Aussagenlogik

Vienna University of Technology
Institute of Mechanics and Mechatronics
(Divisions Machine Dynamics,
Measurements and Actuators)
Markus Nemetz, System Administrator
markus.nemetz@tuwien.ac.at

Zweiwertigkeitsprinzip, Junktoren

Logische Aussage: Kann nur wahr oder falsch sein (***Zweiwertigkeitsprinzip***)

- `4733 ist durch 3 teilbar` ist eine logische Aussage
- „`Guten Morgen`“ o.Ä. ist keine logische Aussage

^

Junktoren: Logische Funktionen, die logische Aussagen zu neuen, zusammengesetzten logischen Aussagen verknüpfen

- $\neg$ **not**
- $\wedge$ **und**
- $\vee$ **oder**

Wahrheitswert der zusammengesetzten Ausagen ergibt sich aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen

Wahrheitstafel, Elementtafel

Beispiel: `W(A) ∧ W(B) = W(A und B)` Beschreibung der Verknüpfung

Wahrheitstafel		
W(A)	***W(B)***	***W(A und B)***
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Wertetabelle		
W(A)	***W(B)***	***W(A und B)***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion: x oder y (oder beides). $x \lor y$ ist genau dann *falsch*, wenn x und y beide *falsch* sind.

Wertetabelle		
x	***y***	***x*** $\lor$ ***y***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Zweistell. log. Funktionen (2/4): ÄQUIVALENZ

Äquivalenz: $x \rightleftarrows y$ ist genau dann wahr, wenn x und y den gleichen Wahrheitswert haben.

Wertetabelle		
x	***y***	***x ⇄ y***
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Zweistell. log. Funktionen (3/4): ANTIVALENZ

Antivalenz (exkl. ODER): genau dann wahr, wenn entweder x gilt oder y gilt

Wertetabelle		
x	***y***	***x ≠ y***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikation: x → y genau dann falsch, wenn aus wahrem falsches folgt

Wertetabelle		
x	***y***	***x → y***
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Negation (Verneinung): x̄ ist genau dann wahr, wenn x falsch ist

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Andere:

x y	0 0	0 1	1 0	1 1	Symbole	Bezeichnungen
0	0	0	0	0		Nullfunktion
1	0	0	0	1	$\wedge$, $\bullet$, AND	Konjunktion, log. Prod.
2	0	0	1	0		Inhibition
3	0	0	1	1		
4	0	1	0	0		
5	0	1	0	1		
6	0	1	1	0	XOR, $\not\Leftrightarrow$	Antivalenz
7	0	1	1	1	$\vee$, +, OR	Disjunktion, log. Sum.
8	1	0	0	0	$\overline{\vee}$, NOR, $\downarrow$	PEIRCEfunktion
9	1	0	0	1	$\Leftrightarrow$, $\leftrightarrow$	Äquivalenz
10	1	0	1	0		
11	1	0	1	1		
12	1	1	0	0		
13	1	1	0	1	$\Rightarrow$, $\rightarrow$, $\supset$	Implikation
14	1	1	1	0	$\overline{\wedge}$, NAND, $\mid$	SHEFFERfunktion
15	1	1	1	1		Einsfunktion

BOOLesche Ausdrücke

Definition: Eine Verknüpfung von (endlich vielen) Konstanten und logischen Variablendurch Grundfunktionen heißt *(logischer) Ausdruck*, insbesondere *BOOLEscher Ausdruck,* wenn höchstens die Grundfunktionen NOT, AND und OR darin vorkommen.

Vorrangregeln

Zur Einsparung von Klammern bei längeren Ausdrücken werden für die ichtigsten Verknüpfungen ***Prioritäten der Auswertung*** vereinbart (Vgl. *Punktrechnung geht vor Strichrechnung*).

Höchste Priorität haben geklammerte Verknüpfungen, es folgen

NOT (Negation)	$\bar{\ }$	$(\neg)$
AND (Konjunktion)	$\wedge$	$(\cdot)$
OR (Disjunktion)	$\vee$	$(+)$
Implikation (Subjunktion)	$\Rightarrow$	$(\rightarrow)$
Äquivalenz (Bijunktion)	$\Leftrightarrow$	$(\leftrightarrow)$

Beim ***Hintereinanderausführen mehrerer gleichrangiger Verknüpfungen*** (z.B. $a \rightarrow b \rightarrow c$) wird von links nach rechts ausgewertet

Äquivalente Ausdrücke

Aus der Elementarmathematik sind äquivalente Ausdrücke bekannt: z.B.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

Entsprechend gibt es äquivalente *logische* Ausdrücke.

Definition: Zwei logische Ausdrücke A1 und A2 heißen *äquivalent* genau dann, wenn sie bei gleichen Werten der gemeinsamen Variablen stets gleiche Wahrheitswerte besitzen: A1 = A2.

Tautologie

Ein Ausdruck, der für jede Belegung der Variablen wahr ist, heißt ***Tautologie*** (*immer wahr*), z.B. $a \wedge \bar{a} = 0.$

Ist der Ausdruck $\bar{a} \vee b \vee a\bar{b}$ eine Tautologie?

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a\bar{b}$	$\bar{a} \vee b$	$\bar{a} \vee b \vee a\bar{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Ja, sämtliche Ergebniswerte in der Wertetabelle sind wahr.

Kontradiktion

Ein Ausdruck, der für jede Belegung der Variablen falsch ist, heißt ***Kontradiktion*** (*immer falsch*), z.B. $a \wedge \bar{a} = 0.$

Sämtliche Ergebnis $\bar{a} \vee b \vee a\bar{b}$ er Wertetabelle müssen falsch sein.

Umformungen

Regeln zum Vereinfachen bzw. Umformen logischer Ausdrücke

Da sich alle Ausdrücke so schreiben lassen, dass sie nur noch die Operationen NOT, AND, OR enthalten.brauchen nur die Umformungen derartiger Ausdrücke (*BOOLEsche Ausdrücke*) betrachtet zu werden.

Die Beweise der logischen Gesetze erfolgen durch Wertetabellen, z.B. eines der Absorptionsgesetze $a \wedge (a \vee b) = a$

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Aufgabe: Beweis der DE MORGANschen Gesetze.

Lösung:

Zu zeigen ist: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Logische Gesetze (1/2)

(Umformungsregeln für BOOLEsche Ausdrücke)

Für alle $x, y, z \in \{0, 1\}$ gelten:

1. $\bar{\bar{x}} = x$ — Negation der Negation

2. $\left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\}$ — Kommutativgesetze

3. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\}$ — Assoziativgesetze

4. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right\}$ — Distributivges.

Logische Gesetze (2/2)

5. $\left.\begin{array}{l} \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \end{array}\right\}$ Gesetze von DE MORGAN

6. $\left.\begin{array}{ll} x \wedge 1 = x & x \vee 1 = 1 \\ x \wedge 0 = 0 & x \vee 0 = x \end{array}\right\}$ 0 - 1 Gesetze

7. $\left.\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right\}$ Idempotenzgesetze

8. $\left.\begin{array}{l} x \wedge \bar{x} = 0 \\ x \vee \bar{x} = 1 \end{array}\right\}$ Komplementgesetze

9. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \\ (x \vee \bar{y}) \wedge y = x \wedge y \\ (x \wedge \bar{y}) \vee y = x \vee y \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x \\ (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \end{array}\right\}$ Absorptionsgesetze

Anwendungen der Logik

Mathematische Beweise

Programmierung, Programmiersprachen

Künstliche Intelligenz (KI)

Theorie der Datenbanken

Schaltalgebra (Logische Schaltungen , Computer-Entwurf , Prozesssteuerung)

Beweismethoden (1/3): Direkter Beweis

Beweise beruhen auf Implikationen: Aus einer Aussage A wird in einem Beweis eine Aussage B abgeleitet (gefolgert).
Man unterscheidet folgende Beweismethoden:

1. **Direkter Beweis** $(A \Rightarrow B)$
   Beispiel:
   Behauptung : $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq a \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
   Beweis : $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2a \cdot b \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq a \cdot b$

Beweismethoden (2/3): Indirekter Beweis

Widerspruchsbeweis
($A \wedge \overline{B} \Rightarrow$ falsch , z.B. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, A ist aber wahr!)

Beispiel:
n sei eine gerade natürliche Quadratzahl (Aussage A)
Behauptung : $k := \sqrt{n}$ ist gerade
Beweis : k sei nicht gerade, also ungerade ($\bar{B}$). Dann, ist $n = k^2$ auch ungerade, also nicht gerade. d.h. $\bar{A}$ gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu A, denn A und $\bar{A}$ können nicht gleichzeitig wahr sein.

Beweis durch Kontraposition
($A \Rightarrow B$ ist gleichwertig mit $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$)

Beispiel:
n sei ein gerade natürliche Quadratzahl (Aussage A)
Behauptung : $k = \sqrt{n}$ ist gerade
Beweis : k sei nicht gerade, also ungerade. Dann ist $n = k^2$ auch ungerade, also nicht gerade, d.h. dann gilt $\bar{A}$, d.h. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ und diese Aussage ist gleichwertig mit $A \Rightarrow B$

Beweismethoden (3/3): Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Aussageformen über natürliche Zahlen: A(n)

$$\left.\begin{array}{ll} & \mathrm{A}(1) \\ \wedge & \forall k \in \mathbb{N}: \ (\mathrm{A}(\mathrm{k}) \Rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{k}+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{A}(\mathrm{n})$$

Quellen:

Baron/Kirschenhofer

http://www.rz.rwth-aachen.de/mata/downloads/grundlagen_mathe/Kapitel2.pdf

http://www.ifi.unizh.ch/cl/klenner/lehre/formale_grundlagen/Aussagenlogik.4.pdf