

## Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

### Blatt 2

7. Man untersuche die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $(c_n)_{n \geq 1}$  mit  $b_n \leq a_n \leq c_n$  finde.

$$(a) a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \quad (b) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

8. Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$$

und berechne damit – wenn möglich – die Summe.

(Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenzen passender Ausdrücke dar.)

9. Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a) \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \dots \quad (b) \frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \dots \quad (c) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} - \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} \pm \dots$$

10. Man berechne mit Hilfe der komplexen Zahlen und unter Verwendung der Moivre'schen Formel  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$  den Wert der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}.$$

11. Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  sei

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}, \quad d_n = \frac{1}{n+2}.$$

Weiter sei

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n.$$

- (a) Berechnen Sie die Partialsummen und den Grenzwert von B.  
 (b) Warum ist  $B = C - D$  falsch, obwohl  $b_n = c_n - d_n$  gilt?  
 (c) Zeigen Sie, dass  $a_n \leq 6b_n$  für  $n \geq 1$ , und schließen Sie daraus auf die Konvergenz der Reihe A?

12. Was ist an nachstehender Rechnung falsch?

$$\begin{array}{r}
 \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \pm \dots \\
 \frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} \pm \dots \\
 \hline
 \frac{3}{2} \ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \pm \dots = \ln 2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} \ln 2 \\ \frac{1}{2} \ln 2 \\ \frac{3}{2} \ln 2 \end{array}} \right\} +$$