Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**1.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	11. Okt. 2005

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich ($AB \equiv A \cap B$):

   (a) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$
   (b) $(A \cup B)(B \cup C)$
   (c) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})$
   (d) $(AB) \cup (A\overline{B})$
   (e) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A\overline{B})$

2. (a) Gilt für eine Folge C_1, C_2, ... von Mengen, daß $C_k \subset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots$, so wird $\lim_{k\to\infty} C_k$ als Vereinigung der Mengen, $C_1 \cup C_2 \cup \cdots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:

   (1) $C_k = \big\{x \,:\, 1/k \le x \le 3 - 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (2) $C_k = \big\{(x, y) \,:\, 1/k \le x^2 + y^2 \le 4 - 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$

   (b) Gilt für eine Folge C_1, C_2, ... von Mengen, daß $C_k \supset C_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots$, so wird $\lim_{k\to\infty} C_k$ als Durchschnitt der Mengen, $C_1 \cap C_2 \cap \cdots$, definiert. Ermitteln Sie den Limes für:

   (1) $C_k = \big\{x \,:\, 2 - 1/k < x \le 2\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (2) $C_k = \big\{x \,:\, 2 < x \le 2 + 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$
   (3) $C_k = \big\{(x, y) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 1/k\big\},\ k = 1, 2, \ldots$

3. Für jede (eindimensionale) Menge A sei $Q(A)$ definiert durch $Q(A) = \sum_A f(x)$ wobei $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ ($f(x) = 0$ sonst). Wenn $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $A_3 = \{0, 2, 4, \ldots\}$ bestimmen Sie $Q(A_1)$, $Q(A_2)$, $Q(A_3)$.

4. Eine Firma stellt drei verschiedene Artikel a, b, c her. Sie berichtet, daß von 1000 befragten Haushalten 67 mindestens a und b, 95 mindestens b und c, 116 mindestens a und c, 53 alle drei und 190 mindestens zwei der Artikel benutzen. Wie beurteilen Sie diese Angaben?

5. Zwei Personen betreten (unabhängig voneinander) ein Cafe und halten sich dort (genau) 1/2 Stunde (Person A) bzw. (genau) 1 Stunde (Person B) auf. Die Ankunftszeitpunkte liegen zufällig zwischen 9 und 12 Uhr.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit begegnen sie einander?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich um 11 Uhr (i) weder A noch B; (ii) A oder B, aber nicht beide; (iii) A oder B; (iv) A und B im Cafe aufhalten?

6. Auf einer Kreislinie werden zufällig zwei Punkte, P_1 und P_2, ausgewählt. (Wie läßt sich das praktisch realisieren?) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Sehne $\overline{P_1P_2}$ länger als der Radius des Kreises?

<u>Lösungen zum 1. Blatt</u>

1. (a) A; (b) $(A \cap C) \cup B$; (c) $A \cap B$; (d) A; (e) $\emptyset$

2. (a) (1) $\{x : 0 < x < 3\}$; (2) $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$
   (b) (1) $\{x : x = 2\}$; (2) $\emptyset$; (3) $\{(x,y) : x = 0, y = 0\}$

3. $Q(A_1) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(1/3)^4 - 1}{(1/3) - 1} = \dfrac{80}{81}$

   $Q(A_2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - (1/3)} = 1$

   $Q(A_3) = \dfrac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} = \dfrac{2}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - (1/9)} = \dfrac{3}{4}$

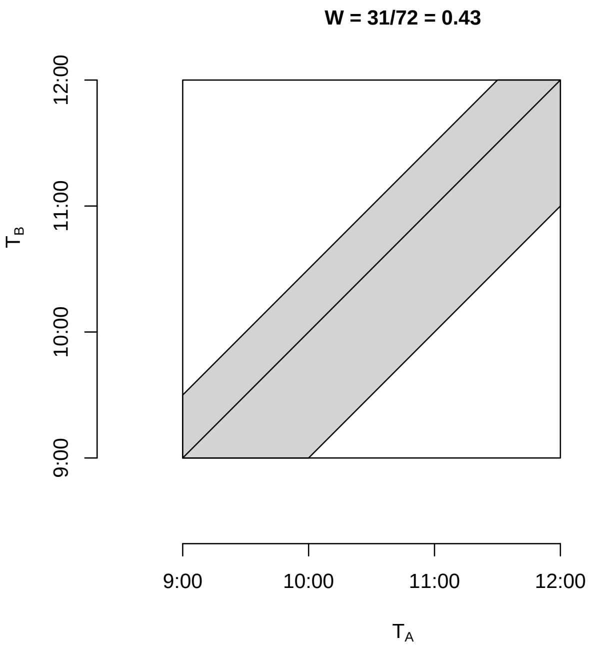
4. Bildet man die Summe 67 + 95 + 116, zählt man die Haushalte, die alle drei Produkte verwenden, insgesamt dreimal. Die Zahl der Haushalte, die zumindest zwei Produkte verwenden, beträgt somit $67+95+116-2\times 53 = 172$. Laut Angabe gibt es aber 190 derartige Haushalte; die Zahlen können daher nicht stimmen.

   <u>Bem.:</u> Allgemeiner gilt für Mengen A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, das folgende In– und Exklusionsgesetz:

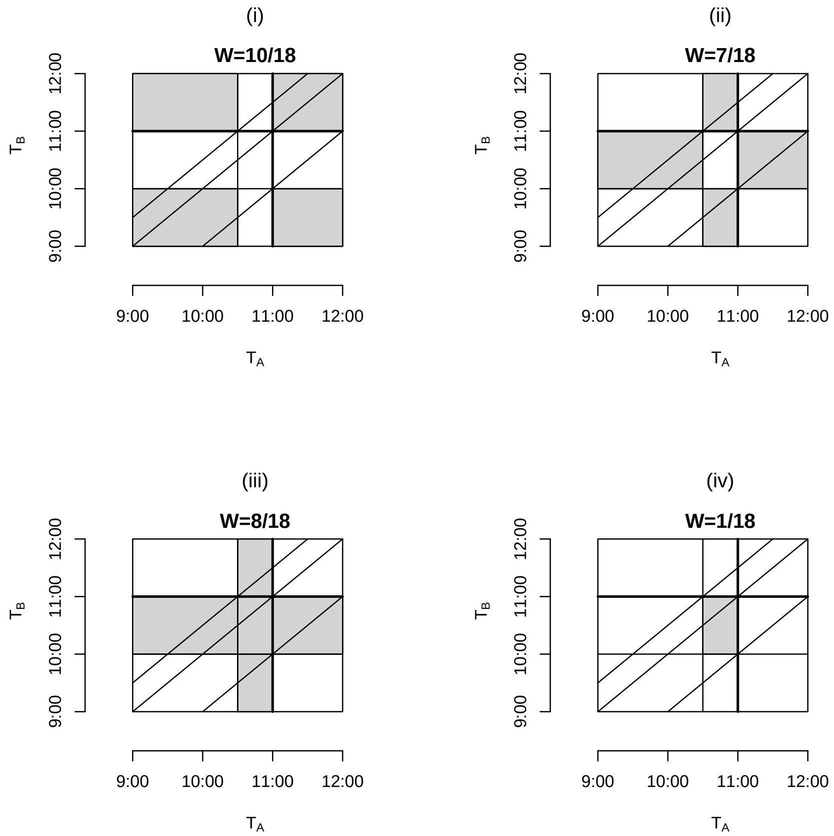
$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|$$

5. (a) Sie begegenen einander, wenn ihr Ankunftszeitpunkt (T_A, T_B) in den grau unterlegten Bereich fällt; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

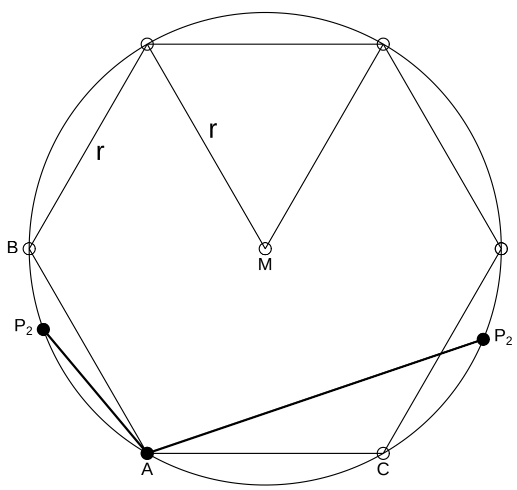
$$W = \frac{|\text{günstiger Bereich}|}{|\text{möglicher Bereich}|} = 1 - \frac{2 + 25/8}{9} = \frac{31}{72} \doteq 0.431$$



(b) Die „günstigen“ Bereiche sind in der folgenden Abbildung grau unterlegt.



6. Fällt P_1 in den Punkt A, dann ist die Sehne genau dann kürzer als der Radius, wenn P_2 in den Kreisbogen BAC fällt; die Länge des letzteren beträgt $1/3$ des Kreisumfangs. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $1 - 1/3 = 2/3$.



Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 **2.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	18. Okt. 2005

Die folgenden graphischen Aufgaben können sowohl „mit der Hand“ als auch mit Hilfe von (Statistik–) Software (R, EXCEL, ...) gelöst werden.

1. Klassifizieren Sie die Merkmale dieses Übungsblatts nach den in der Vorlesung besprochenen Gesichtspunkten (qualitativ/quantitativ; diskret/stetig; ...) und bestimmen Sie das jeweilige Skalenniveau (Nominal–, Ordinal–, Intervall–, Verhältnisskala). Geben Sie auch passende Merkmalräume an.

   Hinweis: *Intervallskalen* haben keinen absolut festgelegten Nullpunkt, er dient nur zur Definition der Skala; Differenzen sind sinnvoll interpretierbar (Bsp.: Temperaturskala in °C). *Verhältnisskalen* sind Intervallskalen mit absolutem Nullpunkt und nur positiven Meßwerten (Bsp.: Temperaturskala in K(elvin)).

2. Die folgende Tabelle zeigt die Benotung der UE „Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.“ vom WS 2004/5 (nur die positiven Noten), aufgeschlüsselt nach den UE–Leitern:

	S1	U2	B3	G4
L1	21	9	3	6
L2	24	30	20	0
L3	7	16	23	2
L4	8	24	25	5
L5	4	12	20	11

   (a) Zeichnen Sie für die Gesamtbenotung ein Balken– und ein Kreisdiagramm.

   (b) Zeichnen Sie für die Benotungen der UE–Leiter Balkendiagramme. Achten Sie bei der Darstellung darauf, daß die Diagramme miteinander vergleichbar sind und kommentieren Sie das Ergebnis.

Die Beispiele 3 – 6 beziehen sich auf den Datensatz `normtemp.dat` (vgl. Ü–Homepage), der Angaben zu Körpertemperatur (`temperature` [°F]; x°F $= 5(x - 32)/9$°C) und Ruhepuls (`hr` [Schläge pro Minute]) von 130 (gesunden) Personen beiderlei Geschlechts (`gender`) enthält. Studentinnen betrachten den Teildatensatz für `gender=W` und Studenten den für `gender=M`.

3. Zeichnen Sie für das Merkmal `temperature` die empirische Verteilungsfunktion.

4. Erstellen Sie für das Merkmal `hr` ein Histogramm der relativen Häufigkeiten. Nehmen Sie dazu äquidistante Klassen der Breite 5 von 55 bis 90.

5. Erstellen Sie für das Merkmal `temperature` ein Dichtehistogramm. Nehmen Sie dazu äquidistante Klassen der Breite 0.5 von 96 bis 99.5 bzw. 101.

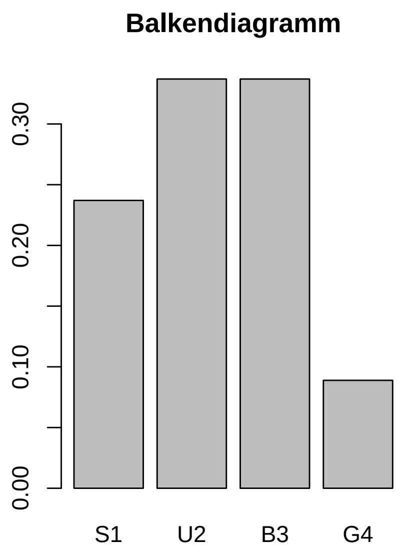
   Hinweis: Ein Dichtehistogramm (auch „flächentreues“ Histogramm genannt) ist ein Histogramm, dessen Fläche gleich 1 ist.

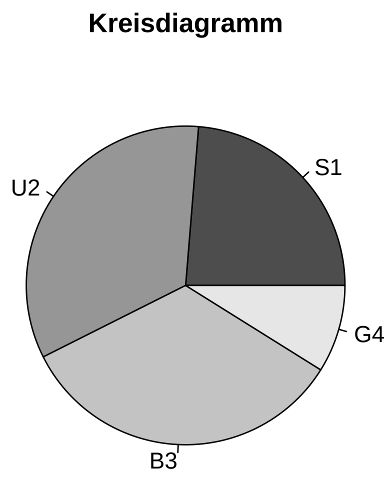
6. Erstellen Sie auf Basis der Klasseneinteilung von Bsp-4 bzw. Bsp-5 das Summenpolygon für `hr` bzw. `temperature`.

Lösungen zum 2. Blatt

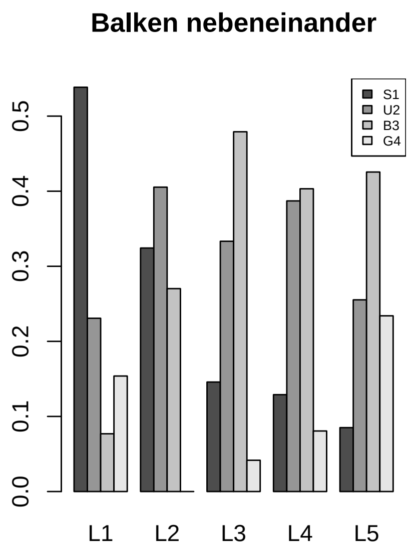
1. UE–Noten: qualitativ, diskret, ordinal
   UE–Leiter: nominal
   (Absolute) Häufigkeiten: Zählvariable, quantitativ, diskret, verhältnisskaliert
   `temperature`: quantitativ, stetig, intervallskaliert
   `hr`: Zählvariable, quantitativ, diskret, verhätnisskaliert
   `gender`: nominal

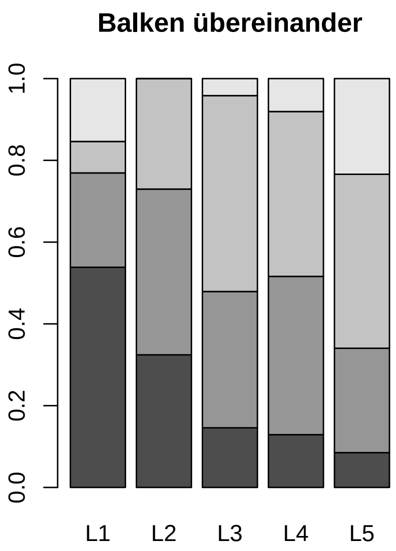
2. (a) Gesamtbenotung (relative Häufigkeiten):



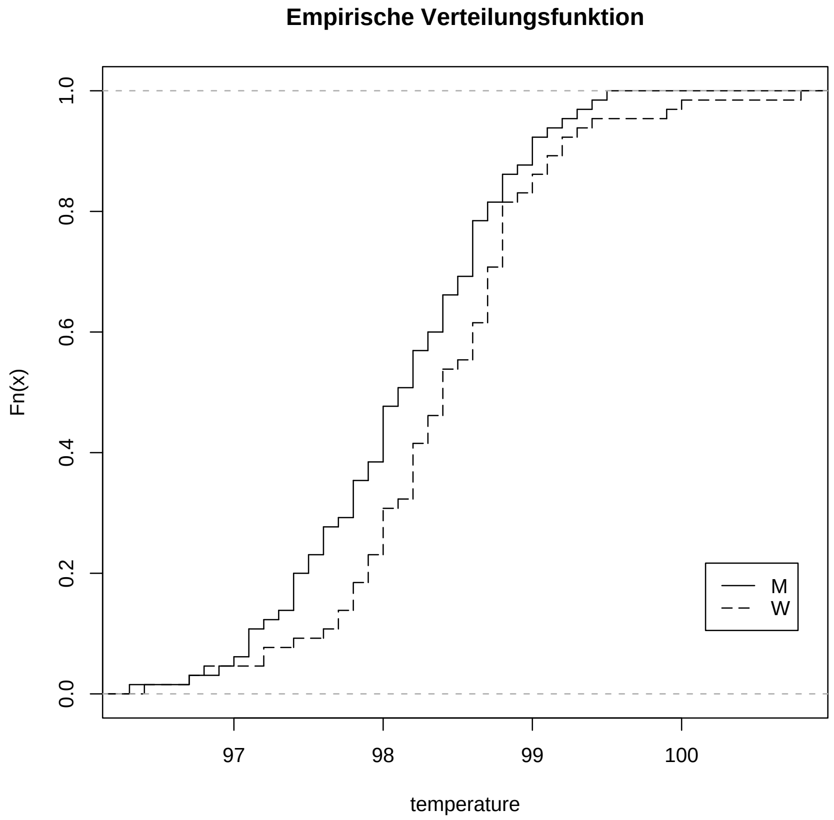


   (b) Nach den UE–Leitern (relative Häufigkeiten):

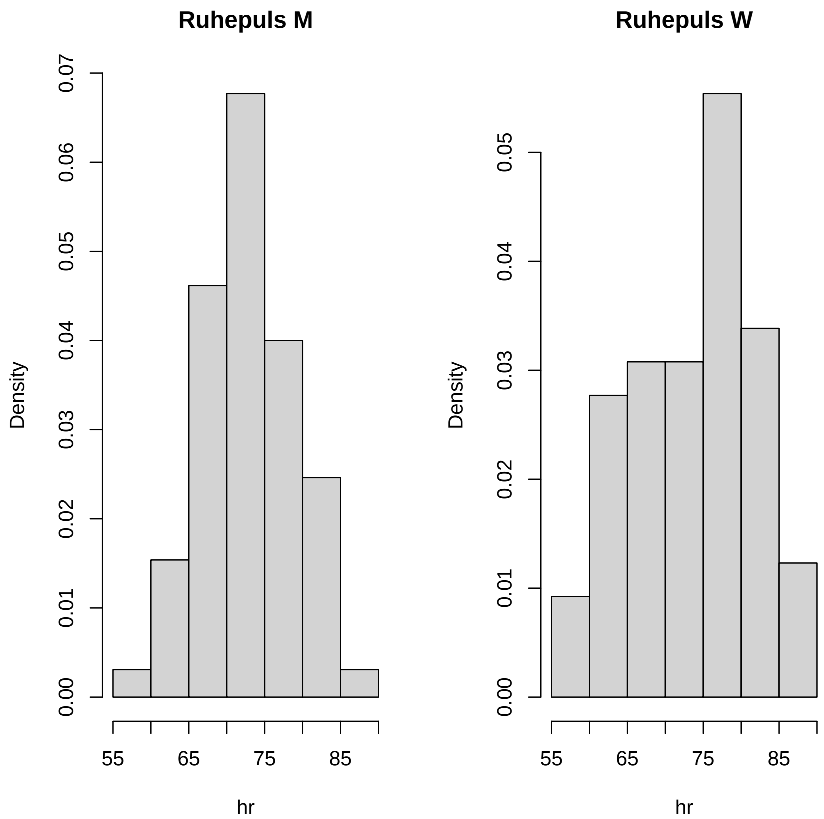




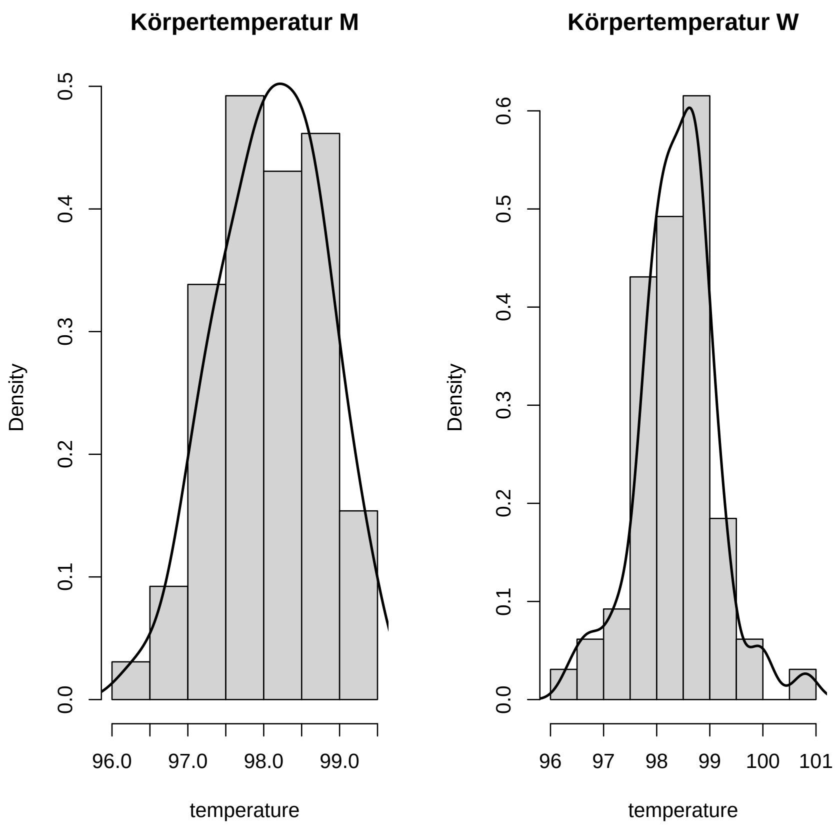
3. Empirische Verteilungsfunktion der Körpertemperatur:



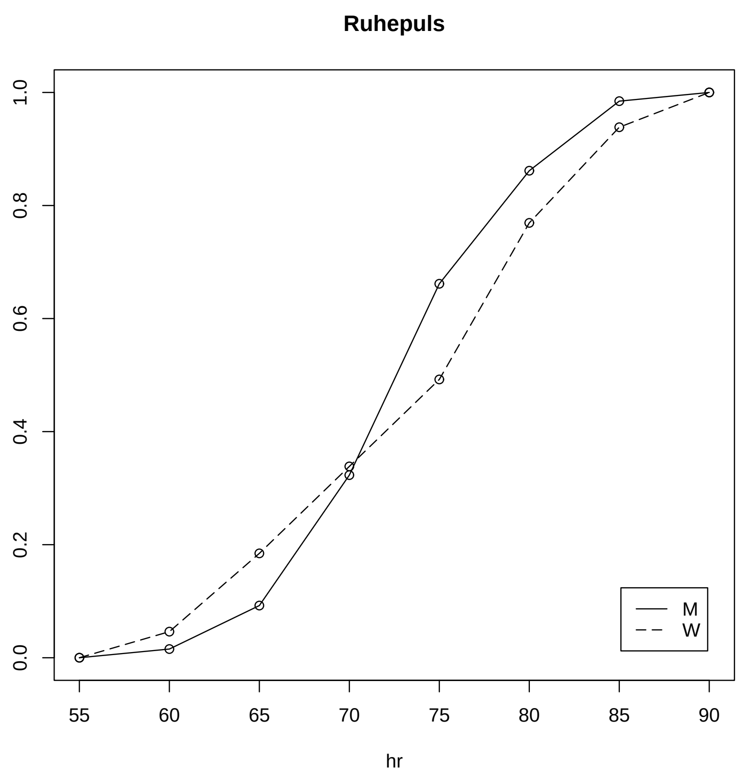
4. (Dichte–) Histogramm des Ruhepulses:



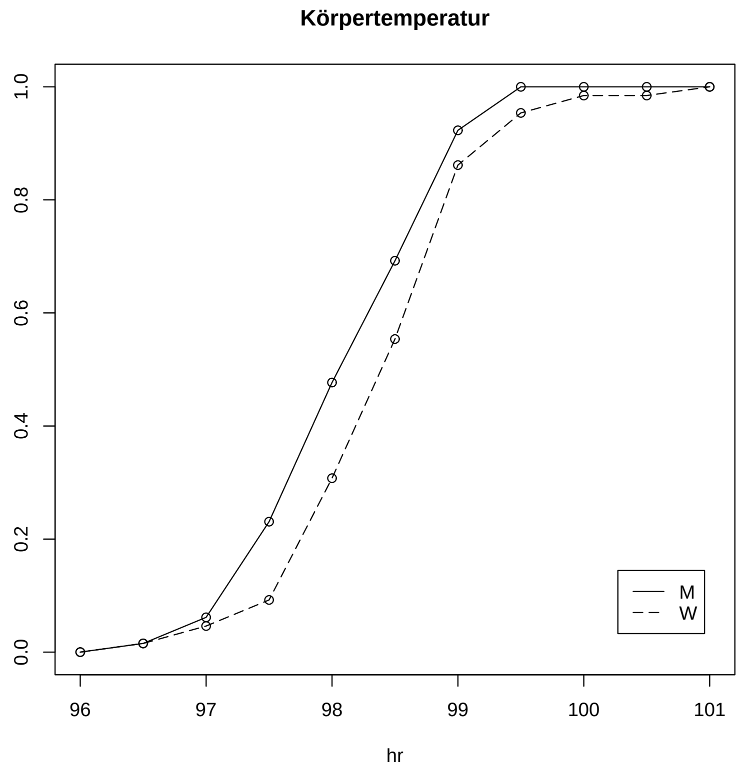
5. (Dichte–) Histogramm der Körpertemperatur (überlagert mit einer „glatten" Dichteschätzung):



6. Summenpolygon für den Ruhepuls:



Summenpolygon für die Köpertemperatur:



Bem.: Es gibt noch zahlreiche andere Möglichkeiten zur graphischen Aufbereitung von Datensätzen, beispielsweise die Stamm-und-Blatt–Darstellung (eine Art Histogramm mit von den Daten selbst bestimmter Klasseneinteilung). Für die Köpertemperatur ist diese Darstellung gegeben wie folgt (*dos à dos* von M und W):

```
                Körpertemperatur

                  M            W

                     3| 96| 4
                    97| 96| 78
            4444321110| 97| 224
          998888766655| 97| 677888999
   4444332222110000000| 98| 0000012222223334444 4
       98887766666655| 98| 5666677777788888889
              4321000| 99|00112234
                    5| 99| 9
                     |100| 0
                     |100| 8
```

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**3.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	25. Okt. 2005

1. Zwei Zahlen a und b werden zufällig (mit Zurücklegen) aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ ausgewählt.

   (a) Wenn $k = 20$, mit welcher (exakten) Wahrscheinlichkeit sind a und b relativ prim (teilerfremd)?

   *(b) Ermitteln Sie einen approximativen Ausdruck (nicht berechnen) für diese Wahrscheinlichkeit, wenn k eine große (natürliche) Zahl ist. Was ergibt sich für $k \to \infty$?

2. Bei einer Lotterie mit 40000 Losen gibt es drei große Gewinne.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man zumindest einen großen Gewinn pro 1000 Losen bekommt.

   *(b) Wie viele Lose müßte man kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit eines großen Gewinns zumindest 0.5 ist?

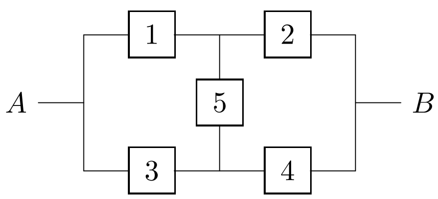
3. (a) Zeigen Sie die *Boole'sche Ungleichung*:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} W(E_i)$$

   (b) Zeigen Sie die *Bonferroni'sche Ungleichung*:

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} W(\overline{E}_i)$$

4. In der folgenden Brückenschaltung sind die Verbindungen (unabhängig voneinander) mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p $(0 \leq p \leq 1)$ intakt. Die Schaltung ist intakt, wenn Strom von A nach B fließen kann.



   E sei das Ereignis, daß die Schaltung intakt ist, und V_i das Ereignis, daß Verbindung i intakt ist $(i = 1, \ldots, 5)$.

   (a) Wie lautet ein passender Merkmalraum? Wie läßt sich V_i auf Basis dieses Merkmalraums ausdrücken?

   (b) Drücken Sie E mit Hilfe von V_i, $i = 1, \ldots, 5$, aus.

(c) Benützen Sie die Darstellung von (b) um $W(E)$ mit Hilfe des Additionstheorems zu berechnen.

*(d) Berechnen Sie $W(E)$ mit Hilfe des Satzes von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, indem Sie durch den Status (intakt/defekt) von Verbindung 5 bedingen.

5. Einer von zwei Behältern mit jeweils 10 Kugeln enthält eine markierte Kugel. Es ist bekannt, daß sich die markierte Kugel mit Wahrscheinlichkeit 2/3 im ersten Behälter befindet. Sie bekommen die Möglichkeit, hintereinander 20 Kugeln mit Zurücklegen nach Belieben aus den Behältern zu ziehen. Wie gehen Sie vor, wenn Sie die markierte Kugel mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit finden möchten?

   (a) Angenommen, Sie entscheiden sich dafür, 10 Kugeln aus dem ersten und 10 Kugeln aus dem zweiten Behälter zu ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie die markierte Kugel?

   *(b) Wie lautet die optimale Aufteilung der Ziehungen?

6. Angenommen, von 100 VLSI–Chips sind im Durchschnitt 3 defekt. Ein automatischer Test erkennt einen guten Chip in 90% der Fälle, und einen defekten Chip in 95% der Fälle als solchen.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als gut erkannter Chip tatsächlich gut ist?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als defekt erkannter Chip tatsächlich defekt ist? Geben Sie eine Erklärung für die (unerwartet?) kleine Wahrscheinlichkeit.

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 3. Blatt

1. (a) Der Merkmalraum des Versuchs ist $M = \{(x, y) : x, y = 1, 2, \ldots, 20\}$; er besteht aus $m = 20^2 = 400$ Elementen. Zwei Zahlen sind relativ prim, wenn sie keine gemeinsamen Teiler haben; dabei kann man sich auf die Primzahlen kleiner gleich 20 beschränken. Die Zahl der günstigen Versuchsausgänge läßt sich durch einfaches Abzählen oder – etwas schneller – mit Hilfe des In– und Exklusionsgesetzes (vgl. Lösung zu **Bsp 1.4**, Bemerkung) bestimmen. Bezeichnet man mit E_p das Ereignis, daß beide Zahlen durch p teilbar sind, so gilt mit $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$:

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{p\in I} E_p\Big| &= \sum_{p\in I} |E_p| - |E_2 \cap E_3| - |E_2 \cap E_5| - |E_2 \cap E_7| - |E_3 \cap E_5| \\ &= 100 + 36 + 16 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 - 9 - 4 - 1 - 1 \\ &= 145\end{aligned}$$

Man beachte, daß alle nicht hingeschriebenen paarweisen Durchschnitte und alle Durchschnitte höherer Ordnung leer sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also gegeben durch:

$$\frac{g}{m} = \frac{400 - 145}{400} = \frac{255}{400} = \frac{51}{80} = 0.6375$$

*(b) Ist $p_1, p_2, \ldots$ die Folge der Primzahlen, so ist ein approximativer Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit für großes k gegeben durch:

$$\prod_{p_i\le k}\left[1 - \left(\frac{k/p_i}{k}\right)^2\right] = \prod_{p_i\le k}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

Für $k \to \infty$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{p_i\le k}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} \doteq 0.6079$$

<u>Bem.:</u> Allgemeiner gilt:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Dabei ist $\zeta(s)$ die *Riemann'sche Zeta–Funktion*:

$$\zeta(s) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^s}$$

Sie konvergiert für $s > 1$; für $s = 2$ gilt:

$$\zeta(2) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. (a) Gibt es N ($= 40000$) Lose und k ($= 3$) große Gewinne, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n ($= 1000$) Ziehungen zumindest einen großen Gewinn zu bekommen, gegeben durch:

$$p = 1 - \frac{N-k}{N} \cdot \frac{N-k-1}{N-1} \cdots \frac{N-k-n+1}{N-n+1} = 1 - \frac{(N-k)!\,(N-n)!}{N!\,(N-k-n)!}$$

Da k im Vergleich zu N sehr klein ist, läßt sich dieser Ausdruck approximativ auch wie folgt schreiben:

$$p \approx 1 - \left(\frac{N-n}{N}\right)^k$$

Konkret ergibt sich:

$$p \approx 1 - \left(\frac{39}{40}\right)^3 = 0.0731$$

*(b) Dafür muß gelten:

$$\frac{1}{2} \geq \left(\frac{N-n}{N}\right)^k \quad \Longrightarrow \quad n \geq N\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}\right]$$

Konkret ergibt sich:

$$n \geq 40000\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\right] \doteq 8252$$

3. (a) Die Vereinigung der Mengen E_i, $i = 1, \ldots, n$, läßt sich als Vereinigung von (paarweise) disjunkten Mengen darstellen:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n}\left(E_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E}_j\right)$$

Damit folgt die Behauptung:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} W\left(E_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{E}_j\right) \leq \sum_{i=1}^{n} W(E_i)$$

Die Ungleichung gilt wegen $A \subseteq B \Longrightarrow W(A) \leq W(B)$.

(b) Nach den DeMorgan'schen Regeln gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right)}$$

Daraus folgt mit $W(\overline{A}) = 1 - W(A)$ und (a) die Behauptung:

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - W\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} W(\overline{E}_i)$$

4. (a) Kodiert man mit 0/1 eine defekte/intakte Verbindung, so ist ein geeigneter Merkmalraum gegeben durch:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_i = 0, 1;\; i = 1, \ldots, 5\}$$

Für das Ereignis V_i (= „Verbindung i ist intakt“) gilt dann:

$$V_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_i = 1,\; x_j = 0, 1,\; j \neq i\} \subseteq M$$

(b) Das (zusammengesetzte) Ereignis E (= „Strom fließt von A nach B“) läßt sich auf Basis der Ereignisse V_i wie folgt ausdrücken:

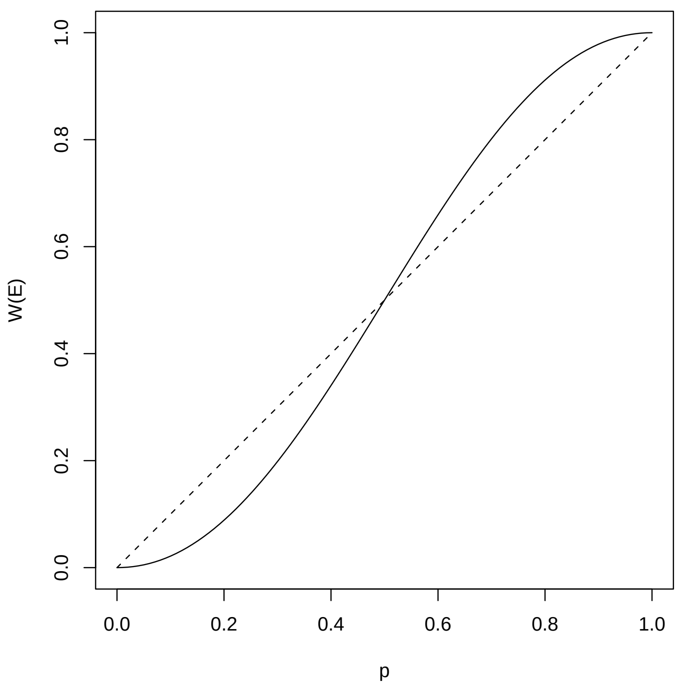
$$E = \big(V_1 \cap V_2\big) \cup \big(V_3 \cap V_4\big) \cup \big(V_1 \cap V_4 \cap V_5\big) \cup \big(V_2 \cap V_3 \cap V_5\big)$$

(c) Mit dem Additionstheorem folgt (die Ereignisse V_i sind nach Voraussetzung unabhängig):

$$W(E) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 - p^5 + 4p^5 - p^5 = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

*(d) Bedingen durch den Status von Verbindung 5 (Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit):

$$\begin{aligned}
W(E) &= W(E|V_5)W(V_5) + W(E|\overline{V}_5)W(\overline{V}_5) \\
&= W\big((V_1 \cup V_3) \cap (V_2 \cup V_4)\big)W(V_5) + W\big((V_1 \cap V_2) \cup (V_3 \cap V_4)\big)W(\overline{V}_5) \\
&= [2p - p^2]^2 p + [2p^2 - p^4](1 - p) \\
&= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5
\end{aligned}$$



5. (a) Bezeichnet H_1 das Ereignis, daß die markierte Kugel im ersten Behälter ist, und H_2 das Ereignis, daß sie im zweiten ist, und ist A das Ereignis, daß sie gefunden wird, so gilt mit dem Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} W(A) &= W(A|H_1)W(H_1) + W(A|H_2)W(H_2) \\ &= \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right]\frac{2}{3} + \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right]\frac{1}{3} \\ &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 0.6513 \end{aligned}$$

*(b) Bezeichnen wir allgemeiner mit p die Wahrscheinlichkeit, daß die markierte Kugel im ersten Behälter ist, und machen wir insgesamt n Ziehungen mit Zurücklegen (m aus dem ersten Behälter, $n - m$ aus dem zweiten), so gilt analog zu (a):

$$W(A) = \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{m}\right]p + \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-m}\right](1-p)$$

Für konkrete Werte von n und p läßt sich das optimale m durch Probieren finden oder durch die folgende Überlegung ($da^x/dx = a^x \ln a$):

$$\frac{dW(A)}{dm} = -p\left(\frac{9}{10}\right)^{m} \ln\left(\frac{9}{10}\right) + (1-p)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-m} \ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

Setzt man die Ableitung gleich Null, so ergibt sich:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{2m-n} = \frac{1-p}{p} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{n}{2} + \frac{\ln\left[(1-p)/p\right]}{2\ln(9/10)}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich $m = 13.23$; die optimale Aufteilung ist also 13 aus dem ersten Behälter und 7 aus dem zweiten. Die Wahrscheinlichkeit, daß die markierte Kugel gefunden wird, beträgt dann 0.6711.

6. Bezeichnet man mit C das Ereignis, daß ein Chip gut ist, und mit G das Ereignis, daß der Test den Chip als gut ausweist, so gilt laut Angabe:

$$W(C) = 0.97, \quad W(G|C) = 0.9, \quad W(\overline{G}|\overline{C}) = 0.95$$

Die Wahrscheinlichkeiten bestimmt man nun mittels Bayes'scher Formel:

(a)

$$\begin{aligned} W(C|G) &= \frac{W(G|C)W(C)}{W(G|C)W(C) + W(G|\overline{C})W(\overline{C})} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.97}{0.9 \cdot 0.97 + 0.05 \cdot 0.03} = 0.9983 \end{aligned}$$

(b)

$$W(\overline{C}|\overline{G}) = \frac{0.95 \cdot 0.03}{0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97} = 0.2271$$

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 **4.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	8. Nov. 2005

1. Ein Behälter enthält Karten mit aufgedruckten Nummern von $1, 2, \ldots, 50$. Es gibt i Karten mit der Nummer i für $i = 1, 2, \ldots, 50$. Abgesehen von der aufgedruckten Nummer sind die Karten identisch. Nach guter Durchmischung des Behälters wird eine Karte zufällig entnommen und X sei die Nummer auf dieser Karte.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung von X, d.h. ermitteln Sie $W\{X = k\}$ für $k \in M_X = \{1, 2, \ldots, 50\}$.

   (b) Berechnen Sie $W\{X \leq 25\}$.

   (c) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Verteilungsfunktion von X und erstellen Sie eine Skizze/Zeichnung.

2. Betrachten Sie die folgende Funktion (c ist eine reelle Konstante):

$$F(x) = \begin{cases} c\,e^{x} & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 - c\,e^{-x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Für welche Werte von c ist die Funktion eine Verteilungsfunktion?

   (b) Für welche Werte von c ist die Verteilungsfunktion (1) diskret, (2) stetig oder (3) gemischt?

   (c) Wie ist c zu wählen, sodaß $W\{X = 0\} = 0.25$?

   <u>Hinweis:</u> Erstellen Sie Skizzen/Zeichnungen.

3. Eine symmetrische Münze wird n Mal unabhängig geworfen, und zwar k Mal von Person A und $n - k$ Mal von Person B.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen A und B dieselbe Anzahl von Köpfen?

   (b) Zeigen Sie, daß diese Wahrscheinlichkeit gleich groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, insgesamt k Köpfe zu werfen.

4. Ermitteln Sie für eine poissonverteilte stochastische Größe $X \sim P_\mu$ die Stelle(n) größter Wahrscheinlichkeit (= Modalwerte).

   <u>Hinweis:</u> Betrachten Sie den Quotienten zweier aufeinander folgender Punktwahrscheinlichkeiten p_{k+1}/p_k mit $p_k = W\{X = k\}$.

5. Eine Lieferung von 25 Bauteilen wird auf die folgende Weise geprüft: Eine erste Stichprobe vom Umfang 5 wird – ohne Zurücklegen – gezogen. Ist davon mindestens ein Teil defekt, wird die Lieferung abgelehnt. Andernfalls wird eine zweite Stichprobe des Umfangs 10 – ohne Zurücklegen – aus den 20 verbliebenen Teilen gezogen. Die Lieferung wird abgelehnt, wenn davon mindestens ein Teil defekt ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Lieferung angenommen wird, die (a) zwei defekte Bauteile; (b) vier defekte Bauteile enthält.

6. Zeigen Sie: Für (1) die Binomialverteilung $B_{n,p}$, (2) die geometrische Verteilung G_p und (3) die Poissonverteilung P_μ liegen die Werte von:

$$g(x) = \frac{x\,W\{X = x\}}{W\{X = x-1\}}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

auf einer Geraden $g(x) = a + bx$ und bestimmen Sie a und b. (*Gilt das auch für die hypergeometrische Verteilung?) Läßt sich an Hand der Geraden erkennen, um welche dieser Verteilungen es sich handelt?

*Anwendung: Die obige Eigenschaft kann für die Bestimmung eines passenden diskreten Verteilungsmodells ausgenützt werden. Dazu zeichnet man die Punkte $(x, x \cdot H_x/H_{x-1})$ (H_x ist die absolute Häufigkeit von x) in ein Diagramm ein und entscheidet sich an Hand der (eventuell) erkennbaren Geraden (Ausgleichsgerade einzeichnen) für ein passendes Modell. Führen Sie dies konkret für die folgenden Daten durch:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
Häufigk.	5	15	21	24	17	11	5	2

R–Benutzer/innen können dazu die folgenden Zeilen verwenden:

```
x <- c(0:7)
H <- c(5, 15, 21, 24, 17, 11, 5, 2)
g <- x[2:8]*H[2:8]/H[1:7]
plot(x[2:8], g, type="p", pch=16, cex=1.8, xlim=c(0,7), ylim=c(0,4),
     xlab="x", ylab="g(x)")
beta <- lm(g ~ x[2:8])
abline(coef(beta), lwd=2)
```

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 4. Blatt

1. (a) Es gibt $\sum_{i=1}^{50} i = (51 \times 50)/2 = 1275$ Karten im Behälter; die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist daher gegeben durch:

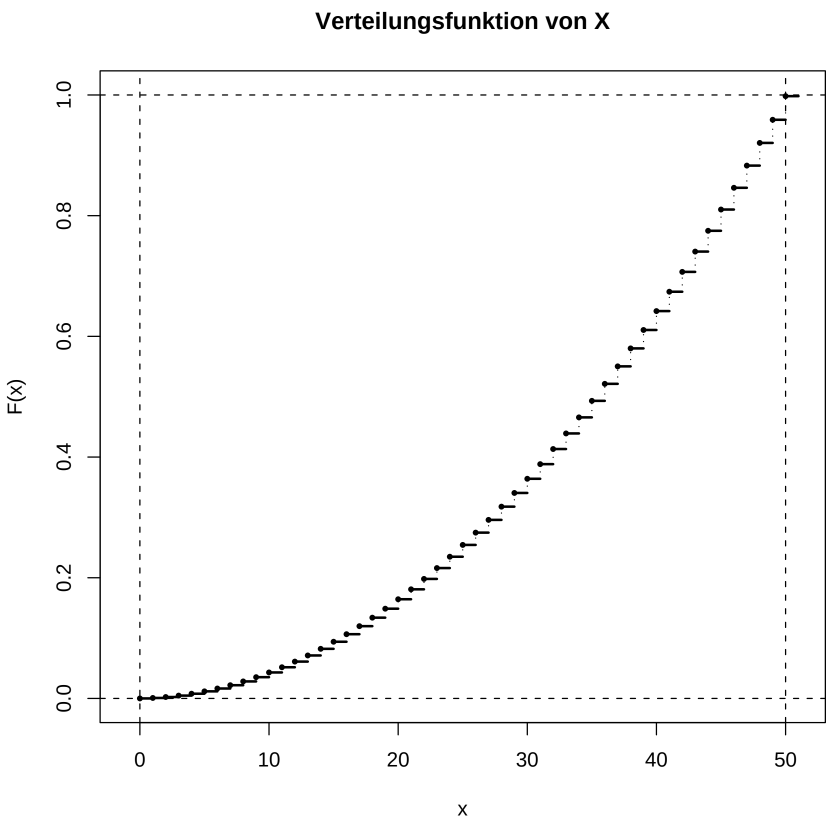
$$p(x) = W\{X = x\} = \frac{x}{1275}, \; x = 1, 2, \ldots, 50$$

(b)

$$W\{X \leq 25\} = \frac{1}{1275} \sum_{i=1}^{25} i = \frac{(26 \times 25)/2}{1275} = \frac{325}{1275} = \frac{13}{51} = 0.2549$$

(c)

$$F(x) = W\{X \leq x\} = \frac{1}{1275} \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i = \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2550}, \; 0 \leq x \leq 50$$



2. (a) Eine Verteilungsfunktion ist monoton wachsend und es gilt $0 \leq F(x) \leq 1$; daher sind für c nur Werte aus dem Intervall $[0, 0.5]$ zulässig.

Bem.: Alle anderen Eigenschaften (Rechtsstetigkeit; $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$) folgen aus der Definition der Funktion.

(b) (1) $c = 0$ (F ist eine Treppenfunktion)

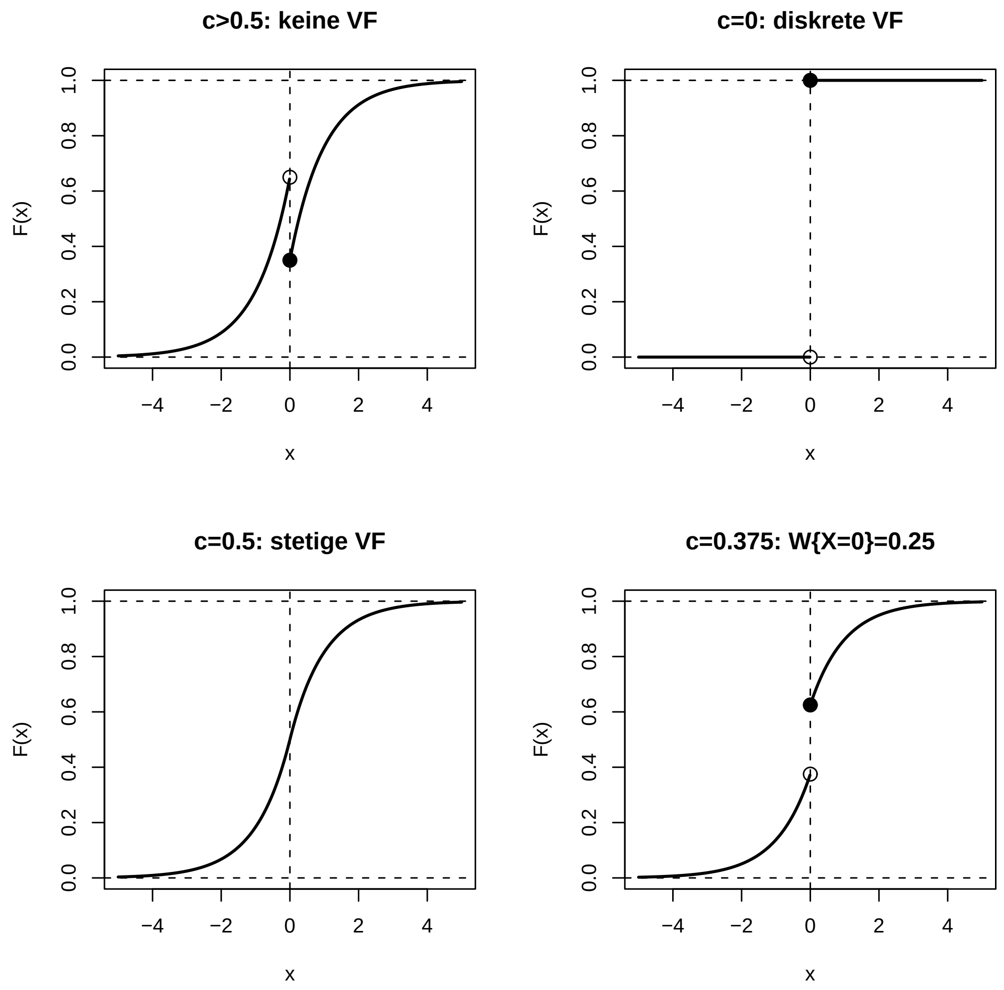
(2) $c = 0.5$ (F hat keinen Sprung)

(3) $c \in (0, 0.5)$ (F hat einen Sprung, ist aber keine Treppenfunktion)

(c) Die Sprunghöhe an der Stelle 0 muß gleich 0.25 sein:

$$W\{X = 0\} = F(0) - F(0-) = (1 - c) - c = 1 - 2c$$

$$1 - 2c = 0.25 \quad \Longrightarrow \quad c = 0.375$$



3. (a) X_A (X_B) bezeichne die Anzahl der von A (B) geworfenen Köpfe:

$$\begin{aligned}
W\{X_A = X_B\} &= \sum_i W\{X_A = i,\, X_B = i\} \\
&= \sum_i W\{X_A = i\}\, W\{X_B = i\} \quad \text{(A u. B werfen unabh.)} \\
&= \sum_i \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{n-k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad \text{(Binomialvert.)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{i} \binom{n-k}{i}
\end{aligned}$$

<u>Bem.:</u> $\binom{a}{b} = 0$ für $b > a$ $(a, b \in \mathbb{N}_0)$.

(b) Es gilt $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$; damit folgt:

$$\begin{aligned}
W\{X_A = X_B\} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{i} \binom{n-k}{i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_i \binom{k}{k-i} \binom{n-k}{i}
\end{aligned}$$

Nun gilt für $a, b \in \mathbb{N}_0$ (*Vandermonde'sche Identität*):

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i} \binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}$$

Angewendet auf die obige Summe ergibt sich:

$$W\{X_A = X_B\} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dies ist aber die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen mit einer fairen Münze k Köpfe zu werfen (= Wahrscheinlichkeit bei n Würfen mit einer fairen Münze k Zahlen zu werfen).

Bem.: Mit Hilfe eines etwas anderen Arguments läßt sich dies auch direkt zeigen. Bei einer fairen Münze ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf (K) gleich groß wie für Zahl (Z); daher gilt:

$$\begin{aligned} W\{\#\text{ K von A} = \#\text{ K von B}\} &= W\{\#\text{ Z von A} = \#\text{ K von B}\} \\ &= W\{k - \#\text{ K von A} = \#\text{ K von B}\} \\ &= W\{\#\text{ K von A} + \#\text{ K von B} = k\} \\ &= W\{\#\text{ K insgesamt} = k\} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

(Dies ist gleichzeitig ein Beweis für die Vandermonde'sche Identität.)

4. Für den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\frac{W\{X = k+1\}}{W\{X = k\}} = \frac{\mu^{k+1}\, e^{-\mu}/(k+1)!}{\mu^k\, e^{-\mu}/k!} = \frac{\mu}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Das kleinste k mit $k+1 > \mu$ ist der Modalwert; ist μ ganzzahlig, gibt es zwei Modalwerte, $\mu - 1$ und μ:

$$\text{Modalwert} = \begin{cases} \lfloor \mu \rfloor & \text{falls} \quad \mu \notin \mathbb{N} \\ \mu - 1,\ \mu & \text{falls} \quad \mu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. Da die Ziehungen ohne Zurücklegen erfolgen, kommt die hypergeometrische Verteilung zur Anwendnung. Ist A die Zahl der defekten Bauteile im Los, so gilt:

$$W\{\text{Annahme}\} = \frac{\binom{A}{0}\binom{25-A}{5}}{\binom{25}{5}} \times \frac{\binom{A}{0}\binom{20-A}{10}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{A}{0}\binom{25-A}{15}}{\binom{25}{15}}$$

A	$W\{\text{Annahme}\}$
0	1.0000
1	0.4000
2	0.1500
3	0.0522
4	0.0166

A	$W\{\text{Annahme}\}$
5	0.0047
6	0.0012
7	0.0002
8	0.0000

6. (1) Binomialverteilung $B_{n,p}$:

$$g(x) = \frac{x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}{\binom{n}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x+1}} = (n+x+1)\,\frac{p}{1-p}$$

$$= \underbrace{\frac{(n+1)p}{1-p}}_{a\,(+)} + x\,\underbrace{\frac{-p}{1-p}}_{b\,(-)},\quad x = 1,2,\ldots,n$$

(2) Geometrische Verteilung G_p:

$$g(x) = \frac{x(1-p)^{x-1}\,p}{(1-p)^{x-2}\,p} = x\,\underbrace{(1-p)}_{b\,(+)},\quad x = 2,3,\ldots$$

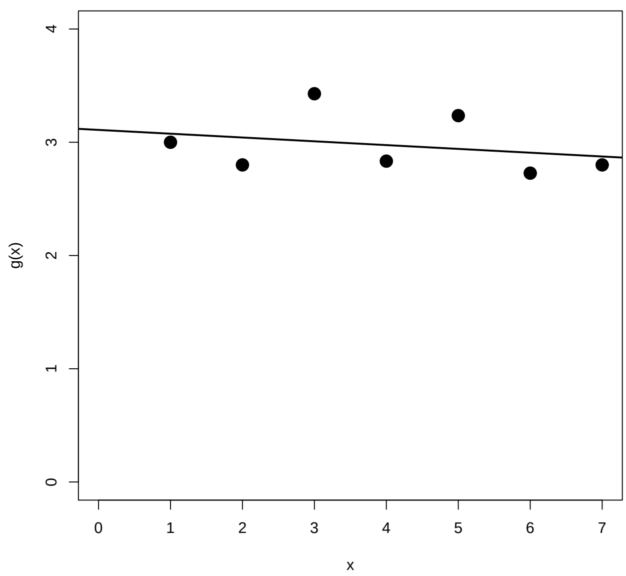
(3) Poissonverteilung P_μ:

$$g(x) = \frac{x\mu^x e^{-\mu}/x!}{\mu^{x-1}e^{-\mu}/(x-1)!} = \underbrace{\mu}_{a\,(+)},\quad x = 1,2,\ldots$$

*(4) Hypergeometrische Verteilung $H_{N,A,n}$:

$$g(x) = \frac{(A-x+1)(n-x+1)}{N-A-n+x} \quad \text{(keine Gerade)}$$

*Anwendung: Trägt man die Punkte $\left(x, xH_x/H_{x-1}\right)$ in einem Diagramm auf und legt durch sie eine Ausgleichsgerade (Kleinste-Quadrate–Gerade), so ergibt sich das folgende Bild:



Die Beobachtungen stammen (vermutlich) aus einer Poissonverteilung mit $\mu \approx 3$.

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 **5.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	22. Nov. 2005

1. Es sei bekannt, daß bei n unabhängigen identischen Alternativversuchen insgesamt k „Erfolge“ vorgekommen sind.

   (a) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit war ein bestimmter Versuch erfolgreich?

   *(b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit waren zwei bestimmte Versuche erfolgreich? (Vs.: $k \geq 2$)

2. Es wird eine nach P_{10} verteilte Anzahl von (österr.) 1-EURO–Münzen geworfen und X sei die Anzahl der geworfenen „Mozart“. Bestimmen Sie die Verteilung von X, d.h. bestimmen Sie $W\{X = k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. (*Wie läßt sich das Resultat verallgemeinern?)

   Hinweis: Verwenden Sie den Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit; bedingen Sie durch die Anzahl der Münzen.

3. Eine Komponente mit exponentialverteilter Lebensdauer, $X \sim Ex_\tau$, arbeitet laut Hersteller mit Wahrscheinlichkeit 0.9 länger als 500 Stunden.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet eine derartige Komponente länger als 1000 Stunden; länger als 5000 Stunden?

   (b) Bestimmen Sie den Parameter τ und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte.

   (c) Ermitteln Sie das p-Quantil, speziell den Median.

   *(d) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft für $X \sim Ex_\tau$:

   $$W\{X > s + t \,|\, X > s\} = W\{X > t\}, \quad \forall\, s, t > 0$$

   Was bedeutet diese Eigenschaft im Kontext des Beispiels?

4. Bestimmen Sie für die Dichte einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$:

   (a) die Wendepunkte;

   *(b) die Schnittpunkte der Wendetangenten mit der x–Achse.

5. Für eine normalverteilte sG, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, gelte: Der Median ist 89 und das 25%–Quantil ist 75.5.

   (a) Bestimmen Sie μ und σ.

   (b) Bestimmen Sie das 75%– und das 90%–Quantil.

   (c) Berechnen Sie: $W\{X \leq 100\}$, $W\{X > 80\}$, $W\{|X - \mu| > 10\}$.

6. Bei einer Serviceeinrichtung wird man mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ sofort bedient (d.h. keine Wartezeit), oder man hat eine nach Ex_{12} verteilte Wartezeit (Einheit: Minuten). Bestimmen Sie:

   (a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Skizze/Zeichnung);

   (b) den Median der Wartezeit;

   (c) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten warten zu müssen, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat.

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 5. Blatt

1. (a) Ist X die Anzahl der Erfolge (bei n Versuchen) und bezeichnet E_i das Ereignis, beim i-ten Versuch einen Erfolg zu erzielen, so gilt nach der Bayes'schen Formel:

$$
\begin{aligned}
W(E_i|X=k) &= \frac{W(X=k|E_i)\,W(E_i)}{W(X=k)} \\
&= \frac{\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\,p}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{(n-1)!\,k!\,(n-k)!}{(k-1)!\,(n-k)!\,n!} = \frac{k}{n}
\end{aligned}
$$

*(b) Eine ganz analoge Überlegung zeigt ($i \neq j$):

$$
\begin{aligned}
W(E_i \cap E_j|X=k) &= \frac{W(X=k|E_i \cap E_j)\,W(E_i \cap E_j)}{W(X=k)} \\
&= \frac{\binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{n-k}\,p^2}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} \\
&= \frac{(n-2)!\,k!\,(n-k)!}{(k-2)!\,(n-k)!\,n!} = \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)}
\end{aligned}
$$

2. Ist Z die Anzahl der Münzen, so gilt nach dem Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit:

$$
\begin{aligned}
W\{X=k\} &= \sum_{j=k}^{\infty} W\{X=k|Z=j\} W\{Z=j\} \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{10^j e^{-10}}{j!} \\
&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k 10^k\, e^{-10} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-k} \frac{10^{j-k}}{(j-k)!} \\
&= \frac{5^k e^{-10}}{k!} \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{5^{j-k}}{(j-k)!}}_{=e^5} = \frac{5^k e^{-5}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

D.h., daß X nach P_5 verteilt ist.

*Verallgemeinerung: Für $Z \sim P_\mu$ und $X|Z=j \sim B_{j,p}$ gilt:

$$
X \sim P_{\mu p}: \quad W\{X=k\} = \frac{(\mu p)^k e^{-\mu p}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
$$

3. (a) Die Verteilungsfunktion von exponentialverteilten sGn lautet:

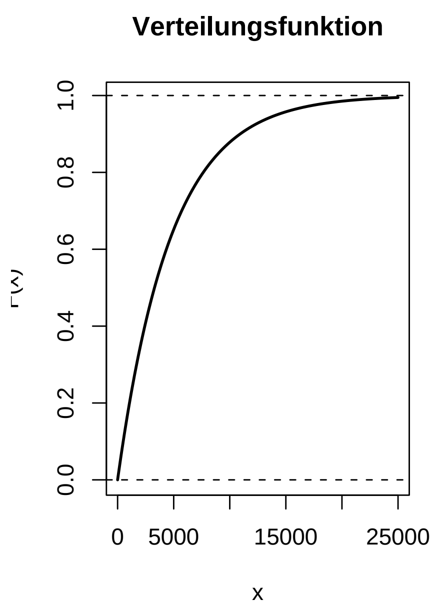
$$F(x) = W\{X \leq x\} = 1 - e^{-x/\tau}, \quad x > 0$$

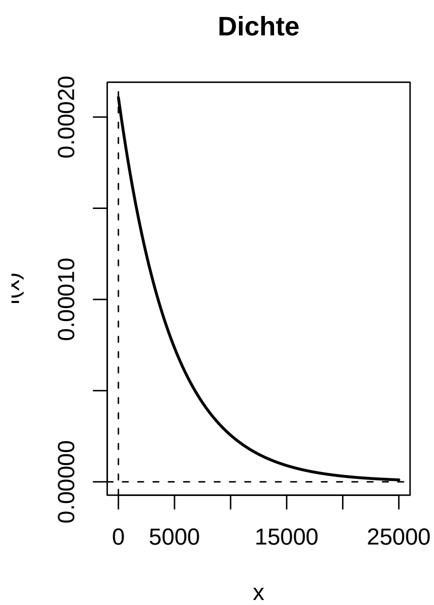
Daraus folgt:

$$W\{X > 1000\} = e^{-1000/\tau} = \left[e^{-500/\tau}\right]^2 = \left[W\{X > 500\}\right]^2 = 0.9^2 = 0.81$$
$$W\{X > 5000\} = \left[e^{-500/\tau}\right]^{10} = 0.9^{10} = 0.3487$$

(b)

$$W\{X > 500\} = e^{-500/\tau} = 0.9 \quad \Longrightarrow \quad \tau = -\frac{500}{\ln(0.9)} = 4745.6 \text{ [h]}$$





(c) Das p-Quantil x_p ist die Lösung von $F(x_p) = p$:

$$1 - e^{-x_p/\tau} = p \quad \Longrightarrow \quad x_p = -\tau \ln(1-p)$$

Für den Median ($p = 0.5$) ergibt sich:

$$\widetilde{x} = x_{0.5} = -\tau \ \ln(0.5) = 0.6931\tau = 3289.4 \text{ [h]}$$

*(d) Dies sieht man wie folgt:

$$W\{X > s+t \,|\, X > s\} = \frac{W\{X > s+t,\, X > s\}}{W\{X > s\}} = \frac{W\{X > s+t\}}{W\{X > s\}}$$
$$= \frac{e^{-(s+t)/\tau}}{e^{-s/\tau}} = e^{-t/\tau} = W\{X > t\}$$

Interpretation: Das bedeutet in Worten, daß eine derartige Komponente nicht altert (sich aber auch nicht verjüngt); in jedem Moment, zu dem sie noch funktioniert, ist sie so gut wie neu. Diese Eigenschaft („Gedächtnislosigkeit“) ist charakteristisch für die Exponentialverteilung (d.h., sie ist die einzige nichtnegative und stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft); umgekehrt kann man daher auch sagen, daß die Lebensdauer von Komponenten, die einer Alterung oder Abnützung unterliegen, nicht exponentiell verteilt sein kann.

4. (a) Es genügt, die Dichte $\varphi(x)$ der $N(0,1)$–Verteilung zu analysieren; ihre Ableitungen sind gegeben wie folgt:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi'(x) = -\frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi''(x) = \frac{e^{-x^2/2}(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}$$

Die Wendepunkte liegen an den Stellen mit $\varphi''(x) = 0$, d.h. an den Stellen $x = \mp 1$; φ hat dort den Wert $e^{-1/2}/\sqrt{2\pi}$:

$$\text{Wendepunkte:} \quad P_1 = \left(-1, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\right), \quad P_2 = \left(1, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

Für eine $N(\mu, \sigma^2)$–Verteilung gilt:

$$\text{Wendepunkte:} \quad P_1 = \left(\mu - \sigma, \frac{e^{-1/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right), \quad P_2 = \left(\mu + \sigma, \frac{e^{-1/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

*(b) Für die Ableitung von $\varphi(x)$ an den Wendepunkten gilt:

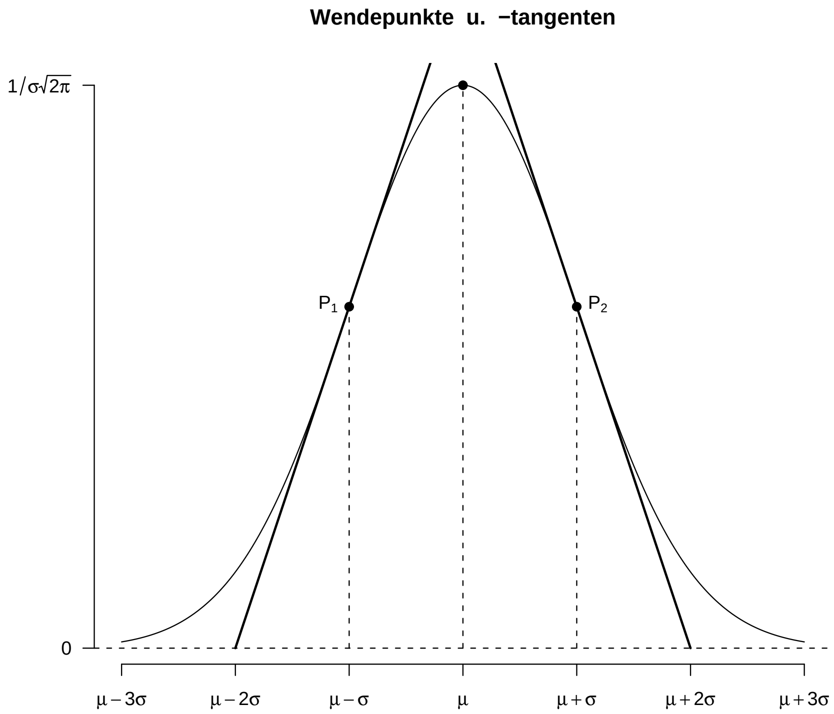
$$\varphi'(\mp 1) = \pm\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Die Wendetangenten sind also gegeben wie folgt:

$$P_1: \quad g_1(x) = \frac{e^{-1/2}(x+2)}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{allg.:} \quad g_1(x) = \frac{e^{-1/2}(x-\mu+2\sigma)}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}$$

$$P_2: \quad g_2(x) = \frac{e^{-1/2}(2-x)}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{allg.:} \quad g_2(x) = \frac{e^{-1/2}(\mu+2\sigma-x)}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}$$

Die Wendetangenten schneiden die x–Achse an den Stellen $\mu \mp 2\sigma$.



5. (a) Bei einer Normalverteilung ist der Median gleich (dem Mittelwert) μ; für das p–Quantil x_p einer Normalverteilung gilt ($u_p = p$–Quantil der $N(0,1)$):

$$F(x_p) = W\{X \leq x_p\} = \Phi\left(\frac{x_p - \mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x_p - \mu}{\sigma} = u_p \quad \Longrightarrow \quad x_p = \mu + u_p\sigma$$

Der Parameter σ (Standardabweichung; Streuung) ergibt sich also zu:

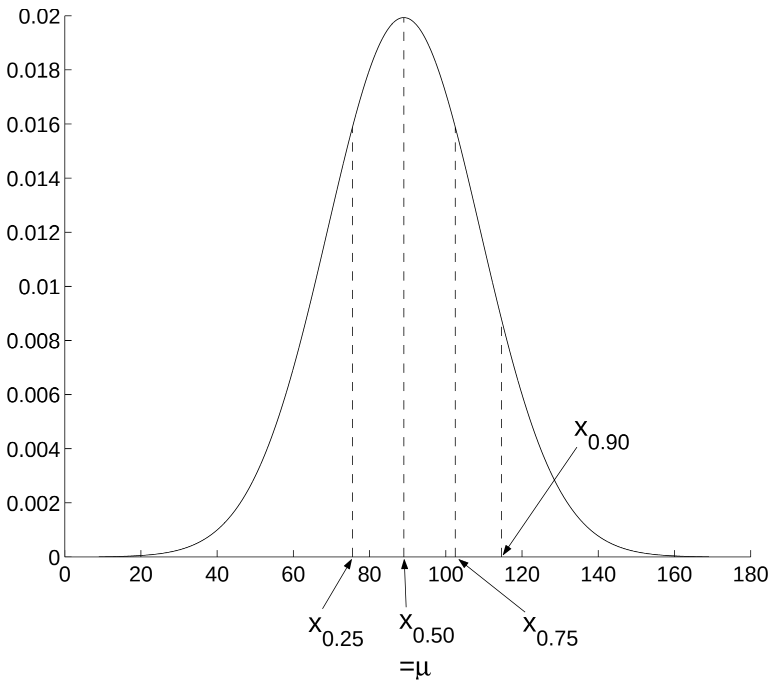
$$x_{0.25} = \mu + u_{0.25}\sigma \implies \sigma = \frac{x_{0.25} - \mu}{u_{0.25}} = \frac{75.5 - 89}{-0.6745} = 20.02$$

(Tabelle: $u_{0.25} = -u_{0.75} = -0.6745$)

(b) 75%–Quantil: $x_{0.75} = \mu + u_{0.75}\sigma = 102.5$

<u>Bem.:</u> Aus Symmetriegründen gilt hier $x_{0.75} = \mu + (\mu - 75.5) = 102.5$.

90%–Quantil: $x_{0.90} = \mu + \underbrace{u_{0.90}}_{1.2816}\sigma = 114.65$



(c) Die Wahrscheinlichkeiten werden durch Standardisierung auf die Standardnormalverteilung zurückgeführt (Φ = Verteilungsfunktion der $N(0,1)$):

$$W\{X \leq 100\} = \Phi\left(\frac{100-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(0.5496) = 0.7087$$

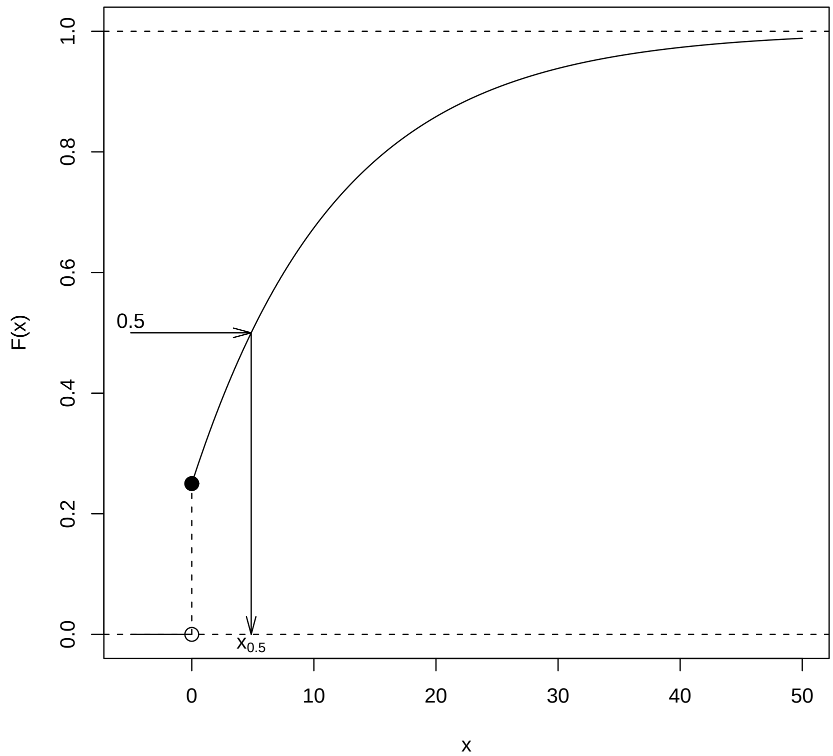
$$\begin{aligned} W\{X > 80\} &= 1 - W\{X \leq 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.4497) = \\ &= 1 - \big[1 - \Phi(0.4497)\big] = \Phi(0.4497) = 0.6735 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\{|X-\mu| > 10\} &= 1 - W\{|X-\mu| \leq 10\} \\ &= 1 - W\{\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10\} = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\mu+10-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-10-\mu}{\sigma}\right)\right] = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right)\right] = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right] = \\ &= 2\big[1 - \Phi(0.4996)\big] = 2\,[1 - 0.6913] = 0.6173 \end{aligned}$$

<u>Bem.:</u> $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

6. (a) Die Wartezeit hat eine gemischte Verteilung; ihre Verteilungsfunktion ist gegeben wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \dfrac{3}{4}\, e^{-x/12} & x \geq 0 \end{cases}$$



(b)

$$F(x_{0.5}) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_{0.5} = -12 \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 4.87 \text{ [Min]}$$

(c)

$$W\{X > 20 | X > 10\} = \frac{W\{X > 20\}}{W\{X > 10\}} = \frac{e^{-20/12}}{e^{-10/12}} = e^{-5/6} = 0.435$$

Bem.: Im Gegensatz zu **Bsp 5.3** gilt hier:

$$W\{X > 10\} = \frac{3}{4}\, e^{-5/6} < e^{-5/6}$$

D.h., (die Verteilung von) X hat ein „Gedächtnis".

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**6.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	29. Nov. 2005

1. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Varianz der sG X von **Bsp 4.1**. Verwenden Sie für die Varianzberechnung den Verschiebungssatz.

2. *(a) Zeigen Sie: Ist X eine auf den nichtnegativen ganzen Zahlen diskret verteilte sG mit Verteilungsfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \left[1 - F(x)\right]$$

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Erwartungswert einer geometrisch verteilten sG, $X \sim G_p$, mit Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) = p\,(1-p)^{x-1}, \;\; x = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Der Radius X eines Kreises sei eine sG mit Dichte $f(x) = e^{-x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.

   (a) Zeigen Sie zunächst, daß $\mathbb{E}(X^k) = k!$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe des „Satzes vom unbewußten Statistiker“ den Erwartungswert der Kreisfläche $A = X^2\pi$.

   (c) Berechnen Sie die Varianz der Kreisfläche.

4. Bestimmen Sie für eine normalverteilte sG, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, den Erwartungswert von $|X - \mu|$.

5. Berechnen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Streuung (= positive Wurzel aus der Varianz) für die Wartezeit von **Bsp 5.6**. Verwenden Sie für die Varianzberechnung den Verschiebungssatz.

6. Ein Würfel wird zweimal unabhängig geworfen und $Z = |X_1 - X_2|$ sei der Absolutbetrag der Differenz der geworfenen Augenzahlen X_1, X_2. Bestimmen Sie (a) den Mittelwert und *(b) die Varianz von Z.

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 6. Blatt

1. (a) Allgemein gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{50} \frac{x^2}{1275} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6 \cdot 1275} = \frac{101}{3} = 33.\dot{6}$$

(b) Allgemein gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{50} \frac{x^3}{1275} = \frac{1}{1275}\left[\frac{50 \cdot 51}{2}\right]^2 = 1275$$

Nach dem Verschiebungssatz gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = 1275 - \left(\frac{101}{3}\right)^2 = \frac{1274}{9} = 141.\dot{5}$$

2. *(a) Reihe umordnen:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=x+1}^{\infty} p(k) = \sum_{x=0}^{\infty} W\{X > x\} = \sum_{x=0}^{\infty} \left[1 - F(x)\right]$$

Bem.: Wegen der (vorausgesetzten) ***absoluten*** Konvergenz von $\sum_x xp(x)$ (d.h. $\sum_x |x|p(x) < \infty$) ist die obige Reihenumordnung zulässig.

(b) Für die Verteilungsfunktion der G_p–Verteilung gilt:

$$F(x) = 1 - W\{X > x\} = 1 - (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Damit folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \left[1 - F(x)\right] = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

3. (a) Dies zeigt man mittels (wiederholter) partieller Integration oder einfacher wie folgt:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^\infty x^k\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{(k+1)-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(k+1) = k!$$

(b) Nach dem Satz vom unbewußten Statistiker gilt:

$$\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(X^2\pi) = \pi \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = 2!\pi = 2\pi$$

(c) Nach dem Verschiebungssatz gilt:

$$\mathrm{Var}(A) = \mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}^2(A) = \pi^2\mathbb{E}(X^4) - 4\pi^2 = 4!\pi^2 - 4\pi^2 = 20\pi^2$$

4. Satz vom unbewußten Statistiker:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X-\mu|) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-\mu|}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx \qquad (f(x) \text{ symmetrisch um } \mu)\\
&= 2\int_{\mu}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx \qquad \left(\text{Subst.: } z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)\\
&= 2\sigma \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, dz\\
&= \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\Big|_0^\infty\\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

5. Die Wartezeit hat eine gemischte Verteilung mit:

$$p(0) = \frac{1}{4}; \quad f^*(x) = F'(x) = \frac{1}{16}\, e^{-x/12} I_{[0,\infty)}(x)$$

(a)

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot p(0) + \int_0^\infty \frac{x}{16}\, e^{-x/12}\, dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{12}\, e^{-x/12}\, dx}_{=12} = 9\,[\text{Min}]$$

(b)

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot p(0) + \int_0^\infty \frac{x^2}{16}\, e^{-x/12}\, dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{12}\, e^{-x/12}\, dx}_{=2\cdot 12^2 = 288} = 216$$

$$\mathrm{Var}(X) = 216 - 81 = 135; \quad \text{Streuung } = \sqrt{135} \doteq 11.62\,[\mathrm{Min}]$$

<u>Bem.:</u> Für eine exponentialverteilte sG $X \sim Ex_\tau$ gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \tau, \quad \mathbb{E}(X^2) = 2\tau^2, \quad \mathrm{Var}(X) = \tau^2$$

6. (a) Das folgende Schema zeigt die Werte von $|X_1 - X_2|$:

$X_1\backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_1 - X_2|) &= \sum_{x_1,\, x_2} |x_1 - x_2|\, \underbrace{p(x_1, x_2)}_{1/36} \\ &= \frac{2\,(5\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5)}{36} \\ &= \frac{35}{18} = 1.9\dot{4}\end{aligned}$$

*(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) &= \sum_{x_1,\, x_2} (x_1 - x_2)^2 p(x_1, x_2) \\ &= \frac{2\,(5\cdot 1^2 + 4\cdot 2^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 + 1\cdot 5^2)}{36} \\ &= \frac{35}{6} = 5.8\dot{3}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(|X_1 - X_2|) = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324} \doteq 2.052$$

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 **7.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	6. Dez. 2005

1. Die Anzahl N_t von „Ereignissen" (z.B. Telefonanrufe, Aufträge an einen Drucker oder Server, etc.) im Zeitintervall $(0, t]$ sei eine nach $P_{\lambda t}$ verteilte sG und T_r sei die Zeitspanne bis zum Auftreten des r–ten Ereignisses.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung von T_1.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst $W\{T_1 > x\} = W\{N_x = 0\}$.

   *(b) Bestimmen Sie die Verteilung von T_r für $r > 1$.

2. X sei eine nach χ^2_n verteilte sG; bestimmen Sie die Dichte von $Y = \sqrt{X/n}$. Verwenden Sie dazu den Transformationssatz für Dichten.

3. Die sG X sei stetig uniform verteilt auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$: ermitteln Sie für $Y = \cos(X)$:

   (a) die Verteilungsfunktion (+ Skizze/Zeichnung);

   (b) die Dichtefunktion (+ Skizze/Zeichnung);

   (c) den Mittelwert;

   *(d) die Varianz.

4. X sei eine stetige sG mit Dichte $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Dichte von $Z = X^2$. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ausdrucks an Hand des Beispiels aus der Vorlesung mit $X \sim N(0, 1)$.

5. (a) Wie kann man Beobachtungen einer stochastischen Größe mit der folgenden Dichte simulieren?

$$f(x) = \frac{\alpha\, x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq x_0;\ \alpha,\, x_0 > 0$$

   Gehen Sie von (auf $(0, 1)$) uniform verteilten Zufallszahlen aus.

   *(b) Implementieren Sie die obige Simulation als R–Funktion. Überprüfen Sie die Funktion graphisch, indem Sie ein (Dichte–) Histogramm von $n = 1000$ so erzeugten Zahlen mit der Dichte $f(x)$ überlagern. Nehmen Sie konkret (i) $\alpha = 1$, $x_0 = 0.5$ und (ii) $\alpha = 3$, $x_0 = 1$.

6. (a) Die Methode der Inversion der Verteilungsfunktion zur Simulation von Beobachtungen von sGn läßt sich auch bei diskreten (oder gemischten) Größen anwenden. Dabei stützt man sich auf eine verallgemeinerte Definition der Inversen einer Verteilungsfunktion:

$$F^{-1}(u) := \inf\{x\, :\, F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1$$

   Erläutern Sie graphisch, was diese Definition bedeutet.

(b) Ein Algorithmus zur Erzeugung von poissonverteilten Beobachtungen, $X \sim P_\mu$, lautet wie folgt:

(1) Erzeuge eine (auf $(0,1)$) uniform verteilte Zahl U;

(2) Setze $i = 0$, $\alpha = e^{-\mu}$, $F = \alpha$;

(3) Wenn $U \leq F$, setze $X = i$, stop;

(4) Setze $\alpha = \dfrac{\mu\alpha}{i+1}$, $F = F + \alpha$, $i = i + 1$;

(5) Gehe zu (3).

Zeigen Sie, daß dieser Algorithmus tatsächlich Beobachtungen einer Poissonverteilung mit dem Parameter (= Mittelwert) μ generiert.

*(c) Wie oft wird (3) im Mittel zur Erzeugung *einer* Poisson–Beobachtung aufgerufen?

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 7. Blatt

1. (a) Die Verteilungsfunktion von T_1 bestimmt man wie folgt ($x > 0$):

$$F_{T_1}(x) = W\{T_1 \leq x\} = 1 - W\{T_1 > x\} = 1 - W\{N_x = 0\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$f_{T_1}(x) = F'_{T_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Also gilt: $T_1 \sim Ex_{1/\lambda}$.

*(b) Die Verteilungsfunktion von T_r läßt sich auf analoge Weise bestimmen:

$$F_{T_r}(x) = 1 - W\{T_r > x\} = 1 - W\{N_x \leq r-1\} = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$\begin{aligned}
f_{T_r}(x) = F'_{T_r}(x) &= -\sum_{k=0}^{r-1} \frac{k(\lambda x)^{k-1}\lambda e^{-\lambda x} - (\lambda x)^k \lambda e^{-\lambda x}}{k!} \\
&= \lambda \left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \right] \\
&= \lambda \, \frac{(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \\
&= \frac{x^{r-1}\lambda^r e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad x > 0
\end{aligned}$$

T_r ist also gammaverteilt: $T_r \sim Gam(r, 1/\lambda)$.

Bem.: Eine Gammaverteilung der obigen Art (d.h., der erste Parameter ist eine natürliche Zahl) nennt man auch *Erlangverteilung*.

2. Die Umkehrabbildung von $y = \sqrt{x/n}$ ist gegeben durch $x = ny^2$; nach dem Transformationssatz für Dichten gilt:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) = f_X(ny^2) \left| \frac{dx}{dy} \right| &= \frac{(ny^2)^{n/2-1} e^{-ny^2/2}}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} \cdot (2ny) \\
&= \frac{2(n/2)^{n/2} y^{n-1} e^{-ny^2/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad y > 0
\end{aligned}$$

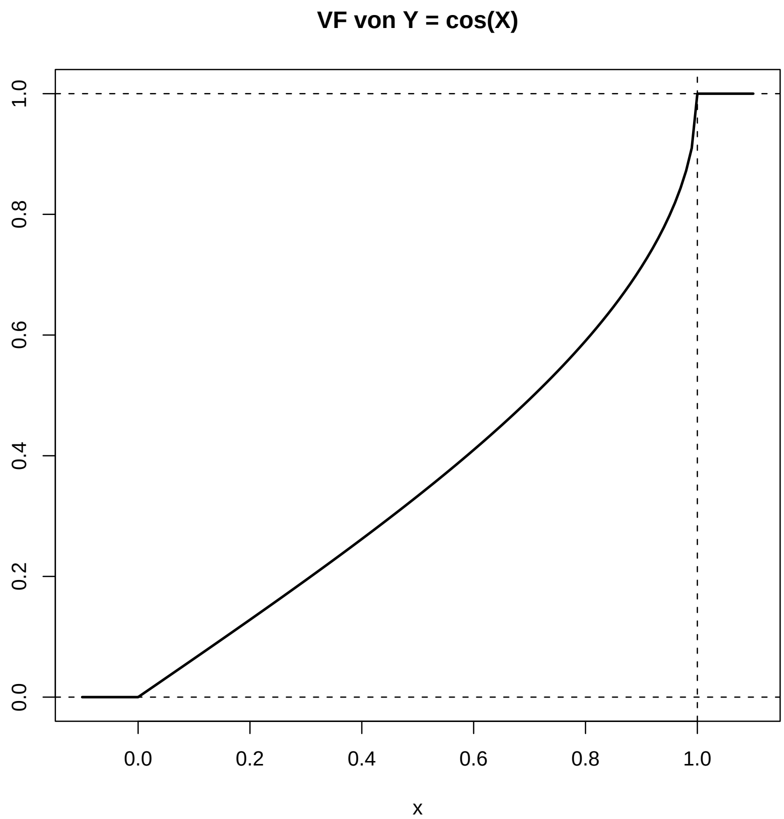
Bem.: Dies ist die Dichte einer χ–*Verteilung* mit n Freiheitsgraden.

3. Die Verteilungsfunktion von X ist gegeben wie folgt:

$$F_X(x) = \frac{2x+\pi}{2\pi}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

(a) Verteilungsfunktion von $Y = \cos(X)$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= W\{\cos(X) \le x\} = 1 - W\{\cos(X) > x\} \\ &= 1 - W\{-\arccos(x) \le X \le \arccos(x)\} \\ &= 1 - \left[\frac{2\arccos(x)+\pi}{2\pi} - \frac{-2\arccos(x)+\pi}{2\pi}\right] \\ &= 1 - \frac{2\arccos(x)}{\pi}, \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

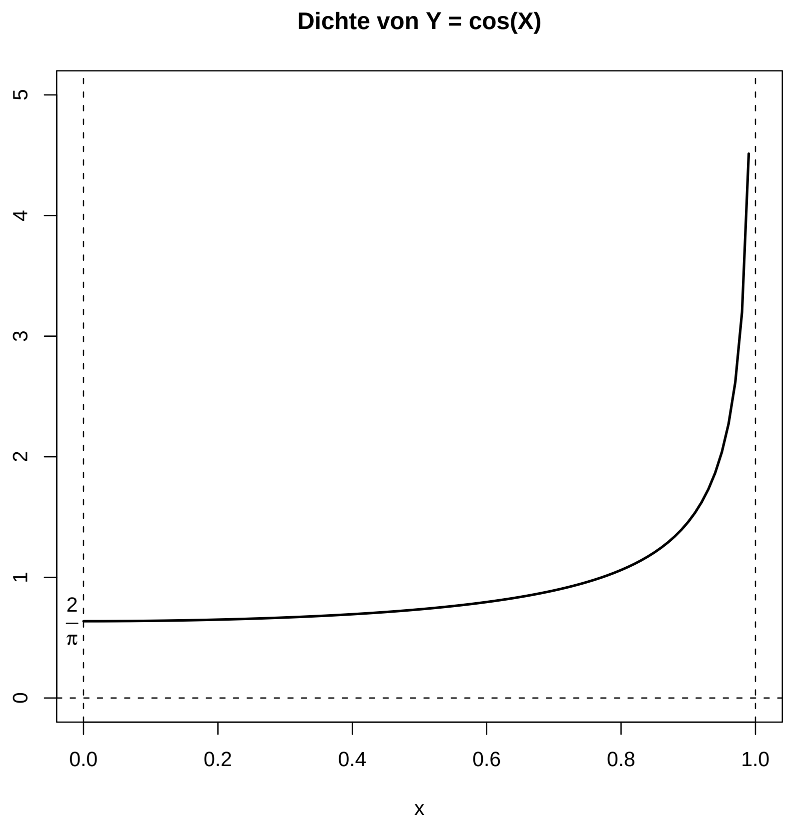


(b) Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Y(x) = F_Y^{'}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0 \le x < 1$$

(c) Den Erwartungswert von Y berechnet man am einfachsten mit dem Satz vom unbewußten Statistiker ($f_X(x) = 1/\pi$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$):

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,\frac{1}{\pi}\,dx = \left.\frac{\sin(x)}{\pi}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$



*(d) Für die Berechnung der Varianz nutzt man die Beziehung:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,\frac{1}{\pi}\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2\pi}\,dx \\
&= \left.\frac{x+\sin(2x)/2}{2\pi}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2-8}{2\pi^2}$$

4. Zunächst ermittelt man die Verteilungsfunktion von $Z = X^2$:

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= W\{Z \le x\} = W\{X^2 \le x\} \\
&= W\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}), \quad x \ge 0
\end{aligned}$$

Die Dichte ergibt sich durch Ableiten:

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right], \quad x > 0$$

Beispiel: $X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x/2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,e^{-x/2} = \frac{x^{1/2-1}\,e^{-x/2}}{\sqrt{\pi}\,2^{1/2}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Dichte einer χ^2_1–Verteilung.

5. (a) Bei Verwendung der Methode „Inversion der Verteilungsfunktion“ bestimmt man zunächst die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\alpha\, x_0^\alpha}{u^{\alpha+1}}\,du = -\frac{x_0^\alpha}{u^\alpha}\Bigg|_{x_0}^{x} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq x_0$$

$F(x)$ läßt sich einfach invertieren:

$$F^{-1}(u) = x_0\,(1-u)^{-1/\alpha}, \quad 0 < u < 1$$

Ist u eine (auf $(0,1)$) uniform verteilte Zufallszahl, so ist $F^{-1}(u)$ eine nach $f(x)$ verteilte Zufallszahl:

$$u \longmapsto x_0\,(1-u)^{-1/\alpha}$$

Bemerkungen:

(1) Wegen $U \sim U_{(0,1)} \;\Rightarrow\; 1-U \sim U_{(0,1)}$ kann man anstelle von $1-u$ im obigen Ausdruck auch u nehmen.

(2) Eine Verteilung mit der obigen Dichte nennt man *Pareto–Verteilung*; sie wird u.a. bei der Modellierung von CPU-Zeiten von beliebigen Prozessen, der Größe von Web–Files auf Internet–Servern oder der „Nachdenkzeit“ von Web-Browsern angewendet.

*(b) Die folgenden R–Funktionen berechnen die Werte der Dichte bzw. erzeugen Zufallszahlen einer Pareto-Verteilung:

```
dpareto <- function(x,x0,alpha) {
   alpha*(x0^alpha)/x^(alpha+1) }

rpareto <- function(n,x0,alpha) {
   r.u <- runif(n)
   x0*r.u^(-1/alpha) }
```

Der Mittelwert einer Parateo–Verteilung existiert nur für $\alpha > 1$:

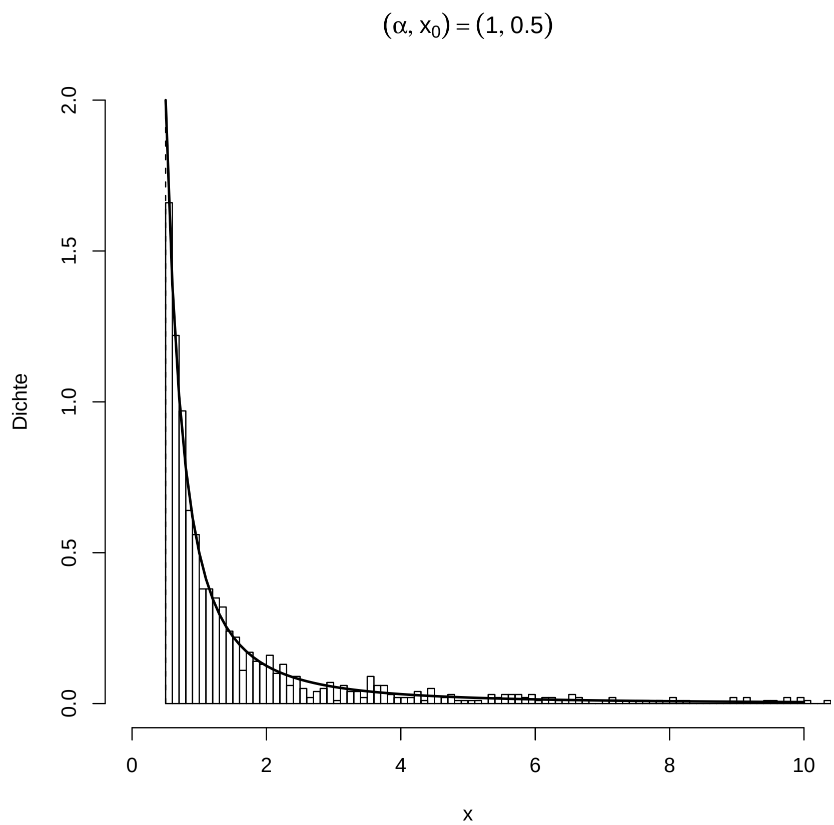
$$\mathbb{E}(X) = \int_{x_0}^{\infty} x \frac{\alpha\, x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha\, x_0^{\alpha}}{x^{\alpha}}\, dx \;<\; \infty \quad \text{für} \quad \alpha > 1$$

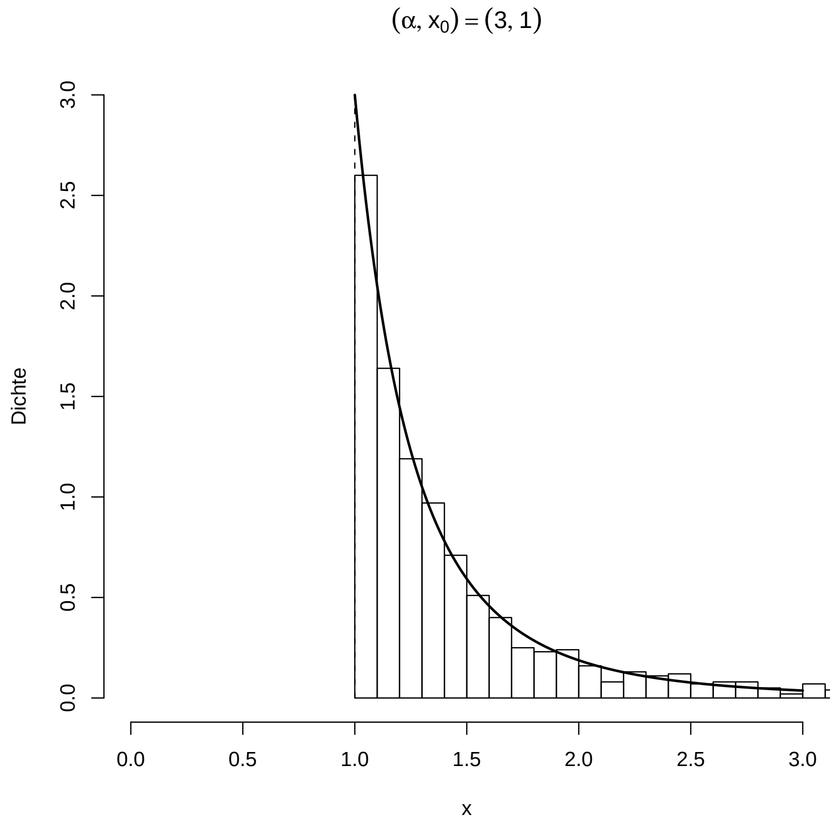
Die Varianz existiert nur für $\alpha > 2$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{x_0}^{\infty} x^2 \frac{\alpha\, x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha\, x_0^{\alpha}}{x^{\alpha-1}}\, dx \;<\; \infty \quad \text{für} \quad \alpha > 2$$

Dies wirkt sich u.a. dahingehend aus, daß für $\alpha \leq 2$ sehr große Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommen können. Dieses Phänomen läßt sich auch bei den oben angeführten Beispielen beobachten, da bei diesen Anwendungen α meist deutlich kleiner als 2 ist (z.B. liegt bei der Nachdenkzeit eines Web–Browsers α typischerweise zwischen 0.6 und 0.9).

Im ersten Fall (mit $\alpha = 1$ und $x_0 = 0.5$) war die größte Zufallszahl etwa 460; aus diesem Grund wird die Darstellung auf den Bereich $[x_0, \, x_0 \cdot 0.05^{-1/\alpha}]$ eingeschränkt ($x_0 \cdot 0.05^{-1/\alpha}$ ist das 95%–Quantil der Verteilung; vgl. (a)). Solche „Ausreißer“ gibt es im zweiten Fall (mit $\alpha = 3$ und $x_0 = 1$) nicht.





Bem.: Die Abbildungen wurden mit den folgenden R–Commands erstellt:

```
alpha <- 1; x0 <- 0.5  # 1. Abb.
#alpha <- 3; x0 <- 1  # 2. Abb.
n <- 1000
delta <- 0.95
x <- rpareto(n,x0,alpha)
h <- hist(x, breaks=seq(x0,max(x)+1,by=0.1), prob=TRUE, plot=FALSE)
ylim <- range(0, h$density, alpha/x0)
hist(x, breaks=seq(x0,max(x)+1,by=0.1), prob=TRUE,
  xlim=c(0,ceiling(x0*(1-delta)^(-1/alpha))), ylim=ylim, ylab="Dichte",
  main=substitute(group("(",list(alpha,x[0]),")")==group("(",list(a,b),")"),
  list(a=alpha,b=x0)))
x1 <- seq(x0, ceiling(x0*(1-delta)^(-1/alpha)), by=0.1)
lines(x1, dpareto(x1,x0,alpha), lty=1, lwd=2)
lines(c(x0,x0), c(0,alpha/x0), lty=2)
```

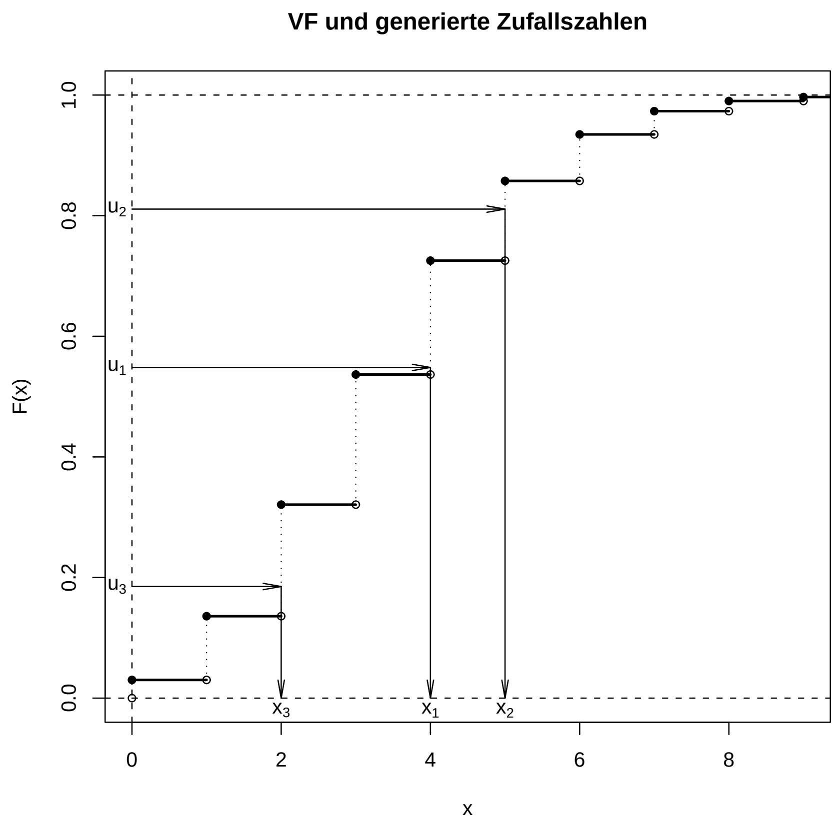
Sie finden diese Zeilen (und die beiden obigen Funktionen) unter `b75.r` auf der Übungs–Homepage.

6. (a) Mit $X \sim p_X(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, und $U \sim U_{(0,1)}$ gilt nach Definition von $F_X^{-1}(u)$:

$$\begin{aligned} W\big\{F_X^{-1}(U) = k\big\} &= W\big\{F_X(k-1) < U \le F_X(k)\big\} \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= W\{X = k\}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Um eine Beobachtung von X zu generieren, nimmt man also die kleinste ganze Zahl k, sodaß $F_X(k) \ge u$, für eine vorher generierte uniform verteilte

Zufallszahl u. Dies ist exemplarisch in der folgenden Abbildung für eine $P_{3.5}$–Verteilung und 3 generierte Zufallszahlen dargestellt. (Hier lauten die Zahlen, in der Reihenfolge ihrer Erzeugung, 4, 5, 2.)



(b) Der angegebene Algorithmus realisiert die obige Prozedur für eine poissonverteilte sG. Zur schnelleren Berechnung von F_X wird dabei eine Rekursion verwendet (Rekursionsanfang: $W\{X = 0\} = e^{-\mu}$):

$$W\{X = i+1\} = \frac{\mu^{i+1}e^{-\mu}}{(i+1)!} = \frac{\mu}{i+1} \cdot \frac{\mu^i e^{-\mu}}{i!} = \frac{\mu}{i+1}\, W\{X = i\}$$

*(c) Allgemein wird Schritt (3) genau dann k Mal aufgerufen, wenn U zwischen $F_X(k-2)$ und $F_X(k-1)$ liegt; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p_X(k-1)$. Der Erwartungswert für die Anzahl Y der Aufrufe von (3) ist also:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_X(k-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, p_X(k) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k)}_{=\mathbb{E}(X)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)}_{=1} = \mathbb{E}(X) + 1\end{aligned}$$

Für eine P_μ–Verteilung gilt: $\mathbb{E}(Y) = \mu + 1$.

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 8.Blatt
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	13. Dez. 2005

1. (a) Zeigen Sie für eine nichtnegative stochastische Größe mit $\mu = \mathbb{E}(X)$ die *Markoff'sche Ungleichung*:

$$W\{X \geq a\} \leq \frac{\mu}{a}, \quad a > 0$$

Hinweis: Vgl. Sie den Beweis der Tschebyscheff'schen Ungleichung.

*(b) Wie folgt aus der Markoff'schen die Tschebyscheff'sche Ungleichung?

2. (a) Vergleichen Sie (rechnerisch/graphisch) für eine nach $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte sG X die Wahrscheinlichkeiten:

$$Q(x) := W\{|X - \mu| \geq x\sigma\}, \quad x \geq 0$$

mit den aus der Tschebyscheff'schen Ungleichung resultierenden Werten.

*(b) Wiederholen Sie (a) für eine nach Ex_τ verteilte sG.

3. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben wie folgt:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

(b) Sind X und Y (stochastisch) unabhängig?

(c) Berechnen Sie $W\{X + Y \leq 1\}$.

4. Fortsetzung von **Bsp 3**:

(a) Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$.

(b) Wie groß ist die Korrelation ρ_{XY} ?

*(c) Ermitteln Sie die Regressionsfunktionen von Y bezüglich X und von X bezüglich Y und stellen Sie beide graphisch dar.

5. X und Y seien bivariat normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\rho = \frac{3}{5}$. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) $W\{3 < Y < 8\}$

(b) $W\{3 < Y < 8 \,|\, X = 7\}$

(c) $W\{-3 < X < 3\}$

(d) $W\{-3 < X < 3 \,|\, Y = -4\}$

6. X und Y seien bivariat normalverteilt mit den Parametern $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 10$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\rho > 0$. Wenn $W\{4 < Y < 16|X = 5\} = 0.954$, wie groß ist dann ρ ?

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 8. Blatt

1. (a) Beweis nur für eine stetige sG mit Dichte f (im diskreten oder gemischten Fall argumentiert man analog):

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\,f(x)\,dx = \underbrace{\int_{0<x<a} x\,f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{x\geq a} x\,f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{x\geq a} x\,f(x)\,dx \geq a \int_{x\geq a} f(x)\,dx = a\,W\{X \geq a\}$$

*(b) Ist X eine (beliebige) stochastische Größe mit $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, so gilt nach der Markoff'schen Ungleichung ($\varepsilon > 0$):

$$W\big\{|X-\mu| \geq \varepsilon\big\} = W\big\{(X-\mu)^2 \geq \varepsilon^2\big\} \leq \frac{\mathbb{E}\big[(X-\mu)^2\big]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Dies ist aber die Tschebyscheff'sche Ungleichung.

2. Allgemein gilt für $X \sim F$ und $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} W\big\{|X-\mu| \geq x\sigma\big\} &= 1 - W\big\{|X-\mu| < x\sigma\big\} \\ &= 1 - W\{\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma\} \\ &= 1 - \big[F\big((\mu + x\sigma)-\big) - F(\mu - x\sigma)\big] \end{aligned}$$

<u>Bem.:</u> $F(x-)$ ist der linksseitige Limes von F an der Stelle x; für stetiges X ist $F(x-) = F(x)$.

(a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned} W\big\{|X-\mu| \geq x\sigma\big\} &= 1 - \big[F(\mu + x\sigma) - F(\mu - x\sigma)\big] \\ &= 1 - \big[\Phi(x) - \Phi(-x)\big] \\ &= 1 - \big[2\Phi(x) - 1\big] \\ &= 2\big[1 - \Phi(x)\big], \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Die Tschebyscheff–Schranke ist $1/x^2$; sie ist nur für $x > 1$ informativ.

x	$Q(x)$	$1/x^2$
0.0	1.0000	∞
0.5	0.6171	4.0000
1.0	0.3173	1.0000
1.5	0.1336	0.4444
2.0	0.0455	0.2500
2.5	0.0124	0.1600
3.0	0.0027	0.1111
3.5	0.0005	0.0816
4.0	0.0001	0.0625

*(b) $X \sim Ex_\tau$: $\mathbb{E}(X) = \tau$, $\mathrm{Var}(X) = \tau^2$.

$$W\{|X-\tau| \geq x\tau\} = 1 - \left[F\big(\tau(1+x)\big) - F\big(\tau(1-x)\big)\right]$$

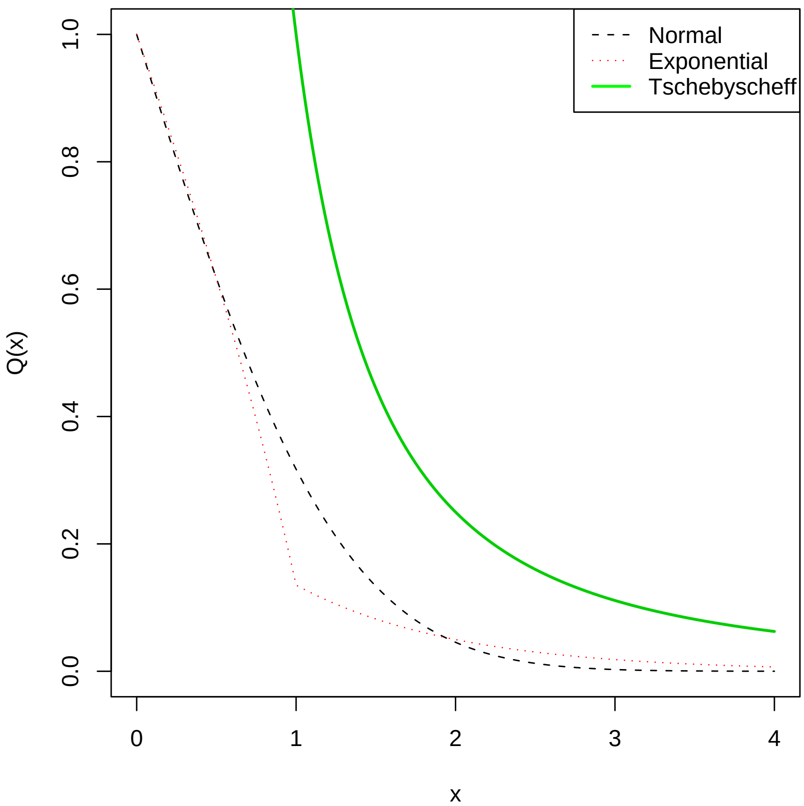
Für die Verteilungsfunktion einer Ex_τ–Verteilung gilt:

$$F(x) = \left(1 - e^{-x/\tau}\right) I_{[0,\infty)}(x)$$

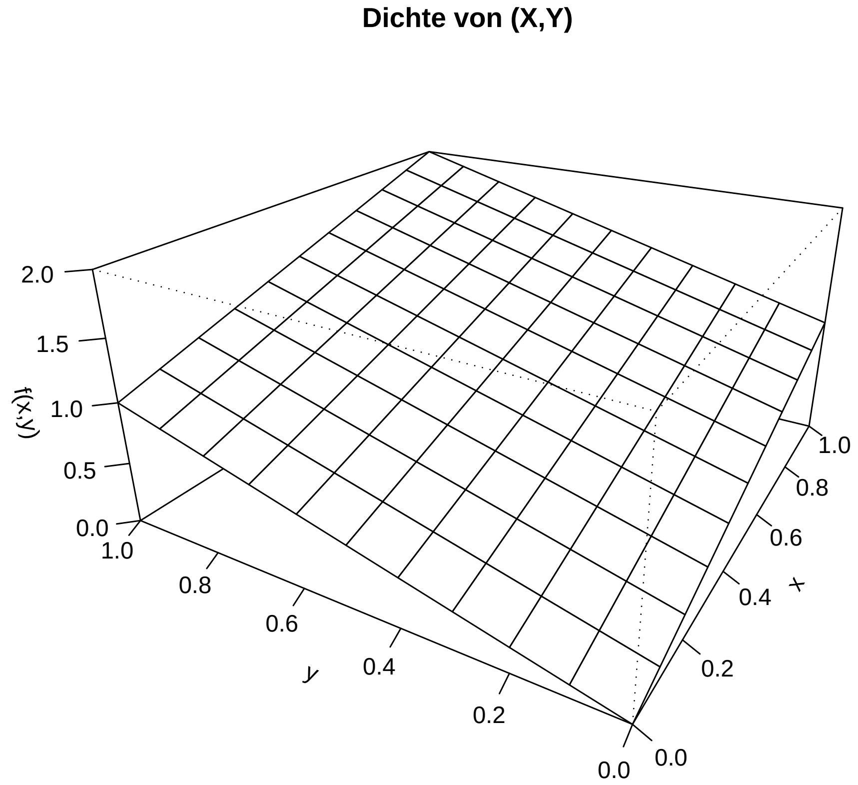
Damit folgt:

$$W\{|X-\tau| \geq x\tau\} = \begin{cases} 1 + e^{-(1+x)} - e^{-(1-x)} & 0 \leq x < 1 \\ e^{-(1+x)} & x \geq 1 \end{cases}$$

x	$Q(x)$	$1/x^2$
0.0	1.0000	∞
0.5	0.6166	4.0000
1.0	0.1353	1.0000
1.5	0.0821	0.4444
2.0	0.0498	0.2500
2.5	0.0302	0.1600
3.0	0.0183	0.1111
3.5	0.0111	0.0816
4.0	0.0067	0.0625



3.



(a) Die Randdichte von X bestimmt man durch Integration nach y:

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

Analog bestimmt man die Randdichte von Y:

$$f_2(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 1$$

(b) Wegen $f(x,y) \neq f_1(x)\,f_2(y)$ sind X und Y nicht unabhängig.

(c)

$$W\{X+Y \leq 1\} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{3}$$

4. (a) Zunächst bestimmt man den Erwartungswert von X:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{7}{12}$$

Aus Symmetriegründen gilt $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2y + xy^2\right)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\,dy = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz für Kovarianzen folgt nun:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$$

(b) Für die Varianz von X (= Varianz von Y) gilt:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{5}{12} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Var}(X) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

Damit folgt:

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{-1/144}{\sqrt{11/144 \cdot 11/144}} = -\frac{1}{11}$$

*(c) Die Dichte von Y bedingt durch $X = x$ ist gegeben wie folgt:

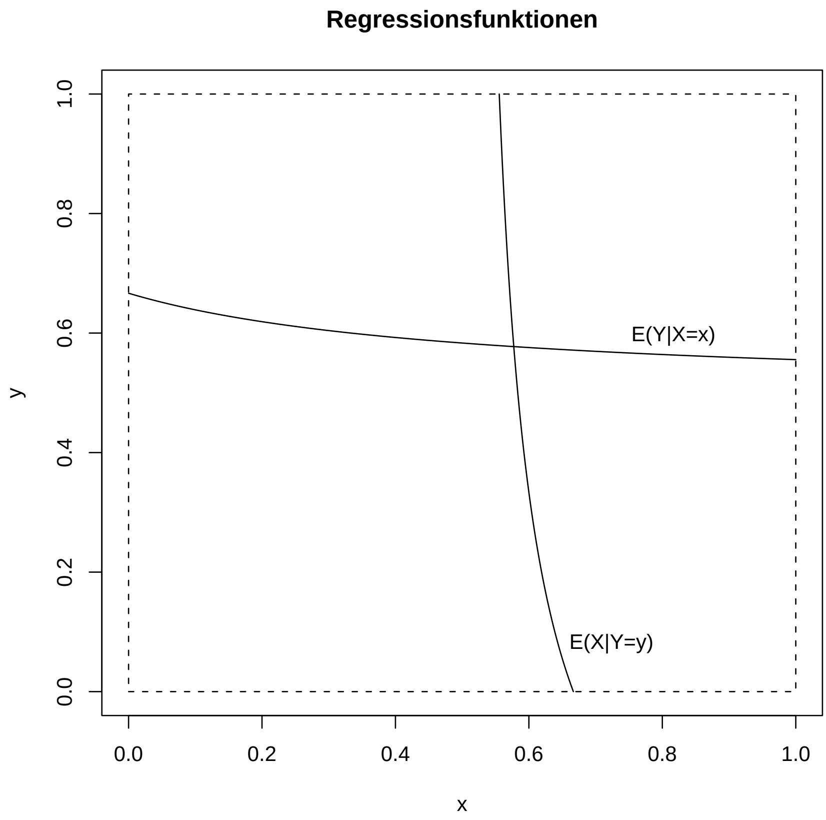
$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{x+y}{x+1/2}, \quad 0 < y < 1$$

Die Regressionsfunktion von Y bezüglich X ist der bedingte Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^1 y f(y|x)\,dy = \int_0^1 \frac{y(x+y)}{x+1/2}\,dy = \frac{3x+2}{6x+3}, \quad 0 < x < 1$$

Analog bestimmt man die Regressionsfunktion von X bezüglich Y:

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{3y+2}{6y+3}, \quad 0 < y < 1$$



5. (a) Für die Randverteilung von Y gilt $Y \sim N(1, 25)$; damit folgt:

$$W\{3 < Y < 8\} = \Phi\left(\frac{8-1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{3-1}{5}\right) = 0.2638$$

(b) Für die bedingte Verteilung von $Y|X = 7$ gilt:

$$Y|X = 7 \sim N\left(1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot (7-3), \left(1 - \frac{9}{25}\right) \cdot 25\right) = N(4, 16)$$

Damit folgt:

$$W\{3 < Y < 8|X = 7\} = \Phi\left(\frac{8-4}{4}\right) - \Phi\left(\frac{3-4}{4}\right) = 0.4401$$

(c) Für die Randverteilung von X gilt $X \sim N(3, 16)$; damit folgt:

$$W\{-3 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3}{4}\right) = 0.4332$$

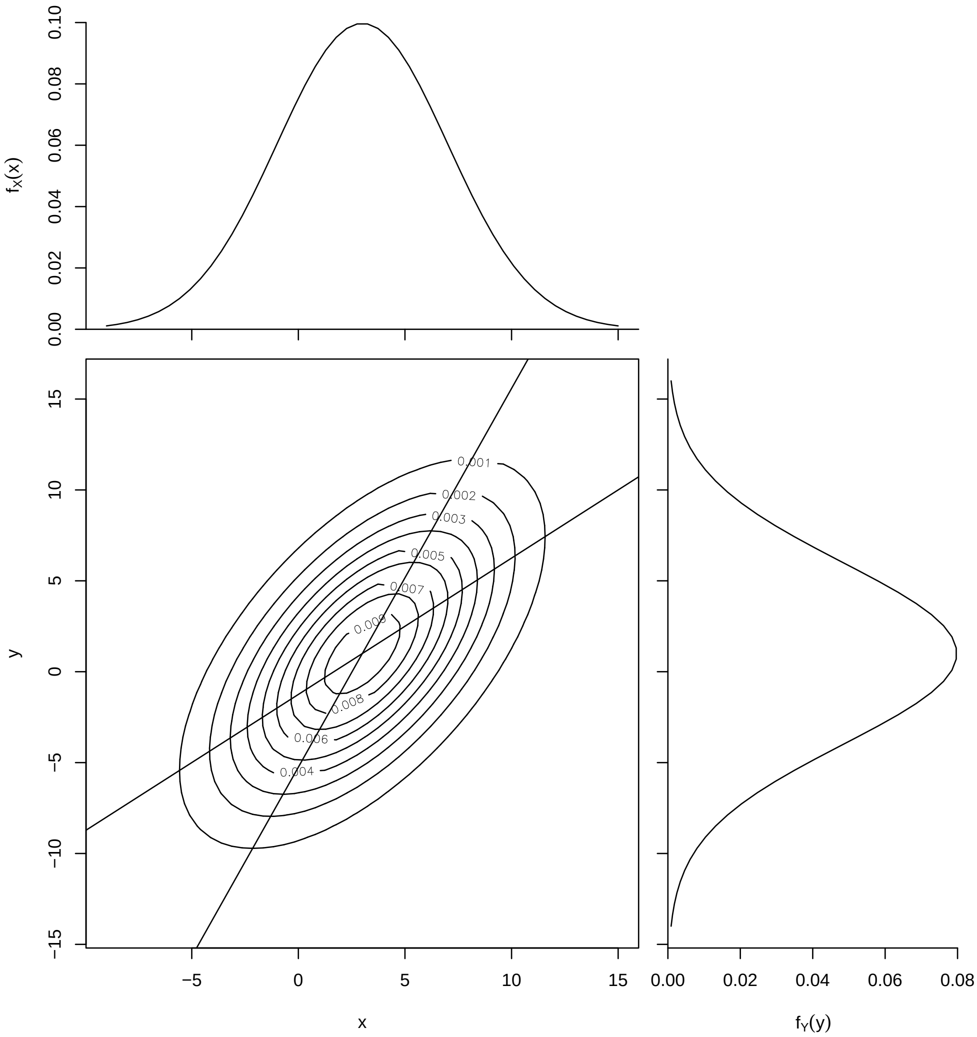
(d) Für die bedingte Verteilung von $X|Y = -4$ gilt:

$$X|Y = -4 \sim N\left(3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot (-4-1), \left(1 - \frac{9}{25}\right) \cdot 16\right) = N\left(\frac{3}{5}, \left(\frac{16}{5}\right)^2\right)$$

Damit folgt:

$$W\{-3 < X < 3|Y = -4\} = \Phi\left(\frac{3 - 3/5}{16/5}\right) - \Phi\left(\frac{-3 - 3/5}{16/5}\right) = 0.6431$$

Contourplot von $f(x, y)$ und Randdichten



Die eingezeichneten Geraden sind die Regressionsfunktionen.

6. Laut Angabe gilt:

$$\mathbb{E}(Y|X=5) = 10 + \rho\,\frac{5}{1}\,(5-5) = 10; \quad \mathrm{Var}(Y|X=5) = (1-\rho^2)\cdot 25$$

$$\Longrightarrow \quad W(4 < Y < 16|X=5) = 2\Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 = 0.954$$

Daraus folgt:

$$\frac{6}{5\sqrt{1-\rho^2}} = u_{(1+0.954)/2} = u_{0.977} \approx 2 \quad \Longrightarrow \quad \rho \approx \frac{4}{5}$$

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf. 107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	Di 12:00 – 18:00 **9.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	10. Jän. 2006

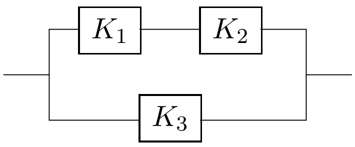
1. Der Input Λ eines Programms sei eine gammaverteilte sG mit den Parametern α und β, $\Lambda \sim Gam(\alpha, \beta)$. Bedingt durch $\Lambda = \lambda$ ist die Ausführungszeit des Programms eine gammaverteilte sG mit den Parametern k und $1/\lambda$:

$$X|\Lambda = \lambda \sim Gam(k, 1/\lambda)$$

Ermitteln Sie die Dichte der Ausführungszeit X des Programms. Was ergibt sich speziell für $k = 1$, d.h. für $X|\Lambda = \lambda \sim Ex_{1/\lambda}$?

<u>Hinweis:</u> Bestimmen Sie zuerst die gemeinsame Dichte $f(x, \lambda)$ von (X, Λ); führen Sie das zu berechnende Integral $f_X(x) = \int_0^\infty f(x, \lambda)\, d\lambda$ auf die Gammafunktion zurück.

2. Die logische Struktur eines Systems bestehend aus drei Komponenten sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)$. Bestimmen Sie die Dichte der Lebensdauer des Systems und deren Mittelwert.

<u>Hinweis:</u> Ermitteln Sie zuerst die Verteilungsfunktion.

3. Die Lebensdauer X einer Komponente folge einer uniformen Verteilung auf dem Intervall $(0, 3)$. Fällt die Komponente aus, wird sie sofort durch eine Reservekomponente mit auf dem Intervall $(0, 5)$ uniform verteilter Lebensdauer Y ersetzt.

   (a) Bestimmen (und zeichnen) Sie die Dichte der Gesamtlebensdauer, d.h. bestimmen Sie die Dichte von $S = X + Y$.

   <u>Hinweis:</u> Faltung; orientieren Sie sich am Beispiel der Vorlesung.

   (b) Ermitteln Sie Mittelwert und Streuung von S.

4. Ein Programm bestehe aus $n = 100$ Seiten Code und X_i sei die Anzahl der Fehler auf der i–ten Seite. Angenommen, die X_i's sind unabhängig und identisch poissonverteilt mit Mittel $\mu = 0.8$. Wenn $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ die Gesamtzahl der Fehler ist, bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzverteilungssatzes einen approximativen Wert für $W\{75 < Y < 85\}$. Verwenden Sie bei der Berechnung die Stetigkeitskorrektur.

5. Ein Hobbyphotograph findet heraus, daß (bei größtmöglicher Auflösung und geringster Kompression) seine Digitalbilder im Durchschnitt 1.92 MB groß sind, bei einer Streuung von 0.425 MB.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit passen auf eine 128 MB Speicherkarte zumindest 61 Bilder (nach Herstellerangaben unter den gegebenen Bedingungen der Standardwert)?

(b) Wieviele Bilder passen mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest 0.5 auf die Speicherkarte? Wieviele mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 ?

Hinweis: Zentraler Grenzverteilungssatz.

6. Für die Generierung von (approximativ) nach $N(0,1)$ verteilten Zufallszahlen gibt es auch die folgende Methode: Man generiert 12 uniform (auf $(0,1)$) verteilte Zufallszahlen U_i und bildet:

$$\sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

Dies liefert eine $N(0,1)$–verteilte Zufallszahl; für die Generierung einer weiteren nimmt man wieder 12 (neue) uniform verteilte Zufallszahlen, bildet den obigen Ausdruck, usw.

(a) Geben Sie eine Erklärung für diese Methode. (*Bem.:* Diese Methode kommt ohne die Invertierung der Verteilungsfunktion aus; allerdings braucht man für die Erzeugung *einer* normalverteilten Zahl 12 uniform verteilte Zahlen.)

*(b) Erzeugen Sie nach obiger Methode 500 normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert 2 und Streuung 0.4 und stellen Sie das Ergebnis in Form eines Dichtehistogramms dar (mit darüber gezeichneter theoretischer Dichte).

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 9. Blatt

1. Laut Angabe gilt:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, \quad \lambda > 0$$

und

$$f(x|\Lambda = \lambda) = f(x|\lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}, \quad x > 0$$

Für die gemeinsame Dichte von (X, Λ) folgt daher:

$$f(x,\lambda) = f(x|\lambda)\, f_\Lambda(\lambda) = \frac{x^{k-1}\lambda^{\alpha+k-1} e^{-\lambda(1+\beta x)/\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)\beta^\alpha}, \ x > 0,\ \lambda > 0$$

Die (Rand–) Dichte von X ergibt sich durch Integration nach λ:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,\lambda)\, d\lambda = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+k-1} e^{-\lambda(1+\beta x)/\beta}\, d\lambda$$

Dieses Integral läßt sich auf die Gammafunktion zurückführen:

$$\frac{\lambda(1+x\beta)}{\beta} = u \quad \longrightarrow \quad d\lambda = \frac{\beta}{1+x\beta}\, du$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\beta^k x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(1+x\beta)^{\alpha+k}} \int_0^\infty u^{\alpha+k-1} e^{-u}\, du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)\beta^k x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(1+x\beta)^{\alpha+k}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Für $k = 1$ ergibt sich:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\beta}{(1+\beta x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0$$

Bem.: Eine Verteilung mit der obigen allgemeinen Dichte nennt man *verallgemeinerte Pareto–Verteilung* (ist auch eine Verallgemeinerung der F–Verteilung); für $k = 1$ ergibt sich die schon bekannte (einfache) *Pareto–Verteilung* (vgl. **Bsp 7.5**). Diese Verteilungen haben schwerere Ausläufer als die ursprüngliche (bedingte) Gammaverteilung.

2. Bezeichnet X_i die Lebensdauer der i–ten Komponente und F_i die zugehörige Verteilungsfunktion, so gilt laut Angabe:

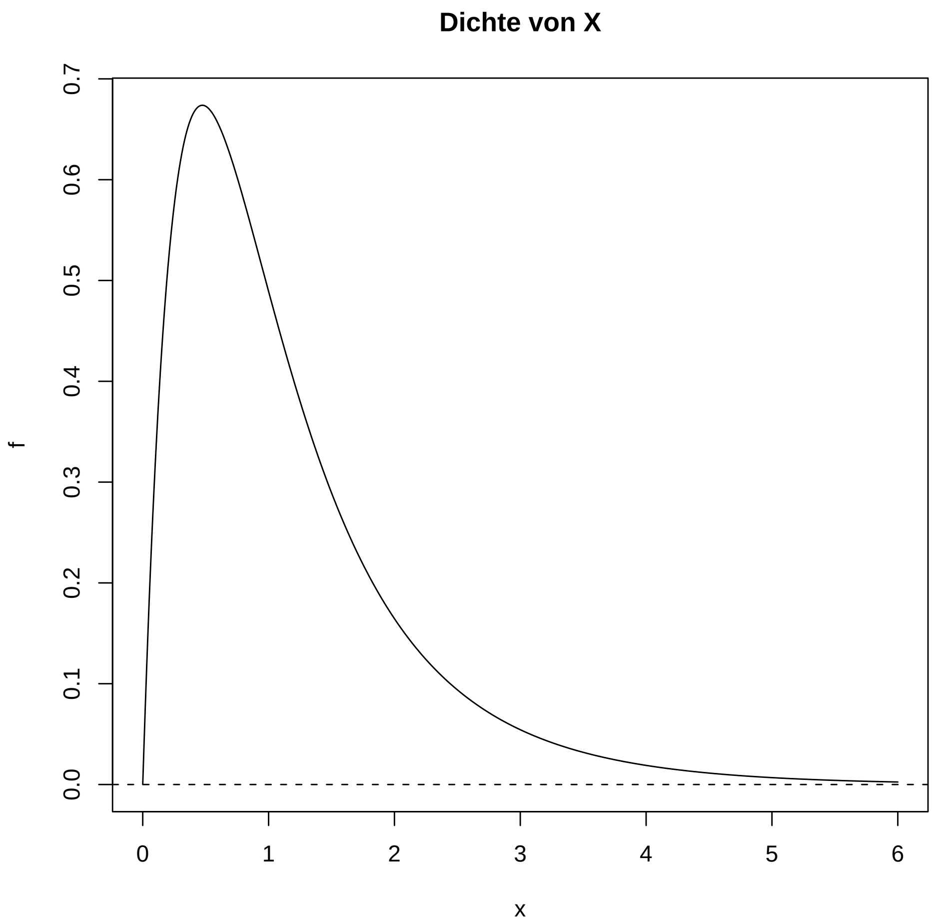
$$F_i(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$$

Damit folgt für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer X des Systems:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= W(X \leq x) = W\big(\max\big\{\min\{X_1, X_2\}, X_3\big\} \leq x\big) \\ &= \big[1 - \big(1 - F_1(x)\big)\big(1 - F_2(x)\big)\big] F_3(x) \\ &= \big(1 - e^{-2x}\big)\big(1 - e^{-x}\big) \\ &= 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x},\ x > 0 \end{aligned}$$

Die Dichte bekommt man durch Ableiten:

$$f_X(x) = F'_X(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x},\ x > 0$$



Mittelwert von X:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x\big[e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x}\big]\,dx = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

<u>Bem.:</u> Bei der Berechnung des Mittelwerts wurde wiederholt verwendet, daß:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} \quad (= \text{Mittelwert einer } Ex_{1/\lambda}\text{–Verteilung})$$

3. (a) Die Dichte von $S = X + Y$ ergibt sich durch Faltung von f_X und f_Y:

$$f_X(x) = \frac{1}{3} I_{(0,3)}(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{5}\, I_{(0,5)}(y)$$

$$f_S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)\, f_Y(t)\, dt = \frac{1}{15} \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,3)}(z-t)\, I_{(0,5)}(t)\, dt$$

Der Integrand ist nur dann ungleich Null, wenn $0 < z - t < 3$ und $0 < t < 5$. Die erste Bedingung ist äquivalent zu $z - 3 < t < z$; beide Bedingungen sind also nur dann erfüllt, wenn:

$$\max\{0, z-3\} < t < \min\{5, z\}$$

<u>Fallunterscheidung</u> ($f_S(z) = 0$ für $z \leq 0$ und $z > 8$):

(1) <u>$0 < z \leq 3$:</u> $\max\{0, z-3\} = 0, \ \min\{5, z\} = z$

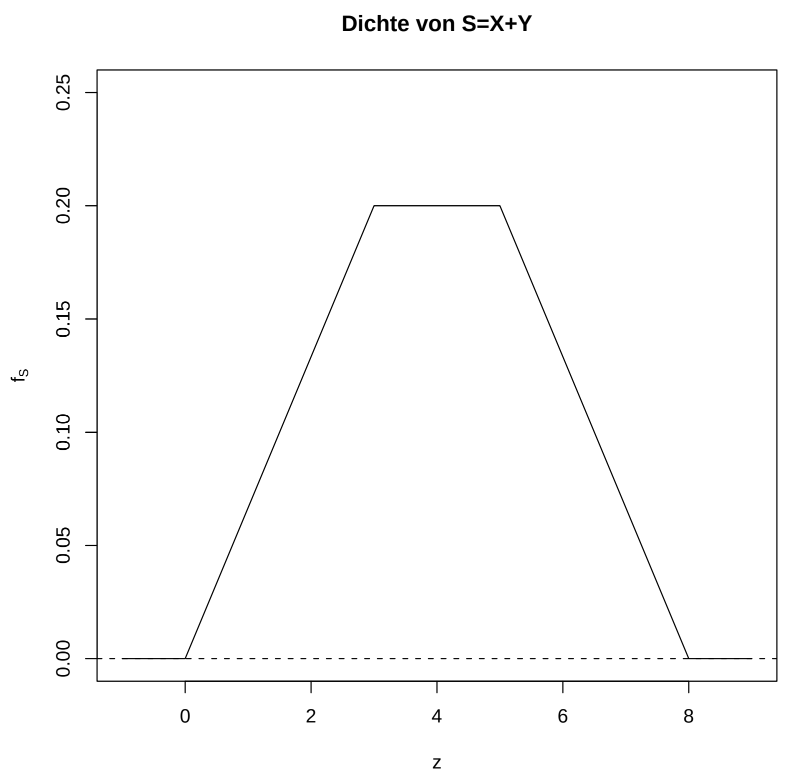
$$f_S(z) = \frac{1}{15} \int_0^z dt = \frac{z}{15}$$

(2) <u>$3 < z \leq 5$:</u> $\max\{0, z-3\} = z - 3, \ \min\{5, z\} = z$

$$f_S(z) = \frac{1}{15} \int_{z-3}^{z} dt = \frac{1}{5}$$

(3) <u>$5 < z \leq 8$:</u> $\max\{0, z-3\} = z - 3, \ \min\{5, z\} = 5$

$$f_S(z) = \frac{1}{15} \int_{z-3}^{5} dt = \frac{8 - z}{15}$$



(b) Der Mittelwert einer Summe ist die Summe der Mittelwerte:

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1.5 + 2.5 = 4$$

Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt:

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{9}{12} + \frac{25}{12} = \frac{34}{12}$$

Bem.: Für die Gültigkeit der obigen Beziehung genügt die Unkorreliertheit von X und Y.

Die Streuung ist die (positive) Wurzel aus der Varianz:

$$\mathrm{Streuung}(S) = \sqrt{\frac{34}{12}} \doteq 1.683$$

4. Auf Basis des Zentralen Grenzverteilungssatzes (ZGVS) gilt (± 0.5 ist die Stetigkeitskorrektur):

$$\begin{aligned} W\{75 < Y < 85\} = W\{76 \leq Y \leq 84\} &= \sum_{i=76}^{84} W\{Y = i\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{84.5 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8}}\right) - \Phi\left(\frac{75.5 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{84.5 - 80}{\sqrt{80}}\right) - \Phi\left(\frac{75.5 - 80}{\sqrt{80}}\right) \\ &= 2\Phi(0.5031) - 1 \\ &= 0.3851 \end{aligned}$$

Bem.: Nach dem Additionstheorem für (unabhängige) Poissonverteilungen gilt:

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim P_{100 \times 0.8} = P_{80}$$

Der exakte Wert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist (berechnet mit R):

$$W\{76 \leq Y \leq 84\} = \sum_{i=76}^{84} \frac{80^i e^{-80}}{i!} = 0.3850$$

5. (a) Ist N die Anzahl der auf die Speicherkarte passenden Bilder, und sind X_i die Größen der einzelnen Bilder, so gilt nach dem ZGVS:

$$\begin{aligned} W\{N \geq 61\} = W\left\{\sum_{i=1}^{61} X_i \leq 128\right\} &\approx \Phi\left(\frac{128 - 61 \cdot 1.92}{\sqrt{61} \cdot 0.425}\right) \\ &= \Phi(3.2777) \doteq 0.9995 \end{aligned}$$

(b) In diesem Fall ist das größte n zu bestimmen, sodaß:

$$W\{N \geq n\} = W\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 128\right\} \approx \Phi\left(\frac{128 - n \cdot 1.92}{\sqrt{n} \cdot 0.425}\right) \geq 0.5$$

Man findet schnell heraus, daß:

$$W\{N \geq 67\} \doteq 0.4270 \qquad W\{N \geq 66\} \doteq 0.6446$$

D.h., in ca. 64% der Fälle bringt der Fotograf (unter den gegebenen Bedingungen) zumindest 66 Bilder unter. Ebenso gilt:

$$W\{N \geq 64\} \doteq 0.9340 \qquad W\{N \geq 63\} \doteq 0.9816$$

D.h., in ca. 98% der Fälle bringt er zumindest 63 Bilder unter.

6. (a) Die Begründung liegt im ZGVS; für den Erwartungswert und die Varianz einer nach $U_{(0,1)}$ verteilten sG U gilt:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{Var}(U) = \frac{1}{12}$$

Für die Summe von 12 unabhängigen $U_{(0,1)}$–verteilten Größen U_i folgt daher:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{12} U_i\right) = 6, \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{12} U_i\right) = 1$$

Nach dem ZGVS gilt:

$$\sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \stackrel{.}{\sim} N(0,1)$$

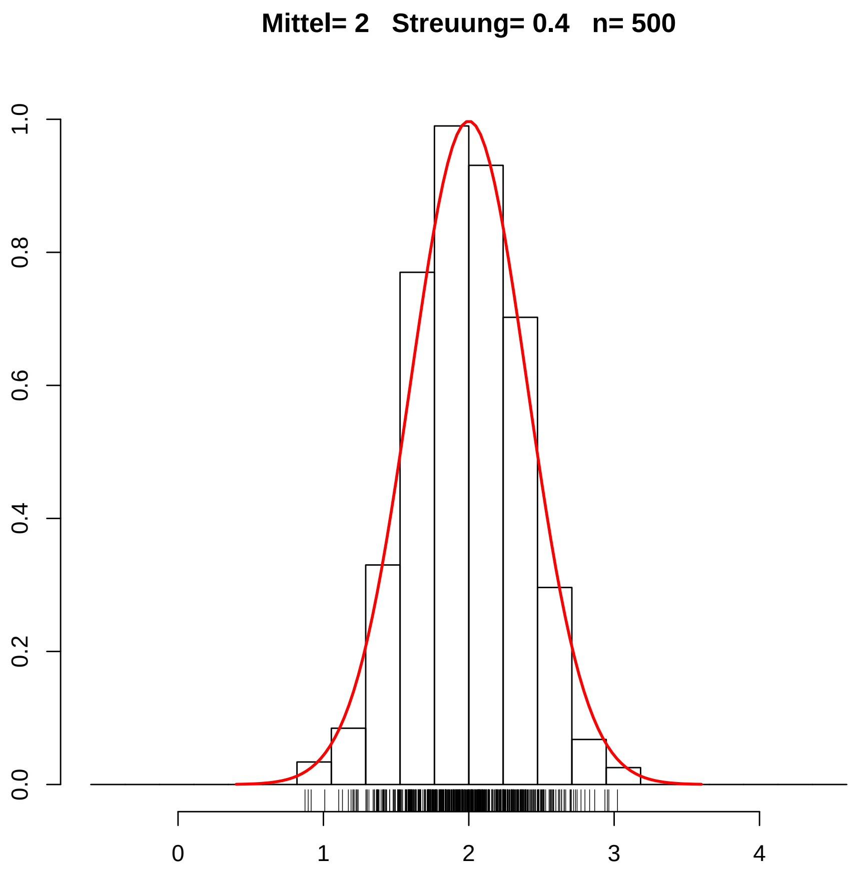
<u>Bem.:</u> Auf Grund der Symmetrie der Ausgangsverteilung ($U_{(0,1)}$) ist die Normalapproximation bereits für den relativ kleinen Stichprobenumfang $n = 12$ sehr gut.

*(b) Die folgende R–Funktion erzeugt normalverteilte Zufallszahlen nach der obigen Methode; soll der Mittelwert gleich μ und die Varianz gleich σ^2 sein, muß man diese Zahlen noch mit σ multiplizieren und μ addieren. (*Bem.:* R–Skript unter `b96.r` auf der Ü–Homepage.)

```
rand.norm <- function(n,mu,sigma) {
   r.n <- numeric(n)
   for (i in (1:n)) {
     r.u <- runif(12)
     r.n[i] <- sum(r.u)-6 }
   r.n <- mu+r.n*sigma }

mu <- 2; sigma <- 0.4; n <- 500
res <- rand.norm(n,mu,sigma)
tmp.hist <- hist(res,plot=FALSE)
tmp.dens <- dnorm(mu,mean=mu,sd=sigma)
y.max <- max(tmp.hist$density,tmp.dens)
hist(res,breaks=seq(mu-4*sigma-1,mu+4*sigma+1,length=round(sqrt(n))+1),
     prob=TRUE,xlab="",ylab="",main=paste("Mittel=",mu,"  Streuung=",
     sigma,"  n=",n),ylim=c(0,y.max))
x <- seq(mu-4*sigma,mu+4*sigma,length=100)
lines(x,dnorm(x,mu,sigma),lty=1,lwd=2,col="red")
rug(res)
```

Die Abbildung zeigt ein (Dichte–) Histogramm von 500 so erzeugten Zufallszahlen einer $N(2, 0.16)$–Verteilung (mit darüber gezeichneter Normaldichte und einem „Rugplot“):



Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**10.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	17. Jän. 2006

1. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Verteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2; $\overline{X}_n$ sei der Stichprobenmittelwert und S_n^2 die Stichprobenvarianz.

   (a) Zeigen Sie („Verschiebungssatz“):

   $$\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 + n\left(\overline{X} - c\right)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß S_n^2 ein unverzerrter Schätzer für σ^2 ist.

   Hinweis: Die Konstante c kann beliebig gewählt werden; klarerweise wird man sie aber so wählen, daß die Erwartungswerte der Ausdrücke von (a) einfach zu bestimmen sind.

2. Die folgende Tabelle ist die Zusammenfassung einer Stichprobe des Umfangs 50 aus einer Poissonverteilung P_μ:

x	0	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	3	8	19	9	7	2	2

   (a) Bestimmen Sie den plausiblen Schätzer von μ.

   (b) Ist der plausible Schätzer unverzerrt und konsistent?

   (c) Bestimmen Sie den plausiblen Schätzwert von μ.

   *(d) Bestimmen Sie den plausiblen Schätzwert von $W(X \geq 2)$.

3. Die folgenden Daten sind Zeiten (Betriebsstunden) bis zum Ausfall eines bestimmten Typs von Transistoren (Einheit = 10^3 Stunden):

```
0.12, 0.61, 2.09, 2.94, 3.20, 3.32, 3.59, 5.08, 5.71, 5.90,
7.53, 8.04, 8.83, 9.18, 11.54, 12.35
```

   (a) Ermitteln und zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

   Hinweis für R-User: Nehmen Sie die Funktion `ecdf` (Package: `stats`).

   (b) Ermitteln Sie unter der Annahme, daß es sich um eine Stichprobe aus einer Verteilung mit der Dichte:

   $$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \ x > 0$$

   handelt, den plausiblen Schätzer von λ. Überprüfen Sie, ob der gefundene Schätzer tatsächlich die (logarithmierte) Plausibilitätsfunktion maximiert.

   (c) Bestimmen Sie den plausiblen Schätzwert von λ.

   *(d) Zeichnen Sie über die empirische Verteilungsfunktion die auf Basis von (c) geschätzte Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie graphisch und/oder rechnerisch Stelle und Größe des maximalen Abstands zwischen den beiden Funktionen.

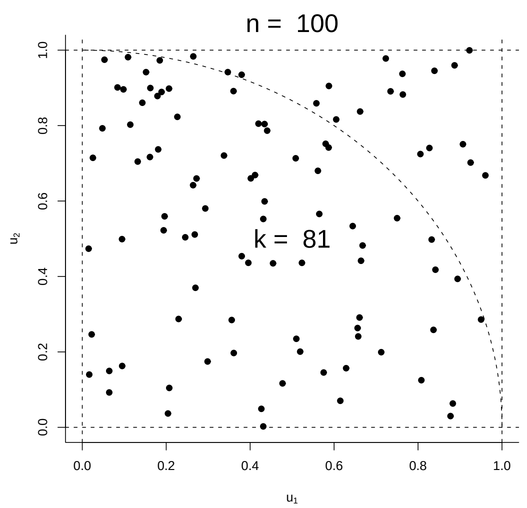
4. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Alternativverteilung A_p:

*(a) Begründen Sie, warum die folgende sG eine approximative Pivotgröße ist.

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)/n}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$$

(b) Entwickeln Sie auf Basis von Z_n ein approximatives $(1-\alpha)$–Konfidenzintervall für den Parameter p.

(c) Bei einem Zufallsexperiment, bei dem $n = 100$ uniform verteilte Punkte im Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ erzeugt werden, liegen $k = 81$ innerhalb des Einheitskreises. Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für π.



5. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim Ex_\tau$:

*(a) Zeigen Sie:

$$\frac{2n\overline{X}_n}{\tau} \sim \chi^2_{2n}$$

(b) Entwickeln Sie auf Basis von (a) ein Konfidenzintervall für τ mit ÜDW $1-\alpha$.

(c) Bestimmen Sie auf Basis der Daten von **Bsp 3** ein 90%–Konfidenzintervall für die mittlere Ausfallzeit dieses Transistortyps (Vs.: Exponentialverteilung).

6. Bestimmen Sie auf Basis des Datensatzes `normtemp.dat` (vgl. Ü–Homepage), wahlweise für `gender=M` oder `gender=W` :

(a) ein 95%–Konfidenzintervall für die mittlere Körpertemperatur.

(b) ein 90%–Konfidenzintervall für die Streuung der Körpertemperatur.

Gehen Sie dabei von normalverteilten Beobachtungen aus. Rechnen Sie zuerst die Angaben von ^{o}Fahrenheit in ^{o}Celsius um. (*Welche Auswirkungen hat diese Umrechnung auf die Konfidenzintervalle?)

Beispiel(teil)e mit (*) werden im Konversatorium behandelt.

Lösungen zum 10. Blatt

1. (a) Dies zeigt man durch Einfügen und Abziehen von $\overline{X}_n$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n + \overline{X}_n - c\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}_n - c\right)^2 + 2\left(\overline{X}_n - c\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 + n\left(\overline{X}_n - c\right)^2
\end{aligned}
$$

(b) Speziell für $c = \mu = \mathbb{E}(X)$ ergibt sich:

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X}_n - \mu)^2
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right] &= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i - \mu)^2}_{\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2} - n\,\underbrace{\mathbb{E}(\overline{X}_n - \mu)^2}_{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)=\sigma^2/n} \\
&= n\sigma^2 - \sigma^2 \\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung:

$$
\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n-1}\,\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right] = \sigma^2
$$

2. (a) Zunächst bestimmt man die Plausibilitätsfunktion:

$$
L(\mu;\mathrm{Daten}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\mu^{x_i}\,e^{-\mu}}{(x_i)!} = \underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i)!}\right]}_{=C}\,\mu^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\,e^{-n\mu} = C\,\mu^{n\overline{x}_n}\,e^{-n\mu}
$$

Durch Logarithmieren ergibt sich die Log–Plausibilitätsfunktion:

$$
l(\mu;\mathrm{Daten}) = \ln L(\mu;\mathrm{Daten}) = \ln C + n\overline{x}_n \ln\mu - n\mu
$$

Nun bestimmt man die Stelle des Maximums:

$$
\frac{d\,l(\mu;\mathrm{Daten})}{d\mu} = \frac{n\overline{x}_n}{\mu} - n = 0 \;\longrightarrow\; \widehat{\mu} = \overline{x}_n
$$

Der plausible Schätzer von μ ist also $\widehat{\mu} = \overline{X}_n$.

(b) Der Schätzer ist unverzerrt:

$$\mathbb{E}(\widehat{\mu}) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X) = \mu$$

Die Konsistenz folgt aus dem GGZ (= Gesetz der großen Zahlen):

$$\overline{X}_n \xrightarrow{W} \mathbb{E}(X) = \mu$$

(c) Der plausible Schätzwert von μ ist gegeben durch:

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + \cdots + 6 \cdot 2}{50} = \frac{123}{50} = 2.46$$

*(d) Zur Bestimmung des plausiblen Schätzers einer Funktion $g(\theta)$ des Parameters θ („geraffter" Parameter), kann man sich die *Invarianz* des plausiblen Schätzers zunutze machen, d.h. für den plausiblen Schätzer von $g(\theta)$ gilt $\widehat{g(\theta)} = g(\widehat{\theta})$. In der vorliegenden Situation gilt:

$$g(\mu) = W\{X \geq 2\} = 1 - W\{X \leq 1\} = 1 - e^{-\mu} - \mu e^{-\mu}$$

Der plausible Schätzer von $W\{X \geq 2\}$ ist also:

$$\widehat{g(\mu)} = 1 - e^{-\overline{X}_n} - \overline{X}_n e^{-\overline{X}_n}$$

Der plausible Schätzwert ist gegeben durch:

$$1 - e^{-\overline{x}} - \overline{x}e^{-\overline{x}} = 1 - e^{-2.46} - 2.46\, e^{-2.46} = 0.7044$$

3. (a) Die empirische Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen an den Stellen der (geordneten) Stichprobe; die Sprunghöhe beträgt jeweils $1/n$; bei mehreren identischen Beobachtungen (hier nicht der Fall) springt sie um das entsprechende Vielfache von $1/n$.

(b) Plausibilitätsfunktion:

$$L(\lambda; \text{Daten}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda\, x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \overline{x}_n}$$

Log–Plausibilitätsfunktion:

$$l(\lambda; \text{Daten}) = \ln L(\lambda; \text{Daten}) = n \ln \lambda - \lambda n \overline{x}_n$$

Bestimmung des Maximums:

$$\frac{d\, l(\lambda; \text{Daten})}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\overline{x}_n = 0 \longrightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}_n}$$

Überprüfung auf (lok.) Maximum:

$$\left. \frac{d^2\, l(\lambda; \text{Daten})}{d\lambda^2} \right|_{\lambda = \widehat{\lambda}} = -n\overline{x}_n^2 < 0$$

Plausibler Schätzer:

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

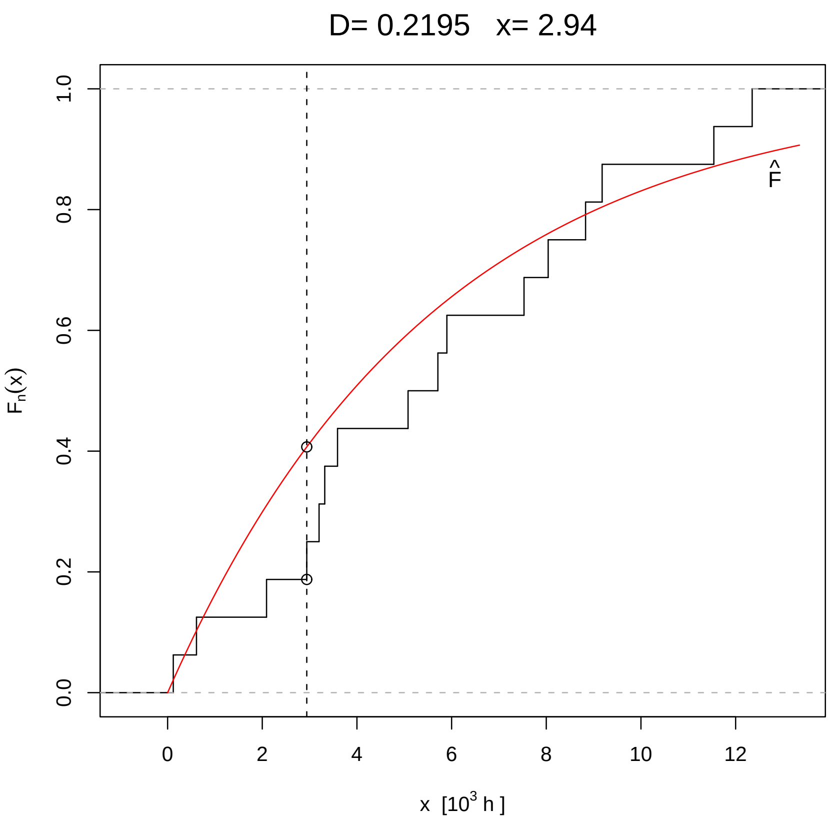
(c) Plausibler Schätzwert:

$$\widehat{\lambda} = \frac{16}{0.12 + 0.61 + \cdots + 12.35} = \frac{16}{90.03} = 0.1777$$

*(d) Die plausibel geschätzte Verteilungsfunktion ist gegeben durch (vgl. die Lösung von **Bsp 2(d)**):

$$\widehat{F}(x) = 1 - e^{-\widehat{\lambda}x}, \; x > 0$$

Das Maximum (genauer: Supremum) D des Abstands zwischen $F_n(x)$ und $\widehat{F}(x)$ kann nur an einer Sprungstelle von $F_n(x)$ auftreten; hier gilt $D \approx 0.22$ bei $x_{(4)} = 2.94$.



Bem.: Das R–Skript zur Erzeugung der obigen Abbildung (und der dazu nötigen Berechnungen) findet sich unter `b103.r` auf der Ü–Homepage.

4. *(a) Die Begründung dafür, daß Z_n eine approximative Pivotgröße ist, liegt im zentralen Grenzverteilungssatz, und darin, daß $\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)/n$ ein konsistenter Schätzer von $p(1-p)/n$ (= Varianz von $\overline{X}_n$) ist.

(b) Einschließen von Z_n in zwei passende Quantile der Pivotverteilung ($= N(0,1)$):

$$-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)/n}} \leq z_{1-\alpha/2}$$

Auflösen der Doppelungleichung nach p:

$$\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq p \leq \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}$$

(c) Sind U_1, U_2 zwei unabhängige $U_{(0,1)}$–verteilte sGn, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß (U_1, U_2) innerhalb des Einheitskreises liegt, gleich $\pi/4$. Die folgende Indikatorvariable:

$$X = \begin{cases} 1 & U_1^2 + U_2^2 < 1 \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist daher A_p–verteilt mit $p = \pi/4$. (*Bem.:* π wird hier als unbekannter Parameter interpretiert.) Ein Schätzwert für π ist also gegeben durch:

$$\widehat{\pi} = 4\overline{x} = 4 \cdot \frac{81}{100} = 3.24$$

(*Bem.:* Dies ist auch der plausible Schätzwert von π.) Das 95%–Konfidenzintervall für p ist gegeben durch:

$$0.81 \mp \underbrace{z_{0.975}}_{1.96}\sqrt{\frac{0.81 \cdot 0.19}{100}} = [0.7331, 0.8869]$$

Durch Multiplikation mit 4 bekommt man das 95%–Konfidenzintervall für π:

$$[2.9324, 3.5476]$$

5. *(a) Nach dem Additionstheorem für (unabhängige) Gammaverteilungen gilt zunächst (*Bem.:* $Ex_\tau \equiv Gam(1,\tau)$):

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gam(n, \tau)$$

Die Dichte dieser Gammaverteilung ist gegeben durch:

$$f_{S_n}(s) = \frac{s^{n-1}\, e^{-s/\tau}}{(n-1)!\,\tau^n}, \quad s > 0$$

Nach dem Transformationssatz für Dichten gilt für $Z := 2n\overline{X}_n/\tau = 2S_n/\tau$ ($s = \tau z/2$, $ds/dz = \tau/2$):

$$f_Z(z) = f_{S_n}\left(\frac{\tau z}{2}\right)\left|\frac{ds}{dz}\right| = \frac{\tau^{n-1}\, z^{n-1}\, e^{-z/2}}{(n-1)!\, 2^{n-1}\, \tau^n} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{z^{n-1}\, e^{-z/2}}{(n-1)!\, 2^n}, \quad z > 0$$

Dies ist die Dichte einer χ^2–Verteilung mit $2n$ Freiheitsgraden. Da letztere – im Gegensatz zur Verteilung von S_n – nicht von τ abhängt, bedeutet dies insbesondere, daß $2n\overline{X}_n/\tau$ eine Pivotgröße ist.

(b) Auf Basis der Pivotgröße von (a) folgt:

$$W\left\{\chi^2_{2n;\,\alpha/2} \leq \frac{2n\overline{X}_n}{\tau} \leq \chi^2_{2n;\,1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

Durch Auflösen der Doppelungleichung nach τ („τ in die Mitte") erhält man ein $100(1-\alpha)\%$ Konfidenzintervall für τ:

$$\left[\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{2n;\,1-\alpha/2}}, \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{2n;\,\alpha/2}}\right]$$

(c) Auf Basis der Daten von **Bsp 3** ergibt sich als Konfidenzintervall für die mittlere Ausfallzeit ($\overline{x} = 5.627$, $\chi^2_{32;\,0.05} = 20.07$, $\chi^2_{32;\,0.95} = 46.19$):

$$\left[\frac{32 \cdot 5.627}{46.19}, \frac{32 \cdot 5.627}{20.07}\right] = [3.898, 8.971]$$

6. (a) Ein $(1-\alpha)$–Konfidenzintervall für den Mittelwert ist gegeben durch (Stichprobe aus Normalverteilung):

$$\overline{X}_n - t_{n-1;\,1-\alpha/2}\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + t_{n-1;\,1-\alpha/2}\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Umrechnen der Temperaturen in °C:

$$x[°\mathrm{F}] = \frac{5(x-32)}{9}\,[°\mathrm{C}]$$

	n	$\overline{x}_n$	s_n	$t_{n-1;\,0.975}$	95%–Konfidenzintervall (μ) untere Grenze	obere Grenze
M	65	36.72	0.3882	1.998	36.63	36.82
W	65	36.89	0.4130	1.998	36.78	36.99

Bem.: Die Intervalle für °F und °C stehen in derselben Beziehung zueinander wie die Temperaturen.

(b) Ein $(1-\alpha)$–Konfidenzintervall für die Streuung ist gegeben durch (Stichprobe aus Normalverteilung):

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}}\right]$$

Mit $\chi^2_{64;\,0.05} = 46.595$ und $\chi^2_{64;\,0.95} = 83.675$ ergibt sich:

	90%–Konfidenzintervall (σ) untere Grenze	obere Grenze
M	0.3395	0.4550
W	0.3612	0.4841

Bem.: Die Intervalle für °F und °C stehen in der Beziehung $I^{(C)} = 5/9 \cdot I^{(F)}$ zueinander.

Ue Statistik u. Wahrscheinlichkeitsth. f. Inf.	Di 12:00 – 18:00
107.251 W 2005|6 http://www.statistik.tuwien.ac.at/RISueb/	**11.Blatt**
Werner GURKER Tel.: 58801–10724 Spr.: Di u. Do 11–12 e–mail: W.Gurker@tuwien.ac.at	24. Jän. 2006

1. Prüfen Sie mittels W–Netz auf Basis des Datensatzes `normtemp.dat` (vgl. Ü–Homepage), wahlweise für `GE=M` oder `GE=W`, ob die Körpertemperaturen einer Normalverteilung folgen. Teilen Sie dazu die Daten zunächst in Klassen ein (z.B. $(96.0, 96.5]$, …; vgl. auch **Bsp 2.5**) und tragen Sie die kumulierten relativen Klassenhäufigkeiten an den rechten Klassengrenzen im Netz ein. (Wie kann man – im positiven Fall – dem Netz Schätzwerte für μ und σ entnehmen?)

   <u>Hinweis:</u> Normalnetze zum Ausdrucken gibt es auf der Ü–Homepage und an anderen Stellen im Internet; R–User nehmen `qqnorm` (und `qqline`) und die unklassierten Originaldaten.

2. Es sei bekannt, daß ein Signal vom Wert μ, das von A nach B übertragen wird, in B normalverteilt ist mit Mittel μ und Streuung 2.

   (a) In B vermutet man, daß heute $\mu = 8$ übertragen wird. Läßt sich diese Behauptung vertreten, wenn die fünfmalige (unabhängige) Wiederholung des Signals ein Stichprobenmittel von $\overline{X} = 9.5$ ergibt? Testen Sie mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von 5%.

   (b) Wie groß ist beim Test von (a) die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art, wenn das übertragene Signal tatsächlich den Wert $\mu = 10$ hat?

3. Die beiden folgenden Meßreihen stammen aus (unabh.) Normalverteilungen:

X:	192	179	181	193	215	181	178					
Y:	173	194	194	187	168	186	176	191	191	178	185	160

   Testen Sie mit $\alpha = 10\%$, ob die Varianzen gleich sind, d.h. testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

4. Fortsetzung von **Bsp 3**: Ermitteln Sie ein 95%–Konfidenzintervall für die Differenz $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ der Mittelwerte. Wie kann man auf Basis dieses Intervalls testen, ob die beiden Mittelwerte gleich sind?

   <u>Hinweis:</u> Eine entsprechende Pivotgröße wurde in der VO angegeben.

5. Fünf (österr.) 1-EURO–Münzen werden gleichzeitig 200 Mal geworfen und jedesmal die Zahl X der geworfenen „Mozart“ gezählt, mit dem folgenden Ergebnis:

X	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit	5	38	48	71	32	6

   Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Beobachtungen einer Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 1/2$ folgen.

6. Betrachten Sie die folgenden (geordneten) Beobachtungen:

```
0.05 0.06 0.12 0.16 0.26 0.29 0.53 0.65 0.69 0.74
0.75 0.85 0.88 1.17 1.19 1.23 1.29 1.37 1.42 1.49
1.59 1.89 2.21 2.60 4.60
```

(a) Prüfen Sie mittels (einfachem) Chiquadrat–Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Daten aus einer Exponentialverteilung mit Mittelwert 1 stammen. Nehmen Sie dazu beispielsweise die folgende Klasseneinteilung ($x_p = p$–Quantil der Ex_1–Verteilung):

$$[0, x_{0.2}), [x_{0.2}, x_{0.4}), [x_{0.4}, x_{0.6}), [x_{0.6}, x_{0.8}), [x_{0.8}, \infty)$$

(b) Prüfen Sie mittels Chiquadrat–Anpassungstest (mit $\alpha = 5\%$), ob die Daten aus einer Exponentialverteilung stammen, d.h. testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_\tau \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_\tau$$

<u>Hinweis:</u> Zusammengesetzter χ^2–Anpassungstest; bestimmen Sie zuerst den plausiblen Schätzwert von τ. Halten Sie sich bei der Klasseneinteilung an den Vorschlag von (a).

Lösungen zum 11. Blatt

1. Größere Datensätze (etwa $n > 30$) kann man vor Eintragung ins W–Netz in Klassen einteilen:

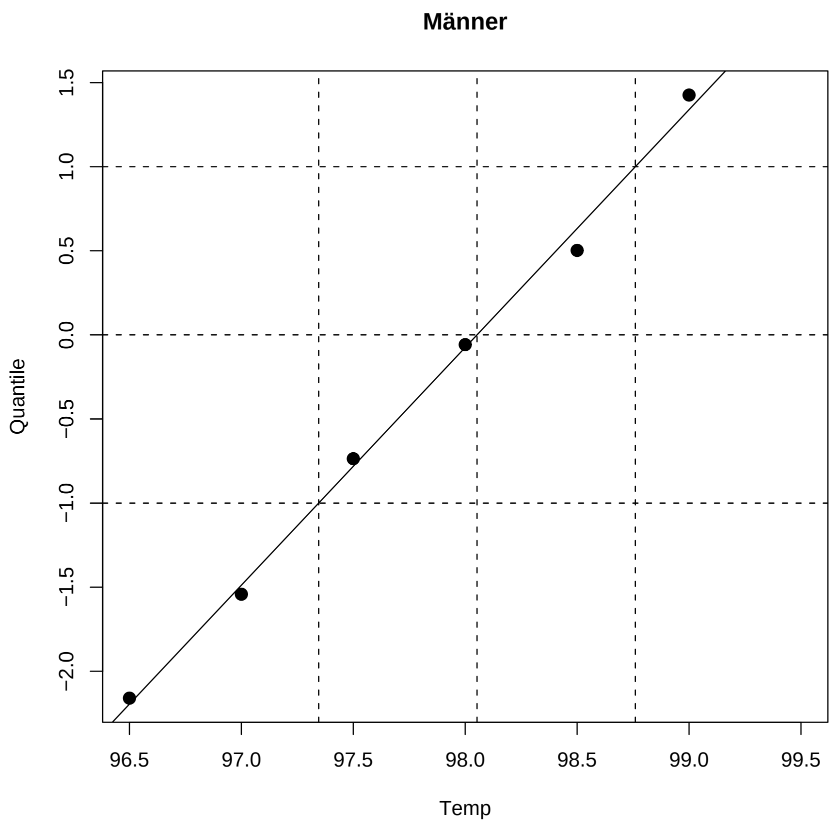
Männer

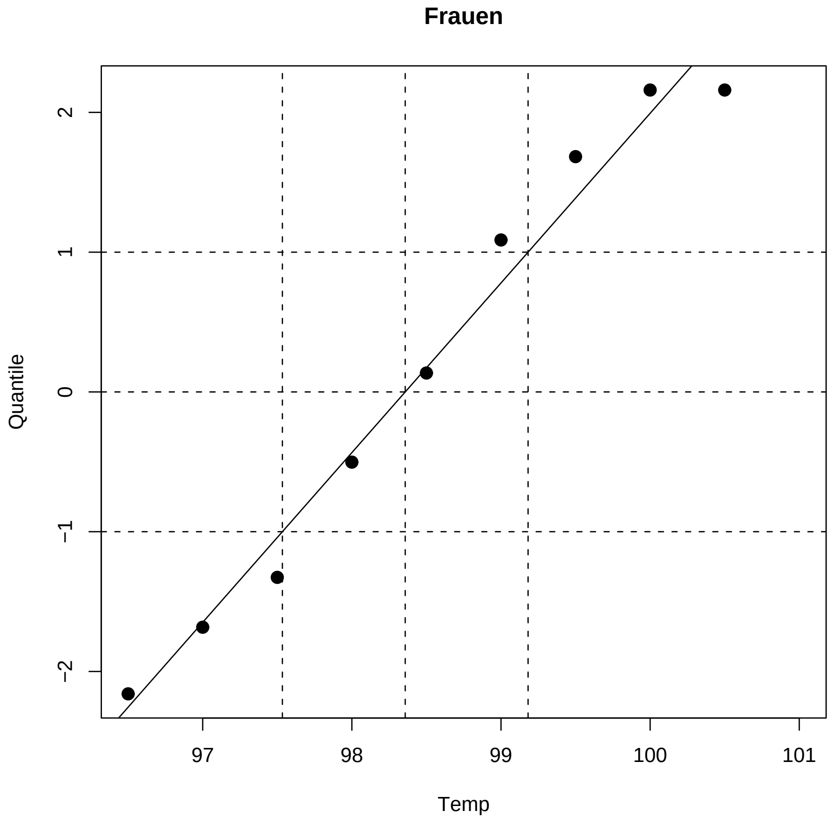
Klasse	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_i$
$(96.0, 96.5]$	1	0.015	0.015
$(96.5, 97.0]$	3	0.046	0.062
$(97.0, 97.5]$	11	0.169	0.231
$(97.5, 98.0]$	16	0.246	0.477
$(98.0, 98.5]$	14	0.215	0.692
$(98.5, 99.0]$	15	0.231	0.923
$(99.0, 99.5]$	5	0.077	1.000
	65	1.000	

Frauen

Klasse	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_i$
$(96.0, 96.5]$	1	0.015	0.015
$(96.5, 97.0]$	2	0.031	0.046
$(97.0, 97.5]$	3	0.046	0.092
$(97.5, 98.0]$	14	0.215	0.308
$(98.0, 98.5]$	16	0.246	0.554
$(98.5, 99.0]$	20	0.308	0.862
$(99.0, 99.5]$	6	0.092	0.954
$(99.5, 100.0]$	2	0.031	0.985
$(100.0, 100.5]$	0	0.000	0.985
$(100.5, 101.0]$	1	0.015	1.000
	65	1.000	

Nun trägt man $\Phi^{-1}\big(\sum_{j=1}^{i} h_j\big)$ (bei vorgefertigten Netzen $\sum_{j=1}^{i} h_j$ oder bei einer Prozentskala $100\big(\sum_{j=1}^{i} h_j\big)\%$) gegen die oberen Klassengrenzen ab und versucht, die Punkte durch eine Gerade auszugleichen. Für `GE=M` gelingt dies recht gut, für `GE=W` sind jedoch – insbesondere am oberen Ende – Abweichungen zu erkennen.





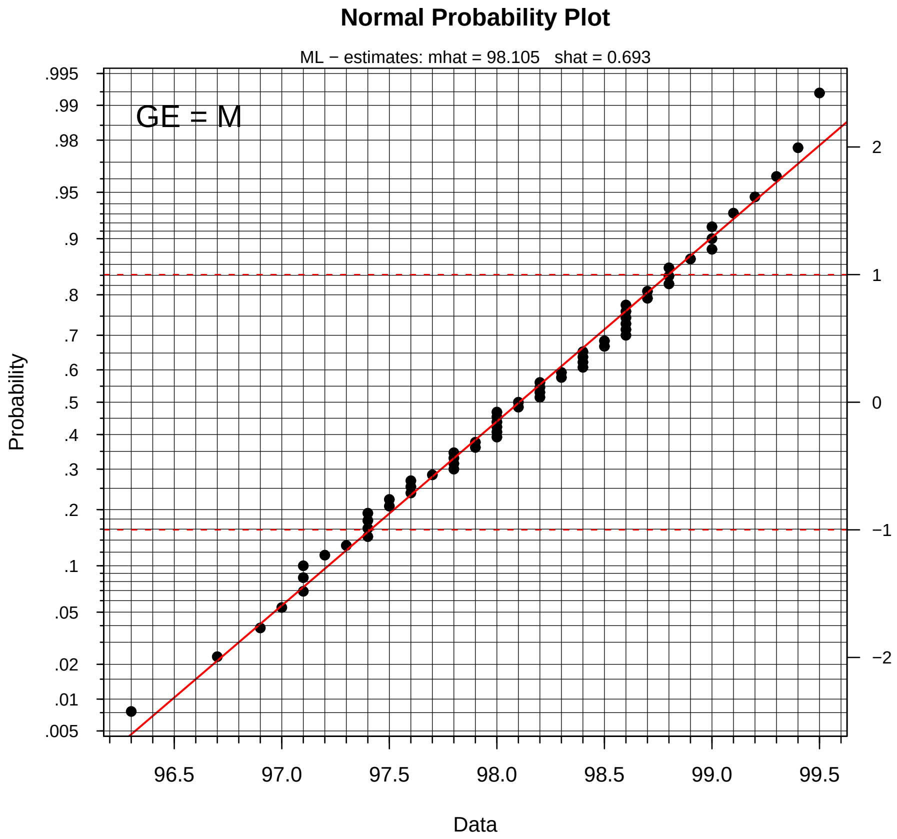
Etwas klarer wird die Situation, wenn man auf die unklassierten Daten zurückgreift. In diesem Fall trägt man aber üblicherweise nicht die Punkte $\big(x_{(i)}, i/n\big)$ im Netz ein, sondern:

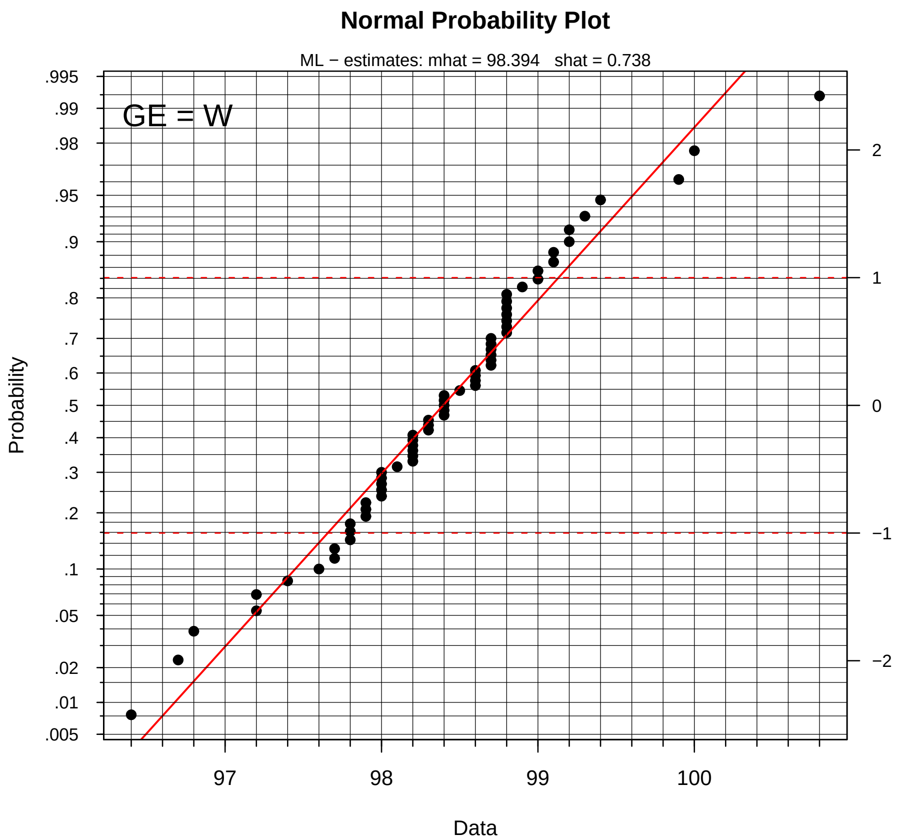
$$\left(x_{(i)}, \frac{i-0.5}{n}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

Ein Nebeneffekt dieser Vorgangsweise besteht darin, daß auf diese Weise auch der letzte Punkt $x_{(n)}$ eingetragen werden kann (wäre sonst wegen $\Phi^{-1}(1) = \infty$ nicht möglich). Die gute Anpassung für `GE=M` bestätigt sich (allerdings leichtes „Ausfransen" am oberen Ende); für `GE=W` deutet die Form der Abweichungen darauf hin, daß die Verteilung besonders am oberen Ende etwas schwerer als bei einer Normalverteilung ist.

Einen Schätzwert für μ kann man beim Schnittpunkt der 50%– (bzw. 0–) Linie mit der eingezeichneten Geraden entnehmen; für `GE=M` ergibt sich $\widehat{\mu} \approx 98.1$. Ein Schätzwert für σ ergibt sich als Differenz zwischen dem Schnittpunkt der 84.13%– (bzw. 1–) Linie mit der eingezeichneten Geraden und der Schätzung für μ (oder als Differenz zwischen dem entsprechenden Schnittpunkt der 15.87%– (bzw. (-1)–) Linie und der Schätzung für μ); für `GE=M` ergibt sich $\widehat{\sigma} \approx 98.8 - 98.1 = 0.7$.

<u>Bem.:</u> Die beiden letzten Abbildungen wurden mit einer eigenen R–Funktion erstellt; Sie finden diese Funktion unter `net.normal.r` auf der Ü–Homepage.


Normal Probability Plot
ML − estimates: mhat = 98.105 shat = 0.693
GE = M
Probability
.995
.99
.98
.95
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.05
.02
.01
.005
2
1
0
−1
−2
96.5
97.0
97.5
98.0
98.5
99.0
99.5
Data


Normal Probability Plot
ML − estimates: mhat = 98.394 shat = 0.738
GE = W
Probability
.995
.99
.98
.95
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
.05
.02
.01
.005
2
1
0
−1
−2
97
98
99
100
Data

2. (a) Der Test verwirft die Nulhypothese $\mathcal{H}_0 : \mu = 8$ (zugunsten von $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 8$) mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von $\alpha = 0.05$, falls:

$$\frac{\sqrt{n}|\overline{X}_n - 8|}{2} > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Für $n = 5$ und $\overline{X} = 9.5$ hat die Teststatistik den Wert 1.68; die Behauptung wird also nicht verworfen.

(b) Wird tatsächlich $\mu = 10$ übertragen, beträgt die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise $\mathcal{H}_0$ nicht zu verwerfen (d.h. für einen Fehler 2. Art):

$$\beta(10) = W\left\{\frac{\sqrt{5}|\overline{X}_5 - 8|}{2} \leq 1.96 \middle| \mu = 10\right\}$$

Für $\mu = 10$ gilt $\overline{X}_5 \sim N(10, 4/5) = N(10, 0.8)$; die obige Wahrscheinlichkeit ist also wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\beta(10) &= W\Big\{\underbrace{8 - \frac{2}{\sqrt{5}}1.96}_{6.247} \leq \overline{X}_5 \leq \underbrace{8 + \frac{2}{\sqrt{5}}1.96}_{9.753}\Big\} \\
&= \Phi\left(\frac{9.753 - 10}{\sqrt{0.8}}\right) - \Phi\left(\frac{6.247 - 10}{\sqrt{0.8}}\right) \\
&= \Phi(-0.276) - \Phi(-4.196) \\
&= \Phi(4.196) - \Phi(0.276) \\
&= 0.391
\end{aligned}$$

3. Der F–Test verwirft die Gleichheit der Varianzen, falls:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \notin \left[F_{n_X-1,n_Y-1;\,\alpha/2},\, F_{n_X-1,n_Y-1;\,1-\alpha/2}\right]$$

Hier gilt:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{174.629}{119.356} = 1.463$$

$$F_{6,11;\,0.05} = \frac{1}{F_{11,6;\,0.95}} = \frac{1}{4.027} = 0.248, \quad F_{6,11;\,0.95} = 3.095$$

Die Gleichheit der Varianzen wird nicht verworfen.

<u>Bem.:</u> Da es offensichtlich nicht darauf ankommt, welche Stichprobenvarianz im Zähler und welche im Nenner steht, wird man die größere Varianz in den Zähler geben. Der Quotient ist dann größer als 1 und es muß nur die obere Intervallgrenze überprüft werden; so erspart man sich die Bestimmung der unteren Grenze. Allerdings ist auf die Reihenfolge der Freiheitsgrade zu achten (1. Freiheitsgrad $\widehat{=}$ Zähler; 2. Freiheitsgrad $\widehat{=}$ Nenner).

4. Die Konstruktion eines Konfidenzintervalls für $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ beruht auf der folgenden Pivotgröße (Vsn.: normalverteilte Beobachtungen, Varianzen gleich):

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{S_g \sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} \sim t_{n_X+n_Y-2} \quad \text{mit} \quad S_g^2 := \frac{(n_X-1)\,S_X^2 + (n_Y-1)\,S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

Einschließen von Z in zwei passende t–Quantile (ÜW $= 1-\alpha$) und Auflösen der Doppelungleichung nach Δ:

$$\overline{X} - \overline{Y} \mp t_{n_X+n_Y-2;\,1-\alpha/2}\, S_g \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}$$

Hier gilt $\overline{X} = 188.43$, $\overline{Y} = 181.92$ und $t_{17;\,0.975} = 2.11$; für die „gepoolte" Varianz S_g^2 ergibt sich:

$$S_g^2 = \frac{6 \cdot 174.629 + 11 \cdot 119.356}{17} = 156.153$$

Das 95%–Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte ist gegeben durch:

$$\Delta: \ [-5.312,\ 18.336]$$

<u>Bem.:</u> Auf Basis des obigen Intervalls kann man auch $\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y$ (gegen $\mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$) testen (mit Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art α); dazu ist nur zu prüfen, ob $\Delta = 0$ ein Element des Intervalls ist. Da dies hier der Fall ist, wird die Gleichheit der Mittelwerte nicht verworfen.

5. Da die Nullhypothese vollständig spezifiziert ist, handelt es sich um einen einfachen Chiquadrat–Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim B_{5,1/2} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim B_{5,1/2}$$

Die (Klassen–) Wahrscheinlichkeiten unter $\mathcal{H}_0$ sind gegeben durch:

$$w_i = W\{X = i \,|\, \mathcal{H}_0\} = \binom{5}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad i = 0,1,2,3,4,5$$

Die einzelnen Schritte zur Berechnung der χ^2–Teststatistik faßt man übersichtlich in einer Tabelle zusammen:

Klasse	Y_i	w_i	nw_i	$\frac{(Y_i-nw_i)^2}{nw_i}$
0	5	0.03125	6.25	0.250
1	38	0.15625	31.25	1.458
2	48	0.31250	62.50	3.364
3	71	0.31250	62.50	1.156
4	32	0.15625	31.25	0.018
5	6	0.03125	6.25	0.010
Summe	200	1.00000	200.00	6.256

Wegen $\chi^2_{r-1;\,0.95} = \chi^2_{6-1;\,0.95} = \chi^2_{5;\,0.95} = 11.07 > 6.256$ wird die Nullhypothese nicht verworfen.

6. (a) Einfacher Chiquadrat–Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_1 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_1$$

Die Quantile der Ex_1 sind gegeben wie folgt:

$$F(x_p) = 1 - e^{-x_p} = p \quad \longrightarrow \quad x_p = -\ln(1-p)$$

Klasse	Y_i	w_i	nw_i	$\frac{(Y_i - nw_i)^2}{nw_i}$
$[0, 0.223)$	4	0.2	5	0.2
$[0.223, 0.511)$	2	0.2	5	1.8
$[0.511, 0.916)$	7	0.2	5	0.8
$[0.916, 1.610)$	8	0.2	5	1.8
$[1.610, \infty)$	4	0.2	5	0.2
Summe	25	1.0	25	4.8

Wegen $\chi^2_{r-1;\,0.95} = \chi^2_{5-1;\,0.95} = \chi^2_{4;\,0.95} = 9.488 > 4.8$ wird die $\mathcal{H}_0$ nicht verworfern.

<u>Bem.:</u> Man beachte, daß durch die gewählte Klasseneinteilung die Regel $nw_i \geq 5$ automatisch erfüllt ist; mehr als 5 Klassen sind nach dieser Regel nicht zulässig. Ist noch ein Parameter zu schätzen (vgl. (b)), ist wegen $r - s - 1 \geq 1$ die minimale Anzahl von Klassen drei.

(b) Zusammengesetzter Chiquadrat–Anpassungstest von:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim Ex_\tau \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\sim Ex_\tau$$

Zuerst ist der Parameter τ (plausibel) zu schätzen; eine analoge Rechnung wie in **Bsp 10.3** (vgl. auch die in der Lösung zu **Bsp 10.2(d)** erwähnte „Invarianz“ der ML–Schätzung) ergibt:

$$\widehat{\tau} = \overline{x} = 1.1232$$

Die Quantile sind nun gegeben wie folgt:

$$\widehat{F}(x_p) = 1 - e^{-x_p/\widehat{\tau}} = p \quad \longrightarrow \quad \widehat{x}_p = -\widehat{\tau}\ln(1-p)$$

Klasse	Y_i	$\widehat{w}_i$	$n\widehat{w}_i$	$\frac{(Y_i - n\widehat{w}_i)^2}{n\widehat{w}_i}$
$[0, 0.251)$	4	0.2	5	0.2
$[0.251, 0.574)$	3	0.2	5	0.8
$[0.574, 1.029)$	6	0.2	5	0.2
$[1.029, 1.808)$	8	0.2	5	1.8
$[1.808, \infty)$	4	0.2	5	0.2
Summe	25	1.0	25	3.2

Wegen $\chi^2_{r-s-1;\,0.95} = \chi^2_{5-1-1;\,0.95} = \chi^2_{3;\,0.95} = 7.815 > 3.2$ wird die $\mathcal{H}_0$ nicht verworfern.

<u>Bem.:</u> In Hinblick auf das Ergebnis von (a) könnte man der Auffassung sein, daß das Ergebnis von (b) quasi eine „Folgerung“ aus (a) ist. Das ist jedoch nicht der Fall; es ist nicht schwierig, Datensätze zu finden (zu konstruieren), für die die Nullhypothese von (a) nicht verworfen wird, wohl aber diejenige von (b).