

Logik & Formale Modellierung in der Informatik

Grundzüge digitaler Systeme

Vortrag von: Martin Riener

Was bedeutet Modellierung?

Was bedeutet Modellierung?

Modell

Abstrakte, vereinfachte Darstellung eines komplexen Sachverhalts – der „Realität“ – die nur die für relevant erachteten Aspekte enthält.

Aspekte: Komponenten sowie ihre Beziehungen und Eigenschaften

Deskriptive Modelle zur Analyse komplexer Systeme:

- Modell kommt nach der Realität.
- Modell wird angepasst und korrigiert, bis es die Realität wiedergibt.
- Kritischer Vergleich der Voraussagen des Modells mit der Realität.

Präskriptive Modelle zur Konstruktion von Systemen:

- Modell kommt vor dem realen System.
- System wird angepasst und korrigiert, bis es dem Modell entspricht.
- Kritischer Vergleich des Systemverhaltens mit dem Modell.

Modellierungssprachen: zur Beschreibung und Kommunikation des Modells

Natürliche Sprachen

- Basis jeder Kommunikation
- bedeutendste Kulturleistung der Menschheit
- universell, vielseitig, ausdrucksstark
- wandlungsfähig

Ein Albtraum für Modellierung und Spezifikation!

- komplex
- mehrdeutig
- unscharf

Natürliche Sprachen

Mehrdeutigkeit und Unschärfe

Mehrdeutigkeit von Wörtern

- Ball – Sportgerät oder Tanzveranstaltung?
- Schild – Hinweisschild oder mittelalterliche Schutzwaffe?
- Rodel – Rodelschlitten oder Sackrodel?
- Rock – Kleidungsstück oder Musikrichtung?
- Schimmel – Pilz oder Pferd?

Unschärfe von Aussagen

Jedes Kind hat ein Lieblingsspielzeug.

- Jedes Kind hat mindestens ein Lieblingsspielzeug?
- Jedes Kind hat genau ein Lieblingsspielzeug?
- Alle Kinder haben das gleiche Lieblingsspielzeug?
- Es gibt genau ein Spielzeug, und das ist das Lieblingsspielzeug aller Kinder?

Formale Sprachen

- konstruiert, „künstlich“
- eingeschränkte Ausdrucksmöglichkeiten
- spezifische Anwendungsgebiete
- Bedeutung präzise festlegbar

Beispiele:

- Mathematische Notationen
- Programmiersprachen
- logische Formelsprachen

Formale Modellierung / Formalisierung / Formale Spezifikation

Übersetzung unpräziser natürlichsprachiger Problemstellungen in unmissverständliche Beschreibungen in einer formalen Sprache

Formale Modellierungssprachen in dieser LVA

Textuelle Sprachen:

- Logische Sprachen: Aussagenlogik, Prädikatenlogik
- Reguläre Ausdrücke
- Formale Grammatiken

Graphische Sprachen:

- Endliche Automaten
- Petri-Netze

Kernaspekte:

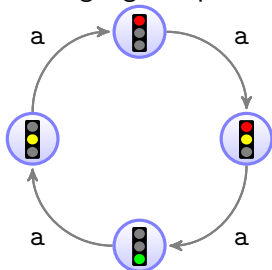
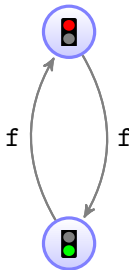
- Syntax: Was ist eine zulässige Äußerung in dieser Sprache?
- Semantik: Was bedeutet jede der zulässigen Äußerungen?
- Ausdruckstärke: Was kann ausgedrückt werden, was nicht?
- Verwendung: Wie setzt man die Sprache zur Modellierung ein?

Ampeln und Automaten

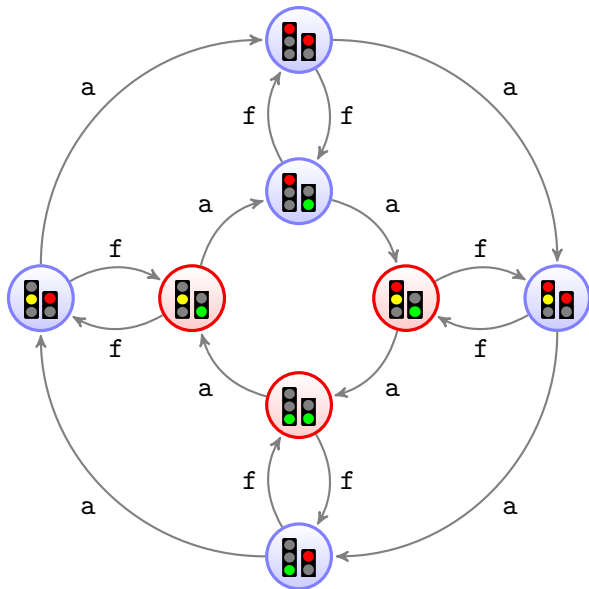


a ... Schaltsignal für Autoampel

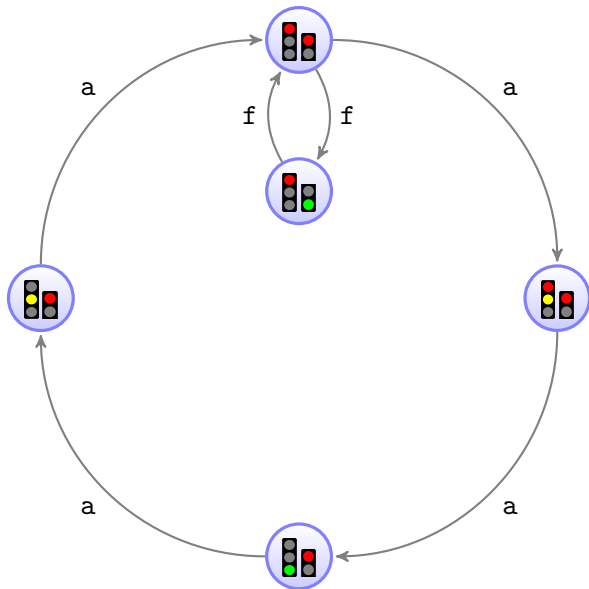
f ... Schaltsignal für Fußgängerampel



Ampeln und Automaten



Ampeln und Automaten



Sudoku und Logik

			9	3		6		5
	5	8	1					
7							2	
				1		8		
1	7						4	3
		3		9				
	4							2
					9	4	3	
2		7		4	5			

Regel

In jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der markierten 3×3 -Quadrate muss jede der Zahlen 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

A_{ijk} ... „In Zeile i , Spalte j steht die Zahl k .“

$$A_{149} \wedge A_{153} \wedge \dots \wedge A_{965} \wedge \bigwedge_{1 \leq i, j \leq 9} F_{ij} \wedge \bigwedge_{1 \leq i, k \leq 9} Z_{ik} \wedge \bigwedge_{1 \leq j, k \leq 9} S_{jk} \wedge \bigwedge_{1 \leq k, l \leq 9} Q_{lk}$$

$$\begin{aligned} \text{one}(X_1, \dots, X_9) &= (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \dots) \\ &\vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \dots) \\ &\vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge \dots) \\ &\vee \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \text{one}(A_{ij1}, \dots, A_{ij9}) \\ Z_{ik} &= \text{one}(A_{i1k}, \dots, A_{i9k}) \\ S_{jk} &= \text{one}(A_{1jk}, \dots, A_{9jk}) \\ Q_{lk} &= \dots \end{aligned}$$

Was ist Logik?

Was ist Logik?

Neulich in der U-Bahn

„Stell dir vor, die Julia hat mit dem Mike Schluss gemacht!“

„Logisch, er hat ja was mit der Laura angefangen.“

Was daran ist logisch?

Es ist nicht logisch,

- dass Mike mit Laura anbandelt
- oder dass man bei Untreue Schluss machen muss
- oder dass sich Julia von Mike trennt.

Diese Aussagen können zutreffen oder auch nicht, sie sind aber nicht „logisch“.

Falls man aber akzeptiert,

- dass Mike untreu war
- und dass Untreue zur Trennung führt

dann ist es logisch schlüssig,

- dass sich Julia von Mike trennt.

Mike ist Julia untreu.

x

Wenn Untreue, dann Trennung.

Wenn x , dann y .

Julia trennt sich von Mike.

y

Die Logik untersucht *allgemeine* Prinzipien korrekten *Schließens*.

Schlussfolgerungen (Inferenzen)



Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

} Prämissen, Annahmen
Konklusion, Folgerung

Clipart courtesy FCIT

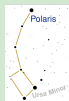
- Die Prämissen sind durch „und“ verbunden.
- Die Linie bedeutet „daher“.
- Wahre Prämissen, wahre Konklusion.
- Gültige Inferenz: Die Konklusion folgt logisch aus den Prämissen.



Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
4 ist eine gerade Zahl.

4 ist durch 2 teilbar.

- wahre Prämissen, wahre Konklusion
- gültige Inferenz
- Inferenzmuster identisch mit vorigem Beispiel



Alle Planeten kreisen um die Sonne.

Der Polarstern ist ein Planet.

Der Polarstern kreist um die Sonne.

- eine wahre und eine falsche Prämisse
- falsche Konklusion
- trotzdem korrekte Inferenz!

Zugrundeliegende Inferenzregel

Alle x sind y .

z ist ein x .

z ist y .

$x \dots$ Mensch, Planet, gerade Zahl

$y \dots$ sterblich, kreisen um die Sonne, durch 2 teilbar

$z \dots$ Sokrates, Polarstern, 4

- x, y, z : Platzhalter (Variablen) für Eigenschaften, Individuen, ...
- Die Logik befasst sich mit den Inferenzregeln.
- Das Anwendungsgebiet bestimmt den Wertebereich der Variablen und die Wahrheit der elementaren Aussagen.

Gültigkeit von Inferenzregeln

Unzulässige Inferenzen

Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

Alle Menschen sind sterblich.

- wahre Prämissen
- wahre Konklusionen
- aber trotzdem keine zulässigen Inferenzen!

Kriterium für die Gültigkeit von Inferenzregeln

Immer wenn alle Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr.

Äquivalentes Kriterium (Umkehrung)

Immer wenn die Konklusion falsch ist, ist mindestens eine Prämisse falsch.

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Inferenzregel:

Alle x sind y .
 z ist y .

 z ist ein x .

- Diese Regel erfüllt nicht das Kriterium.
- Gegenbeispiel: $x = \text{Ball}$, $y = \text{rund}$, $z = \text{Sonne}$



Alle Fußbälle sind rund.
Die Sonne ist rund.

Die Sonne ist ein Fußball.

wahr
wahr
falsch

- Die Inferenzregel ist daher nicht gültig, obwohl sie gelegentlich zu wahren Konklusionen führt. Aber eben nicht immer!

Logische Junktoren (Operatoren, Konnektive, Funktionen)

... ermöglichen die Bildung zusammengesetzter Aussagen, so wie Addition und Subtraktion bei arithmetischen Ausdrücken.

Wenn Feiertag ist oder der Vortragende krank ist, findet die Vorlesung nicht statt.

- „es ist Feiertag“ (x), „Prof ist krank“ (y), „VO findet statt“ (z)
... elementare Aussagen aus dem Uni-Milieu
- Logische Struktur: „Wenn x oder y , dann nicht z “
- Junktoren: wenn-dann, oder, nicht

Weitere Junktoren in ...

- der Aussagenlogik: und, entweder-oder, genau dann-wenn, ...
- Zeitlogiken: morgen, gestern, im nächsten Moment, bis, ...
- Modallogiken: notwendigerweise, möglicherweise, ...
- ...

Quantoren

... ermöglichen Aussagen über die *Anzahl* betroffener Individuen, Zeitpunkte etc.

Jeder Bus wird von einem Mitarbeiter gefahren.

- Wertebereiche: Bus (x) , Mitarbeiter (y)
- Logische Struktur:
„Für alle x gibt es mindestens ein y , sodass y fährt x .“
- Quantoren: für alle, mindestens ein

Weitere Quantoren: einige, viele, mindestens fünf, höchstens drei, immer, manchmal, irgendwann später, ...

Komponenten einer Logik

- **logische Symbole, Variablen:**
notwendig für kompakte und unmissverständliche Schreibung
- **Syntax:** Regeln für Wohlgeformtheit
Wann ist eine Folge logischer Symbole eine Formel?
- **Semantik:** Bedeutung von Formeln
Welche Wahrheitswerte gibt es?
Wann ist eine Formel wahr, wann falsch?
Was bedeuten die Symbole?
- **Konsequenzrelation:**
Wann folgt eine Formel logisch aus anderen Formeln?
- **Inferenzregeln (logischer Kalkül)**
Wie lassen sich Formeln beweisen?

Unterscheidung von Logiken 1/2

... nach Wahrheitswerten:

- Zweiwertige Logik: wahr/falsch
- Mehrwertige Logiken: wahr/falsch/unbekannt/widersprüchlich, ...
- Fuzzy logic: $[0,1]$ (alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1)

... nach Quantoren:

- Aussagenlogik: keine Quantoren
- Quantifizierte Aussagenlogik: Quantoren über Aussagenvariablen
- Prädikatenlogik: Quantoren über Individuenvariablen
- Logiken höherer Stufen: Quantoren über Funktionen und Prädikate

Unterscheidung von Logiken 2/2

... *nach den Ausdrucksmöglichkeiten:*

- Elementare Logik: und, oder, nicht, für alle, ...
- Zeitlogiken: im nächsten Moment, für immer, irgendwann später, ...
- Modallogiken: „ich glaube/weiß, dass“, „es ist möglich/notwendig, dass“, ...

... *nach wahren/beweisbaren Formeln, nach Kalkülen, ...*

- Kalkül: Ein formales System von Regeln um aus gegebenen Formeln neue Formeln (systematisch) abzuleiten.