

6 Grundlagen der Regelungstechnik

6.1 Einführung

Die Grundlage ist das Fundament der Basis.

Le Corbusier

Ein wesentliches Element automatisierter Systeme ist ein geeignetes *regelungstechnisches Konzept* als Bestandteil des gesamten Systementwurfs. Ob es nun um die Positionierung eines Roboter-Greifarmes, eine Antischlupfregelung beim Kfz-Vierrad-Antrieb oder eine Geschwindigkeitsbeeinflussung von Eisenbahnwaggons an einem Ablaufberg eines Rangierbahnhofes geht, überall finden sich in technischen Systemen regelungstechnische Aufgabenstellungen.

Im folgenden wird eine Einführung in die klassische Regelungstechnik gegeben, wobei allerdings nur *einschleifige Regelkreise* betrachtet werden. Auf die Behandlung vermaschter und adaptiver Regelkreise wird bewußt wegen der damit verbundenen Komplexität verzichtet. So soll eine kurze Einführung in die Grundlagen der Regelungstechnik gegeben werden, die sich der Mittel der Systemtheorie bedient.

Nach einer Einführung der wesentlichen Charakteristika von *Regler* und *Regelstrecken* sowie der Behandlung von Stabilitätsfragen werden digitale Regler vorgestellt.

Als ein völlig neuer Ansatz zur Lösung regelungstechnischer Aufgabenstellungen wird die *Fuzzy-Logik* am Ende dieses Abschnittes erläutert.

6.1.1 Regelungstechnische Begriffe

Die Regelung ist ein Vorgang, bei dem der vorgegebene Wert einer Größe fortlaufend durch Eingriff auf Grund von Messungen dieser Größe hergestellt und aufrechterhalten wird.

DIN 19226

Bei der Beschreibung technischer Systeme treten häufig Begriffe wie *Steuerung* und *Regelung* auf. Diese Begriffe sind wie folgt zu unterscheiden.

Eine *Steuerung* ist die definierte Einflußnahme auf einen technischen Prozeß ohne Kontrolle des Erfolges (eine Rückmeldung einer zu beeinflussenden Zustandsgröße des technischen Prozesses ist nicht vorgesehen).

Eine *Regelung* liegt vor, wenn eine bestimmte Zustandsgröße eines technischen Prozesses dadurch innerhalb vorgegebener Grenzen gehalten wird, daß der Wert dieser Zustandsgröße ständig so kontrolliert wird, daß bei auftretenden Abweichungen dieser wieder auf den gewünschten Sollwert gebracht wird. Dabei entsteht ein als Rückwirkung bezeichneter Wirkungsablauf, der sich in einem geschlossenen Kreis – dem *Regelkreis* – vollzieht (DIN 19226).

Eine *Regelung* ist überall dort erforderlich, wo eine Zustandsgröße eines technischen Prozesses durch eine Steuerung nicht auf dem gewünschten Sollwert gehalten werden kann, weil sie unter dem Einfluß von Störungen (*Störgrößen*) steht. Abbildung 6.1 zeigt den Informationsfluß für eine *Steuerung* und eine *Regelung*.

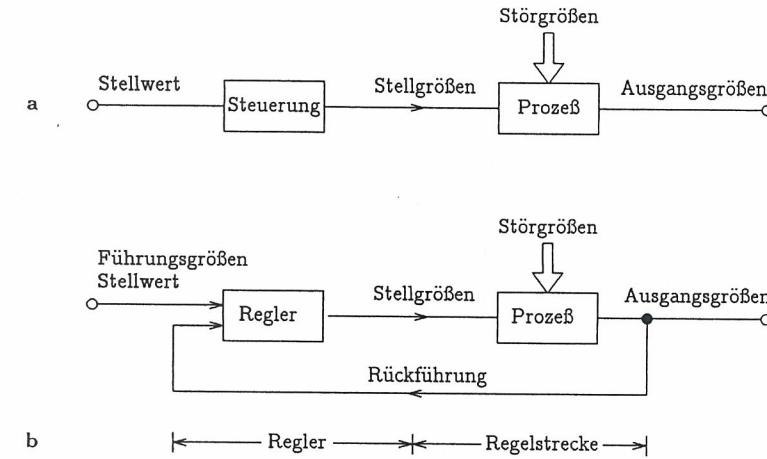


Abb. 6.1. Steuerung (a), Regelung (b)

Man erkennt im Fall der Steuerung, daß eingangsseitige Stellwerte am Ausgang der Steuerung zugeordnete Stellgrößen für den technischen Prozeß erzeugen. Diese greifen in das Prozeßgeschehen ein, das Einwirkungen durch Störgrößen unterliegt. Der technische Prozeß reagiert auf die Stellgröße und die einwirkenden Störgrößen mit bestimmten Werten für Zustandsgrößen des Prozesses. Ob die Werte dieser Zustandsgrößen dem eingangsseitig eingestellten Stellwert entsprechen, kann nicht festgestellt werden (Abb. 6.1a).

Im Fall einer Regelung werden eingangsseitig gewisse *Sollwerte* als *Führungsgrößen* vorgegeben. Die aktuellen Zustandsgrößen des technischen Prozesses werden durch eine *Rückführung* (engl.: *feedback*) ebenso eingangsseitig zur Verfügung gestellt. Aus der Differenz zwischen *Istwert* und *Sollwert* einer *Regelgröße* erzeugt der *Regler* nach einem festgelegten Algorithmus eine zugeordnete Stellgröße, die im technischen Prozeß auch unter dem Einfluß wirksamer Störgrößen den Wert einer Regelgröße in vorgegebenen Grenzen hält (Abb. 6.1b).

Eine *Regelung* ist damit gegenüber einer *Steuerung* durch die *Rückführung* gekennzeichnet. Dadurch entsteht ein geschlossener Wirkungskreis, der *Regelkreis*. Man erkennt in Abb. 6.1b den *Regler* und den *technischen Prozeß* als Blockschaltbild; dabei wird der technische Prozeß aus regelungstechnischer Sicht auch als *Regelstrecke* bezeichnet. Wird eine *Ausgangsgröße* (*Regelgröße*) ohne irgendeine Umformung direkt auf den Eingang des Reglers zurückgeführt, liegt eine *Einheitsrückführung* vor.

Abbildung 6.2 zeigt einen einschleifigen Regelkreis (er besteht nur aus einer Schleife!) mit den Benennungen der physikalischen Größen.

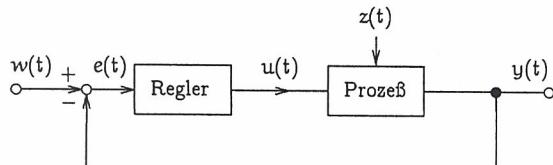


Abb. 6.2. Benennung der physikalischen Größen im Regelkreis

Folgende Benennungen werden festgelegt:

- $w(t) = \text{Sollwert}$ (*Führungsgröße*)
- $y(t) = \text{Istwert}$ (*Regelgröße*)
- $u(t) = \text{Stellgröße}$
- $e(t) = w(t) - y(t) = \text{Regelabweichung}$
- $z(t) = \text{Störgröße}$

Nach der Strategie des regelungstechnischen Verfahrens unterscheidet man:

Festwertregelung. Der Wert der Führungsgröße (Sollwert) bleibt während des Regelvorgangs fest eingestellt, d.h., $w(t) = w_0 = \text{const}$. Der Wert der Regelgröße $y(t)$ (Istwert) soll möglichst nah am Sollwert gehalten werden, so daß gilt: $y(t) \approx w_0$ (z.B. Spannungsregelung in einem Festspannungsregler).

Folgeregelung. Der Wert der Regelgröße $y(t)$ folgt auch bei vorhandenen Störungen dem sich ändernden Sollwert $w(t)$, so daß etwa gilt: $y(t) \approx w(t)$ (z.B. Nachführen der Position einer Satelliten-Antenne).

Normen zur Steuerungs- und Regelungstechnik finden sich in DIN 19226.

6.1.2 Blockschaltbilddarstellung

*Was im Leben uns verdrießt,
man im Bilde gern genießt.*

Johann Wolfgang Goethe, „Gedichte: Parabolisch“

Nach Abb. 6.3 soll in einem physikalisch-technischen System (*Block*) die Eingangsgröße $x_e(t)$ mit der Ausgangsgröße $x_a(t)$ kausal verknüpft werden (Gültigkeit des *Kausalitätsprinzips*). Weiter soll *Rückwirkungsfreiheit* vom Ausgang auf den Eingang eines Blockes angenommen werden (Abb. 6.3).

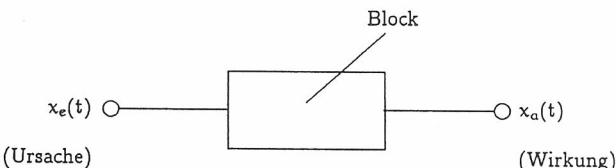
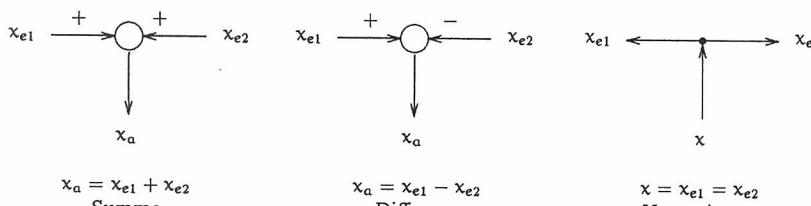


Abb. 6.3. Blockschaltbild

6.1.2.1 Verknüpfung von Signalen

Für die Verknüpfung von Signalen werden die folgenden Möglichkeiten angenommen: *Addition*, *Subtraktion* und *Verzweigung* (Abb. 6.4).



6.1.2.2 Verknüpfung von Blöcken

Einem Block nach Abb. 6.3 soll bezüglich der Abbildung der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen ein sog. *Operator OP* zugeordnet werden. Blöcke können *seriell* (Kettenanordnung), *parallel* oder *mit einer Rückführung* angeordnet werden (Abb. 6.5). Mit diesen drei Verknüpfungsarten für Blöcke können alle regelungstechnischen Systemstrukturen dargestellt werden.

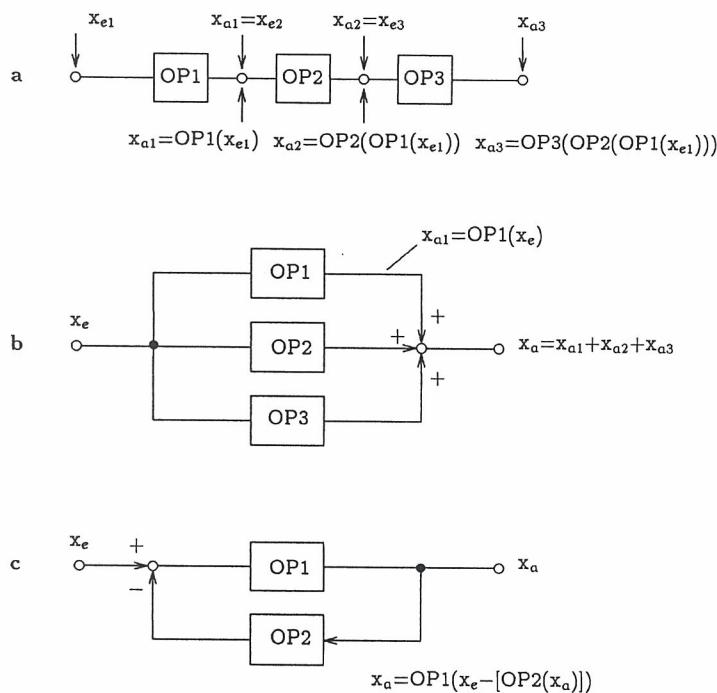


Abb. 6.5. Ketten- (a), Parallel- (b) und Zusammenschaltung mit Rückführung (c)

6.1.3 Eigenschaften der Übertragungsfunktion

*Mögen wir noch so viele Eigenschaften haben,
die Welt achtet vor allem auf unsere schlechten.*

Moliere

Ein Übertragungsglied als Block nach Abb. 6.3 bewirkt bei Änderung der Eingangsgröße x_e eine Veränderung der Ausgangsgröße x_a , die bei realen technischen Systemen in der Regel zeitlich verzögert wird. Außerdem wird das Ausgangssignal amplituden- und phasenmäßig verändert. Für die weitere Betrachtung soll einschränkend vorausgesetzt werden:

Zeitunabhängigkeit. Das Übertragungsglied bewirkt allgemein die Abbildung $f(t) \rightarrow f^*(t)$, wobei ebenso $f(t-t_0) \rightarrow f^*(t-t_0)$ gilt.

Linearität. Linearität liegt vor, wenn gilt: $a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \rightarrow a \cdot f_1^*(t) + b \cdot f_2^*(t)$ (f^* sei die Abbildung von f).

Unter diesen Voraussetzungen kann die Abbildung der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen durch eine Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten als sog. *dynamisches Modell* beschrieben werden.

6.1.4 Testfunktionen

*Die Jugend will lieber angeregt
als unterrichtet sein.*

Johann Wolfgang Goethe, „Dichtung und Wahrheit“

Um das Übertragungsverhalten von Übertragungsgliedern nach Abschn. 6.1.3 zu beschreiben, können Testfunktionen eingesetzt werden. Diese Testfunktionen sind Anregungsfunktionen für ein zu untersuchendes Übertragungsglied. Die wichtigsten Testfunktionen sind die Sprung- und die Diracfunktion.

6.1.4.1 Sprungfunktion

Die Sprungfunktion wurde erstmals von K. Küpfmüller eingeführt. Sie beschreibt Schalthandlungen und wird daher auch als die sog. *Schaltfunktion* bezeichnet. Es sei

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty \leq t < 0, \\ A & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

mit der Stufenhöhe A . Die Sprungfunktion kann normiert werden. Dadurch erhält man die *Einheitssprungfunktion* $\sigma(t)$. Es gilt

$$\sigma(t) = \frac{s(t)}{A} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty \leq t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

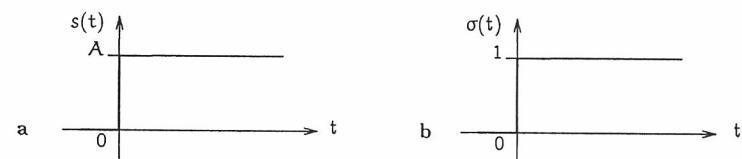


Abb. 6.6. Sprungfunktion (a), Einheitssprungfunktion (b)

Die zeitlich verschobene Sprungfunktion. Abbildung 6.7 zeigt zeitlich verschobene Sprungfunktionen mit den zugehörigen Zeitfunktionen.

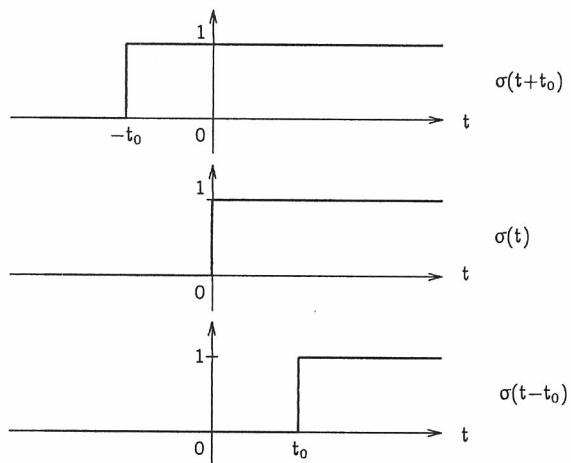


Abb. 6.7. Zeitlich verschobene Sprungfunktionen

Rechtecksignal aus zwei zeitlich verschobenen Sprungfunktionen. Eine additive Überlagerung zweier verschobener Sprungfunktionen nach Abb. 6.8 ergibt eine Rechteckfunktion.

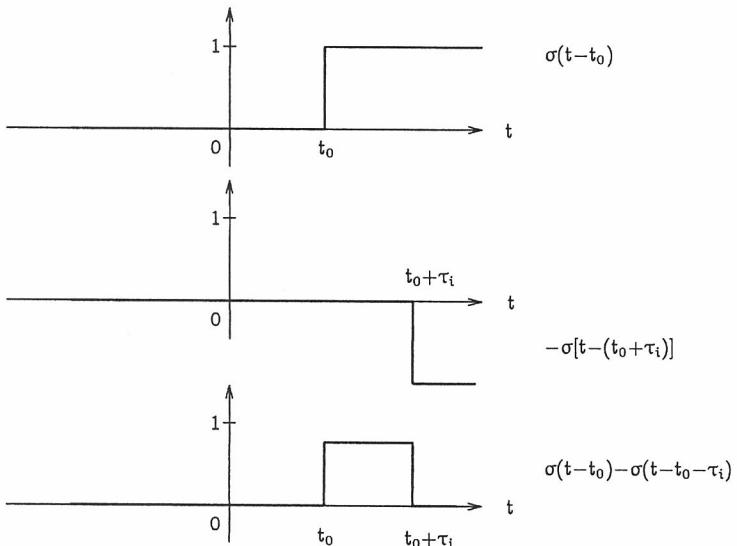


Abb. 6.8. Rechtecksignal aus zwei verschobenen Einheitssprungfunktionen

6.1.4.2 Stoßfunktion

Die Stoßfunktion $d(t)$ kann man sich dadurch entstanden vorstellen, daß bei einem Rechteckimpuls nach Abb. 6.9a die Zeitspanne $τ_i$ bei konstanter Amplituden-Zeit-Fläche ($U_0 τ_i$) gegen null geht. Dabei geht die Amplitude für $τ_i \rightarrow 0$ gegen unendlich (Abb. 6.9b).

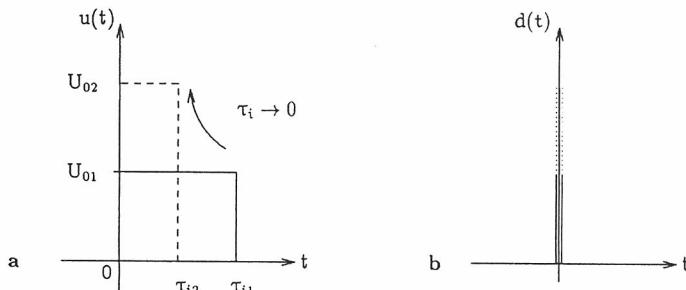


Abb. 6.9: Rechteckfunktion mit konstanter Amplituden-Zeit-Fläche (a), Übergang zur Stoßfunktion $d(t)$ (b)

Es sei

$$d(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0, \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

unter der Bedingung, daß die Amplituden-Zeit-Fläche konstant bleibt:

$$\int_{-\infty}^t d(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \text{const} & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Die Normierung führt auf die *Einheitsstoßfunktion* oder Diracfunktion

$$\delta(t) = \frac{d(t)}{U_0 \tau_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0, \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Entsprechend Abb. 6.10a soll die Diracfunktion $\delta(t)$ symbolisch dargestellt werden. Abbildung 6.10b zeigt eine zeitlich verschobene Diracfunktion $\delta(t - t_0)$.

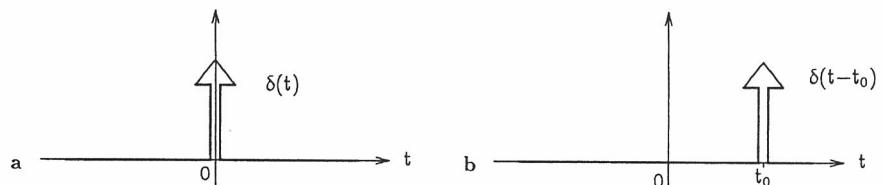


Abb. 6.10. Diracfunktion (symbolisch) (a), zeitlich verschobene Diracfunktion (b)

6.1.4.3 Rampenfunktion

Eine dritte wichtige Testfunktion ist die *Rampenfunktion* $r(t)$ (Abb. 6.11).

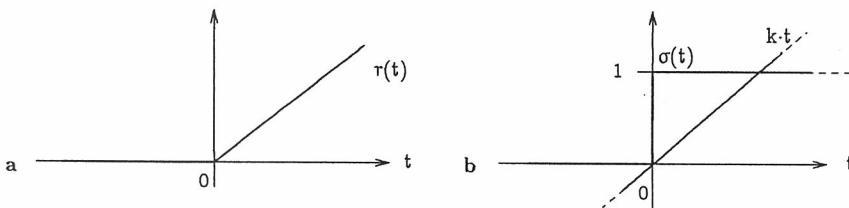


Abb. 6.11: Rampenfunktion $r(t)$ (a), multiplikative Verknüpfung der Geradenfunktion $k \cdot t$ mit der Einheitssprungfunktion zur Rampenfunktion $r(t)$ (b)

Die *Rampenfunktion* kann damit beschrieben werden als

$$r(t) = k \cdot t \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ k \cdot t & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Sie eignet sich als Testfunktion sowohl für Regler als auch für Regelstrecken und kann weiter dazu dienen, eine lineare Führungsgrößenänderung zu beschreiben. Verschiebungen längs der Zeitachse können genauso wie bei den bereits beschriebenen Testfunktionen mathematisch beschrieben werden. Bei technischen Systemen ist meist für bestimmte Größen wie z.B. die Regelabweichung, die Stellgröße oder die Regelgröße nur ein bestimmter Wertebereich zugelassen (der sog. *Aussteuerbereich*). Dieser Aussteuerbereich ist jeweils bei einer systemtheoretischen Beschreibung mit der Rampenfunktion zu berücksichtigen.

6.1.5 Antwortfunktionen

*Wenn einer dich in Hast fragt,
dann antworte ihm langsam.*

Italienisches Sprichwort

Entsprechend den in Abschn. 6.1.4 eingeführten Testfunktionen zeigen Übertragungsglieder ausgangsseitig bei eingangsseitiger Anregung mit diesen Testfunktionen zugehörige Antwortfunktionen: die *Sprung-*, die *Impuls-* und die *Anstiegsantwortfunktion*.

6.1.5.1 Sprungantwortfunktion

Die Antwortfunktion auf eine Sprungfunktion heißt *Sprungantwortfunktion* $s_a(t)$ bzw. normiert *Einheitssprungantwortfunktion* $\sigma_a(t)$. Die Zusammenhänge zeigt Abb. 6.12.

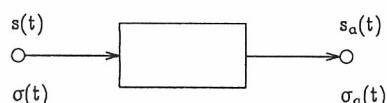


Abb. 6.12. Sprungantwortfunktion, Einheitssprungantwortfunktion

Da eine Sprungfunktion als Rechteckssprung technisch sehr viel einfacher zu realisieren ist (wenn auch nur mit endlicher Flankensteilheit) als eine Stoßfunktion bzw. ein Diracstoß, verwendet man überwiegend die Sprungfunktion $s(t)$ als Testfunktion. Die Sprungantwortfunktion $s_a(t)$ macht dann gewisse Aussagen über die Übertragungseigenschaften des Übertragungsgliedes. Ein Beispiel für eine typische Sprungantwortfunktion zeigt Abb. 6.13.

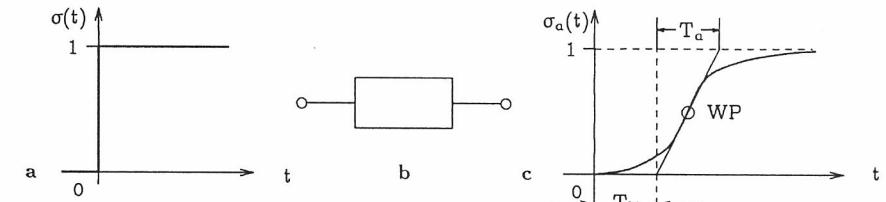


Abb. 6.13. Einheitssprungfunktion (a), Übertragungsgl. (b), Einheitssprungantwortfunktion (c)

Aus dem Verlauf der Einheitssprungantwortfunktion $\sigma_a(t)$ können einige typische Werte abgelesen werden, die zur Dimensionierung optimaler Reglerparameter herangezogen werden können. Hat man den zeitlichen Verlauf der Sprungantwort z.B. mit einem X-Y-Schreiber maßtechnisch erfaßt, so kann über $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_a(t) = 1$ die Ordinate skaliert werden. Im Wendepunkt WP kann die Wendetangente eingezeichnet werden. Nach Abb. 6.13 können daraus die Verzugszeit T_u und die Ausgleichszeit T_a empirisch ermittelt werden.

6.1.5.2 Impulsantwortfunktion

Die Diracfunktion $\delta(t)$ bzw. die Stoßfunktion $d(t)$ ist praktisch nicht zu realisieren, da die Energie, die zur Zeit des Auftretens der Stoßfunktion unendlich groß ist. Die Einheitsimpulsantwortfunktion $\delta_a(t)$ hat jedoch theoretische Bedeutung für die Charakterisierung der Übertragungseigenschaften des Übertragungsgliedes. Die Einheitsstoßantwortfunktion $\delta_a(t)$ wird auch *Gewichtsfunktion* $g(t)$ genannt. Abbildung 6.14 zeigt die Zusammenhänge zwischen der Stoßfunktion und der Impulsantwortfunktion.

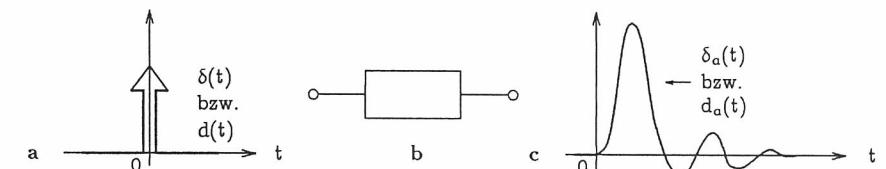


Abb. 6.14: Stoßfunktion $d(t)$ bzw. Einheitsstoßfunktion $\delta(t)$ (a), Übertragungsglied (b), Impulsantwortfunktion $d_a(t)$ bzw. Einheitsimpulsantwortfunktion $\delta_a(t)$ (c)

Es läßt sich zeigen, daß die Einheitsstoßfunktion $\delta(t)$ im Zeitbereich mit einem unendlich breiten Amplitudendichtespektrum im Frequenzbereich korrespondiert. Daher eignet sie sich besonders, um den Frequenzgang eines Übertragungsgliedes zu untersuchen.

6.1.5.3 Anstiegsantwortfunktion

Die Antwortfunktion auf eine Rampenfunktion $r(t)$ wird *Anstiegsantwortfunktion* $r_a(t)$ genannt. Eine Normierung der Anstiegsantwortfunktion ist nicht üblich.

6.2 Laplace-Transformation in der Regelungstechnik

*Das Edle an der Mathematik ist,
daß es keine Konzessionen gibt.
Karl Peltzer, „An den Rand geschrieben“*

Wenn z.B. mit Hilfe eines Reglers ein Schalter geschlossen wird, der die Regelstrecke mit einer Sprungfunktion anregt (z.B. Einschalten einer Heizung in der Regelstrecke), kann die Sprungantwortfunktion der Regelstrecke dadurch berechnet werden, daß man ein mathematisches Modell der Regelstrecke aufstellt. Dabei erhält man eine Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bei komplexen Zusammenhängen für den Regler wie die Regelstrecke erhält man Differentialgleichungen, deren Lösungen im Zeitbereich schwierig zu ermitteln sind. Man wendet daher eine *Integraltransformation* an, die nach dem Mathematiker *Laplace* als Laplace-Transformation bezeichnet wird. Das Lösungsverfahren besteht darin, daß man Funktionen mit Hilfe der Laplace-Transformation aus dem *Originalraum* (Zeitbereich) in den *Bildraum* (Frequenzbereich) transformiert. Die Laplace-Transformation ist dabei so beschaffen, daß sie Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen n-ter Ordnung im Bildbereich überführt. Die Problembehandlung wird dann im Bildbereich durchgeführt und eine Lösungsfunktion im Bildbereich ermittelt. Abschließend wird die Lösungsfunktion aus dem Bildbereich in den Originalbereich (hier Zeitbereich) mit Hilfe der *inversen Laplace-Transformation* zurücktransformiert. Abbildung 6.15 zeigt die Zusammenhänge zwischen Original- und Bildbereich. Dazu gehören die Transformationsgleichungen (6.7)–(6.9).

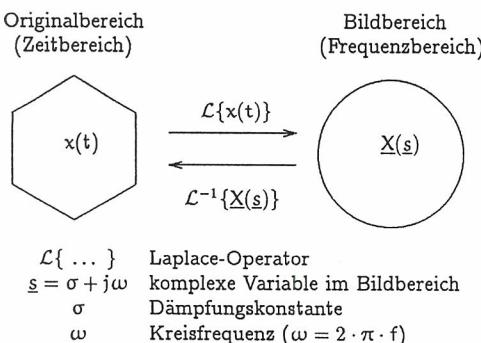


Abb. 6.15. Laplace-Transformation

$$\rightarrow: \mathcal{L}\{x(t)\} = \underline{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (6.7)$$

$$\leftarrow: \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \underline{X}(s) \cdot e^{st} ds \quad (6.8)$$

$$\text{Korrespondenz: } x(t) \circ \bullet \underline{X}(s) \quad (6.9)$$

Konvergenz. Durch geeignete Wahl von $\sigma > 0$ kann die Konvergenz des Laplaceintegrals erreicht werden.

Zur Schreibweise komplexer Funktionen. Es soll an dieser Stelle festgelegt werden, daß alle komplexen Funktionen, die sich im Bildbereich ergeben, durch Unterstrichung (z.B. \underline{X}) gekennzeichnet werden. Beziiglich der komplexen Variablen $\underline{s} = \sigma + j\omega$ im Bildbereich soll abweichend wegen deren häufigen Auftretens vereinbart werden, daß bei s die Unterstrichierung fortgelassen wird.

Einheit der Laplacetransformierten. Die Berechnung der Laplacetransformierten führt auf:

$$\underline{X}(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{eigene Einheit}} \cdot \underbrace{e^{-st}}_{\text{ohne Einheit}} \cdot \underbrace{dt}_{\text{Einheit } "s"} \quad (6.10)$$

Das bedeutet, daß bei der Laplacetransformierten zu der Einheit der zu transformierenden Funktion von $x(t)$ als Faktor die Einheit s der Sekunde hinzukommt. Hat $x(t)$ die Einheit einer Spannung (V), hat $\mathcal{L}\{x(t)\}$ die Einheit Vs (Spannungsstoß); hat $x(t)$ die Einheit eines Stromes (A), hat $\mathcal{L}\{x(t)\}$ die Einheit As (Ladung).

6.2.1 Verschiebungssatz und Differentiationssatz

*Verschieb nicht, was du heut' besorgen sollst, auf morgen.
Denn morgen findet sich was Neues zu besorgen.*

Friedrich Rückert, „Weisheit des Brahmanen“

6.2.1.1 Verschiebungssatz

Vielfach weisen Regelstrecken *Laufzeitverhalten* auf. Das bedeutet, daß eine Eingangsfunktion $x_e(t)$ um die Zeit t_0 als Laufzeit durch das Übertragungsglied verzögert als $x_a(t) = x_e(t - t_0)$ am Ausgang erscheint (Abb. 6.16).

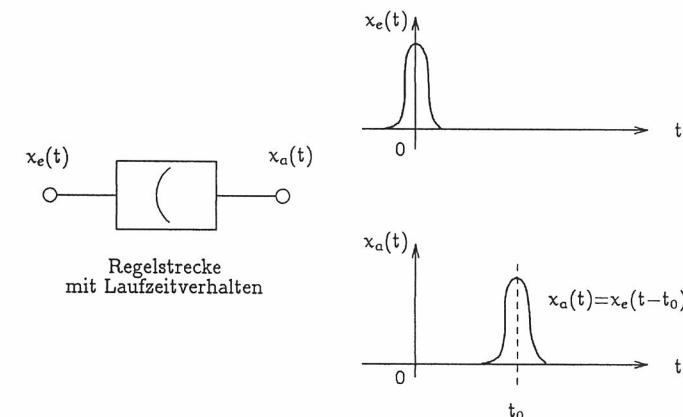


Abb. 6.16. Regelstrecke mit Laufzeitverhalten

Die Laplacetransformierte einer zeitlich verschobenen Funktion berechnet man allgemein als

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} \cdot dt \quad (6.11)$$

Als untere Grenze der Integration wurde statt des Wertes null hier t_0 eingesetzt unter der Voraussetzung, daß für $t < t_0$ die Funktion $f(t - t_0) = 0$ ist und damit keinen Beitrag zum Integrationsergebnis liefert. Dann ist

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-s[(t-t_0)+t_0]} \cdot dt \quad (6.12)$$

Die Substitution $u = t - t_0$ bzw. $du = dt$ führt auf

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} \cdot \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-su} \cdot du \quad (6.13)$$

Für das Integral $\int f(u) \cdot e^{-su} \cdot du$ kann unter Verschiebung des Wertevorrats von u auch $\int f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$ geschrieben werden. Damit ergibt sich dann der sog. *Verschiebungssatz*:

$$f(t - t_0) \longmapsto e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (6.14)$$

Das bedeutet, daß die Verschiebung einer Funktion $f(t)$ im Zeitbereich um t_0 mit der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{f(t)\}$ multipliziert mit dem Verschiebungsfaktor e^{-st_0} im Bildbereich korrespondiert.

6.2.1.2 Differentiation im Zeitbereich

Vielfach kann es günstig sein, zur Bestimmung der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{f(t)\}$ der Zeitfunktion $f(t)$ zunächst über das Differential $\frac{df(t)}{dt}$ zu gehen, um dann $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ zu bestimmen. Die allgemeine Berechnung von $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ führt nach Gl. (6.7) auf

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{t_0}^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \quad (6.15)$$

Die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existiert unter folgenden Bedingungen:

1. $f'(t)$ existiert für $t > 0$,
2. das Integral $\int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$ konvergiert,
3. der rechtsseitige Grenzwert der Funktion $f(t)$ existiert als $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(+0)$ (die sog. *rechtsseitige Annäherung*).

Dann liefert die partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} [e^{-st} \cdot f(t)]_{t_0}^{\infty} - (-s) \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \\ &= -\lim_{t_0 \rightarrow 0} f(t_0) + s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dann ist

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0) \quad (6.17)$$

bzw. allgemein gilt:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0) \quad (6.18)$$

6.2.2 Laplacetransformierte der Testfunktionen

*Was wir mathematisch festlegen,
ist nur zum kleinen Teil ein „objektives Faktum“;
zum größeren Teil eine Übersicht
über Möglichkeiten.
Werner Heisenberg, „Schritte über Grenzen“*

6.2.2.1 Einheitssprungfunktion

Die Laplacetransformierte der Sprungfunktion ergibt sich nach Gl. (6.7)

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (6.19)$$

Es gilt daher die Korrespondenz

$$\sigma(t) \longmapsto \frac{1}{s} \quad (6.20)$$

6.2.2.2 Einheitsstoßfunktion

Die Einheitsstoßfunktion $\delta(t)$ kann auch als 1. Ableitung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ nach der Zeit t aufgefaßt werden. Danach ist

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - t_0)}{t_0} \quad (6.21)$$

Nach Abschn. 6.2.2.1 kann dann direkt die Laplacetransformierte bestimmt werden, indem man die Sprungfunktionen einzeln transformiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t)\} &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-st_0} \right) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-st_0}}{t_0} = \frac{1}{s} \cdot \lim_{t_0 \rightarrow 0} s \cdot e^{-st_0} = 1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Damit gilt die Korrespondenz

$$\delta(t) \longmapsto 1 \quad (6.23)$$

Beispiel 6.1. Ein einschleifiger, geschlossener Regelkreis soll für $t > 0$ mit einer rampenförmigen Führungsgröße $w(t)$ nach Abb. 6.17 angeregt werden. Um den Verlauf der Regelgröße berechnen zu können, benötigt man zunächst die Transformierte der Anregungsfunktion.

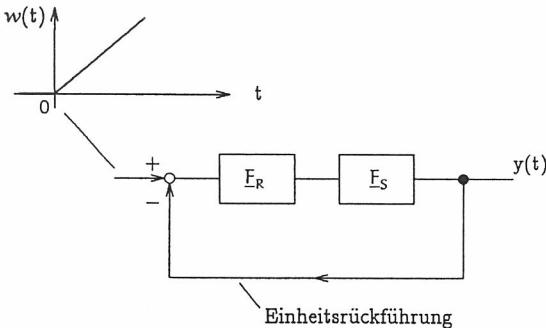
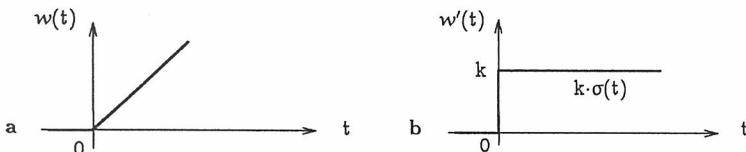


Abb. 6.17. Rampenfunktion als Führungsgroße

Die Laplacetransformierte kann auf verschiedenen Wegen ermittelt werden: Die direkte Bezeichnung nach Gl. (6.7) führt auf

$$\begin{aligned} w(t) \rightarrow \underline{W}(s) &= \mathcal{L}\{w(t)\} = \int_0^\infty k \cdot t \cdot e^{-st} \cdot dt = k \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-st} \cdot dt \\ &= k \cdot \left[\frac{e^{-st}}{(-s)} \cdot t \right]_0^\infty - k \cdot \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} \right) \cdot e^{-st} \cdot dt \\ &= \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{(-s)} \cdot [e^{-st}]_0^\infty = \frac{k}{s^2} \\ w(t) = k \cdot t \cdot \sigma(t) \rightarrow \underline{W}(s) &= \frac{k}{s^2} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Benutzt man den Zusammenhang für die Differentiation im Zeitbereich entsprechend Gl. (6.18), so führt die Differentiation der Rampenfunktion auf $w'(t) = k \cdot \sigma(t)$ (Abb. 6.18).

Abb. 6.18. Rampenfunktion $w(t)$ (a), 1. Ableitung $w'(t)$ (b)

Nach Gl. (6.18) kann direkt transformiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= k \cdot \sigma(t) \\ s \cdot \underline{W}(s) &= k \cdot \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (6.25)$$

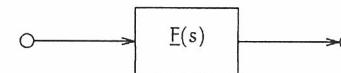
Es ergibt sich ebenso $\underline{W}(s) = \frac{k}{s^2}$. Schließlich kann die Laplacetransformierte noch mit Hilfe von Korrespondenztabellen ermittelt werden. Der Anhang A gibt eine Übersicht über die Zusammenhänge der Laplacetransformation sowie, tabellarisch zusammengefaßt, einige Laplace-transformierte für bestimmte Zeitfunktionen.

6.3 Übertragungsfunktion

Wie groß du für dich seist,
vorm Ganzen bist du nichtig.
Doch als des Ganzen Glied
bist du als kleinstes wichtig.

Friedrich Rückert, „Bausteine: Angereichte Perlen“

Sowohl der Regler als auch die Regelstrecke weisen ein bestimmtes Übertragungsverhalten auf. Dieses Übertragungsverhalten wird durch die *Übertragungsfunktion* beschrieben. Zunächst soll von einem allgemeinen Übertragungsglied mit der komplexen Übertragungsfunktion $\underline{F}(s)$ ausgegangen werden (Abb. 6.19).

Abb. 6.19. Übertragungsfunktion $\underline{F}(s)$

Für ein allgemeines Übertragungsglied gilt im Zeitbereich folgende Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die die Eingangs- mit der Ausgangsgröße verknüpft:

$$\begin{aligned} b_n \cdot x_a^{(n)}(t) + \dots + b_2 \cdot x_a''(t) + b_1 \cdot x_a'(t) + b_0 \cdot x_a(t) &= \\ a_m \cdot x_e^{(m)}(t) + \dots + a_2 \cdot x_e''(t) + a_1 \cdot x_e'(t) + a_0 \cdot x_e(t) & \end{aligned} \quad (6.26)$$

mit $n > m \geq 0$. Mit den Korrespondenzen $x_e(t) \rightarrow \underline{X}_e(s)$ und $x_a(t) \rightarrow \underline{X}_a(s)$ sowie dem Differentiationsatz nach Gl. (6.18) kann die Differentialgleichung (6.26) in den Bildbereich transformiert werden:

$$\begin{aligned} (b_n \cdot s^n + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0) \cdot \underline{X}_a(s) &= \\ (a_m \cdot s^m + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0) \cdot \underline{X}_e(s) & \end{aligned} \quad (6.27)$$

Gleichung (6.27) geht aus Gl. (6.26) unter der Annahme hervor, daß alle Terme $-f(+0) = 0$ sind, da zu Beginn der Betrachtung alle Energiespeicher als leer angenommen werden. Daraus erhält man die sog. *Übertragungsfunktion*

$$\underline{F}(s) = \frac{\underline{X}_a(s)}{\underline{X}_e(s)} = \frac{a_m \cdot s^m + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}{b_n \cdot s^n + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0} \quad (6.28)$$

als gebrochen rationale Funktion der komplexen Variablen s ($s = \sigma + j\omega$) im Bildbereich. Sie beschreibt das dynamische Verhalten eines Übertragungsgliedes. Für $\sigma = 0$ ($s = j\omega$) geht die Übertragungsfunktion $\underline{F}(s)$ in die *Frequenzgangfunktion* $\underline{F}(j\omega)$ über.

6.3.1 Serienschaltung

Abbildung 6.20 zeigt eine Serienschaltung mit den Übertragungsfunktionen $\underline{F}_1(s)$ und $\underline{F}_2(s)$. Es sind $\underline{X}_{a1}(s) = \underline{F}_1(s) \cdot \underline{X}_e(s) = \underline{X}_{e2}(s)$ und $\underline{X}_{a2}(s) = \underline{F}_2(s) \cdot \underline{X}_{e2}(s)$. Daraus erhält man für die

resultierende Übertragungsfunktion

$$F_{\text{ges}}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (6.29)$$

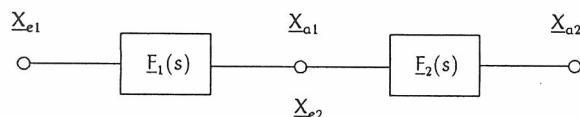


Abb. 6.20. Serienschaltung

6.3.2 Parallelschaltung

Für die Parallelschaltung zweier Übertragungsglieder gilt nach Abb. 6.21, $X_e = X_{e1} = X_{e2}$ und $X_a = X_{a1} + X_{a2}$. Für die Parallelschaltung erhält man

$$F_{\text{ges}}(s) = F_1(s) + F_2(s) \quad (6.30)$$

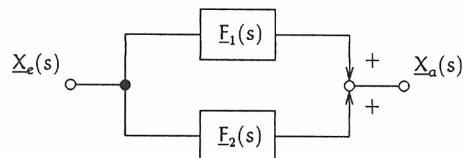


Abb. 6.21. Parallelschaltung

6.3.3 Rückführung

Für ein Übertragungssystem mit Rückführung nach Abb. 6.22 kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$1. \underline{X}_{e1}(s) = \underline{X}_e(s) - F_2(s) \cdot X_a(s)$$

$$2. \underline{X}_a(s) = F_1(s) \cdot \underline{X}_{e1}(s)$$

Daraus leitet sich die Gesamtübertragungsfunktion ab.

$$F_{\text{ges}}(s) = \frac{\underline{X}_a(s)}{\underline{X}_e(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s) \cdot F_2(s)} \quad (6.31)$$

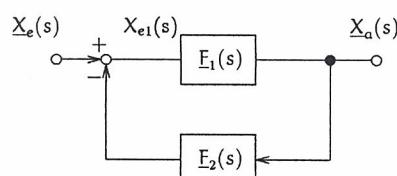


Abb. 6.22. System mit Rückführung

6.3.4 Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Für einen einschleifigen Regelkreis mit Einheitsrückführung nach Abb. 6.23 kann angesetzt werden:

$$[W(s) - Y(s)] \cdot F_R(s) \cdot F_S(s) = Y(s) \quad (6.32)$$

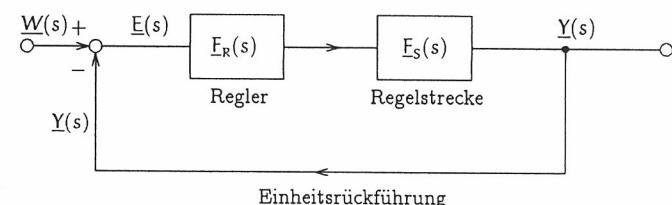


Abb. 6.23. Einschleifiger Regelkreis mit Einheitsrückführung

Darin sind $F_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers und $F_S(s)$ die der Regelstrecke. *Einheitsrückführung* liegt vor, wenn die Regelgröße ohne Signalwandlung direkt auf den Summationspunkt am Reglereingang zurückgeführt wird. Danach ist die Gesamtübertragungsfunktion des einschleifigen Regelkreises mit Einheitsrückführung

$$F_{\text{ges}}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_R(s) \cdot F_S(s)}{1 + F_R(s) \cdot F_S(s)} \quad (6.33)$$

An dieser Stelle kann die Übertragungsfunktion $F_0(s)$ des *aufgeschnittenen* Regelkreises als

$$F_0(s) = F_R(s) \cdot F_S(s) \quad (6.34)$$

eingeführt werden. Damit vereinfacht sich Gl. (6.33) zu

$$F_{\text{ges}}(s) = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} \quad (6.35)$$

6.4 Regelstrecken

Jemanden zur Strecke bringen (erledigen).

Redensart

Von den vielen möglichen Regelstrecken sollen nur drei besonders häufig auftretende Typen von Regelstrecken beschrieben werden. Es sind dies:

- die Strecke mit *Proportionalverhalten* (P-Glied)
- die Strecke mit *Verzögerung erster Ordnung* (PT_1 -Glied)
- die Strecke mit *Verzögerung zweiter Ordnung* (PT_2 -Glied)

6.4.1 P-Glied

Es wird beschrieben durch den Zusammenhang

$$y(t) = K_P \cdot u(t) \quad (6.36)$$

Die Transformation in den Bildbereich führt auf die Übertragungsfunktion der Strecke

$$E_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_P \quad (6.37)$$

6.4.2 PT₁-Glied

Das Verhalten einer Regelstrecke mit P-Verhalten und Verzögerung 1. Ordnung wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$T_0 \cdot y'(t) + y(t) = K_P \cdot u(t) \quad (6.38)$$

mit der Zeitkonstanten T_0 der Regelstrecke. Die Transformation in den Bildbereich führt auf

$$s \cdot T_0 \cdot Y(s) + Y(s) = K_P \cdot U(s) \quad (6.39)$$

bzw. die Übertragungsfunktion dieser Regelstrecke

$$E_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_P}{1 + s \cdot T_0} \quad (6.40)$$

6.4.3 PT₂-Glied

Eine Regelstrecke mit P-Verhalten und Verzögerung 2. Ordnung wird im Zeitbereich durch die Differentialgleichung

$$T_{01} \cdot y''(t) + T_{02} \cdot y'(t) + y(t) = K_P \cdot u(t) \quad (6.41)$$

beschrieben. Die Transformation in den Bildbereich führt auf

$$s^2 \cdot T_{01} \cdot Y(s) + s \cdot T_{02} \cdot Y(s) + Y(s) = K_P \cdot U(s) \quad (6.42)$$

und die Übertragungsfunktion

$$E_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_P}{1 + s \cdot T_{02} + s^2 \cdot T_{01}} \quad (6.43)$$

6.5 Reglertypen

*He, Leute!
Wieder so ne Type!
Legionär und Wachposten, „Obelix GmbH & Co.KG“*

Im folgenden werden einige Reglertypen vorgestellt, die häufig auftreten. Es sind dies der *Proportional-Regler* (P-Regler), der *Proportional-Regler mit einem Verzögerungsglied 1. Ordnung* (PT₁-Regler), der *Integral-Regler* (I-Regler), der *Differentialregler* (D-Regler, auch als Vorhaltregler zu bezeichnen) sowie einige Kombinationen dieser Reglertypen.

6.5.1 P-Regler

Die Funktion des Proportional-Reglers kann im Zeitbereich als

$$u(t) = K_P \cdot e(t) \quad (6.44)$$

beschrieben werden. Die Transformation in den Bildbereich führt auf die Übertragungsfunktion des Reglers

$$E_R(s) = K_P \quad (6.45)$$

Als Einheitssprungantwortfunktion ergibt sich

$$\sigma_a(t) = K_P \cdot \sigma(t) \quad (6.46)$$

6.5.2 PT₁-Regler

Unter einem PT₁-Regler versteht man einen Proportional-Regler, der jedoch zusätzlich eine zeitliche Verzögerung verursacht (in der Regel durch einen Energiespeicher), so daß das Zeitverhalten durch die Differentialgleichung

$$T_0 \cdot u'(t) + u(t) = K_P \cdot e(t) \quad (6.47)$$

beschrieben wird. Darin ist T_0 die Zeitkonstante des Verzögerungsgliedes. Der P-Regler mit einer Verzögerung 1. Ordnung hat dann nach Gl. (6.18) folgende Übertragungsfunktion:

$$E_R(s) = \frac{K_P}{1 + s \cdot T_0} \quad (6.48)$$

Für die Einheitssprungantwortfunktion erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) &= K_P \cdot (\sigma(t) - e^{-\frac{t}{T_0}}) \quad \text{für } t \leq 0 \\ \sigma_a(t) &= K_P \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_0}}) \quad \text{für } t > 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

6.5.3 I-Regler

Der Integral-Regler folgt der Zeitfunktion

$$u(t) = K_I \cdot \int e(t) \cdot dt \quad (6.50)$$

Die Transformation von Gl. (6.50) in den Bildbereich ergibt

$$E_R(s) = \frac{K_I}{s} \quad (6.51)$$

Die Einheitssprungantwortfunktion ergibt sich durch Rücktransformation von $\frac{K_I}{s^2}$ als

$$\sigma_a(t) = K_I \cdot t \cdot \sigma(t) \quad (6.52)$$

6.5.4 D-Regler

Der Differential-Regler erzeugt eine Stellgröße, die der ersten Ableitung der Regelabweichung nach der Zeit proportional ist. Die Zeitfunktion des D-Reglers lautet:

$$u(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (6.53)$$

Mit Hilfe von Gl. (6.18) ergibt sich die Übertragungsfunktion des D-Reglers

$$F_R(s) = K_D \cdot s \quad (6.54)$$

Als Rücktransformierte des Ausdrucks $\frac{1}{s} \cdot K_D \cdot s$ erhält man die Einheitssprungantwortfunktion. Für $s \neq 0$ ist $\mathcal{L}^{-1}\{K_D \cdot 1\} = K_D \cdot \delta(t)$. Damit gilt

$$\sigma_a(t) = K_D \cdot \delta(t) \quad (6.55)$$

Einen D-Regler bezeichnet man auch als *Vorhaltregler*. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß in praktischen Systemen D-Regler nie allein auftreten, sondern die D-Reglercharakteristik meist noch mit einem P-Verhalten oder einem PI-Verhalten verknüpft wird.

6.5.5 PI-Regler

Der Proportional-Integral-Regler verknüpft die Eigenschaften des P-Reglers mit denen eines I-Reglers. Für die Zeitfunktion gilt

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) \cdot dt \quad (6.56)$$

Bildet man insgesamt von Gl. (6.56) die erste Ableitung nach der Zeit und wendet außerdem Gl. (6.18) an, so erhält man die Übertragungsfunktion des PI-Reglers

$$F_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (6.57)$$

Die Einheitssprungantwortfunktion kann als Überlagerung der P-Antwort und der I-Antwort aufgefaßt werden:

$$\sigma_a(t) = K_P \cdot \sigma(t) + K_I \cdot t \cdot \sigma(t) \quad (6.58)$$

6.5.6 PID-Regler

Der Proportional-Integral-Differential-Regler verknüpft diese drei Eigenschaften wie folgt:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) \cdot dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (6.59)$$

Indem man insgesamt Gl. (6.59) nach der Zeit ableitet und Gl. (6.18) berücksichtigt, erhält man die Übertragungsfunktion des PID-Reglers als

$$F_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \quad (6.60)$$

Die Einheitssprungantwortfunktion erhält man aus der Überlagerung der D-Antwort mit der P- und der I-Antwort als

$$\sigma_a(t) = K_P \cdot \sigma(t) + K_I \cdot t \cdot \sigma(t) + K_D \cdot \delta(t) \quad (6.61)$$

Tabelle 6.1. Übersicht über Reglertypen

Regler	Zeitbereich	Übertragungsfunktion
P	$u(t) = K_P \cdot e(t)$	$F_R(s) = K_P$
PT ₁	$T_0 \cdot u'(t) + u(t) = K_P \cdot e(t)$	$F_R(s) = \frac{K_P}{1+s \cdot T_0}$
I	$u(t) = K_I \cdot \int e(t) \cdot dt$	$F_R(s) = \frac{K_I}{s}$
D	$u(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$	$F_R(s) = K_D \cdot s$
PI	$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) \cdot dt$	$F_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$
PID	$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) \cdot dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$	$F_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$

Tabelle 6.1 gibt eine Übersicht über die behandelten Reglertypen mit der Zeitfunktion und Übertragungsfunktion.

Abbildung 6.24 zeigt abschließend nochmals die Einheitssprungantwortfunktion für alle behandelten Reglertypen.

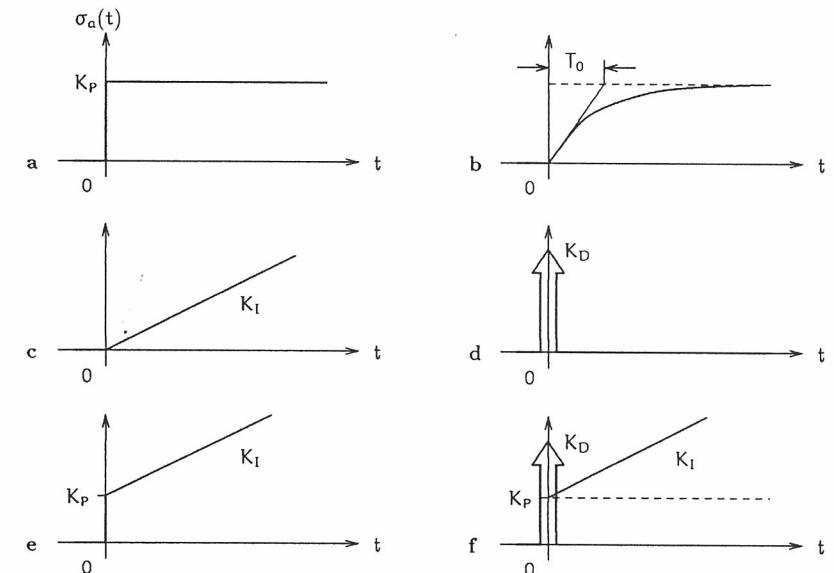


Abb. 6.24: Einheitssprungantwortfunktion für den P-Regler (a), PT₁-Regler (b), I-Regler (c), D-Regler (d), PI-Regler (e) und den PID-Regler (f)

6.6 Einschleifiger Regelkreis mit Einheitsrückführung

*Noli turbare circulos meos!
(Zerstör' mir meine Kreise nicht!)*
Archimedes

In Abschn. 6.5 wurden verschiedene Reglertypen vorgestellt. In gleicher Weise existieren Regelstrecken mit gleichartigen Übertragungsfunktionen; so z.B. eine Regelstrecke mit P-Verhalten

$$F_S(s) = K_S \cdot \frac{a_m \cdot s^m + \dots + a_1 \cdot s + a_0}{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0} \quad (6.62)$$

mit $n > m \geq 0$ oder mit I-Verhalten

$$F_S(s) = \frac{K_S}{s} \cdot \frac{a_m \cdot s^m + \dots + a_1 \cdot s + a_0}{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0} \quad (6.63)$$

Von besonderem Interesse ist bei einem geschlossenen Regelkreis die Zusammenarbeit von *Regler* und *Regelstrecke*.

6.6.1 Stationäres Verhalten

*Je vertrauter und alltäglicher eine Verhaltensweise ist,
desto problematischer wird ihre Analyse.*

Desmond Morris, „Liebe geht durch die Haut“

Die Zusammenarbeit von Regler und Regelstrecke soll anhand von folgendem Beispiel veranschaulicht werden: Ein I-Regler wird mit einer Regelstrecke mit P-Verhalten zusammengeschaltet. Die einzelnen Übertragungsfunktionen lauten $F_R(s) = \frac{K_I}{s}$ und $F_S(s) = K_S$. Bei Einheitsrückführung ergibt sich nach Abb. 6.25 für die Übertragungsfunktion

$$F_{\text{ges}}(s) = \frac{K_I \cdot K_S}{s + K_I \cdot K_S} \quad (6.64)$$

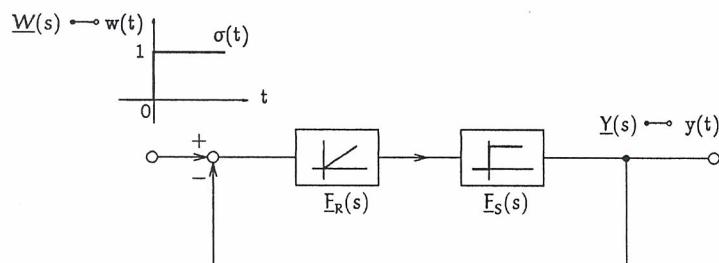


Abb. 6.25. Geschlossener Regelkreis mit Einheitsrückführung

Ist die Führungsgröße eine Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$, dann ergibt sich für die Regelgröße im Bildbereich $\underline{Y}(s)$ wegen $w(t) = \sigma(t) \rightarrow \underline{W}(s) = \frac{1}{s}$

$$\underline{Y}(s) = K_I \cdot K_S \cdot \frac{1}{s \cdot (s + K_I \cdot K_S)} \quad (6.65)$$

6.6 Einschleifiger Regelkreis mit Einheitsrückführung

mit $a = K_I \cdot K_S$ wird

$$\underline{Y}(s) = a \cdot \frac{1}{s \cdot (s + a)} \quad (6.66)$$

Die Partialbruchzerlegung führt auf

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\bullet} - \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\bullet} \quad (6.67)$$

$$y(t) = \underbrace{\sigma(t)}_{\bullet} - e^{-at} \quad (6.68)$$

für $t \geq 0$ wird $y(t) = 1 - e^{-at}$. Abbildung 6.26 zeigt den zeitlichen Verlauf der Regelgröße $y(t)$. Man erkennt eine asymptotische Annäherung von $y(t)$ an $w(t)$. Nach (4 ... 5) Zeitkonstanten mit $\tau = K_I \cdot K_S$ kann man davon ausgehen, daß der Endwert mit hinreichender Genauigkeit für technische Systeme erreicht wurde.

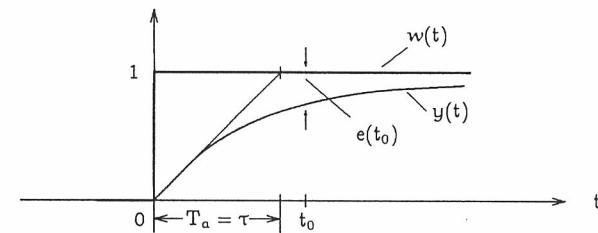


Abb. 6.26. Zeitlicher Verlauf der Regelgröße $y(t)$ bei $w(t) = \sigma(t)$

6.6.1.1 Regelabweichung

Unter der Regelabweichung $e(t)$ versteht man die Differenz zwischen Führungsgröße $w(t)$ und Regelgröße $y(t)$

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (6.69)$$

Die bleibende Regelabweichung ergibt sich als zeitlicher Grenzwert für $t \rightarrow \infty$

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [w(t) - y(t)] \quad (6.70)$$

Im vorangehenden Beispiel ist $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = w(t)$. Damit ist $e(\infty) = 0$. Abbildung 6.27 zeigt zwei Fälle zur Beurteilung der Regelabweichung bzw. der bleibenden Regelabweichung.

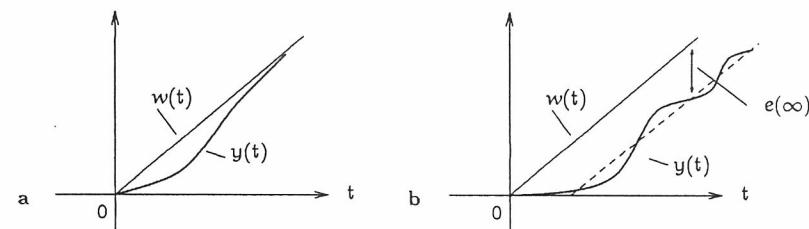


Abb. 6.27. $y(t)$ strebt gegen $w(t)$, $e(\infty) = 0$ (a), $e(\infty) > 0$ (b)

Bei Zusammenschaltung verschiedener Regler mit verschiedenen Regelstrecken ergeben sich unterschiedliche Regelabweichungen abhängig davon, ob die Führungsgröße $w(t)$ eine Sprung- oder Rampenfunktion ist. Tabelle 6.2 gibt eine Übersicht über die auftretenden bleibenden Regelabweichungen.

Tabelle 6.2: Bleibende Regelabweichung bei sprungförmiger und rampenförmiger Führungsgröße

Regler $F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	Sprungförmige Führungsgröße	Rampenförmige Führungsgröße
P K_P	P-Verhalten	$\frac{1}{1+K_S \cdot K_P}$ · K_P	∞
I $\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	$\frac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot K_P$
PI $K_P + \frac{K_I}{s}$	$K_S \cdot \frac{1+s}{1+s}$	0	$\frac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot K_P$
P K_P	I-Verhalten	0	$\frac{1}{K_S}$
I $\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	0
PI $K_P + \frac{K_I}{s}$	$\frac{K_S}{s} \cdot \frac{1+s}{1+s}$	0	0

6.6.1.2 Einstellregeln für Regler

Um die Zusammenarbeit von Regler und Regelstrecke festlegen zu können, wurden für unterschiedliche Führungsfunctionen $w(t)$ (sog. *Führungsgrößenregelung*) von Chien, Hrones und Reswick Einstellregeln angegeben. Abhängig davon, ob die Regelgröße sich aperiodisch der Führungsgröße nähert (*aperiodischer Grenzfall*) oder ob beim Nachfolgen der Regelgröße gegenüber der Führungsgröße ein 20%iges Überschwingen noch als zulässig angesehen wird, ergeben sich die Dimensionierungsregeln für die Konstanten von Reglern nach Tabelle 6.3.

Dazu wird auf Abb. 6.13 verwiesen, wodurch man empirisch aus dem Verlauf der Sprungantwortfunktion der Regelstrecke den Endwert $y(\infty)$, die Ausgleichszeit T_a und die Verzugszeit T_u als Ersatztotzeit ermitteln kann. Die Konstanten K_I , K_P , T_n und T_V können dann nach Tabelle 6.3 ermittelt werden.

Tabelle 6.3. Einstellregeln für kontinuierliche Regler

Reglertyp	Aperiodischer Grenzfall	20% Überschwingen zulässig
P	$K_P = \frac{0.3 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$	$K_P = \frac{0.7 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$
PI	$K_P = \frac{0.35 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$	$K_P = \frac{0.6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$
	$K_I = \frac{K_P}{T_n}$	$K_I = \frac{K_P}{T_n}$
	$T_n = 1.2 \cdot T_a$	$T_n = T_a$
PID	$K_P = \frac{0.6 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$	$K_P = \frac{0.95 \cdot T_a}{K_S \cdot T_u}$
	$K_I = \frac{K_P}{T_n}$	$K_I = \frac{K_P}{T_n}$
	$T_n = T_a$	$T_n = 1.35 \cdot T_a$
	$K_D = K_P \cdot T_V$	$K_D = K_P \cdot T_V$
	$T_V = 0.5 \cdot T_u$	$T_V = 0.47 \cdot T_u$

6.6.2 Stabilität

*Omnis eodem cogimur.
(Wir alle müssen zum selben Orte.)*

Horaz, Oden.

Im folgenden soll das dynamische Verhalten, die sog. *Stabilität* von Regelkreisen, untersucht werden. Schwingungen in einem geschlossenen Regelkreis gefährden ein technisches System dadurch, daß Werte für die Regelgröße $y(t)$ auftreten, die die zulässigen Betriebsbereiche überschreiten. Das geschieht dann, wenn sich die *Gegenkopplung* am Reglereingang in eine *Mitkopplung* umwandelt.

6.6.2.1 Schwingungsbedingung

Die in Abschn. 6.3.3 abgeleitete Übertragungsfunktion des einschleifigen Regelkreises mit Einheitsrückführung weist gemäß Gl. (6.35) eine Polstelle bei $F_0(s) = -1$ auf. Setzt man den Realteil der komplexen Variablen s null, dann geht für $\sigma = 0$ wegen $s = \sigma + j\omega$ die komplexe Variable s im Bildbereich in $s = j\omega$ über. Die Übertragungsfunktion $F(s)$ geht dabei in die Frequenzgangfunktion $F_0(j\omega)$ über, wobei für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ (Frequenz f) gilt.

Die Untersuchung, ob die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises $F_0(s)$ bzw. die zugehörige Frequenzgangfunktion $F_0(j\omega)$ den Wert -1 annimmt, wird als *Stabilitätsprüfung nach dem Frequenzgangverfahren* bezeichnet. Bevor diese Stabilitätsuntersuchung durchgeführt wird, soll zuvor der Begriff der Frequenzgangfunktion $F_0(j\omega)$ veranschaulicht werden.

6.6.2.2 Frequenzgangfunktion

Nach Abb. 6.28 soll ein einschleifiger Regelkreis in der Rückführung mit Hilfe des Schalters aufgetrennt werden können. In der Schalterstellung 2 wird von einem Oszillatator ein Sinussignal variabler Frequenz in die Rückführung auf den Reglereingang eingespeist. Zugleich soll die Führungsgröße $w(t) = 0$ sein. Dann entsteht am Ausgang der Regelstrecke ein Signal $y(t)$ als Abbild der Anregung durch den Oszillatator.

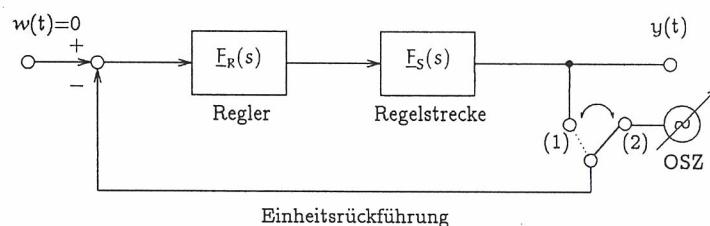


Abb. 6.28. Auf trennbarer Regelkreis zur Bestimmung der Frequenzgangfunktion

Zeichnet man das Ausgangssignal $y(t)$ der Regelstrecke bei offenem Regelkreis nach Betrag und Phasenlage auf, so erhält man die *Frequenzgangfunktion* $F_0(j\omega)$. Die Frequenzgangfunktion charakterisiert das Verhalten des Übertragungsgliedes bei erzwungenen, harmonischen Schwingungen.

Wenn der geschlossene Regelkreis zu Schwingungen neigt (*Instabilität*), dann existiert eine Kreisfrequenz $\omega = \omega_{krit}$, so daß sich Schwingungen anfangen. Dann ist die Bedingung für

Selbsterregung

$$E_0(j\omega_{krit}) = -1 \quad (6.71)$$

Diese Bedingung wurde erstmals von Barkhausen 1928 formuliert. Ist die Übertragungsfunktion $E_0(s)$ des aufgeschnittenen Regelkreises bekannt, so kann für $\sigma = 0$ und damit $s = j\omega$ die Frequenzgangfunktion $E_0(j\omega)$ in der komplexen $E_0(j\omega)$ -Ebene nach Betrag und Phasenlage bzw. nach Real- und Imaginärteil dargestellt werden (Abb. 6.29).

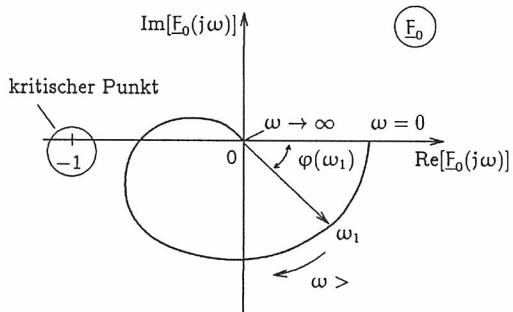


Abb. 6.29. Beispiel einer Frequenzgangfunktion in der komplexen Ebene als „Ortskurve“

Die Funktion $E_0(j\omega)$ wird für variable Kreisfrequenz beginnend bei $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ bis $\omega \rightarrow \infty$ nach Real- und Imaginärteil ausgewertet und in der komplexen E_0 -Ebene aufgetragen. So ergibt sich in dem beispielhaften Verlauf für $E_0(j\omega)$ in Abb. 6.29 bei der Kreisfrequenz ω_1 ein Zeiger in der komplexen E_0 -Ebene mit dem Betrag $|E_0(j\omega_1)|$ und der Phasenlage $\varphi(\omega_1)$ gegenüber der reellen Achse. Für variable Werte von ω ergeben sich so entsprechend beliebig viele Zeiger $E_0(j\omega)$ in der komplexen Ebene, deren Endpunkte zur sog. *Ortskurve* zusammengefaßt werden können. Zusätzlich ist in Abb. 6.29 der kritische Punkt bei -1 eingetragen. Man erkennt an dem beispielhaften $E_0(j\omega)$ -Verlauf, daß der kritische Punkt von dieser Frequenzgangfunktion nicht erreicht oder eingeschlossen wird. Daraus kann geschlossen werden, daß für keinen ω -Wert Schwingungen im Regelkreis angefacht werden. Damit verhält sich der geschlossene Regelkreis in diesem Fall *stabil*. Entscheidend ist also für die Stabilität eines geschlossenen Regelkreises der Verlauf der $E_0(j\omega)$ -Ortskurve relativ zum kritischen Punkt bei -1 .

Die komplexe Frequenzgangfunktion $E_0(j\omega)$ des aufgeschnittenen Regelkreises kann – wie eingangs erwähnt – in einen Betrags- sowie einen Phasenverlauf in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω entsprechend

$$E_0(j\omega) = \underbrace{A(\omega)}_{\text{Betragsfunktion}} \cdot e^{j \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{Phasenfunktion}}} \quad (6.72)$$

aufgeteilt werden. Aus der komplexen Frequenzgangfunktion $E_0(j\omega)$ des aufgeschnittenen Regelkreises können die *Betragsfunktion*

$$|E_0(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{[\operatorname{Re}\{E_0(j\omega)\}]^2 + [\operatorname{Im}\{E_0(j\omega)\}]^2} \quad (6.73)$$

und die *Phasenfunktion* aus $\tan \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im}\{E_0(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{E_0(j\omega)\}}$ als

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{E_0(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{E_0(j\omega)\}} \quad (6.74)$$

einzelnen berechnet werden. Trägt man die Betrags- und Phasenfunktion nach Gl. (6.73) und Gl. (6.74) getrennt neben der Ortskurve $E_0(j\omega)$ auf, so entsteht das sog. *Bode-Diagramm* (Abb. 6.30).

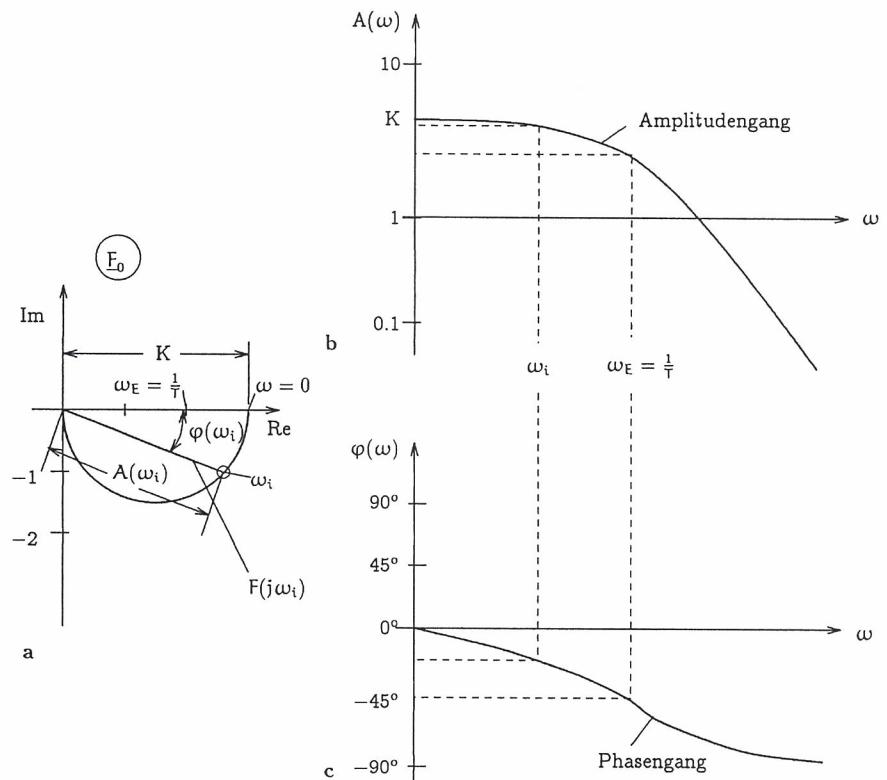


Abb. 6.30. Ortskurve (a), Bode-Diagramm mit Betrags- (b) und Phasenverlauf (c)

6.6.2.3 Nyquist-Kriterium

Schwingungen entstehen in einem geschlossenen Regelkreis dadurch, daß das rückgekoppelte Signal in seiner Phasenlage gedreht wird und am Eingang des Reglers aus einer *Gegenkopplung* schließlich eine *Mitkopplung* wird. Dann gelten nach Betrag und Phase folgende Bedingungen:

1. eine Phasendrehung von 180°
2. ein normierter Amplitudenwert ≥ 1

bei gleicher Kreisfrequenz $\omega = \omega_{krit}$. In Abb. 6.31 ist für eine beispielhafte Ortskurve $E_0(j\omega)$ ein Einheitskreis um das Achsenkreuz zusätzlich eingetragen, um die Amplitudenverhältnisse beurteilen zu können.

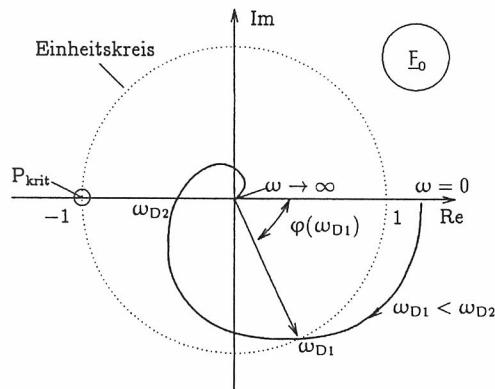


Abb. 6.31: Ortskurve mit Einheitskreis, kritischem Punkt und den Durchtrittskreisfrequenzen ω_{D1} und ω_{D2}

Man erkennt aus dem Verlauf der Ortskurve für wachsendes ω zunächst ein Durchtreten der Ortskurve durch den Einheitskreis bei der Durchtrittskreisfrequenz ω_{D1} (der Betrag von $|E_0(j\omega_{D1})|$ beträgt 1) und dann ein Schneiden der negativen reellen Achse durch die Ortskurve bei der Durchtrittskreisfrequenz ω_{D2} (die Phase von $E_0(j\omega_{D2})$ beträgt $-\pi$). Es existieren somit zwei Durchtrittskreisfrequenzen:

1. $\omega_{D1} = \text{Amplituden-Durchtrittskreisfrequenz}$
definiert durch $|E_0(j\omega_{D1})| = A(\omega_{D1}) = 1$

2. $\omega_{D2} = \text{Phasen-Durchtrittskreisfrequenz}$
definiert durch $\text{arc}\{E_0(j\omega_{D2})\} = \pi$

Der skizzierte Verlauf der Ortskurve in Abb. 6.31 weist auf einen stabilen Regelkreis hin, da sowohl amplituden- als auch phasenmäßig die notwendigen Bedingungen zum Anfangen von Schwingungen nicht gegeben sind. Zwar wird bei der Kreisfrequenz ω_{D2} aus der *Gegenkopplung* eine *Mitkopplung*, jedoch ist der Betrag des rückgekoppelten Signals vom Ausgang der Regelstrecke auf den Eingang des Reglers dem Betrag nach kleiner als 1. In Abb. 6.32 sind zwei zusätzliche Maße eingetragen:

1. der *Phasenrand* Ψ_R
als Phasenwinkel zwischen $\varphi(\omega_{D1})$ und $\varphi(\omega_{D2}) = -\pi$ (die sog. *Phasenreserve* oder *Phasendifferenz* zur Phasenlage des kritischen Punktes)

2. der *Amplitudenrand* A_R
als die Verstärkung, die bei $\omega = \omega_{D2}$ erforderlich wäre, um den Betrag $A(\omega_{D2})$ auf den Wert 1 zu vergrößern, so daß der kritische Punkt bei -1 gerade von der Ortskurve durchlaufen würde (um den Regelkreis an die Stabilitätsgrenze zu bringen).

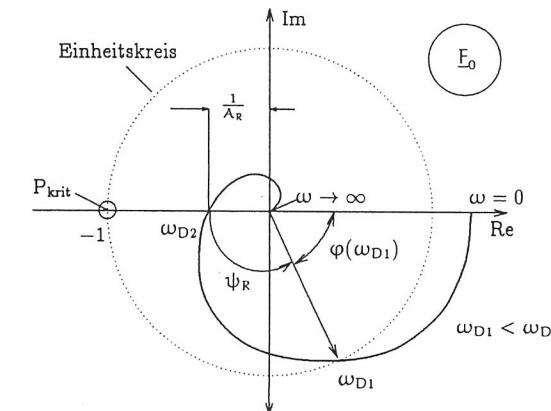


Abb. 6.32. Ortskurve mit Phasenrand und Amplitudenrand

Es wird nun ein anderer Ortskurvenverlauf betrachtet (Abb. 6.33).

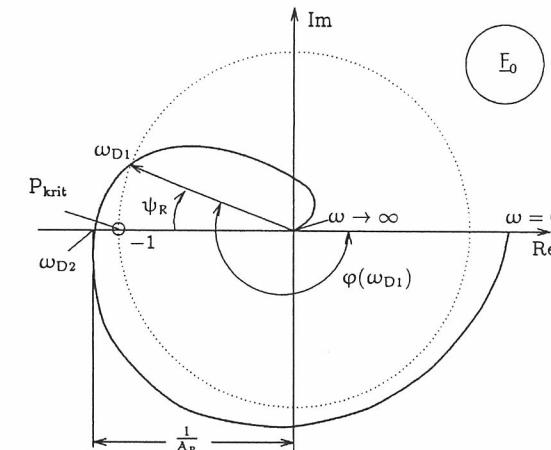


Abb. 6.33. Ortskurvenverlauf

Verfolgt man diesen Verlauf der Ortskurve $E_0(j\omega)$ für wachsende Kreisfrequenz ω , so erkennt man, daß zuerst die Durchtrittskreisfrequenz ω_{D2} für $\varphi(\omega_{D2}) = -\pi$ durchlaufen wird, bei der der Betrag $A(\omega_{D2}) > 1$ ist. Damit werden im geschlossenen Regelkreis *Schwingungen* angefacht.

Erst für $\omega > \omega_{D2}$ wird die Durchtrittskreisfrequenz ω_{D1} für $A(\omega_{D1}) = 1$ durchlaufen. Der Regelkreis ist damit *instabil*. Für stabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises gilt daher

$$\omega_{D1} < \omega_{D2} \quad (6.75)$$

Die äquivalenten Forderungen lauten

$$\Psi_R > 0 \quad \text{und} \quad A_R \geq 1 \quad (6.76)$$

Die *Stabilitätsgrenze* ist somit dadurch definiert, daß $\omega_{D1} = \omega_{D2}, \Psi_R = 0^\circ$ und $A_R = 1$ sind.

6.7 Digitale Regler

*Da schließt sich der Kreis.
(Da sind wir wieder am Anfang.)*
Redensart

Mikrorechner bzw. Prozeßrechner können als Regler eingesetzt werden. Dadurch, daß auf dem Rechner verschiedene Regelalgorithmen als Programme installiert werden können, kann bei gleicher Hardware (Aspekt der Hardware-Standardisierung) unterschiedliches Regelverhalten erzeugt werden. Man bezeichnet diese Vorgehensweise als direct digital control (DDC). Im Rechner sind dann zeit- und amplitudendiskrete Variablen zu verarbeiten (vgl. Abschn. 1.2.6).

Abbildung 6.34 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines einschleifigen Regelkreises, der einen digitalen Regler enthält. Anstelle des Reglers ist hier der Regelalgorithmus als ablaufähiges Programm auf dem Prozessor angegeben. Man erkennt an den Schnittstellen des Prozessors gegenüber dem übrigen Regelkreis den Einsatz von A/D- bzw. D/A-Wandlern (vgl. Abschn. 3).

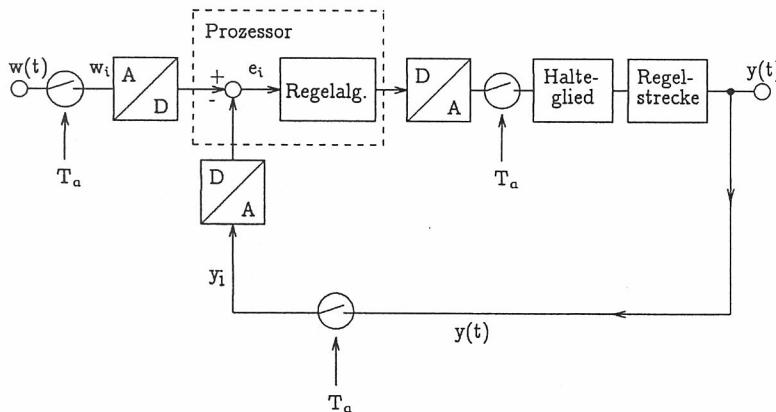


Abb. 6.34. Aufbau eines digitalen Regelkreises

Zur Quantisierung zeit- und wertkontinuierlicher Größen (z.B. $y(t)$) muß mit der Abtastperiode T_a eine *Abtastung* periodisch vorgenommen werden. Ebenso muß die digitale Stellgröße für die Dauer einer *Abtastperiode* T_a in einem Halteglied gespeichert werden, bis ein nächster berechneter Wert für die Stellgröße eintrifft. Der Wert der Führungsgröße $w(t)$ wird ebenfalls abgetastet und über einen A/D-Wandler dem Regler (hier der Prozessor mit dem speziellen Regelalgorithmus) zugeführt.

6.7.1 PID-Regler

Des ist klassisch!
Johann Nestroy, „Einen Jux will er sich machen“

Nach Abschn. 6.5.6 kann das Reglerverhalten des PID-Reglers im Zeitbereich durch

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) \cdot dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (6.77)$$

beschrieben werden. Gleichung (6.77) kann umgeschrieben werden in

$$u(t) = K_P \cdot \left[e(t) + \underbrace{\frac{K_I}{K_P}}_{\frac{1}{T_n}} \cdot \int e(t) \cdot dt + \underbrace{\frac{K_D}{K_P}}_{T_v} \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (6.78)$$

mit der Nachstellzeit $T_n = \frac{K_P}{K_I}$ und der Vorhaltzeit $T_v = \frac{K_D}{K_P}$. Man erhält dann

$$u(t) = K_P \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_n} \cdot \int e(t) \cdot dt + T_v \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (6.79)$$

Da für die Regelabweichung $e(t)$ durch die Abtastung nur die zeitdiskreten Werte $e_{(v-1)}$, e_v und $e_{(v+1)}$ existieren, können für die Integration und die Differentiation die folgenden Näherungen angegeben werden.

Integration:

$$\int_0^{t_i} e(t) \cdot dt \approx \sum_{v=0}^i e_v \cdot T_a \quad (6.80)$$

Differentiation:

$$\frac{de(t)}{dt} \Big|_{t_i} \approx \frac{e_i - e_{i-1}}{T_a} \quad (6.81)$$

Man erhält dann für den i -ten Wert der vom Rechner berechneten Stellgröße (Annäherung des Differentialquotienten durch den zugehörigen Differenzenquotienten)

$$u_i \approx K_P \cdot \left[e_i + \frac{1}{T_n} \sum_{v=0}^i e_v \cdot T_a + T_v \cdot \frac{e_i - e_{i-1}}{T_a} \right] \quad (6.82)$$

Gleichung (6.82) ist in dieser Form für eine Implementierung auf dem Rechner noch nicht geeignet, da in ihr noch zu viele Multiplikationen und Divisionen enthalten sind. Man betrachtet daher zweckmäßigerweise den um eine Abtastperiode T_a zurückliegenden, berechneten Wert für die Stellgröße u_{i-1} und kann schreiben:

$$u_{i-1} \approx K_P \cdot \left[e_{i-1} + \frac{1}{T_n} \sum_{v=0}^{i-1} e_v \cdot T_a + T_v \cdot \frac{e_{i-1} - e_{i-2}}{T_a} \right] \quad (6.83)$$

Bildet man die Differenz aus Gl. (6.82) und Gl. (6.83), so erhält man

$$u_i - u_{i-1} \approx K_P \cdot \left[e_i - e_{i-1} + \frac{1}{T_n} (e_i \cdot T_a) + \frac{T_v}{T_a} \cdot (e_i - 2 \cdot e_{i-1} + e_{i-2}) \right] \quad (6.84)$$

6.7.1.1 Stellungsalgorithmus

Gleichung (6.84) kann durch Umordnen und Zusammenfassen in die folgende Form überführt werden:

$$u_i = u_{i-1} + d_0 \cdot e_i + d_1 \cdot e_{i-1} + d_2 \cdot e_{i-2} \quad (6.85)$$

mit den Koeffizienten

$$d_0 = K_p \cdot \left(1 + \frac{T_a}{T_n} + \frac{T_v}{T_a}\right), \quad d_1 = K_p \cdot \left(-1 - 2 \cdot \frac{T_v}{T_a}\right) \text{ und } d_2 = K_p \cdot \frac{T_v}{T_a} \quad (6.86)$$

Es berechnet sich also der aktuelle Wert der Stellgröße u_i aus dem vorangegangenen Wert der Stellgröße u_{i-1} zuzüglich einer gewichteten Summe über vorangegangene Regelabweichungen e_i, e_{i-1} und e_{i-2} .

Die Koeffizienten d_0, d_1 und d_2 zur Berechnung der gewichteten Summe in Gl. (6.85) können damit einmalig mit den Konstanten K_p, T_a und T_n festgelegt werden und bedürfen im laufenden Betrieb keiner erneuten Berechnung.

6.7.1.2 Geschwindigkeitsalgorithmus

Führt man nun eine Differenzenbetrachtung als

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1} \quad (6.87)$$

durch, so erhält man aus Gl. (6.85) für

$$\Delta u_i = d_0 \cdot e_i + d_1 \cdot e_{i-1} + d_2 \cdot e_{i-2} \quad (6.88)$$

Bezieht man Δu_i auf die Abtastperiode T_a , die im Regelkreis konstant ist, so ist Δu_i ein Maß für die Änderung der Stellgröße je Zeiteinheit. Daher wird Gl. (6.88) auch als *Geschwindigkeitsalgorithmus* bezeichnet. Dieser Algorithmus wird angewandt, wenn dem regelnden Rechner ein Stellglied mit I-Verhalten (z.B. ein elektrischer Stellmotor) nachgeschaltet ist, so daß man auf das sonst erforderliche Halteglied in Abb. 6.34 verzichten kann.

6.7.1.3 Festlegung des Abtastintervalls

Je kleiner das Abtastintervall T_a gewählt wird, desto näher kommt das digitale Reglerverhalten dem des analogen Reglers. Die praktische Vorgehensweise zur Festlegung der Abtastperiode besteht darin, daß man z.B. mit einem y-t-Schreiber die Sprungantwortfunktion der Regelstrecke aufnimmt. Abbildung 6.35 zeigt drei typische Verläufe für die Sprungantwortfunktion. In den Teilbildern sind Abschätzungen für die Abtastperiode T_a eingetragen.

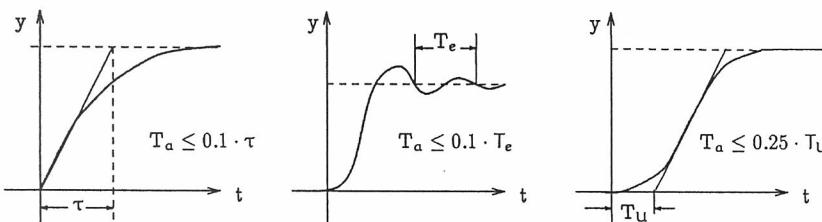


Abb. 6.35. Bestimmung des Abtastintervall T_a bei verschiedenen Sprungantwortfunktionen

6.7.1.4 Sprungantwortfunktion des diskreten PID-Reglers

Am Beispiel des Regelalgorithmus nach Gl. (6.85) zeigt Tabelle 6.4 für $d_0 = 4$, $d_1 = -5$ und $d_2 = 2$ die tabellarische Berechnung der Stellgröße u als gewichtete Summe.

Tabelle 6.4. Berechnung der Stellgröße als gewichtete Summe

i	$4 \cdot e_i$	$-5 \cdot e_{i-1}$	$2 \cdot e_{i-2}$	u_{i-1}	u_i	Δu_i
0	0	0	0	0	0	0
1	4	0	0	0	4	4
2	4	-5	0	4	3	-1
3	4	-5	2	3	4	1
4	4	-5	2	4	5	1
5	4	-5	2	5	6	1
6	4	-5	2	6	7	1
7	4	-5	2	7	8	1

Abbildung 6.36 zeigt den zeitlichen Verlauf der Sprungantwortfunktion des diskreten PID-Reglers im Vergleich zum analogen PID-Regler. Man erkennt, daß im theoretischen Grenzfall für $T_a \rightarrow 0$ die Sprungantwortfunktionen ineinander übergehen. Abbildung 6.37 zeigt abschließend das Struktogramm für einen diskreten PID-Regelalgorithmus.

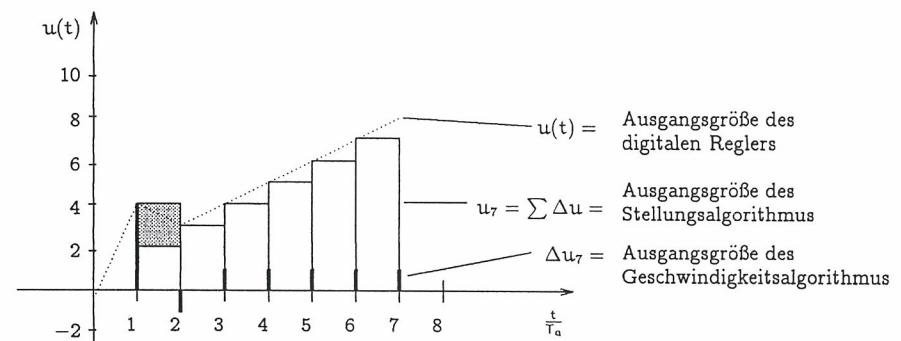


Abb. 6.36. Sprungantwortfunktion des diskreten PID-Reglers

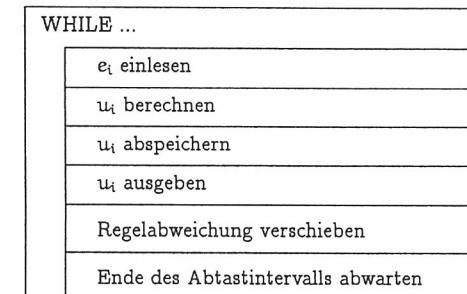


Abb. 6.37. Struktogramm des diskreten PID-Regelalgorithmus

6.7.2 Zweipunktregler

Zwei Knaben, jung und heiter,
die tragen eine Leiter.

Wilhelm Busch, „Münchener Bilderbogen“

Die Arbeitsweise eines rechnergestützten Zweipunktreglers soll zunächst anhand der Funktion eines herkömmlichen Zweipunktreglers erläutert werden.

6.7.2.1 Funktion

Ein Regler soll nach Abb. 6.38 allein die Entscheidung treffen, ob ein Element des Stellgliedes *ein-* oder *ausgeschaltet* wird.

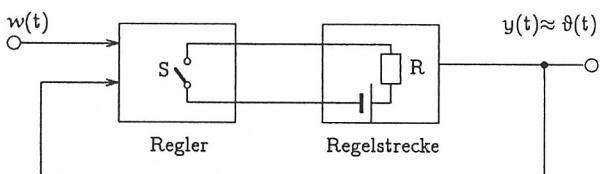


Abb. 6.38. Zweipunktregelung

Dabei handelt es sich z.B. um einen Heizkörper als Regelstrecke, der vom Regler *ein-* oder *ausgeschaltet* wird. Auf diese Weise kann z.B. eine einfache Raumtemperatur-Regelung $\theta(t)$ bewirkt werden.

Nimmt man an, daß die Regelstrecke durch einen Tiefpaß 1. Ordnung mit der Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{K_S}{1+s \cdot T_0}$ mit der Zeitkonstanten T_0 gekennzeichnet wird, so ergibt sich beim Anfahren der Regelung mit einer Sprungfunktion $s(t)$ als Anregungsfunktion eine Sprungantwortfunktion der Regelgröße im Bildbereich als

$$Y(s) = \frac{K_S}{1 + s \cdot T_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (6.89)$$

mit der Korrespondierenden im Zeitbereich

$$y(t) = K_S \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_0}}) \quad (6.90)$$

Es sollen nun für die Zweipunktregelung die sog. *untere* und *obere Schaltschwelle* eingeführt werden. Sie sind durch die Werte $(w + \Delta y)$ und $(w - \Delta y)$ gekennzeichnet. Die Differenz beträgt $2 \cdot \Delta y$ und wird *Hysteresis* genannt. Man erkennt aus Abb. 6.39, daß beim Überschreiten der oberen Schaltschwelle der Regler abschaltet. Die Regelgröße sinkt dann bei dieser Regelstrecke nach einem zeitlichen Verlauf, der zu $e^{-\frac{t}{T_0}}$ proportional ist, bis die untere Schaltschwelle durchschritten wird, so daß der Regler den Schalter S wieder einschaltet. Man erkennt, daß sich mit abnehmender Hysteresis die *Schalthäufigkeit* des Schalters S entsprechend erhöht.

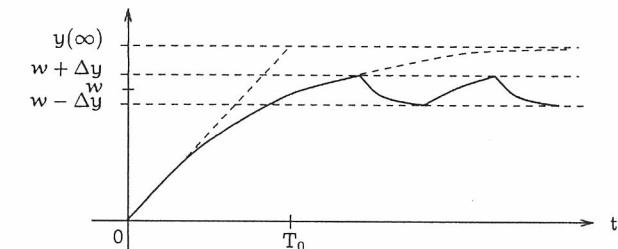


Abb. 6.39. Zeitlicher Verlauf der Regelgröße $y(t)$ bei einem Zweipunktregler

Es ist an dieser Stelle zu erwähnen, daß die Kurvenstücke des Verlaufes der Regelgröße $y(t)$ zwischen den Ein- und Ausschaltpunkten sowie beim ersten Hochlauf aus Exponentialfunktionen der Art $(1 - e^{-\frac{t}{T_0}})$ für den *ansteigenden* Verlauf und $e^{-\frac{t}{T_0}}$ für den *abfallenden* Verlauf bestehen. Diese Exponentialfunktionen ergeben sich als Lösung der Differentialgleichungen für den Ein- und Ausschaltvorgang.

Die Schaltbedingung für den Zweipunktregler kann aus Abb. 6.40 abgelesen werden. Befindet sich die Regelgröße im Wertebereich zwischen unterer und oberer Schaltschwelle, bleibt die Stellgröße unverändert; beim Überschreiten der oberen Schaltschwelle wird $u = 0$ gesetzt (*ausgeschalten*), beim Unterschreiten der unteren Schaltschwelle wird $u = 1$ gesetzt (*einschalten*).

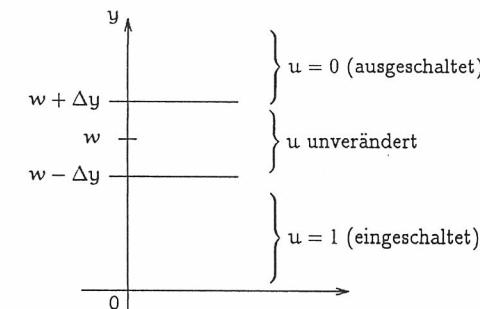


Abb. 6.40. Festlegung der Schaltbedingungen

6.7.2.2 Digitaler Zweipunktregler

Abbildung 6.41 zeigt das Struktogramm für einen einfachen Zweipunktregler. Die Abfragen im Struktogramm müssen nicht unbedingt in der dargestellten Form realisiert werden. Es empfiehlt sich vielmehr, sich nach dem *Zielprozessor* zu richten. So weist z.B. der Prozessor 6502 (Fabr. Motorola) festverdrahte Sprungbefehle der Form

$$\text{VAR} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{VAR} < 0$$

auf. Der Prozessor weist für $\text{VAR} > 0$ bzw. $\text{VAR} \leq 0$ keine festverdrahteten Sprungbefehle auf, so daß diese erst durch mehrere Befehle berechnet werden müßten. Dadurch würde dann aber das Echtzeitverhalten des Rechners als Zweipunktregler nachteilig beeinflußt.

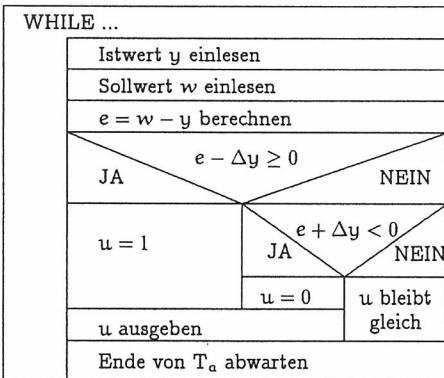


Abb. 6.41. Struktogramm für einen einfachen Zweipunktregler

6.8 Fuzzy-Logik in der Regelungstechnik

Das Unsympathische an Computern ist, daß sie nur ja oder nein sagen können, aber nicht vielleicht.

Brigitte Bardot

Fuzzy-Logik - so kurios dieser Name auch klingt - nahm vor ca. 25 Jahren ihren Anfang. Erste Entwicklungen dieser Logik gehen auf Lotfi A. Zadeh zurück. Laut Wörterbuch läßt sich *fuzzy* mit „*undeutlich*“ übersetzen, auch „*verschwommen*“ oder „*fusselig*“ sind mögliche Übersetzungen.

Zadeh hat für diese neue Form von Logik Beschreibungssätze, die sog. *Fuzzy-Sets*, eingeführt, um nicht exakte und unvollständige Datensätze, wie sie in der Wirklichkeit oft auftreten, mathematisch zu beschreiben und weiter verarbeiten zu können. So hat die von Zadeh begründete *Fuzzy-Set-Theorie* in die Mustererkennung, die Entscheidungstheorie, die Medizin und die Regelungstechnik Eingang gefunden.

Rund 25 Jahre lang führte die *Fuzzy-Logik* in der westlichen Welt mehr oder weniger ein Schattendasein, da man hier von der klassischen zweiwertigen Logik ausging (etwas ist *wahr* oder *falsch*, eine dritte Möglichkeit existiert nicht; lat.: *tertium non datur*).

Vor allem in Japan bestanden solche Vorbehalte nicht. Dort war man einer unscharfen, vielschichtigen Beschreibung logischer Zusammenhänge viel mehr aufgeschlossen. So stieß die Fuzzy-Logik dort vor allem bei Ingenieuren auf Interesse. Inzwischen haben Japaner eine Reihe von Anwendungen im industriellen Bereich realisiert und gehen nun daran, Fuzzy-Logik auch in Breitenprodukten (Konsumgütern) einzusetzen. So wurde in Japan das *International Fuzzy Engineering Research Institute* gegründet mit dem Ziel der Entwicklung von *Fuzzy-Chips* zur Realisierung von *Fuzzy-Computern* (z.B. Omron, Togai InfraLogic, Hyperlogic, Aptronix und Norrad).

Fuzzy-Logik stellt ein begründetes mathematisches Konzept dar. Bei der Lösung von Aufgaben der Prozeßautomatisierung wird sie auch schon in technischen Systemen, die von *Boeing*, *General Motors*, *Allen-Bradley*, *Chrysler* und anderen entwickelt wurden, eingesetzt. In japanischen Konsumgütern findet man zahlreiche Anwendungen z.B. bei Fotoapparaten, Klimaanlagen, Staubsaugern und ähnlichen Produkten. Man erkannte beim Einsatz der Fuzzy-Logik,

dass man zu besonders kostengünstigen und dennoch effektiven Entwicklungen kommt, wenn man Fuzzy-Logik auf einem 4-bit- oder 8-bit-Mikrocomputer ablaufen lässt und diesen mit preiswerten Sensoren zusammenarbeiten lässt. Weiter sind solche gerätetechnischen Entwicklungen dadurch gekennzeichnet, dass sie auch mit gestörten Signalen (die vom technischen Prozeß empfangen werden) zusammenarbeiten können.

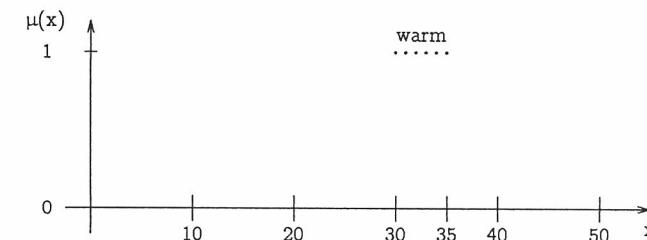
6.8.1 Definitionen

Von hundert, die von „Menge“, von „Herde“ reden, gehören neunundneunzig selbst dazu.

Christian Morgenstern, „Lebensweisheiten“

6.8.1.1 Scharfe Menge

Zunächst sollen *klassische, scharfe Mengen* (engl.: *crisp sets*) betrachtet werden. Eine scharfe Menge kann dadurch beschrieben werden, dass alle Elemente, die zu dieser Menge gehören, einfach aufgelistet werden, oder aber mit den Mitteln der Mengentheorie definiert werden. Ein erstes Beispiel sei hierfür die Menge *warm*, die in Abb. 6.42 wiedergegeben ist.

Abb. 6.42: Zugehörigkeitsfunktion der diskreten scharfen Menge $warm = \{30, 31, 32, 33, 34, 35\}$

Scharfe Mengen können jedoch auch durch eine zugeordnete charakteristische Funktion beschrieben werden, wobei eine 1 *Zugehörigkeit* und eine 0 *Nichtzugehörigkeit* bedeuten. Diese Funktion wird die Zugehörigkeitsfunktion $\mu(x)$ (engl.: *membership function*) genannt.

Definition 6.1. Scharfe Menge Gegeben sei X ein Merkmalsraum, eine Menge bzw. die Gesamtheit aller Objekte und A eine Teilmenge von X ($A \subseteq X$). Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$ mit

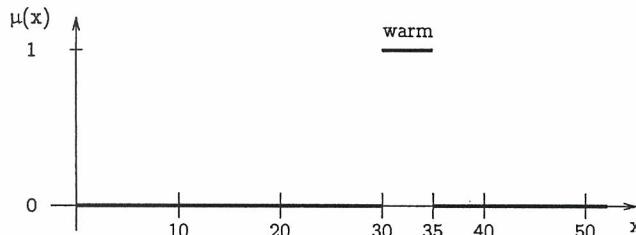
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

legt für alle $x \in X$ die scharfe Menge A fest. ◇

Konkret könnte die zuvor vorgestellte Menge *warm* nun folgendermaßen beschrieben werden:

$$\text{warm} = \begin{cases} 1 & \text{für } 30 \leq x \leq 35, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Festlegung dieser scharfen Menge zeigt Abb. 6.43.

Abb. 6.43. Zugehörigkeitsfunktion der scharfen Menge *warm*

6.8.1.2 Unscharfe Menge

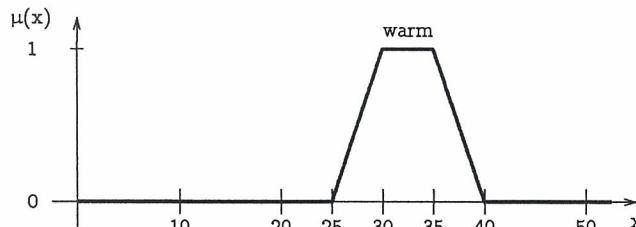
Aus der Zugehörigkeitsfunktion einer *scharfen* Menge kommt man zu der einer *unscharfen* Menge, wenn man für den Zugehörigkeitswert $\mu(x)$ nicht nur die diskreten Werte 0 und 1 zuläßt, sondern auch beliebige Werte zwischen 0 und 1 (kontinuierlicher Wertebereich für μ). Auf diese Weise wird es möglich, für die Zugehörigkeit von Elementen zu einer Menge den Übergang zwischen *gehört dazu* und *gehört nicht dazu* festzulegen.

Definition 6.2. Unscharfe Menge Gegeben sei X ein Merkmalsraum, eine Menge bzw. die Gesamtheit aller Objekte und A eine Teilmenge von X ($A \subseteq X$). Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$ ordnet jedem Element $x \in A$ den Zugehörigkeitsgrad $\mu_A(x)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zu. A wird als unscharfe Menge oder Fuzzy-Menge (engl.: *fuzzy-set*) bezeichnet. ◇

Den Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion für eine unscharfe Menge *warm* könnte man nun, wie folgt, beschreiben:

$$\text{warm} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 25, \\ \frac{x}{5} - 5 & \text{für } 25 \leq x < 30, \\ 1 & \text{für } 30 \leq x < 35, \\ -\frac{x}{5} + 8 & \text{für } 35 \leq x < 40, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abbildung 6.44 veranschaulicht den Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion für die unscharfe Menge.

Abb. 6.44. Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Menge *warm*

6.8.1.3 Linguistische Variable

Nachdem die Zugehörigkeitsfunktion $\mu(x)$ eingeführt ist, soll nun gezeigt werden, wie Variablen durch Zugehörigkeitsfunktionen dargestellt werden können. Dazu bedient man sich sog. *Fuzzy-Sets*. Dies sind Beschreibungen von Zugehörigkeitsfunktionen. Mathematisch kann ein Fuzzy-Set

als geordnete Menge von Paaren beschrieben werden als

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \quad (6.91)$$

wobei $\mu_A(x)$ die *Zugehörigkeitsfunktion* (auch als Grad der Zugehörigkeit zu bezeichnen) von x in A genannt wird, die die Menge X auf den Zugehörigkeitsraum abbildet. Der Bereich der Zugehörigkeitsfunktion ist eine Untermenge der reellen Zahlen mit einer endlichen Obergrenze und der Untergrenze Null. Ist die Obergrenze gleich 1, heißt das Fuzzy-Set *normal*.

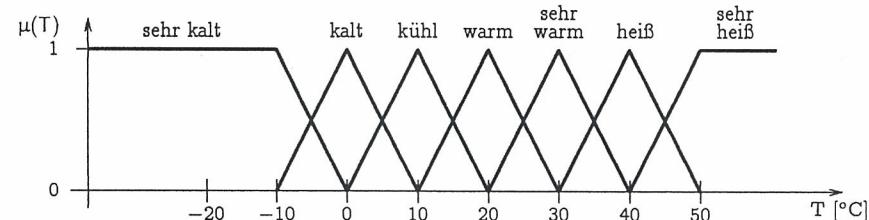
Mit Hilfe von Fuzzy-Sets ist man nun in der Lage, den Wert einer Zustandsgröße (z.B. einer Temperatur) anzugeben. Man bedient sich dabei menschlicher Erfahrung, die eine Temperatur nicht exakt als 39,6 Grad Celsius bestimmt, sondern diese als zum Beispiel *ziemlich heiß* (engl.: *slightly hot*) einstuft. Die menschliche Wahrnehmung beschränkt sich auf eine Bewertung des Temperatureindrucks in Form von einigen Kategorien. So können z.B. folgende Eindrücke des Menschen bezüglich einer Temperatur angegeben werden:

sehr kalt/kalt/kühl/warm/sehr warm/heiß/sehr heiß.

Natürlich ist die Zuordnung des Eindrucks von einer Temperatur *subjektiv*, und die o.a. Kategorien können auch anders gestaffelt sein. Wichtig aber ist, daß für die angegebenen Kategorien nun mit Hilfe von Fuzzy-Sets Zugehörigkeitsfunktionen für jede Kategorie angegeben werden können. Diese müssen durchaus nicht für jede Kategorie gleich sein.

Zusammenfassend kann daher festgehalten werden: ganze Sätze von Fuzzy-Mengen, die ein und dieselbe Kenngröße charakterisieren, werden zu einer *linguistischen Variable* zusammengefaßt. Die Fuzzy-Mengen, die eine solche linguistische Variable bestimmen, werden als *linguistische Terme* bezeichnet.

Für die Bewertung des Temperatureindrucks über der Temperatur sei in Abb. 6.45 ein Beispiel gegeben.

Abb. 6.45. Zugehörigkeitsfunktionen $\mu(T)$

Die einzelnen Zugehörigkeitsfunktionen haben einen dreiecksförmigen Verlauf bis auf die für die Klasse *sehr kalt*, da sie am Rande des Betrachtungsbereiches liegt; gleiches gilt für die Zugehörigkeitsfunktion der Klasse *sehr heiß*.

Der Vorgang zur Bestimmung aller linguistischen Terme einer linguistischen Variable wird als sog. *Fuzzifizierung* bezeichnet. Die Zugehörigkeitsfunktionen müssen jedoch nicht, wie man aus dem letzten Beispiel annehmen könnte, symmetrisch aufgebaut sein. Abbildung 6.46 zeigt ein Beispiel, bei dem die Zugehörigkeitsfunktionen frei vorgegeben sind.

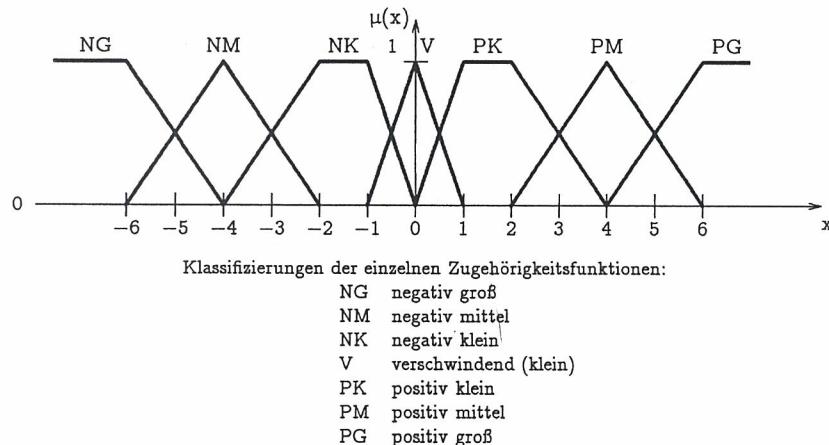


Abb. 6.46. Beispiel für die Fuzzifizierung einer Eingangsgröße

Natürlich sind alle möglichen mathematischen Funktionen zulässig zur Beschreibung einer Zugehörigkeitsfunktion. Es erweist sich jedoch als besonders einfach, wenn man Zugehörigkeitsfunktionen stückweise linear z.B. als Dreiecke festlegt. Dies hat den Vorteil, daß im Rechner nur drei Wertepaare zu speichern sind, die die Eckpunkte des jeweiligen Dreiecks repräsentieren. Die Menge aller Zugehörigkeitsfunktionen kann so recht einfach in Form einer Tabelle gespeichert werden, wie Tabelle 6.5 an einem Beispiel zeigt, wenn die zu bewertende Eingangsgröße x z.B. Werte zwischen -6 und $+6$ annehmen kann.

Tabelle 6.5. Tabellarische Darstellung von Zugehörigkeitsfunktionen

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
NG	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NM	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NK	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
PK	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0
PG	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Für fuzzifizierte, normierte Größen gilt zweckmäßigerweise folgende Regel:

„Die Summe der Zugehörigkeitsmaße aller linguistischen Aussagen soll für jeden scharfen Wert 1 betragen.“

Wird diese Regel befolgt, so ist, wie sich zeigen wird, der nachfolgende Umgang mit den Entscheidungsregeln einfacher zu handhaben; außerdem können die Zugehörigkeitsmaße einer diskreten Eingangsgröße relativ einfach gespeichert werden.

6.8.1.4 Fuzzy-Operatoren

Im nächsten Schritt sollen nun Fuzzy-Sets ein und derselben Grundmenge miteinander verknüpft werden. Hierfür ist es notwendig, die wesentlichen Verknüpfungen OR, AND und NOT auf Operatoren, die auf Fuzzy-Sets anwendbar sind, abzubilden. Die nachfolgenden Beschreibungen beschränken sich auf jene *elementarsten* Operatoren, die bereits von Zadeh vorgeschlagen wurden, und somit der klassischen Fuzzy-Logik zuzuordnen sind. Konkret sind dies:

- für die OR-Verknüpfung zweier Fuzzy-Sets A und B der *Maximum-Operator*, definiert durch die Vereinigung der unscharfen Mengen A und B :

$$A \text{ OR } B \equiv A \cup B \equiv \mu(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ mit } x \in X \quad (6.92)$$

Sollen z.B. die Zugehörigkeitsfunktionen der beiden Ausdrücke *sehr kalt* und *kalt* durch OR verknüpft werden, so ergibt sich die neue Vereinigungsmenge wie in Abb. 6.47.

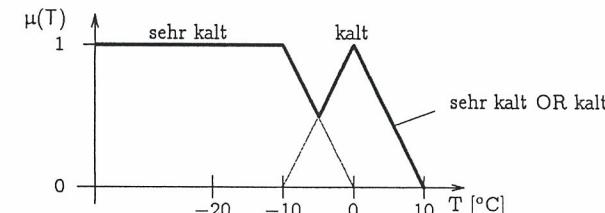


Abb. 6.47. OR-Verknüpfung durch Maximum-Operator

- für die AND-Verknüpfung zweier Fuzzy-Sets A und B der *Minimum-Operator*, definiert durch den Durchschnitt der unscharfen Mengen A und B :

$$A \text{ AND } B \equiv A \cap B \equiv \mu(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ mit } x \in X \quad (6.93)$$

Werden z.B. die Zugehörigkeitsfunktionen der beiden Ausdrücke *sehr kalt* und *kalt* mittels AND verknüpft, so ergibt sich die neue Durchschnittsmenge wie in Abb. 6.48.

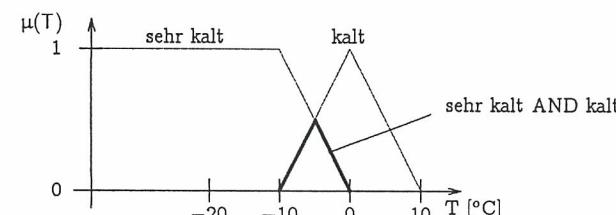


Abb. 6.48. AND-Verknüpfung durch Minimum-Operator

- für die Negation eines Fuzzy-Sets A das *Komplement* der unscharfen Menge A :

$$\text{NOT } A \equiv \mu(x) = 1 - \mu_A(x), \text{ mit } x \in X \quad (6.94)$$

Wird z.B. der Zugehörigkeitsfunktion des Ausdrucks *sehr kalt* ein NOT vorangestellt, so ergibt sich die neue unscharfe Menge wie in Abb. 6.49.

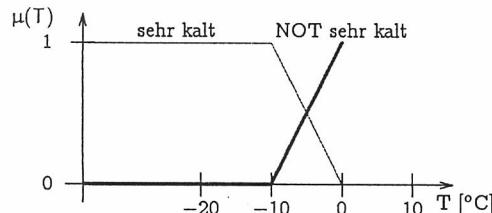


Abb. 6.49. NOT-Verknüpfung mittels Komplement

Drei abschließende Bemerkungen seien erlaubt:

1. Für die beiden vorgestellten Operatoren max und min der Verknüpfungen OR und AND gilt, wie leicht nachzuvollziehen ist, sowohl das Kommutativ- als auch das Assoziativgesetz.
2. Die OR- und AND-Verknüpfung könnte auch auf andere Operatoren abgebildet werden (Abb. 6.50).

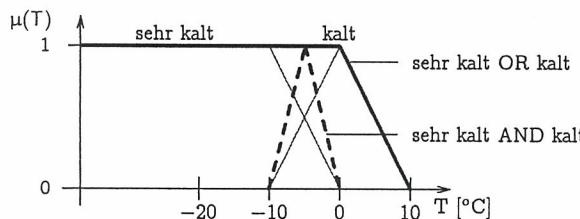


Abb. 6.50. Alternative Operatoren für OR- und AND-Verknüpfung

3. Natürlich existiert eine Vielzahl weiterer Verknüpfungen und Operatoren, die für praktische Anwendungen allerdings von untergeordneter Bedeutung sind. Die Palette reicht von T- und S-Normen hin zu sog. justierbaren Operatoren. Einige Beispiele sind:

$$\begin{aligned} \text{Algebraisches Produkt: } & (\mu_A \cdot \mu_B)(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\ \text{Abgeschnittene Summe: } & (\mu_A + \hat{\mu}_B)(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) \\ \text{Abgeschnittene Differenz: } & (\mu_A - \hat{\mu}_B)(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \end{aligned} \quad (6.95)$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß der Maximum-Operator komplementär zu seinem Widerpart, dem Minimum-Operator, definiert werden sollte. Es empfiehlt sich daher letzteren „pessimistisch“ arbeiten zu lassen und durch ihn immer den kleineren Wert auszuwählen.

6.8.1.5 Fuzzy-Relationen

Die bisherigen Verknüpfungen zielen lediglich auf Fuzzy-Mengen ein und derselben Grundmenge ab. Nunmehr soll dazu übergegangen werden, Fuzzy-Sets unterschiedlicher Grundmengen in Relation zu setzen. Dies bewerkstelligt man unter Zuhilfenahme des *kartesischen Produkts*, womit Regeln der Form

$$\text{IF } p \text{ THEN } c \quad (6.96)$$

modelliert werden. Eine Regel, die auch als *Implikation* bezeichnet wird, besteht aus einer Prämisse p und einer Konklusion c . Geht man davon aus, daß die Prämisse p durch das Fuzzy-Set X_1 und die Konklusion c durch das Fuzzy-Set X_2 beschrieben sind, so definiert das *kartesische Produkt* die entstehende unscharfe Ausgangsmenge X .

Definition 6.3. Fuzzy-Relationen Gegeben seien X_1 und X_2 zwei Merkmalsräume bzw. Mengen, die durch ihre Zugehörigkeitsfunktionen μ_1 und μ_2 festgelegt sind. Die Fuzzy-Relation $\mu_R(x_1, x_2): X_1 \times X_2 \rightarrow [0, 1]$ beschreibt die Fuzzy-Menge X , wobei die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_R(x_1, x_2)$ jedem Element (x_1, x_2) aus dem kartesischen Produkt $X_1 \times X_2$ den Zugehörigkeitsgrad aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet. ◇

Hand in Hand mit der von Zadeh erfundenen Fuzzy-Logik geht die ebenfalls von ihm entwickelte Theorie des *unscharfen Schließens* (engl.: *approximate reasoning*). Ansatzpunkt dafür ist das soeben vorgestellte kartesische Produkt, welches Beziehungen zwischen unterschiedlichen Grundmengen festhält. Ebenso wie bei den Fuzzy-Verknüpfungen wird nun dem kartesischen Produkt ein Operator zugeordnet. Diese Zuordnung hängt vom jeweiligen Anwendungsfall ab. Sehr häufig werden unter anderem eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{Minimum-Operator: } & \mu_R(x_1, x_2) = \min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)) \\ \text{Produkt-Operator: } & \mu_R(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) \cdot \mu_2(x_2) \end{aligned} \quad (6.97)$$

Falls die Prämisse selbst aus unterschiedlichen Fuzzy-Sets, die mit OR, AND oder NOT verknüpft sind, aufgebaut ist, können diese Verknüpfungen wiederum auf die zuvor besprochenen Operatoren max, min und Komplement abgebildet werden. Die Auswertung einer Regel bzw. der Gesamtheit aller Regeln, die zu einer Regelbasis zusammengefaßt sind, wird *Inferenz* genannt und näher auch anhand eines praktischen Anwendungsbeispiel im Abschn. 6.8.2.3 behandelt.

6.8.2 Fuzzy-Regler

Schwamm drüber!

Genee, „Der Bettelstudent“

Auf den ersten Blick nach den Erfahrungen der vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels erscheint die Idee, mit Hilfe von Fuzzy-Set-Theorie Regelungstechnik betreiben zu wollen, höchst fragwürdig. Schließlich hat doch die Regelungstechnik den Ruf von Exaktheit, so z.B. die Beschreibung des zeitlichen Verhaltens einer bestimmten Regelstrecke bei Anregung mit einer eingangsseitigen Funktion durch Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die gesamte Theorie wird aber extrem aufwendig, wenn die stets genannte Voraussetzung konstanter Koeffizienten fallengelassen werden muß. Ein praktisches Beispiel hierzu ist die Wärmeleitzahl α bei einem Drehrohrofen zur Zementherstellung, die sich mit zunehmender Betriebsdauer verändert. Eine möglichst gute Regelung einer Drehrohrofenheizung erweist sich hier durch einen herkömmlichen Regler als äußerst schwierig zu realisieren. Der Mensch hingegen als *Dispatcher* auf einer Betriebsleitzentrale nimmt seine weitreichende Erfahrung zu Hilfe und führt Stellhandlungen durch, die zu einem guten betrieblichen Ergebnis führen, ohne zuvor einen bestimmten Temperaturwert auf $\pm 0.1 {^{\circ}\text{C}}$ genau gemessen zu haben. So ist es die grundlegende Idee dieses Ansatzes mit Fuzzy-Sets, die Erfahrung eines menschlichen Prozeßoperateurs in das Design des Reglers einzfließen zu lassen.

Basierend auf einem Satz von *Regeln*, die die regelungstechnische Vorgehensweise des Prozeßoperateurs widerspiegeln, wird ein Regelalgorithmus konstruiert, der Fuzzy-Sets benutzt. Der hauptsächliche Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, „Daumenregeln“, „intuitives Verhalten“, „Erfahrung“, „Heuristiken“ u.ä. mit in den Entscheidungsprozeß einzubinden sowie - und das ist ein sehr entscheidender Vorteil - daß kein exaktes Prozeßmodell benötigt wird.

Zwischenzeitlich hat es sich bereits als vorteilhaft erwiesen, für die Regelung komplexer Prozesse den Entscheidungsprozeß des menschlichen Operateurs nachzubilden.

Da hier eine gewisse Nähe zu Expertensystemen vorliegt, erscheint es sinnvoll, eine Abgrenzung zwischen *Expertensystemen* und *Fuzzy-Controllern* vorzunehmen. Zimmermann macht hierzu folgende Angaben:

- die existierenden Fuzzy-Controller haben ihren Ursprung in der *Regelungstechnik* und nicht in der *Artificial Intelligence*;
- Fuzzy-Controller sind allesamt *regelbasierte Systeme*
- im Gegensatz zu Expertensystemen haben sie meistens ausschließlich die Aufgabe, technische Systeme zu regeln, das bedeutet, daß ihre Problemdomäne wesentlich kleiner und einfacher als die eines Expertensystems ist;
- im allgemeinen werden die Regeln eines Fuzzy-Controllers nicht von einem Anwendungsexperten, sondern explizit durch den Designer des *Fuzzy-Controllers* festgelegt;
- schließlich sind die Eingangsgrößen *Meßwerte* eines technischen Systems und die Ausgangsgrößen *Stellgrößen*.

Die Fuzzy-Logik hat bei regelungstechnischen Anwendungen das Konzept des Reglers wesentlich beeinflußt. Abbildung 6.51 zeigt einen geschlossenen Regelkreis mit dem technischen Prozeß als *Regelstrecke* und dem *Regler*.

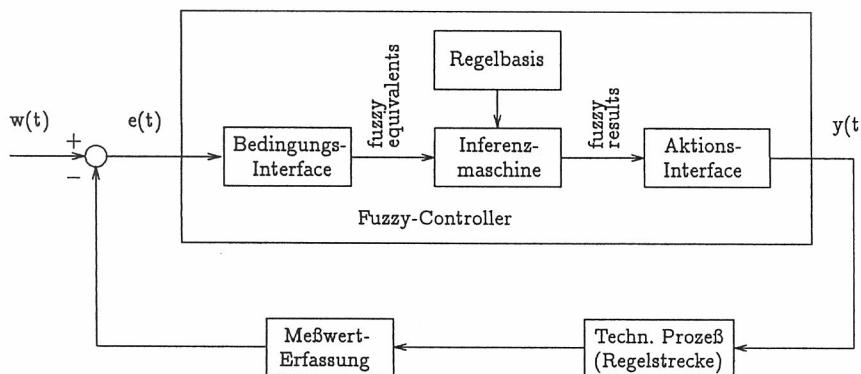


Abb. 6.51. Fuzzy-Controller (Blockdiagramm)

Der *Fuzzy-Controller* muß in dem geschlossenen Regelkreis (der bisher bekannten Struktur) die gleichen Schnittstellen erfüllen wie ein konventioneller Regler, d.h., am Eingang des Reglers wird wie üblich die Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ bereitgestellt. Das Ausgangssignal des Reglers ist die Stellgröße $u(t)$. Um eingangs- und ausgangsseitig diese Signalanpassung zu ermöglichen, bedarf es jeweils eines Interfaces. Am Eingangsinterface ist die Regelabweichung mit Hilfe von Fuzzy-Sets und den festgelegten Zugehörigkeitsfunktionen in ein fuzzy-äquivalentes Datum umzusetzen. Die eigentliche Regelung wird mit einer *Inferenzmaschine* durchgeführt, die auf einen Satz von Regeln (nach denen zu entscheiden ist) zurückgreift. Der Regler arbeitet also als *regelbasiertes System* und kann von daher auch an veränderte regelungstechnische Anforderungen angepaßt werden. Die Ausgangsgröße der Inferenzmaschine als *fuzzy_results* bedarf

mittels des nachfolgenden Interfaces noch der Umsetzung in eine Stellgröße $u(t)$, die geeignet ist, den technischen Prozeß zu steuern.

Bei einem klassischen Regler (z.B. PID-Regler) müssen alle Eingangsgrößen ($w(t)$ und $y(t)$) *scharfe* Werte sein, bei einem Fuzzy-Controller können dies auch *unscharfe* Größen sein. Das bietet z.B. den Vorteil, daß man billige Sensoren verwenden kann, die einen Meßwert nur unscharf wiedergeben. Ebenso kann es sein, daß auch der Sollwert nur ziemlich ungenau/unscharf vorgegeben wird (z.B. bei einer Waschmaschine: Die Wäsche ist *ziemlich schmutzig*). Niemand wird bei der Beurteilung der Verschmutzung die Schmutzpartikel sortieren, zählen und dann eine Maßzahl bilden aus der Anzahl/Größe dieser Partikel im Verhältnis zum Gesamtgewicht der zu waschenden Wäsche).

Viele Regelkreise sollen auch gar nicht so genau arbeiten; z.B. gibt sich ein Autofahrer in der Funktion des Reglers folgende Sollwerte vor: „schnell“, „langsam“, oder „vorsichtig“ fahren! So gibt es in technischen Systemen noch zahlreiche Anwendungen, die für den Einsatz von Fuzzy-Controllern geeignet sind: z.B. ist es bei einer Wohnraumheizungsregelung nicht erforderlich, die Solltemperatur um ± 0.1 °C einzuhalten, und ein U-Bahnzug mit Linienzugbeeinflussung muß nicht (110 ± 0.1) km/h fahren und auf 1 mm genau an einem vorgegebenen Punkt am Bahnsteig anhalten. Bei vielen komplexen Regelkreisen ist eine solche Genauigkeit auch gar nicht möglich, und man ist vielmehr zufrieden, wenn sich die Regelstrecke überhaupt innerhalb vorgegebener Toleranzen regelt.

Auf einen weiteren Vorteil von Fuzzy-Controllern soll abschließend noch hingewiesen werden: Bei manchen regelungstechnischen Anwendungen arbeitet ein Regler mit einer Vielzahl von Signalen/Meldungen vom Prozeß zusammen. Da man die Reaktion des Reglers als regelbasiertes System konzipiert hat, kann man die Systemantwort des Fuzzy-Controllers durch entsprechend hinterlegte Regeln in gewissen Grenzen halten, damit im Fall des Ausfalls eines Sensors oder eines falschen Signals dieses Sensors nicht die Stellgröße unmittelbar an die Grenzen des zugeordneten Wertebereiches gebracht wird (engl.: *smooth system reaction*). Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, daß der aktuelle Wert der Regelabweichung e_i in der Form

$$e_i = 0.1 \cdot e_i + 0.9 \cdot e_{i-1} \quad (6.98)$$

periodisch (Abtastperiode T_a) berechnet wird. Ein Hauptnachteil von Fuzzy-Controllern besteht allerdings zur Zeit noch darin, daß die erforderlichen Erfahrungen mit dieser Systementwurfsmethode noch unvollständig sind. In den nachfolgenden Abschnitten werden nun die wesentlichen Schritte beim Aufbau und bei der Implementierung eines Fuzzy-Controllers diskutiert. Begleitend wird ein kontinuierlich aufgebautes Fallbeispiel die behandelte Theorie in die Praxis umsetzen und so zur besseren Verständlichkeit der behandelten Materie beitragen. Die Aufgabenstellung kann kurz folgendermaßen umrissen werden:

Beispiel 6.2. Es gilt, einen Fuzzy-Controller zur Steuerung eines Ventils zu entwickeln. Die Stellung (ξ) des Ventils regelt die Brennstoffzufuhr einer Heizung in Abhängigkeit von den gemessenen Werten der beiden Eingangsgrößen *Temperatur* (T) und *Temperaturgradient* ($\delta = \frac{dT}{dt}$). Abbildung 6.52 gibt die Aufgabenstellung als Blockschaltbild wieder.

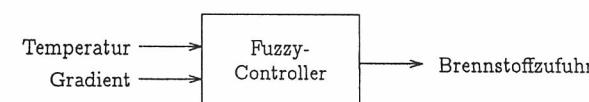


Abb. 6.52. Fuzzy-Controller

6.8.2.1 Fuzzifizierung

Bei der *Fuzzifizierung* (deutsch: *Verunschärfung*) werden die Zugehörigkeitswerte aller linguistischen Elementaraussagen, die die Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen des *Fuzzy-Reglers* betreffen, bestimmt. Die Anzahl der gewählten linguistischen Terme sowie der Grad der Überlappung einzelner unscharfer Mengen ist vom jeweiligen Anwendungsfall abhängig und bleibt dem Entwickler des *Fuzzy-Reglers* vorbehalten.

Beispiel 6.3. Die Ränder der Wertebereiche der linguistischen Variablen T , δ und ξ wurden durch trapezförmige Fuzzy-Mengen abgedeckt. Für die Zwischenbereiche finden überwiegend dreiecksförmige Fuzzy-Mengen Verwendung. Abbildung 6.53 verdeutlicht, daß scharfe Eingangs- oder Ausgangswerte zu mehr als einer Fuzzy-Menge gehören können. So wurde eine Temperatur von 10°C als *sehr kalt* bis *kalt* eingestuft. Eine Temperaturabnahme um $2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ wurde jedoch eher als *null* bewertet.

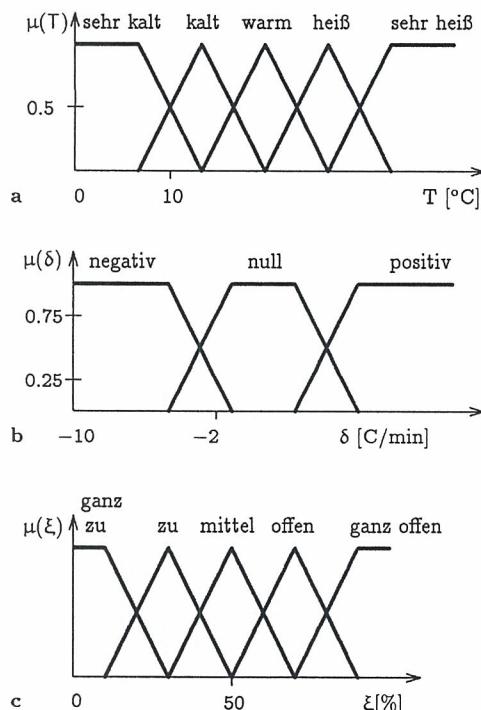


Abb. 6.53. Temperatur (a), Gradient (b) und Ventilstellung (c)

6.8.2.2 Regelbasis

Die Regelbasis enthält sog. Produktionsregeln R_1, R_2, \dots, R_n . In ihr ist das Expertenwissen zur Regelung des technischen Prozesses abgelegt. Diese Regelbasis kann allgemein beschrieben werden als

$$R_k: \text{IF } p_k \text{ THEN } c_k$$

Darin sind

- p_k die *Prämissen* als Funktionen der Eingangsgrößen e des Fuzzy-Reglers. Die Prämissen können durch die Fuzzy-Relationen AND und OR verknüpft sein. Auch das Voranstellen des Fuzzy-Operators NOT ist erlaubt;
- c_k die *Konklusionen* als Aussagen, die sich auf die Ausgangsgrößen u beziehen.

So könnte z.B. eine Regel für die Temperaturregelung lauten:

```
IF (Temperatur = heiß AND Gradient = hoch) OR
  Temperatur = sehr heiß
  THEN Ventilstellung = ganz zu
```

Die in der Regelbasis enthaltenen Regeln sollten das Ergebnis eingehender Systemanalyse eines Prozesses sein und nach Möglichkeit *vollständig* und *widerspruchsfrei* sein. Hierbei handelt es sich für den Informatiker um eine Aufgabe der *Wissensakquisition* und -*verarbeitung* (engl.: *knowledge acquisition and knowledge engineering*). Was bezüglich einer bestimmten Eingangssituation zu entscheiden ist, läßt sich somit mit relativ geringem Aufwand dadurch modifizieren, daß man einfach den Inhalt der Regelbasis verändert.

Beispiel 6.4. Tabelle 6.6 zeigt den Inhalt einer Regelbasis für die beiden Eingangsgrößen T und δ zusammen mit der Konklusion für die Ausgangsgröße ξ . Die Tabelle ist folgendermaßen zu lesen:

$R_1: \text{IF } T = \text{sehr kalt} \text{ AND } \delta = \text{negativ} \text{ THEN } \xi = \text{ganz offen}$

Tabelle 6.6. Regelbasis für die Eingangsgrößen T und δ sowie die Ausgangsgröße ξ

AND	Gradient			
	Temperatur	negativ	null	positiv
sehr kalt	ganz offen	ganz offen	offen	
kalt	ganz offen	offen	offen	
warm	mittel	mittel	zu	
heiß	zu	zu	ganz zu	
sehr heiß	zu	ganz zu	ganz zu	

Man erkennt anhand des Beispiels, daß der Umfang der erforderlichen Regeln durchaus endlich ist und wider Erwarten nicht über alle Grenzen wächst.

Der besondere Vorteil einer Entscheidungsfindung mit Hilfe einer Regelbasis besteht darin, nicht etwa komplizierte Differentialgleichungen lösen und womöglich noch Integraltransformationen anwenden zu müssen, sondern einfach zu überprüfen, welche Regeln der Regelbasis zutreffen („feuern“), um daraus eine Entscheidung abzuleiten. Der besondere Vorteil solcher Regler besteht in einem leicht zu realisierenden Echtzeitverhalten.

6.8.2.3 Inferenz

Unter Inferenz versteht man die Auswertung der Regeln aus der Regelbasis und die anschließende Zusammenfassung der daraus abzuleitenden Handlungsanweisungen (Konklusionen) auf der Grundlage einer speziell implementierten *Entscheidungsstrategie*. Hierbei ist zu beachten, daß man völlig freie Hand bei der Auswahl einer solchen Strategie hat; allein wesentlich ist, daß die gewählte Vorgangsweise zum Erfolg führt. Die Auswertung der Regeln läuft folgendermaßen ab:

1. Ermittlung der *aktiven Regeln*. Zu Beginn werden aus der Regelbasis jene Regeln „gefiltert“, deren Prämisse einen Erfülltheitsgrad größer als null aufweisen.

Beispiel 6.5. Angenommen, zu einem bestimmten Zeitpunkt t wird die Temperatur $T = 10^{\circ}\text{C}$ und der Temperaturabfall von $\delta = 2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ gemessen. Für diese scharfen Eingangswerte sollen die einzigen aktiven Regeln aus einer alternativen Regelbasis lauten:

$$\begin{aligned} R_1: & \text{ IF } T = \text{kalt AND } \delta = \text{negativ THEN } \xi = \text{mittel} \\ R_2: & \text{ IF } T = \text{sehr kalt OR } \delta = \text{null THEN } \xi = \text{offen} \end{aligned}$$

2. Ermittlung der *einzelnen Ausgangs-Fuzzy-Mengen*. Für jede aktive Regel wird der Wahrheitswert (als Zugehörigkeitsmaß) der Prämisse bestimmt. Er gibt an, in welchem Maß die Regel „feuert“. In Abhängigkeit von der realisierten Entscheidungsstrategie liefert die Implikation nun unterschiedliche Zugehörigkeitsmaße. Zwei der wichtigsten Strategien seien erwähnt:

MAX-MIN-Inferenz. Im Bereich Fuzzy-Control ist dieses Schema, das auf *Zadeh* und *Mamdani* zurückzuführen ist, weltweit am meisten benutzt. Die Operatoren werden folgendermaßen auf die Verknüpfungen bzw. Relationen zugewiesen:

$$\begin{array}{lll} \text{OR} & \max & \\ \text{AND} & \min & \\ \text{Implikation} & \min & \end{array} \quad (6.99)$$

Beispiel 6.6. Abbildung 6.54 zeigt, wie die einzelnen Ausgangs-Fuzzy-Mengen im Falle der Eingangsgrößen Temperatur $T = 10^{\circ}\text{C}$ und Temperaturabfall $\delta = 2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ für die MAX-MIN-Inferenz gefunden werden.

MAX-PROD-Inferenz. Bei dieser Inferenz-Strategie verwendet man dieselben Operatoren zur Realisierung der OR- und AND-Verknüpfung, die Implikation wird hingegen durch den Produkt-Operator (\cdot) abgebildet. Zusammengefaßt bedeutet dies:

$$\begin{array}{lll} \text{OR} & \max & \\ \text{AND} & \min & \\ \text{Implikation} & \cdot & \end{array} \quad (6.100)$$

Beispiel 6.7. Abbildung 6.55 zeigt, wie die einzelnen Ausgangs-Fuzzy-Mengen im Falle der Eingangsgrößen Temperatur $T = 10^{\circ}\text{C}$ und Temperaturabfall $\delta = 2^{\circ}\text{C}/\text{min}$ für die MAX-PROD-Inferenz gefunden werden.

3. Ermittlung der *resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge*. Da meist mehrere Regeln aus der Regelbasis gleichzeitig „feuern“, bildet man als Ergebnis der Handlungsanweisungen aller Regeln die unscharfe Menge durch Vereinigung aller unscharfen Mengen.

Beispiel 6.8. Die resultierende Ausgangsmenge für das verwendete Fallbeispiel im Falle der MAX-MIN- bzw. MAX-PROD-Inferenz zeigt Abb. 6.56.

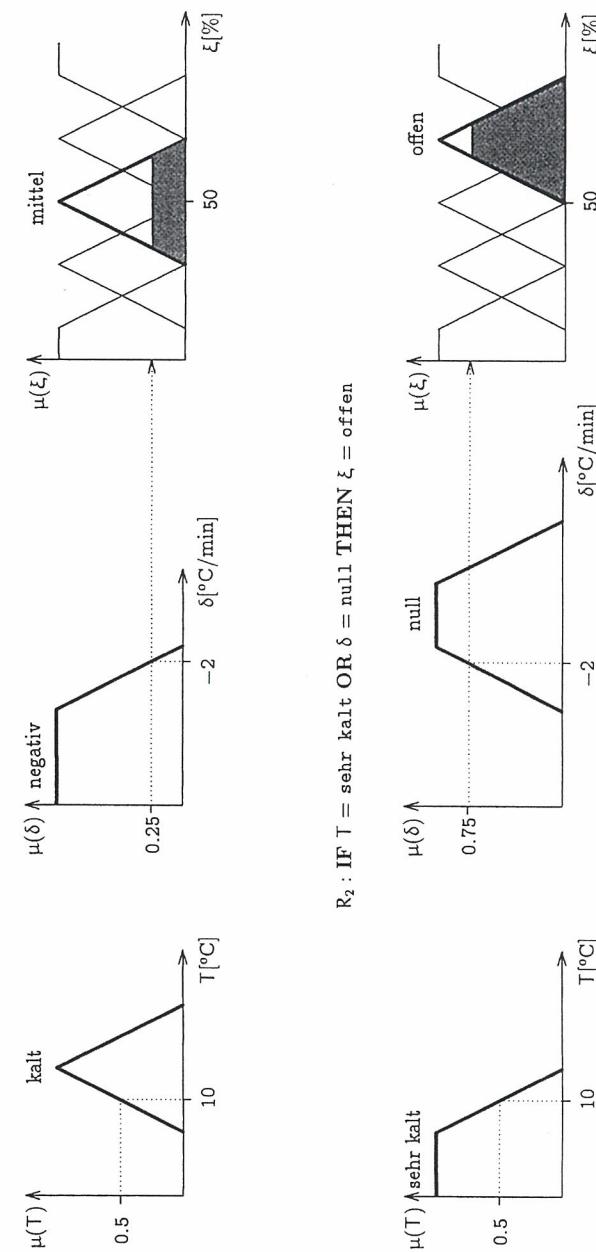


Abb. 6.54. MAX-MIN-Inferenz

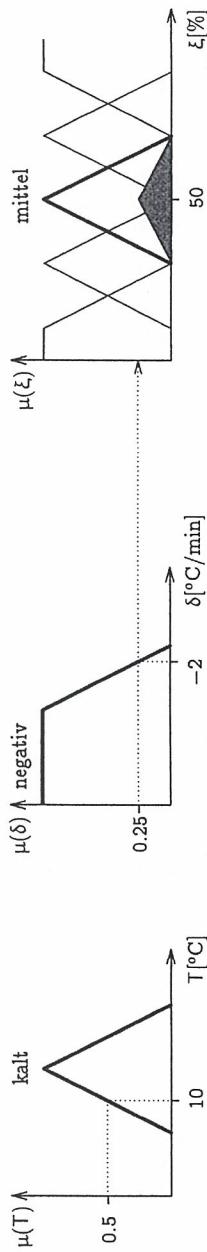


Abb. 6.55. MAX-PROD-Inferenz

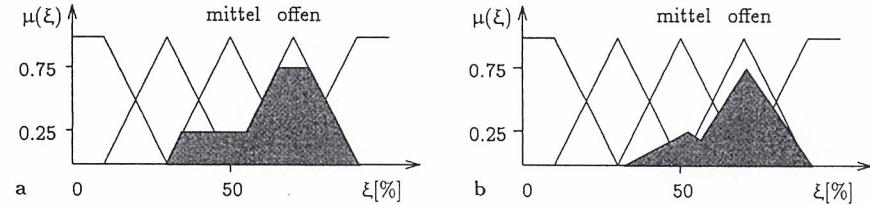
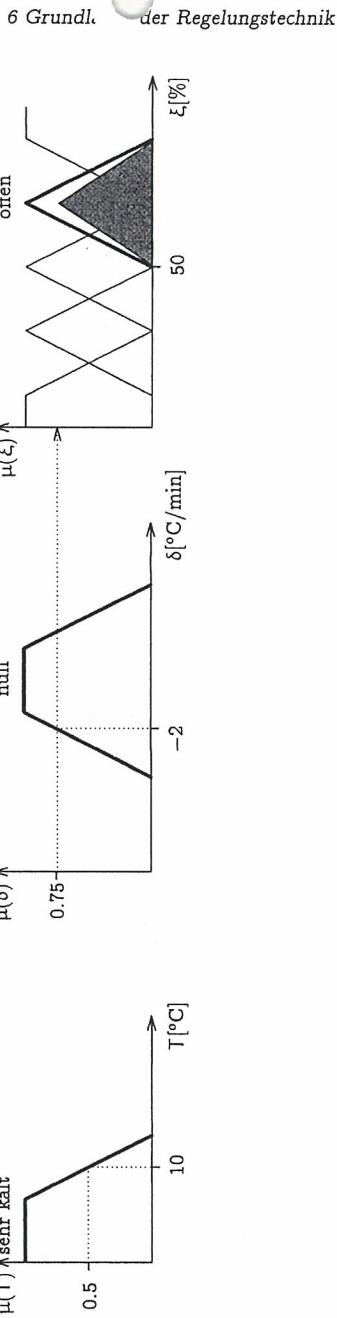


Abb. 6.56. Ausgangsmenge bei MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)

6.8.2.4 Defuzzifizierung

Unter *Defuzzifizierung* versteht man die Ermittlung eines scharfen Wertes u_S aus der unscharfen Menge U , die die Inferenz liefert. Übliche Methoden der Defuzzifizierung sind:

Maximum Height (maximale Höhe). Die *Maximum Height-Methode* liefert als Ausgangsgröße u_S den Wert, für den die Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsmenge U ihr Maximum erreicht. Damit gilt:

$$\mu_U(u_S) = \max \mu_U(u) \quad (6.101)$$

Der Vorteil dieser Methode besteht in der einfachen Berechnung von u_S aus μ_U . Ungünstig ist diese Methode nur dann, wenn in $\mu_U(u)$ mehrere Maxima auftreten.

Beispiel 6.9. Im Falle der MAX-MIN-Inferenz des verwendeten Fallbeispiels würde der Fuzzy-Controller einen beliebigen Wert aus dem Intervall [65, 75] liefern; im Falle der MAX-PROD-Inferenz ergibt sich der eindeutige Wert 70%.

Mean of Maximum (Maximum-Mittelwert). Die *Maximum-Mittelwert-Methode* liefert als Ausgangsgröße u_S das arithmetische Mittel aller Werte, für die die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_U(u)$ maximal ist. Ungünstig ist diese Methode allerdings dann, wenn im μ_U -Verlauf mehrere plateauartige Verläufe (mit der Steigung 0) enthalten sind, auf denen überall der Maximalwert gegeben ist. Außerdem kann der Zugehörigkeitsgrad $\mu_U(u_S)$ unter Umständen sehr klein sein.

Beispiel 6.10. Sowohl die MAX-MIN-Inferenz als auch die MAX-PROD-Inferenz liefern den scharfen Wert 70%.

Center of Gravity (Schwerpunktmethode). Die *Schwerpunkt-Methode* liefert als Ausgangsgröße u_S die u -Komponente des Schwerpunktes der Fläche unter dem $\mu(u)$ -Graphen. Dabei wird die Zugehörigkeitsfunktion als Fläche aufgefaßt. Die scharfe Ausgangsgröße erhält man durch die Berechnung der u -Koordinate des Flächenschwerpunktes nach folgender Berechnung

$$u_S = \frac{\int u \cdot \mu_U(u) \cdot du}{\int \mu_U(u) \cdot du} \quad (6.102)$$

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß der gesamte Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion $\mu(u)$ in die Berechnung des scharfen Wertes u_S eingeht. Nachteilig kann allerdings sein, daß der Zugehörigkeitswert $\mu(u_S)$ unter Umständen sehr klein sein kann.

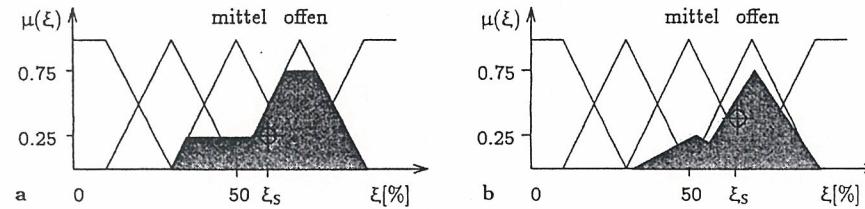


Abb. 6.57. Scharfer Wert für MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)

Beispiel 6.11. Die scharfen Werte bei Anwendung der Schwerpunktmetode sind in Abb. 6.57 schätzungsweise wiedergegeben. Dem interessierten Leser sei die genaue Berechnung zu Studienzwecken überlassen.

Abschließend kann bezüglich der Stellgröße eines Fuzzy-Reglers festgehalten werden, daß es besonders hilfreich ist, wenn die Stellgröße u des Reglers über den ganzen Wertebereich der Regelabweichung hinweg linear verläuft. Dadurch werden insbesondere Stabilitätsuntersuchungen am Regelkreis unterstützt.

Weiterführende Literatur

- Dickmanns, E.: *Systemanalyse und Regelkreissynthese*. Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1984.
- DIN 19226: *Regelungstechnik und Steuerungstechnik: Begriffe und Benennungen*.
- Iserman, R.: *Digitale Regelsysteme*. Berlin: Springer Verlag 1988.
- Kahlert, J.; Frank, H.: *Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control*. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1994.
- Leonhard, W.: *Einführung in die Regelungstechnik*. Braunschweig: Vieweg Verlag, 1981.
- Schildt, G.-H.: *Grundlagen der Impulstechnik*. Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1987.
- Schmidt, G.: *Grundlagen der Regelungstechnik*. Berlin: Springer Verlag, 1982.
- Zimmermann, H.-J.: *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- Zadeh, L.: *Fuzzy-Sets*, Information and Control 8, 1965.