Analysis - UE1

Styll Patrick

23. März 2022

1 - Beispiel 4

Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n + cos\frac{n\pi}{2}(n \geq 0)$.

$n = 0 \rightarrow 1 + cos(0) = 2$
$n = 1 \rightarrow cos\frac{\pi}{2} = -1$
$n = 2 \rightarrow 1 + cos\pi = 0$
$n = 3 \rightarrow cos\frac{3\pi}{2} - 1 = -1$
$n = 4 \rightarrow 1 + cos2\pi = 2$
$\ldots$

Bereits hier sieht man die typische Folge $2, -1, 0, -1$.
Um dieses Verhalten genauer betrachten zu können, bilden wir Teilfolgen:

$(-1)^n$, für $n \geq 0 \rightarrow \{-1, 1\} \rightarrow U_\varepsilon(-1) \wedge U_\varepsilon(1)$

$cos\frac{n\pi}{2}$: für $n\ mod\ 4 \equiv 0 \rightarrow 1$
$n\ mod\ 4 \equiv 1 \rightarrow 0$
$n\ mod\ 4 \equiv 2 \rightarrow -1$
$n\ mod\ 4 \equiv 3 \rightarrow 0$
$\rightarrow \{-1, 0, 1\} \rightarrow U_\varepsilon(-1) \wedge U_\varepsilon(0) \wedge U_\varepsilon(1)$

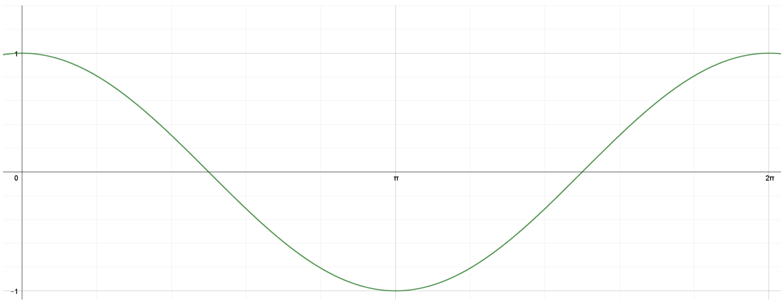

Abbildung 1: Cosinus

Nun kombinieren wir die beiden Teilfolgen, in unserem Falle durch Addition:

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$$
$$+$$
$$\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$$
$$=$$
$$\{2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, \ldots\}$$

$\rightarrow U_\varepsilon(0) \wedge U_\varepsilon(-1) \wedge U_\varepsilon(2)$
Somit hat man die Häufungspunkte der Folge a_n bestimmt.

2 - Beispiel 9

Man zeige, dass a_n konvergiert, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

$$a_n = \frac{sinn+cosn}{\sqrt{n}},\ n \geq 1$$

Hierbei kann das Sandwich-Theorem nützlich sein, da man bei Überlagern von Sinus und Cosinus erkennen kann, dass die Summe niemals größer als 2 und kleiner als -2 sein wird, also $-2 \leq sinn + cosn \leq 2$.

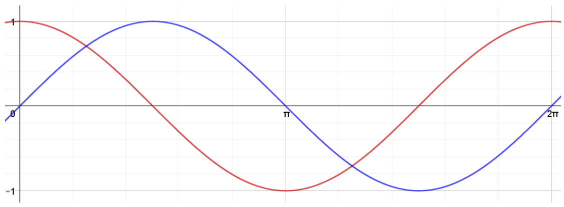

Abbildung 2: Cosinus und Sinus

Dividieren wir durch $\sqrt{n}$, so erhalten wir $\frac{-2}{\sqrt{n}} \leq \frac{sinn+cosn}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Wir erkennen, dass sowohl der linke als auch der rechte Teil der Ungleichung gegen 0 konvergieren. Konsequent muss gemäß Sandwich-Theorem auch der mittlere Teil gegen 0 konvergieren; wir haben somit eine Nullfolge. Man schreibt also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Folgendermaßen gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ und in unserem Falle $|\frac{sinn+cosn}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$.

Wir wissen, dass ohnehin gilt, dass $sinn + cosn < 2$, und durch $a_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ folglich:
$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$
$2 < \varepsilon \cdot \sqrt{n}$
$\frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n}$
$\frac{4}{\varepsilon^2} < n$

Man beachte aber, dass $N \in \mathbb{N}$; deshalb müssen wir aufrunden, wofür wir die Ceiling-Function benutzen. Als Ergebnis haben wir somit:
$N(\varepsilon) = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \rceil$

Definition: *Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (Limes) von a_n, falls in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder von a_n liegen: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$. Hierbei ist $N(\varepsilon)$ ein Index für a_n, ab welchem Folgenglied $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.*

3 - Beispiel 16

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Man zeige, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3a_n - b_n)_{n\in b}$ auch konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c = 3a - b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} c_n = c = 3a - b$, so können wir davon ausgehen, dass für ein bestimmtes N gilt, dass $|c_n - c| < \varepsilon$. Folglich auch (umgekehrte Dreiecksungleichung):

$$|(3a_n - b_n) - (3a - b)| = |(3a_n - 3a) - (b_n - b)| \leq |3a_n - 3a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

So gelte also $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es daher N_1 und N_2, sodass:

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{6}$ für $n > N_1$; dann $|3a_n - 3a| < \frac{3\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}$
$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_2$

Daraus folgt schließlich, dass

$|(3a_n - 3a) - (b_n - b)| \leq |3a_n - 3a| + |b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n > max(N_1, N_2)$
Vergleiche mit obiger Annahme!

4 - Beispiel 19

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie, dass aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Lässt sich hier $\leq$ durch $<$ ersetzen?

So folgt also aus $a_n < b_n$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, dass $a \leq b$.
Am besten lässt sich dies durch einen indirekten Beweis veranschaulichen. So nehmen wir an, dass $a_n < b_n \to a > b$.

Was bedeutet es, dass eine Folge a_n kleiner ist, als b_n? Die Folge a_n muss für alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner sein, als b_n. Konvergiert nun aber die kleinere Folge a_n gegen einen größeren Limes, als b_n, so würde dies unweigerlich dazu führen, dass $a_n \geq b_n$, ein Widerspruch in unserer Annahme! Betrachten wir dies auch in mathematischer Sicht:

Um sicher zu gehen, dass sich die U_ε NICHT überschneiden, nehmen wir $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ an - dies ist ein so kleiner Bereich, dass $U_\varepsilon(a) \neq U_\varepsilon(b)$ und $U_\varepsilon(a) > U_\varepsilon(b)$. Per Definitionem existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wenn nun gilt, dass $n > max\{N_1, N_2\}$:

$$a_n > a - \varepsilon = a - (\tfrac{a-b}{2}) = \tfrac{a+b}{2} = b + \tfrac{a-b}{2} = b + \varepsilon > b_n$$

Wir sehen: $a_n > b_n$ *für* $n > max(N_1, N_2)$ *ist ein direkter Widerspruch zu unserer Annahme, dass stets* $a_n < b_n$. Unser Beweis ist somit abgeschlossen.

Schließlich kann $\leq$ nicht durch $<$ ersetzt werden. So gilt etwa:

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2+1} \to 0$; $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$, siehe auch Abbildung 3.

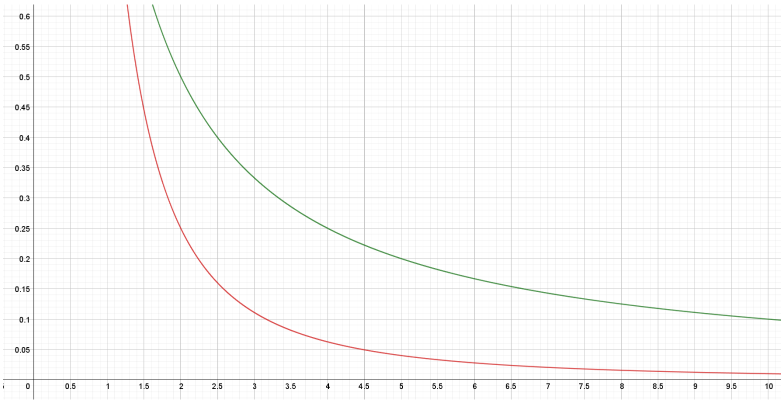

Abbildung 3: $\frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^2+1}$

5 - Beispiel 53

Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = a_n + \tfrac{n}{(n+1)!}, n \geq 0.$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \tfrac{1}{n!}$$

und bestimme den Grenzwert.

(i) Induktionsanfang:

$$n = 0: \quad a_0 = 0 = 1 - \tfrac{1}{0!} = 1 - 1 = 0$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

$$a_n = 1 - \tfrac{1}{n!}$$

(iii) Induktionsbehauptung:

$$a_{n+1} = 1 - \tfrac{1}{(n+1)!}$$

(iv) Induktionsschritt:

$$\begin{gathered} a_{n+1} = a_n + \tfrac{n}{(n+1)!} \\ ^{IV} \rightarrow 1 - \tfrac{1}{n!} + \tfrac{n}{(n+1)!} \\ 1 - \tfrac{n+1}{(n+1)!} + \tfrac{n}{(n+1)!} \\ 1 - \tfrac{1}{(n+1)!} \end{gathered}$$

Unser Induktionsschritt ist äquivalent zu unserer Induktionsbehauptung und der Beweis ist abgeschlossen!

ad Grenzwert: Es ist offensichtlich, dass der Wert $\frac{1}{n!}$ mit zunehmendem n immer kleiner wird, was zur Folge hat, dass $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n!}) = 1$.

6 - Beispiel 57

Man zeige, dass die Folge a_n uneigentlich konvergiert, indem man zu jedem $A > 0$ ein $N(A)$ angebe, sodass für $n > N(A)$ immer $a_n > A$ gilt.

$$a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$$

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, deren Glieder beliebig groß werden, d.h., für die gilt

$$\forall K > 0 \exists N(K) \in \mathbb{N} \forall n > N(K) : a_n > K,$$

heißt uneigentlich konvergent, und man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Uneigentliche Konvergenz können wir dadurch beweisen, indem wir ein b_n finden, welches ebenso uneigentlich konvergiert, für das aber $a_n \geq b_n$ gilt - es konvergiert also langsamer gegen ∞ als a_n. Finden wir hierfür ein $M(A) = A = m_0$, sodass für $n > m_0$ immer $b_n > A$ gilt, können wir durch die Ungleichungskette $a_n \geq b_n > A$ behaupten, dass $M(A)$ auch für a_n gilt und somit zu $N(A)$ gleichgesetzt werden kann.

Man setze nun $b_n = n^2$, wobei $n \neq 1$. Konsequent beweise man nun, dass $a_n \geq b_n$ gilt:

$\frac{n^3+1}{n-1} \geq n^2$
$\frac{n^3+1}{n-1} - n^2 \geq 0$
$\frac{n^3+1-n^2(n-1)}{n-1} \geq 0$
$\frac{n^3+1-n^3+n^2}{n-1}$
$\frac{1+n^2}{n-1} \geq 0 \quad \to$ Zähler immer positiv
$n - 1 \geq 0$
$n \geq 1 \land n \neq 1 \Rightarrow n > 1$

Wir sehen also, dass $b_n < a_n$ für alle $n > 1$ gilt. Hieraus können wir nun schließen, dass $N(A) = \lceil A^2 \rceil$ und der Beweis ist abgeschlossen.