Übungsblatt 5 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

29.) Man betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0.$$

Wie man sofort nachrechnet, ist eine Lösung dieser Dgl. gegeben durch $y = e^x$. Man finde nun mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)e^x$ eine zweite, unabhängige Lösung dieser Dgl. und damit die allgemeine Lösung.

30.) Man zeige, daß die Ricatti-Dgl.

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad Q(x) \neq 0,$$

durch die Substitution

$$y(x) = \frac{u'(x)}{Q(x)u(x)}$$

in eine lineare Dgl. zweiter Ordnung für $u(x)$ übergeführt wird.

31.) Man löse das AWP

$$y'' + y = \tan(x), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

mittels Variation der Konstanten (eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Dgl ist geg. durch $\{\cos(x), \sin(x)\}$).
Bemerkung: $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C$.

32.) Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L von 0.05 Henry, einem Widerstand R von 20 Ohm, einem Kondensator C von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, daß für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t)$.

33.) Man bestimme die Laplace-Transformierten von folgenden Funktionen.

(a) $f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) d\tau$,

(b) $f_2(t) = \sin^3(t)$.
Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).

34.) Man zeige mittels partieller Integration, daß

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{t \to 0, t > 0} f(t)$.

35.) Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9, \;\; y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

Runde 5, Beispiel 29

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 20.11.2006

1 Angabe

Man betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$$

Wie man sofort nachrechnet, ist eine Lösung dieser Dgl. gegeben durch $y = e^x$. Man finde nun mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)e^x$ eine zweite, unabhängige Lösung dieser Dgl. und damit die allgemeine Lösung.

2 Lösung des Beispiels

Zunächst Vorbereiten des Ansatzes:

$$\begin{gathered} y(x) = c(x)e^x, \\ y'(x) = c'(x)e^x + c(x)e^x \\ y''(x) = c(x)e^x + 2c'(x)e^x + c''(x)e^x \end{gathered}$$

Einsetzen in gegebene Gleichung:

$$\begin{gathered} x(c''(x)e^x + 2c'(x)e^x + c(x)e^x) - (x+2)(c'(x)e^x + c(x)e^x) + 2c(x)e^x = 0 \\ xc''(x) = -(x-2)c'(x) \\ \frac{c''(x)}{c'(x)} = \frac{-(x-2)}{x} = -1 + \frac{2}{x} \\ \text{Setze} \quad c'(x) = u(x) \\ \ln|u|) - x + 2\ln|x| \\ c'(x) = u(x) = \frac{x^2}{e^x} \\ c(x) = \int c'(x)\partial x = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\partial x = \\ -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\partial x = -e^{-x}(x^2+2x+2) \\ \mathbf{y(x)} = e^x \cdot c(x) = e^x \cdot e^{-x} \cdot (x^2+2x+2) = \mathbf{x^2 + 2x + 2} \end{gathered}$$

Runde 5, Beispiel 30

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 22.11.2006

1 Angabe

Man zeige, dass die Riccati-Dgl

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \qquad Q(x) \neq 0$$

durch die Substitution

$$y(x) = \frac{u'(x)}{Q(x)u(x)}$$

in eine lineare Dgl. zweiter Ordnung für $u(x)$ übergeführt wird.

2 Lösung des Beispiels

$$y(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)u(x)}$$

$$y'(x) = \frac{u''Qu - u'(Qu)'}{(qu)^2}$$

$$y'(x) = \frac{u''Qu - u'Q'u - U'^2Q}{Q^2u^2}$$

$$\frac{u''Qu - u'Q'u - U'^2Q}{Q^2u^2} + P\frac{u'}{Qu} + Q\frac{u'^2}{Q^2u^2} = R$$

$$\frac{u''Qu - u'Q'u + Pu'Qu}{Q^2u^2} = R$$

$$\frac{u''}{Qu} - \frac{u'}{Qu} \cdot \frac{Q'}{Q} + \frac{Pu'}{Qu} = R$$

$$u'' - u' \cdot \frac{Q'}{Q} + u' = RQu$$

$$\mathbf{u'' + u(P - \frac{Q'}{Q}) - RQu = 0}$$

Runde 5, Beispiel 31

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man löse das AWP

$$y'' + y = \tan(x), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

mittels Variation der Konstanten (eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Dgl ist geg. durch $\{\cos(x), \sin(x)\}$.
Bemerkung:

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \partial x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}) + C)$$

2 Lösung des Beispiels

Das Fundamentalsystem lautet:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan x \end{pmatrix}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\tan x \cdot \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} =$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \underbrace{-\frac{1}{\cos x} + \cos x}_{\int}$$

$$\Rightarrow \; c_1 = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}) + \sin x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & x \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{1} = \cos x \cdot \tan x = \underbrace{\sin x}_{\int}$$

$$\Rightarrow \; c_2 = -\cos x$$

$$y(x)_p = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x + \sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x$$

$$y(x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x - -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x$$

$$\text{AWP: } c_3 = 0$$

$$y'(xx) = -c_3 \sin x + c_4 \cos x - \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad c_4 = 2$$

$$\mathbf{y(x) = 2\sin x - -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x}$$

Runde 5, Beispiel 32

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L von 0.05 Henry, einem Widerstand R von 20 Ohm, einem Kondensator C von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ('Batterie') von $E = E(t) = 100cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, dass für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)\partial\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{\partial i(t)}{\partial t} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)\partial\tau = E(t)$.
Weitere Anmerkung (von mir): 1 Mikrofarad = 0.000001 Farad!

2 Lösung des Beispiels

Ergibt Differentialgleichung (rechte Seite musste abgeleitet werden!)

$$L \cdot I'' + R \cdot I' + \frac{1}{C} \cdot I = -200\dot{1}00 \cdot \sin(200t)$$
$$\lambda^2 + 400\lambda = 200000 \qquad \text{char.Polynom}$$
$$\lambda_{1,2} = -200 \pm j \cdot 400 \qquad \text{konj. komplex}$$
$$y_h = e^{-200t}(c_1 \cos(400t) + c_2 \sin(400t))$$
$$s(x) = A\sin(200t) + B\cos(200t) \qquad \Rightarrow A = -2, By_p = -2\sin(200t) + \cos(200t)$$

Lösung des AWP $i(0) = 0$ mit $q(t) = \int_{x=0}^{t} i(t)\partial t$ $(q(0) = 0)$:

$$i(t) = e^{-200t}(-\cos(400t) + \frac{1}{2}\sin(200t) + \cos(200t))$$

Runde 5, Beispiel 33

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man bestimme die Laplace-Transformierten von folgenden Funktionen.
(a) $f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) \partial\tau$
(b) $f_2(t) = \sin^3(t)$. Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodass $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).

2 Theoretische Grundlagen: Rechenregeln bei der $\mathcal{L}$-Transformation

2.1 Standard-Transformationen

$f(t)$	$F(s)$
$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

2.2 Integration im Zeitbereich

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)}$$

2.3 Multiplikationssatz

$$\mathcal{L}(t \cdot F(t)) = -\frac{\partial}{\partial s} F(s)$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 a

$$f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) \partial\tau$$

Wenn man ein Integral $\mathcal{L}$-transformieren will laut Integrationssatz:

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)}$$

Zur Berechnung von $\mathcal{L}(f(t)), f(t) = t \cdot \sin(t)$ ist er Multiplikationssatz anzuwenden:

$$\mathcal{L}(t \cdot F(t)) = -\frac{\partial}{\partial s} F(s)$$

Somit bleibt nur noch $g(t) = \sin(t)$, was laut Formeltabelle $G(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega}$. Die Ableitung ergibt:

$$-\frac{\partial}{\partial s} G(s) = \frac{2 \cdot s}{(s^2+1)^2},$$

welche man dan noch in den Integrationsatz einsetzen muss:

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)} = \frac{\mathbf{2}}{(\mathbf{s^2+1})^2}$$

3.2 b

$f_2(t) = \sin^3(t)$. Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodass $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).
Die für uns wichtigen Formeln lauten:

1. $sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$
2. $sin(\alpha) \cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}(sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta))$

Diese Formeln wenden wir zur Vereinfachung wie folgt an:

$$f(t) = \sin t \cdot \sin t \cdot \sin t = (\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot t))) \cdot \sin t =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \sin t - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot t) \cdot \sin t = \frac{1}{2} \cdot \sin t - \frac{1}{4} \cdot (-\sin(t) + \frac{3}{4}\sin(3 \cdot t)) =$$
$$\frac{3}{4} \cdot \sin t - \frac{31}{4} \cdot \sin(3 \cdot t)$$

Nun die Transformation:

$$\mathcal{L}(\mathbf{f(t)}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s^2+1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{s^2+9}}$$

Runde 5, Beispiel 34

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man zeige mittels partieller Integration, dass

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, dass $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von f(t) bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{t\to 0, t>0} f(t)$.

2 Lösung des Beispiels

3 Kurze Lösung

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0^+)$$
$$\int e^{-st} f'(t)\partial t = s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\partial t$$
$$e^{-st} f(t)|_0^\infty + s \int e^{-st} f(t)\partial t =$$
$$= s \cdot F(s) + \lim t \to \infty f(t)e^{-st} - \lim t \to 0 f(t)e^{-st} - f(0^+)$$

4 Lösung mit Background

Sei $f(t)$ im Intervall $]0, \infty[$ differenzierbar und die Ableitung $f'(t)$ $\mathcal{L}$-transformierbar. Nach Definition ist dann $f'(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ (sogar absolut) integrierbar und es gilt

$$\int_0^T f'(t)\partial t = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^T f'(t)\partial t = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(T) - f(\epsilon) = f(T) - \lim_{\epsilon\to 0^+} f(\epsilon)$$

Also existiert der Grenzwert

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Setzt man voraus, daß $f(t)$ höchstens exponentielles Wachstum hat, so folgt für alle hinreichend großen s mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t = \underbrace{e^{-st} f(t)|_{t=0}^{t\to\infty}}_{=0} + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\partial t$$

Allgemeiner kann man so schließen: Sei $s > 0$ und das $\mathcal{L}$-Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t) \partial t$$

der Ableitung konvergent. Seien

$$\begin{gathered} \psi(x) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \partial t, \\ g(x) = e^{sx} \psi(x), \\ h(x) = e^{sx}. \end{gathered}$$

Zu zeigen ist:

$$F(s) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

existiert und es gilt:

$$sF(s) + f(0^+) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t$$

ψ,g und h sind differenzierbar, denn f ist stetig. Es gilt $h'(x) \neq 0$ und $h'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Weiters gilt:

$$\begin{array}{rcl} \frac{g'(x)}{h'(x)} & = & \frac{1}{s} \cdot [s\psi(x) + \psi'(x)] = \frac{1}{s}[s \int_0^x e^{-st} f(t)\partial t + e^{-sx} f(x)] \\ & = & \frac{1}{s}[-e^{-st} f(t)|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x e^{-st} f'(t)\partial t + e^{-sx} f(x)] \\ & = & \frac{1}{s}[\int_0^x e^{-st} f'(t)\partial t + f(0^+)] \\ & \Rightarrow & \frac{1}{s}[\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t + f(0^+)] \end{array}$$

Kann mit l'Hospital nachgeprüft werden. Zusätzlich erhält man $\lim_{x\to\infty} \psi'(x) = lim_{x\to\infty} e^{-sx} f(x) = 0$. Unter den gemachten Voraussetzungen kann also $f(t)$ nur von höchstens exponentiellem Wachstum sein.

<u>(Nicht verlangt, aber interessant in diesem Zusammenhang:) Beispiele für $\mathcal{L}$-transformierbaren Funktionen, deren Ableitungen nicht $\mathcal{L}$-transformierbar sind:</u>

1. $f(t) := \ln t$ ist $\mathcal{L}$-transformierbar, denn $f(t)$ ist in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ absolut integrierbar und der Logarithmus wächs nicht mal linear, geschweige denn exponentiell. Die Ableitung $f'(t) = \frac{1}{t}$ ist nicht $\mathcal{L}$-transformierbar, da das uneigentliche Integral

   $$\int_0^1 e^{-st}\partial t$$

   für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

2. Für $f(t) := 1 - e^{-t}$ ist $f'(t) = e^{-t}$. Das Laplace-Integral von $f'(t)$ konvergiert für $s > -1$, das Laplace-Integral von $f(t)$ nur für $s > 0$.

3. Für $f(t) := e^t \sin t^2$ ist $f'(t) = e^t(\sin t^2 + 2t \cos t^2)$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s = 1$, das $\mathcal{L}$-Integral von $f'(t)$ divergiert für $s = 1$.

4. Für $f(t) := e^{et}\sin^{et}$ ist $f'(t) = e^t e^{et}(\sin e^{et} + e^{et} \cos e^{et})$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s > -1$, das $\mathcal{L}$-Integral von $f'(t)$ divergiert für alle s.

Runde 5, Beispiel 35

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 15.11.2006

1 Angabe

Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 9, y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,
(b) mittels Laplace-Transformation

2 Theoretische Grundlagen: Anfangswertprobleme mit der Laplace-Transformation lösen

Wir betrachten folgendes AWP:

$$y'' + ay' + by = r(t), \qquad y(0) = K_0,\ y'(0) = K_1, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$r(t)$ (Störfunktion) ist der gegebene Input (z.B. in mechanischen oder elektrischen Systemen) und $y(t)$ ist der Output (aus dem Input resultierend).

2.1 Formel aus Kreyszig, 'Advanced Engeneering Mathematics'

Drei Schritte sind zur Lösung mit der $\mathcal{L}$-Transformation durchzuführen:

2.1.1 Aufstellen der subsidiären Gleichung

$Y = \mathcal{L}(y)$ erhalten wir durch die Transformierung der gegebenen Gleichun unter berücksichtigung von

1. $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$,
2. $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$,

was folgende Gleichung ergibt:

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = R(s), \qquad R(s) = \mathcal{L}(r)$$

Nach Zusammenfassung der Y-Terme erhalten wir:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

2.1.2 Lösung der subsidiären Gleichung durch die sog. Transfer-Funktion $Q(s)$ (oft auch $H(s)$ genannt)

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2}a)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$\mathbf{Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)} \qquad (\blacksquare)$$

Wenn $y(0) = y'(0) = 0$ gilt, dan ist $y = RQ$, was wiederum bedeutet:

$$Q = \frac{Y}{R} = \frac{\mathcal{L}(\text{Input})}{\mathcal{L}(\text{Output})}$$

Beachten: Q hängt nicht von $r(t)$ und auch nicht von $y(0)$ und $y'(0)$ ab, sondern nur von den Koeffizienten a und b.

2.1.3 Umkehrung von Y zur Erhaltung von $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$

Berechnung von $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

2.2 Formel aus Vachenauer, 'Höhere Mathematik 2'

Für $Y = \mathcal{L}(y)$ gilt:

$$(s^2Y - sK_0 - K_1) + a(Y - K_0) + bY = F(s)$$

Die Lösung ist

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + \frac{sK_0 + aK_0 + K_1}{s^2 + as + b}$$

Danach Rücktransformation $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$.

3 Lösung des Beispiels

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 9, y'(0) = 6$$

3.1 Ansatzmethode

3.2 Laplace-Transformation

Ich setzte sogleich in die Formel (■) ein:

$$Y(s) = [(s-3)(-9)+6]Q(s) + \underbrace{\frac{6}{1+s}}_{\square} Q(s)$$

$$\square \ \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{1+s}$$

$$Y(s) = (-9s+33)Q(s) + \frac{6}{1+s}Q(s)$$

$$Q(s) = \frac{1}{(s-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

Nach Einsatz von MATLAB (s.u.) erhalte ich:

$$\mathbf{y = 17e^{2x} - 27e^{x} + e^{-x}}$$

Der komplette Rechenweg:

$$(s^2Y - s(-9) - 6) - 3(sY - (-9)) + 2Y = \frac{6}{s+1}$$

$$s^2Y + 9s - 6 - 3sY - 27 + 2Y = \frac{6}{s+1}$$

$$\vdots$$

$$Y = \frac{-9s^2 + 24s + 39}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

Mit Hilfe von Partialbruchzerlegung umformen, und anschließend $\mathcal{L}$-Transformation durchführen:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{27}{s-1} + \frac{17}{s-2} \Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-x} - 27e^{x} + 17e^{2x}$$

Zur Berechnung mit MATLAB (Symbolic Toolbox muss vorhanden sein):

Listing 1: L-Transformation mit MATLAB

```
syms s;
syms z;
a=-3;
b=2;
r=6*exp(-1*z);
rL=laplace(r);
K1=6;
K2=-9;
Q=(s^2+a*s+b)^(-1);
Y=((s+a)*K2 + K1)*Q + rL*Q;
y=ilaplace(Y)
    y =

    -27*exp(t)+17*exp(2*t)+exp(-t)
```

3.3 Ansatzmethode

Die Auflösung des charakteristischen Polynoms der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$
$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$
$$\mathbf{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}}$$

Vorbereiten den Ansatzes, Einsetzen und Berechnung der partikulären Lösung:

$$y_p(x) = Ae^{-x},\ y_p'(x) = -Ae^{-x},\ y_p''(x) = Ae^{-x}$$
$$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 6e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A = 1}$$

Allgemeine Lösung lautet somit:

$$\mathbf{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + e^{-x}}$$

Die spezielle Lösung:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + e^{-x}$$
$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - e^{-x}$$
$$\text{Einsetzen der Anfangswerte}$$
$$I:\ c_1 + c_2 + 1 = -9$$
$$II:\ 2c_1 + c_2 - 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = -2c_1 + 7 \qquad \text{(Einsetzen in I)}$$
$$c_1 + 7 - 2c_1 + 1 = -9 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 17 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 27$$
$$\mathbf{y = 17e^{2x} - 27e^{x} + e^{-x}}$$