

Übungsblatt 3 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

15.) Man löse das AWP

$$yy'' + y'^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

16.) Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand R mit 8 Ohm, der mit einer Induktion L von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn

(a) $E = E(t) = 64$,

(b) $E = E(t) = 32e^{-8t}$.

Hinweis: Es muß gelten, daß die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis = 0 ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist RI und bei der Induktion $L \frac{dI}{dt}$.

17.) Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

(a) Wieviel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?

(b) Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen:

Gegeben: AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Unterteilung der Strecke $[x_0, x]$ in n gleich große Teile.

Schrittweite $h := \frac{x-x_0}{n}$.

Stützstellen $x_k := x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Einschrittverfahren: Iterationen $y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k, h)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Euler-Verfahren: $F(x_k, y_k, h) := f(x_k, y_k)$.

Verfahren von Heun: $F(x_k, y_k, h) := \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$, wobei $K_1 := f(x_k, y_k)$, $K_2 := f(x_k + h, y_k + hK_1)$.

Verfahren von Runge-Kutta: $F(x_k, y_k, h) := \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$, wobei $K_1 := f(x_k, y_k)$, $K_2 := f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_1)$, $K_3 := f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hK_2)$, $K_4 := f(x_k + h, y_k + hK_3)$.

- 18.) Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß n mindestens gewählt werden muß, damit beim Euler-Verfahren der relative Fehler für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.
- 19.) Man vergleiche das Euler-Verfahren, das Verfahren von Heun und das Verfahren von Runge-Kutta für das AWP $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.6$, wobei $n = 3$ gewählt werden soll. Löse das AWP auch exakt und ermittle jeweils den relativen Fehler für die einzelnen Verfahren.
Anmerkung: Nach Möglichkeit programmiere man die einzelnen Verfahren. Wenn "mit der Hand" gerechnet werden muß, wähle $n = 1$.
- 20.) Man löse das folgende AWP durch einen Potenzreihenansatz um $x = 0$:

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x}, \quad y(0) = y_0,$$

mit beliebig vorgegebenem $y_0 \in \mathbb{R}$.

- 21.) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz um $x = 1$:

$$xy' - y - x - 1 = 0.$$