Runde 11, Beispiel 71

LVA 118.181, Übungsrunde 11, 26.01.2007 (entfallen)

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 30.01.2007

1 Angabe

Man löse die folgende partielle Differentialgleichung für $u(x, y)$ durch Zurückführen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

$$u_{xy} + u_x + x + y = 1 \qquad u(x, 0) = 0, u(0, y) = 0$$

1.1 Lösung des Beispiels

Unsere PDG entspricht der Form $u_{xy} + au_x = f(x, y)$, also entsprechend umgeformt: $u_{xy} + 1 \cdot u_x = x - y + 1$.
Somit ist $a = 1$, $f(x, y) = -x - y + 1$.
Die zu verwendenden Lösungsformeln sind:

$$u_x = e^{-ay}(c(x) + \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y) \,\mathrm{d}\, y$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} u_x \,\mathrm{d}\, x + g(y)$$

Daraus berechnen wir:

$$u_x = e^{-y}(c(x) + \int_0^y e^y(-x - y + 1) \,\mathrm{d}\, y) = e^{-y}(x(x) + \int (e^y - e^y x - ye^y \,\mathrm{d}\, y) =$$

$$e^{-y}(c(x) + e^y + e^y - ye^y - xe^y) = c(x)e^{-y} - x - y + 2$$

$$\int u_x \,\mathrm{d}\, x = c(x)e^{-y} - \frac{x^2}{2} - yx + 2x + g(y)$$

Nun setzen wir die Nebenbedingungen ein:

$$u(x, 0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c(x)e^{-0} + 2x - \frac{x^2}{2} + d(0) = 0$$

$$u(0, y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c(0)e^{-y} + d(y) = 0$$

Daraus folgt:

$$c(x) = -2x + \frac{x^2}{2} - d(0) \qquad \Rightarrow \qquad c(0) = -d(0)$$

$$d(y) = -c(0)e^{-y} \qquad \Rightarrow \qquad d(y) = d(0)e^{-y}$$

Betrachten $d(y)$: Entweder ist $d(0) = 0$ und damit $d(y) = 0$ oder $\frac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}(0)} = e^{-y}$, woraus aber wiederum folgt $y = e^y$. Wir betrachten nun $y = e^y$:

$$c(x) = -2x + \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\mathbf{u(x,y) = (-2x + \frac{x^2}{2} - 1)e^{-y} + 2x - \frac{x^2}{2} - xy + e^{-y}}$$