

Runde 3, Beispiel 17

LVA 118.181, Übungsrunde 3, 03.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

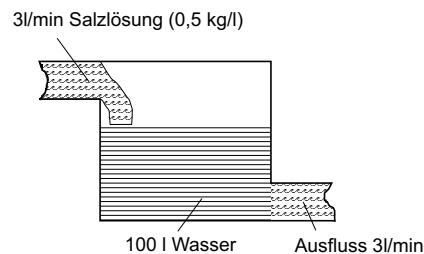
1 Angabe

Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0,5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

- (a) Wieviel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?
- (b) Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

2 Lösung des Beispiels

Eine Skizze ist hilfreich bei der Formulierung eines Modells:



Nach dem Gleichgewichtsgesetz formulieren wir:

$$y(t)' = \text{Zuflussrate} - \text{Abflussrate}(t),$$

wobei $y(t)$ von der Zeit (in Minuten) abhängig ist und die Konzentration von Salz zu einem Zeitpunkt t bezeichnet.

Wenn 0.5 kg Salz pro Liter enthalten sind und die Zuflussrate 3 Liter pro Minute beträgt, so sind nach einer Minute 1.5 kg Salz enthalten.

Der Abfluss ist $\frac{3\text{l}}{100\text{l}} = 0.03 = 3\%$.

Daraus formulieren wir:

$$y' = 1.5 - 0.03 \cdot y$$

$$y' = 0.03 \cdot (y - 50)$$

Nun lösen wir die (trennbare) Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - 50} &= \frac{dt}{-0.03} & | \int \\ \ln |y - 50| &= -0.03 \cdot t + \tilde{C} \\ y &= c \cdot e^{-0.03 \cdot t} + 50 \end{aligned}$$

Da zu Beginn ($t = 0$) noch kein Salz im Tank ist, gilt das AWP $y(0) = 0$ und wir erhalten $c = -50$ und die spezielle Lösung ist somit:

$$y = -50 \cdot e^{-0.03 \cdot t} + 50$$

Wenn nun gefragt ist, zu welchem Zeitpunkt 25 kg Salz im Tank enthalten sind, gilt:

$$25 = -50 \cdot e^{-0.03 \cdot t} + 50$$

$$-25 = -50 \cdot e^{-0.03 \cdot t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0.03 \cdot t}$$

$$\ln \frac{1}{2} = -0.03 \cdot t$$

$$t = 23.11$$

Nach etwa 23 Minuten und 7 Sekunden enthält der Tank 25 kg Salz.