiten und Gasen auftritt und durch einfache Gesetzmäßigkeiten erfaßbar ist (s. Abschnitt 17.2 u. 17.3), nennt man die Reibung zwischen festen Körpern *äußere Reibung*. Die mit ihr verbundenen physikalischen Vorgänge sind äußerst kompliziert. Wir beschränken uns hier auf wenige, oft nur näherungsweise gültige, phänomenologische Beziehungen.

Die Newtonschen Axiome 1 und 2 sind geniale Idealisierungen dessen, was man im täglichen Leben wirklich beobachtet. Sie besagen z. B., daß ein auf einer ebenen waagerechten Fläche rutschender Körper seine Geschwindigkeit für alle Zeiten beibehält und daß eine im Prinzip beliebig kleine Kraft diesen Bewegungszustand ändern kann, also den Körper beschleunigt. Ruht der Körper, dann wird er durch eine solche Kraft in Bewegung gesetzt. Dies gilt jedoch nur für den Fall völlig fehlender Reibung zwischen Körper und Unterlage. Ist Reibung vorhanden, kommt der sich bewegende Körper stets früher oder später zur Ruhe. Reibungskräfte sind stets so gerichtet, daß sie die Bewegung hemmen. Ist Reibung mit im Spiel, dann vermag eine beliebig kleine Kraft keineswegs den Körper in Bewegung zu setzen.

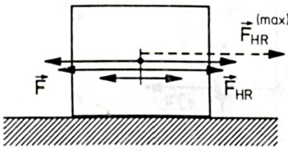

Fig. 3.11: Solange der Körper haftet ($F < F_{HR}^{(max)}$), antwortet er auf jede angreifende Kraft F mit einer gleich großen Gegenkraft F_{HR}.

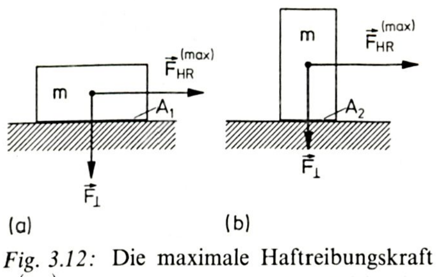

Fig. 3.12: Die maximale Haftreibungskraft $F_{HR}^{(max)}$ ist unabhängig von der Größe der Auflagefläche.

(a) Die Haftreibung

Ein Körper haftet auf seiner Unterlage. Kräfte, die kleiner sind als ein gewisser Grenzwert $F_{HR}^{(max)}$, lassen den Körper in Ruhe. Übersteigt die angreifende Kraft diesen Grenzwert, dann setzt sich der Körper ruckartig in Bewegung. Solange der Körper ruht und $F < F_{HR}^{(max)}$ ist, bewirkt die Haftreibung stets das Auftreten einer entgegengesetzt gleich großen Kraft $\vec{F}_{HR} = -\vec{F}$ (actio = reactio, Fig. 3.11).

Die maximale Haftreibungskraft $F_{HR}^{(max)}$ ist durch die Art und Beschaffenheit der Festkörpergrenzflächen (Stoffart, Rauhigkeit etc.) bestimmt. Experimentell stellt man fest, daß sie nur von der Normalkraft ($F_\perp$) abhängt, mit der der Körper auf die Unterlage drückt, nicht aber von der Größe der Auflagefläche A (Fig. 3.12a und 3.12b).

Die maximale Haftreibungskraft $F_{HR}^{(max)}$ ist proportional der Normalkraft $F_\perp$. Der Proportionalitätsfaktor ist der Koeffizient μ^* der Haftreibung.

$$F_{HR}^{(max)} = \mu^* \cdot F_\perp. \tag{3.12}$$

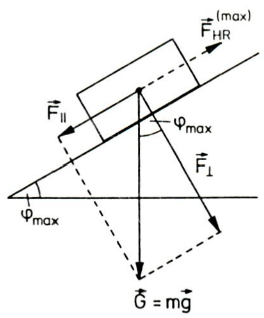

Fig. 3.13: Den Haftreibungskoeffizienten μ^* bestimmt man aus dem Neigungswinkel einer schiefen Ebene, bei dem der Körper gerade zu rutschen beginnt.

Experimentell läßt sich der Haftreibungskoeffizient z. B. an einer schiefen Ebene ermitteln: Man mißt den Neigungswinkel φ_{max} der Ebene, bei dem der Körper gerade nicht mehr auf der Unterlage zu haften vermag und daher zu gleiten beginnt. Für die Beträge der Kraftkomponenten gilt (Fig. 3.13):

$$F_\parallel = F_{HR}^{(max)} = G \cdot \sin\varphi_{max}, \qquad F_\perp = G \cdot \cos\varphi_{max}.$$

Aus $F_{HR}^{(max)} = \mu^* \cdot F_\perp$ folgt

$$\mu^* = \tan\varphi_{max}. \tag{3.13}$$

(b) Die Gleitreibung

Gleitet wie in Fig. 3.14 der Körper nach Überwindung der Haftreibung auf der waagerechten Ebene mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$, so bedarf es einer gewissen Kraft $\vec{F}$, um diese Geschwindigkeit aufrechtzuerhalten. Die ihr entgegengesetzt gerichtete, von der Reibung herrührende Kraft $\vec{F}_{GR}$ heißt Gleitreibungskraft. Sie ist ebenfalls proportional der Normalkraft $F_\perp$ und näherungsweise unabhängig von der Geschwindigkeit v des Körpers. Der auftretende Proportionalitätsfaktor μ heißt Gleitreibungskoeffizient; er ist stets kleiner als der Koeffizient μ^* der Haftreibung zwischen denselben Flächen.

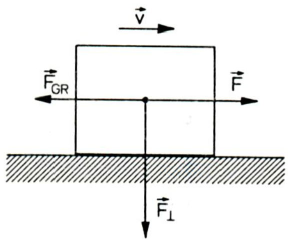

Fig. 3.14: Gleitet der Körper auf einer Unterlage, wirkt ständig eine Gleitreibungskraft, die der Verschiebungsrichtung entgegen gerichtet ist.

$$\text{Gleitreibungskraft:} \quad F_{GR} = \mu \cdot F_\perp \quad (\mu < \mu^*). \tag{3.14}$$

(c) Die Rollreibung

Ohne Haftreibung könnte ein Rad auf einer Unterlage nicht rollen, sondern nur gleiten. Die Rollreibung hat ihre Ursache in der Deformation des Rades und der Unterlage, die i. allg. beide nicht wirklich ideal starre Körper sind. Wie in den beiden vorangegangenen Fällen setzt man die die Rollbewegung des Rades hemmende Reibungskraft proportional zur Normalkraft an und definiert einen Rollreibungskoeffizienten μ_R, der allerdings meist viel kleiner ist als μ und μ^*.

$$\text{Rollreibungskraft:} \quad F_{RR} = \mu_R \cdot F_\perp. \tag{3.15}$$

Mitunter berücksichtigt man auch noch, daß der Koeffizient μ_R außer von der Beschaffenheit der Oberflächen noch vom Radius r des Rades abhängen muß: Bei gleicher Normalkraft drücken sich kleine Räder tiefer in die Unterlage als große. Die ihre Bewegung hemmende Reibungskraft muß also größer sein. Eine passable Annäherung an die Wirklichkeit gelingt mit der Beziehung

$$F_{RR} = \frac{l}{r} \cdot F_\perp, \tag{3.16}$$

erreicht, wobei l die charakteristische Rollreibungslänge bedeutet.

Tab. 3.2: Zahlenbeispiele für Reibungskoeffizienten

	Haftreibungskoeffizient μ^*		Gleitreibungskoeffizient μ	
	trocken	geschmiert (Öl)	trocken	geschmiert (Öl)
Stahl auf Stahl	$\approx 0{,}5$	$\approx 0{,}1$	$\approx 0{,}05$	$\approx 0{,}01$
Glas auf Glas	0,9	$\approx 0{,}5$		
Holz auf Holz	0,25–0,5			
Holz auf Metall	0,2–0,6		0,2–0,5	
Eis auf Eis (−10 °C)	0,3		0,035	

	Rollreibungskoeffizient μ_R	Rollreibungslänge l
Autoreifen auf Asphalt	0,025	
Stahl auf Stahl	0,003	$\approx 5 \cdot 10^{-4}$ m

3.6 Zusammenfassung

Grundgesetz der Mechanik	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Einheit: Newton = N
	Definitionen	
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\vec{r}$: Kraftarm $\vec{F}$: Kraft
Statisches Gleichgewicht	$\sum \vec{F}_i = 0$	$\sum \vec{M}_i = 0$
Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$	m: Masse V: Volumen
Schwerpunkt	$\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \lim\limits_{\Delta m \to 0} \sum\limits_i \vec{r}_i \cdot \Delta m_i = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho \cdot \mathrm{d}m$	
Haftreibung	$F_{HR}^{(max)} = \mu^* \cdot F_\perp$	μ^*: Haftreibungskoeffizient
Gleitreibung	$F_{GR} = \mu \cdot F_\perp$	μ: Gleitreibungskoeffizient
Rollreibung	$\left\{ \begin{array}{l} F_{RR} = \mu_R \cdot F_\perp \\ F_{RR} = \frac{l}{r} \cdot F_\perp \end{array} \right.$	μ_R: Rollreibungskoeffizient l: Rollreibungslänge r: Radius des Rades