
Prüfungsbeispiel 12

2) Von einem Betrieb liegen die jährlichen Umsätze von 1981 bis 1990 vor:

Jahr	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Umsatz	15.3	16.1	17.2	17.5	18.1	18.6	18.9	19.9	21	21.9

a) Wählen Sie einen linearen Regressionsansatz und schätzen Sie die Parameter a , b und σ^2 .

Vorbereitungen:

$$\sum x_i = 855$$

$$\sum x_i^2 = 73185$$

$$\bar{x} = 85,5$$

$$\sum y_i = 184,5$$

$$\sum y_i^2 = 3442,79$$

$$\bar{y} = 18,45$$

$$\sum x_i y_i = 15830,7$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2) = 9,166$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} (\sum y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2) = 4,307$$

(i) Gleichung der Regressionsgeraden:

$$\hat{y}(x) = \hat{a} + \hat{b}(x - \bar{x})$$

$$\hat{a} = \bar{y} = 18,45$$

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}}{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{15830,7 - 10 \cdot 85,5 \cdot 18,45}{73185 - 10 \cdot 85,5^2} = 0,678$$

$$\boxed{\hat{y}(x) = 18,45 + 0,678(x - \bar{x})}$$

(ii) Schätzung für σ^2 : Fehlervarianz

$$s^2 = \frac{n-1}{n-2} (s_y^2 - \hat{b}^2 \cdot s_x^2)$$

$$s^2 = \frac{9}{8} (4,307 - 0,678^2 \cdot 9,166)$$

$$\underline{\underline{s^2 = 0,1052}}$$

b) Ermitteln Sie den erwarteten Umsatz für das Jahr 1991 und geben Sie dafür ein 95% - Konfidenzintervall an.

(i) Umsatz 1991

$$\hat{y}(x) = \hat{a} + \hat{b}(x - \bar{x})$$

$$\hat{y}(91) = 18,45 + 0,678 \cdot (91 - 85,5)$$

$$\underline{\underline{\hat{y}(91) = 22,179}}$$

(ii) Konfidenzintervall Umsatz 1991:

$$\begin{aligned} \hat{y}_x &\pm t_{n-2; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot s_x^2}} \\ \hat{y}_{91} &\pm 2,306 \cdot \sqrt{0,1052} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(91 - 85,5)^2}{9 \cdot 9,166}} = \\ \hat{y}_{91} &\pm 2,306 \cdot 0,3243 \cdot \sqrt{0,1 + 0,367} = \\ \hat{y}_{91} &\pm 0,511 \Rightarrow \underline{\underline{21,668 \leq \hat{y}_{91} \leq 22,690}} \end{aligned}$$