**praktische Beispiele**

1.) Gegeben ist eine Produktionsfunktion

$$P(x,y,) = 20x^{0,4}y^{0,6}$$

Gesucht sind die Werte von x und y beim Produktionsmaximum mit

$$8x + 3y = 10000$$

---

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,\lambda) &= \left(20x^{0,4}y^{0,6}\right) + \lambda(8x+3y-10000) \\
\Phi_x &= 8x^{-0,6}y^{0,6} + 8\lambda = 0 \\
\Phi_y &= 12x^{0,4}y^{-0,4} + 3\lambda = 0 \\
\Phi_\lambda &= 8x + 3y - 10000 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8x^{-0,6}y^{0,6}}{12x^{0,4}y^{-0,4}} &= \frac{8\lambda}{3\lambda} \\
\frac{8y}{12x} &= \frac{8}{3} \\
8y &= 32x \\
y &= 4x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8x + 3y &= 10000 \\
20x &= 10000 \\
x &= 500 \\
y &= 2000
\end{aligned}$$

2.) Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2x_{n+2} + 3x_{n+1} - 5x_n = 42$$

zu den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 14
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
2x_{n+2} + 3x_{n+1} - 5x_n &= 42 \\
x_{n+2} + \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{5}{2}x_n &= 21
\end{aligned}$$

homogene Lösung:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} + \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{5}{2}x_n &= 0 \\
\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{2} &= 0 \\
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= -2,5 \\
x_n^{(h)} &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \\
x_n^{(h)} &= c_1 + c_2\,(-2,5)^n
\end{aligned}$$

partikuläre Lösung (unbestimmter Ansatz):

$$\begin{aligned}
s_n &= 21 \\
x_n &= A \\
\text{(Teil der homogenen Lösung)} & \\
\Rightarrow x_n &= An
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\,(n+2) + \frac{3}{2}A\,(n+1) - \frac{5}{2}An &= 21 \\
An + 2A + \frac{3}{2}An + \frac{3}{2}A - \frac{5}{2}An &= 21 \\
\frac{7}{2}A &= 21 \\
A &= 6
\end{aligned}$$

$$x_n^{(p)} = 6n$$

Lösung zur Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= c_1 + c_2\,(-2,5)^n + 6n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= c_1 + c_2 = 1 \\
x_1 &= c_1 - 2,5c_2 + 6 = 14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 - c_2 \\
\Rightarrow 1 - c_2 - 2,5c_2 + 6 &= 14 \\
-3,5c_2 &= 7 \\
c_2 &= -2 \\
\Rightarrow c_1 &= 1 - (-2) \\
c_1 &= 3
\end{aligned}$$

**Theorie Beispiele**

3.) Integration von Vektorfeldern:

- Begriffe: Skalafeld, Vektorfeld, Gradientenfeld, Stammfunktion
- Wann besitzt ein Vektorfeld eine Stammfunktion?
- Beispiele: ein Vektorfeld mit und eines ohne Stammfunktion in $\Re^3$

4.) Lagrange-Interpolation:

- Eigenschaften der Lagrange Polynome

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

  Herleitung des Lagrange'schen Interpolationspolynoms

- Beispiel zum Veranschaulichen des Lagrange Ansatzes