Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 10$:

4 12 20 41 44 66 72 124 134 256

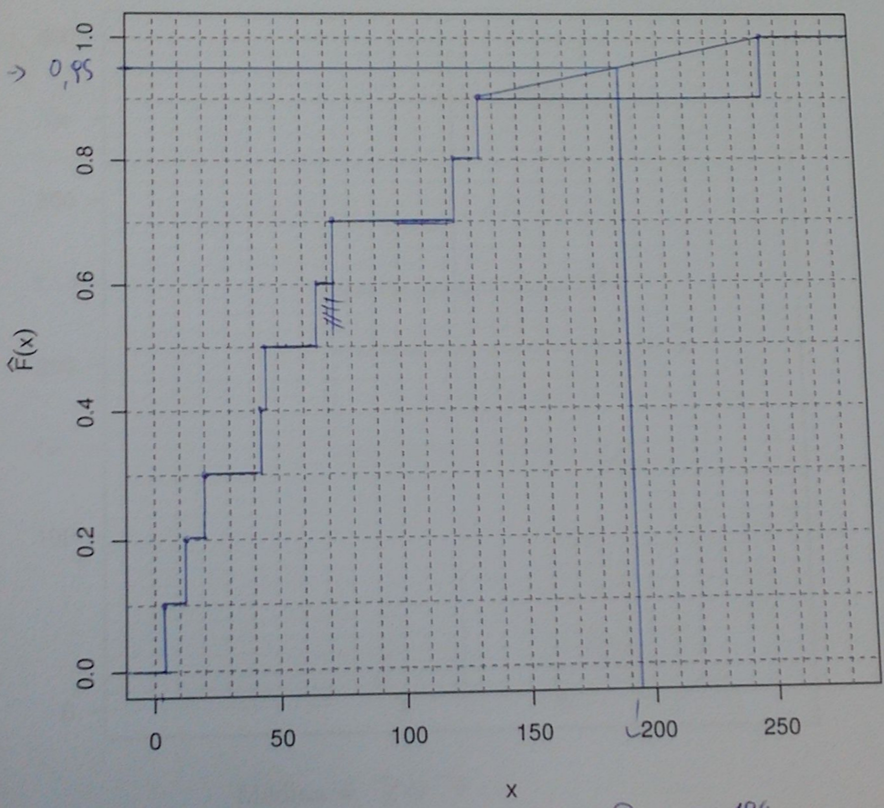
[2] Zeichnen Sie in die unten stehende Grafik die empirische Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie grafisch das 95%–Quantil vom Typ 4. $\rightarrow \sim 194$

[1] Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert. $\rightarrow 77{,}3$

[1] Bestimmen Sie die Stichprobenvarianz und -streuung. $5870{,}2\dot{3}$ / $76{,}617$

p-Quantil → 0,95



$p_{0,95} \sim 194$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10} \cdot (4 + 12 + 20 + \dots + 134 + 256) = \frac{1}{10} \cdot 773 = 77{,}3$$

$$Var(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{1}{9} \cdot \left\{ (4 - 77{,}3)^2 + (12 - 77{,}3)^2 + \dots + (256 - 77{,}3)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 52\,832{,}1 = 5870{,}2\dot{3}$$

$$s_n = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{5870{,}2\dot{3}} = 76{,}617$$

Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 11$:

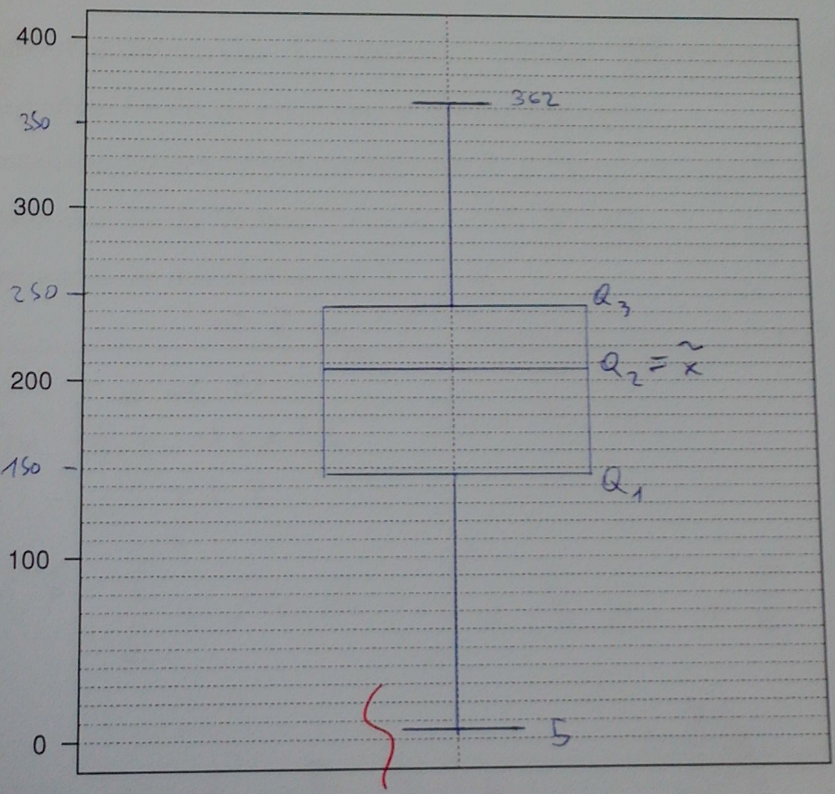
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_{(i)}$	5	120	143	150	202	207	224	229	252	275	362

[1] Bestimmen Sie den Median.

[1] Bestimmen Sie die Hinges.

[1] Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

[2] Zeichen Sie in die unten stehende Grafik den Boxplot der Daten.



Median = 207

lower Hinge = $\frac{143 + 150}{2} = 146{,}5$

upper Hinge = $\frac{229 + 252}{2} = 240{,}5$

lower Fence = $146{,}5 - \underbrace{1{,}5(240{,}5 - 146{,}5)}_{= h = 141} = 5{,}5$

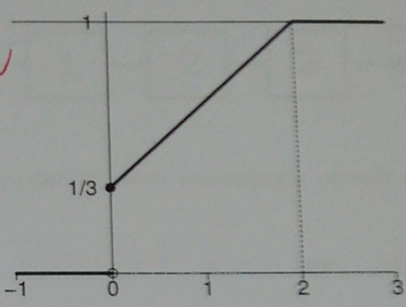
upper Fence =

$240{,}5 + h = 240{,}5 + 141 = 381{,}5$

$y = \frac{1}{3} + \frac{x}{3} \quad y = \frac{1+x}{3} \quad 3y-1=x$

Die Verteilungsfunktion einer sG X ist gegeben wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1+x}{3} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



ident, den gelinst :-)

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 2x$

$\frac{2}{3} = 2x$

$0 = \frac{1}{3} - x$

[1] Handelt es sich um eine ☐ diskrete ☐ stetige ☒ gemischte Verteilung?

[1] Bestimmen Sie die genaue Form der Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. $= \frac{2}{3}$

[1] Bestimmen Sie die Varianz/Streuung von X. $\frac{4}{9}$ / $\frac{2}{3}$

[1] Bestimmen Sie den Median von X. $0{,}5$

$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \quad 3y - 1 = x$

$F^{-1}(x) = 3x - 1$

$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot x$

$\rightarrow \tilde{x} = x_{0,5} = F^{-1}(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 - 1 = 0{,}5$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{6}x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{6} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{2}{6}\, dx = \frac{2}{6} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{2}{3} = \mathbb{E}(X)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

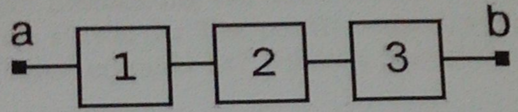
$$= \underbrace{\int_0^2 x^2 \cdot \frac{2}{6}\, dx}_{} - \frac{4}{9}$$

$$s_n = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{6} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{9}$$

~~$s_n = \sqrt{\mathrm{Var}(x)}$~~

Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig verteilt mit den Dichten:

$$f_1(x) = e^{-x},\ x > 0, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2},\ x > 0 \quad \text{bzw.} \quad f_3(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3},\ x > 0$$

Wenn X die Lebensdauer des Systems ist, bestimmen Sie von X:

[2] die Verteilungsfunktion

[1] die Dichte (Verteilung?)

[1] den Erwartungswert und die Streuung

[1] $P(X > 2 \,|\, X > 1)$

$F(x) =$

2

[2] Angenommen, ein Test reagiert zu 98% positiv, sollte eine bestimmte Krankheit vorliegen, zeigt aber auch zu 6% ein falsch-positives Resultat. Wenn man davon ausgeht, dass 4% der Bevölkerung von dieser Krankheit betroffen ist, und bei einer zufällig ausgewählten Person der Test positiv reagiert, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person erkrankt ist? (Hinweis: Bayes'sche Formel)

$T+ = 0{,}98$

$T- = 0{,}06$

$D+ = 0{,}04$

$D- = 0{,}96$

$$P(D+|T+) = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}04}{0{,}98 \cdot 0{,}04 + 0{,}06 \cdot 0{,}96}$$

$$= 0{,}40495$$

✓ $= 40{,}5\%$ Wahrscheinlichkeit dass Person tatsächlich krank ist

2 2 [2] Die sG X habe die Dichte $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$ ($\equiv \mathsf{U}(0,1)$). Bestimmen Sie mittels Transformationssatz die Dichte von $Y = -2\ln(X)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-y/2} & 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y = -2\ln(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y) = e^{-y/2} \Rightarrow \quad J = \frac{dx}{dy} = \frac{d(e^{-y/2})}{dy} = -\frac{1}{2} e^{-y/2}$$

✓ $$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(e^{-y/2}) \cdot |J| = \frac{1}{2} \cdot e^{-y/2} & 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1/2 1 [2] X_1, X_2 und X_3 seien unabhängig nach $\mathsf{N}(1,2)$ verteilte sGn. Wie ist $X_1 - 2X_2 + 3X_3$ verteilt? (Hinweis: Additionstheorem für Normalverteilungen)

$\sim N(2, 16)$

$X_i \sim N(1,2)$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 \sim N\left(1 \cdot 1 + (-2 \cdot 1) + 3 \cdot 1 = 2 \,;\, 1 \cdot 2 + (-2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 16\right)$$

! 2

$1 \quad -2 \quad 3$

$N(2 \,;\, \cancel{16})$

Ein Würfel wird 1000 Mal geworfen und X sei die Zahl der geworfenen „Sechser".

$X \sim B(1000, \frac{1}{6})$ $166,\dot{6}$ $138,\dot{8}$

3

[1] Wie ist X exakt verteilt? Mittelwert? Varianz?

[2] Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit $P(150 \leq X \leq 200)$. (Hinweis: ZGVS; rechnen Sie mit Stetigkeitskorrektur.)

92,6 %

Verteilung: $X \sim B(1000, \frac{1}{6})$

$$\mathbb{E}(X) \overset{n \cdot p =}{=} 1000/6 = 166,\dot{6}$$

$$VAR(X) = n \cdot p(1-p) = \frac{1000}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6}) = 138,\dot{8}$$

$$P(\overset{a}{150} \leq X \leq \overset{b}{200}) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{Var(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{Var(X)}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{200,5 - 166,\dot{6}}{\sqrt{138,\dot{8}}}\right) - \Phi\left(\frac{149,5 - 166,\dot{6}}{\sqrt{138,\dot{8}}}\right)$$

✓

$$\approx \Phi(2,8708) - \Phi(\underbrace{-1,4566}_{\approx 1,46})$$

$$\approx 0,9979 - (1 - 0,9279) = 0,9258 = 92,6\%$$

2

[2] Bei einer Überprüfung von 250 zufällig ausgewählten Komponenten waren 15 defekt. Bestimmen Sie ein (approximatives) 99%–Konfidenzintervall für den Defektanteil der Produktion.

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$

$$\hat{p} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{250} \cdot 15 = 0,06$$

$$KI: \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= 0,06 \pm z_{0,995} \sqrt{\frac{0,06 \cdot (0,94)}{250}}$$

✓

$$= 0,06 \pm 2,5758 \cdot 0,0150$$

$$\Rightarrow KI = (0,0213 ; 0,0987)$$

$= KI$ (~~[illegible]~~

Für die mittlere Lebensdauer einer Stichprobe aus $m = 9$ Glühlampen einer bestimmten Produktion ergab sich $\overline{x} = 1309$ [h] mit einer Standardabweichung von $s_X = 420$ [h]. Für eine zweite Stichprobe aus $n = 16$ Glühlampen aus einer anderen Produktion ergab sich eine mittlere Lebensdauer von $\overline{y} = 1205$ [h] mit einer Standardabweichung von $s_Y = 390$ [h]. Wenn es sich um (unabhängige) Stichproben von $X \sim \mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ bzw. $Y \sim \mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ handelt:

[2] Testen Sie mit $\alpha = 5\%$ die Gleichheit der beiden Varianzen, d.h., testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

1 [1] Unter der Annahme $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, bestimmen Sie den gepoolten Varianzschätzer s_p^2. $\sim 160\,552{,}2$

[2] Unter der Annahme $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, testen Sie mit $\alpha = 5\%$ die Gleichheit der beiden Mittelwerte, d.h., testen Sie:

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

$$s_p^2 = \frac{(m-1)\,s_X^2 + (n-1)\,s_Y^2}{m+n-2} = \frac{(9-1)\,420^2 + (16-1)\,390^2}{9+16-2}$$

$$= \frac{8 \cdot 420^2 + 15 \cdot 390^2}{23}$$

$$s_p^2 = 160\,552{,}2$$ ✓

[3] Für eine diskrete sG X mit dem Merkmalraum $M_X = \{1, 2, 3\}$ gilt $(0 < \theta < 1/2)$:

$$P(X = 1) = P(X = 3) = \theta, \quad P(X = 2) = 1 - 2\theta$$

Eine Stichprobe des Umfangs $n = 100$ ergibt:

x	1	2	3
Häufigkeit	14	74	12

Bestimmen Sie den ML–Schätzwert von θ.

2

[2] Stammen die folgenden 100 Beobachtungen aus einer stetigen uniformen Verteilung auf dem Intervall $(0, 10)$? (Testen Sie mit $\alpha = 5\%$.)

	1	2	3	4	5
Klasse	(0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,8]	(8,10)
Häufigkeit	22	28	21	18	11

K	x_i	p_{i0}	$n \cdot p_{i0}$	$(x_i - n.p_{i0})^2 / n \cdot p_{i0}$
1	22	1/5	20	$4/20 = 0{,}2$
2	28	1/5	20	$64/20 = 3{,}2$
3	21	1/5	20	$1/20 = 0{,}05$
4	18	1/5	20	$4/20 = 0{,}2$
5	11	1/5	20	$81/20 = 4{,}05$
	100	1	100	$Q_4 = 7{,}7$

$Q_4 > \chi^2_{\cancel{\ }4;0,95}$

$7{,}7 > 9{,}488$ X

H_0 wird nicht verworfen ✓