413.) geg. $K \subseteq \mathbb{C}$ mit

(i) $\mathbb{R} \subseteq K$, (ii) $1-i \in K$, (iii) $(K,+,\cdot)$ ist Körper

um zu zeigen, dass $K = \mathbb{C}$ sein muss, werden wir zeigen, dass jede bel. kompl. Zahl $z = a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, auch in K sein muss

nämlich: $z = a + b \cdot i = a + b - b + b \cdot i$

$$= (a+b) + (-b) \cdot (1-i)$$

- $-b \in K$ aufgrund (i)
  $1 - i \in K$ aufgrund (ii)
  $\Rightarrow (-b) \cdot (1-i) \in K$ aufgrund (iii), denn K ist abgeschlossen bez. $\cdot$

- $a + b \in K$ aufgrund (i)
  $\Rightarrow (a+b) + (-b) \cdot (1-i) \in K$ aufgrund (iii), denn K ist abgeschlossen bez. $+$

$\Rightarrow z = a + b \cdot i = (a+b) + (-b) \cdot (1-i) \in K$

also gilt: $\mathbb{C} \subseteq K$

da lt. Vor. auch $K \subseteq \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $K = \mathbb{C}$

423.) $\langle R_1, +_1, \cdot_1\rangle$, $\langle R_2, +_2, \cdot_2\rangle$ Ringe

z.z. direkte Produkt $\langle R_1 \times R_2, +, \cdot\rangle$ ist ebenfalls Ring

Nachprüfen aller Ringaxiome

- $\langle R_1 \times R_2, +\rangle$ ist kommutative Gruppe
  - $(a,b),(c,d) \in R_1 \times R_2$
    $\Rightarrow a +_1 c \in R_1$, $b +_2 d \in R_2$, da diese Ringe
    $\Rightarrow (a +_1 c, b +_2 d) \in R_1 \times R_2$, also $R_1 \times R_2$ ist abgeschlossen bez. $+$
  - $+_1$ ist assoziativ in R_1, $+_2$ ist assoziativ in R_2
    also $(a +_1 c) +_1 f = a +_1 (c +_1 f)$, $a, c, f \in R_1$
    $(b +_2 d) +_2 g = b +_2 (d +_2 g)$, $b, d, g \in R_2$

$$\Rightarrow ((a,b) + (c,d)) + (f,g) =$$
$$= (a +_1 c, b +_2 d) + (f,g) =$$
$$= ((a +_1 c) +_1 f, (b +_2 d) +_2 g) =$$
$$= (a +_1 (c +_1 f), b +_2 (d +_2 g)) =$$
$$= (a,b) + ((c,d) + (f,g))$$

$\Rightarrow$ $+$ ist assoziativ in $R_1 \times R_2$

- analog zu vorhin beweist man Kommutativität von + in $R_1 \times R_2$:

  $(a,b)+(c,d)=(a +_1 c, b +_2 d)=(c +_1 a, d +_2 b)=$
  $=(c,d)+(a,b)$

- seien $0_1, 0_2$ die neutral. El. von $(R_1, +_1)$ bzw. $(R_2, +_2)$
  zeigen, dass $(0_1, 0_2)$ neutral. El. von $(R_1 \times R_2, +)$ ist:

  $(0_1, 0_2)+(a,b)=(0_1 +_1 a, 0_2 +_2 b)=(a,b)$
  $=(a,b)+(0_1, 0_2)$

- zeigen, dass $(-a,-b)$ inv. El. bez. + zu (a,b) ist:

  $(a,b)+(-a,-b)=(a +_1 (-a), b +_2 (-b))=$
  $=(0_1, 0_2) = (-a,-b)+(a,b)$

- $\langle R_1 \times R_2, \cdot \rangle$ ist Halbgruppe
  - $R_1 \times R_2$ ist abgeschlossen bez. $\cdot$ zeigt man analog zu Abgeschlossenheit von $R_1 \times R_2$ bez. +
  - Assoziativität von $\cdot$ zeigt man analog zu Assoziativität von +

- Die Distributivgesetze gelten in $\langle R_1 \times R_2, +, \cdot \rangle$
  - $(a,b) \cdot ((c,d) + (f,g)) =$
    $= (a,b) \cdot (c +_1 f, d +_2 g)$
    $= (a \cdot_1 (c +_1 f), b \cdot_2 (d +_2 g)) =$
    $= (a \cdot_1 c +_1 a \cdot_1 f, b \cdot_2 d +_2 b \cdot_2 g)$
    $= (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (f,g)$

    (da Distributivg. in $(R_1, +_1, \cdot_1)$ & $(R_2, +_2, \cdot_2)$ gelten)
  - analog für
    $((c,d) + (f,g)) \cdot (a,b)$

426.) R Ring, $R[[z]]$ formale Potenzreihen mit Koeffizienten in R

Teil 1:

wollen durch Nachweisen der Ringaxiome zeigen, dass $\langle R[[z]], +, \cdot \rangle$ ein Ring ist

- $\langle R[[z]], + \rangle$ ist eine kommutative Gruppe
  - $+$ ist offensichtlich abgeschlossen, da $a_n + b_n \in R, \forall n$
  - $+$ ist kommutativ, da $a_n + b_n = b_n + a_n, \forall n$
  - $+$ ist assoziativ, da $(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n), \forall n$
  - $\mathcal{O} := \sum_{n \geq 0} 0 \cdot z^n$ ist das neutrale Element bez. $+$, wobei $0 \in R$ das neutral. El. bez. $+$ in R sei:

$$a(z) + \mathcal{O} = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n + \sum_{n \geq 0} 0 \cdot z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + 0) \cdot z^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n = a(z)$$

- das zu $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$ inverse El. bez. $+$ ist geg. durch:

$$-a(z) := \sum_{n \geq 0} (-a_n) \cdot z^n, \text{ da}$$

$$a(z) + (-a(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n + \sum_{n \geq 0} (-a_n) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} (a_n + (-a_n)) \cdot z^n = \sum_{n \geq 0} 0 \cdot z^n = \mathcal{O}$$

- $\langle R[[z]], \cdot \rangle$ ist eine Halbgruppe
- $\cdot$ ist offensichtlich abgeschlossen, da $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \in R, \forall n$
- $\cdot$ ist assoziativ: $a(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$, $b(z) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot z^n$, $c(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n$

$$(a(z) \cdot b(z)) \cdot c(z) =$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{l=0}^{n} a_l \cdot b_{n-l} \right) \right) \cdot \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l} \right) \cdot c_{n-k} \right)}_{I} \cdot z^n$$

$$a(z) \cdot (b(z) \cdot c(z)) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-k} b_l \cdot c_{n-k-l} \right) \right)}_{II} \cdot z^n$$

wollen zeigen, dass $I = II$ (unter Verwendung der Ringaxiome von R)

$$I = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l} \right) \cdot c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (a_l \cdot b_{k-l}) \cdot c_{n-k} =$$

Summen vertauschen $= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} (a_l \cdot b_{k-l}) \cdot c_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} a_l \cdot (b_{k-l} \cdot c_{n-k}) =$

$$= \sum_{l=0}^{n} a_l \cdot \left(\sum_{k=l}^{n} b_{k-l} \cdot c_{n-k} \right) \overset{j:=k-l}{=} \sum_{l=0}^{n} a_l \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-l} b_j \cdot c_{n-l-j} \right) =$$

Variablen umbenennen $= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-k} b_l \cdot c_{n-k-l} \right) = II$

- es gelten in $\langle R[[z]], +, \cdot \rangle$ die Distributivgesetze:

- $a(z) \cdot \big(b(z) + c(z) \big) =$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (b_{n-k} + c_{n-k}) \right) \cdot z^n$$

$a(z) \cdot b(z) + a(z) \cdot c(z) =$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot c_{n-k} \right) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot c_{n-k} \right) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot b_{n-k} + a_k \cdot c_{n-k}) \right) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (b_{n-k} + c_{n-k}) \right) \cdot z^n ,$$

also gilt $a(z) \cdot (b(z) + c(z)) = a(z) \cdot b(z) + a(z) \cdot c(z)$

- $(b(z) + c(z)) \cdot a(z) = b(z) \cdot a(z) + c(z) \cdot a(z)$
läßt sich analog zeigen

Teil 2:

wollen zeigen, wenn R ein Integritätsring ist, dann ist auch $R[[z]]$ ein Integritätsring

also: R sei Integritätsring

- $\langle R[[z]], \cdot \rangle$ ist kommutativ

$$a(z) \cdot b(z) = \sum_{n \geq 0} \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right)}^{\mathrm{I}} \cdot z^n$$

$$b(z) \cdot a(z) = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot a_{n-k} \right)}_{\mathrm{II}} \cdot z^n$$

es gilt: $\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \overset{l := n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \cdot b_l =$

$$= \sum_{l=0}^{n} b_l \cdot a_{n-l} \overset{\substack{\text{Variable} \\ \text{umben.}}}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot a_{n-k} = \mathrm{II}$$

- das neutrale El. bez. Multiplikation ist geg. durch $1 := 1 \cdot z^0 + \sum_{n \geq 0} 0 \cdot z^n$, wobei $0, 1 \in R$ die neutral. El. bez. $+$ u. $\cdot$ in R sind

es gilt nämlich:

$$a(z) \cdot 1 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \delta_{n-k,0} \right) \cdot z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n \cdot 1) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n = a(z),$$

wobei $\delta_{m,n} := \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

- $R[[z]]$ ist nullteilerfrei:

wollen zeigen, dass für $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$ folgt $a(z) \cdot b(z) \neq 0$

$a(z) \neq 0$ impliziert, dass es einen kleinsten Koeffizienten $a_{N_1} \neq 0$ gibt, also:

$$a(z) = a_{N_1} \cdot z^{N_1} + \sum_{n > N_1} a_n \cdot z^n$$

ebenso gilt für $b(z) \neq 0$, dass es einen kleinsten Koeffizienten $b_{N_2} \neq 0$ gibt, somit

$$b(z) = b_{N_2} \cdot z^{N_2} + \sum_{n > N_2} b_n \cdot z^n$$

daraus erhalten wir:

$$a(z) \cdot b(z) = a_{N_1} \cdot b_{N_2} \cdot z^{N_1+N_2} + \sum_{n > N_1+N_2} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n,$$

wobei $a_k = 0$ für $k < N_1$
$b_k = 0$ für $k < N_2$

es gilt $a_{N_1} \cdot b_{N_2} \neq 0$, da R ein Integritätsring

$\Rightarrow a(z) \cdot b(z) \neq 0.$

443.) $\langle M, \wedge, \vee \rangle$ sei Boole'sche Algebra

a.) Def.: • 1 ist neutral. El. bez. $\wedge$, also: $a \wedge 1 = a, \forall a$

• 0 ist neutral. El. bez. $\vee$, also: $a \vee 0 = a, \forall a$

also gilt durch Anwenden der Verschmelzungsgesetze:

$$a \wedge 1 = a \Rightarrow 1 \vee (a \wedge 1) = 1 \vee a$$

$$\Rightarrow a \vee 1 = 1 \vee (1 \wedge a) = 1$$

bzw.: $a \vee 0 = a \Rightarrow 0 \wedge (a \vee 0) = 0 \wedge a$

$$\Rightarrow a \wedge 0 = 0 \wedge (0 \vee a) = 0.$$

also: $a \vee 1 = 1,\ a \wedge 0 = 0,\ \forall a \in M$

b.) sei $b \in M$ mit $a \vee b = 1$ und $a \wedge b = 0$

es gilt (Anwenden der Gesetze einer Boole'schen Algebra und Voraussetzungen an b)

$$a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge b) = (a' \vee a) \wedge (a' \vee b)$$

$$= 1 \wedge (a' \vee b) = a' \vee b$$

und

$$b = b \vee 0 = b \vee (a \wedge a') = (b \vee a) \wedge (b \vee a') =$$

$$= 1 \wedge (b \vee a') = b \vee a' = a' \vee b$$

also $\Rightarrow$ $a' = b$

454.) $W = \{(x, y, z) \mid y = -z\}$

- geometr. Beschreibung: W ist eine Ebene, die den Ursprung $(0,0,0)$ enthält

- $(W, +, \mathbb{R})$ ist ein Unterraum von $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$, was durch Anwenden des Unterraumkriteriums folgt:

  - $\vec{a} = (x, -z, z) \in W$

    $\vec{b} = (u, -w, w) \in W$

    $\vec{a} + \vec{b} = (x+u, -z-w, z+w) = (x+u, -(z+w), z+w) \in W$

  - $\vec{a} = (x, -z, z) \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$

    $\Rightarrow \lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x, -\lambda \cdot z, \lambda \cdot z) \in W$

458.) $W = \{(x,y,z) \mid x+y+z \geq 0\}$

- geometr. Beschreibung: W ist ein sogenannter Halbraum, $z \geq -x-y$, alle Punkte auf bzw. oberhalb der Ebene $z = -x-y$

- $(W,+,\mathbb{R})$ ist kein Unterraum von $(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R})$, da $(W,+)$ keine Gruppe ist, wie man durch Angabe eines Gegenbeispiels zeigt.

z.B.: betr. $\vec{a} = (1,1,-1) \in W$

es gilt aber: $-\vec{a} = (-1,-1,1) \notin W$,

da $z = 1 < -(-1)-(-1) = -x-y$

484.) geg. $B = \{(-1,4,-4), (2,-4,7), (3,2,1)\}$

wir fassen die Vektoren von B in einer Matrix zusammen und bringen diese durch Anwenden elementarer Umformungen auf Halbdiagonalform

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftarrow S_2 + 2\cdot S_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \leftarrow S_3 + 3\cdot S_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 14 \\ -4 & -1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \leftarrow S_3 - \frac{7}{2}\cdot S_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} = M'$$

die Vektoren $B' = \{(-1,4,-4), (0,4,1), (0,0,-\frac{15}{2})\}$ sind aufgrund der Halbdiagonalform von M' linear unabhängig

da $rg(M') = 3$ gilt außerdem $[B'] = \mathbb{R}^3$

aufgrund des Austauschlemmas gilt aber

$[B] = [B']$ und B l.u. $\Leftrightarrow$ B' l.u.

$\Rightarrow$ B ist lin. unabhängig mit $[B] = \mathbb{R}^3$, also B ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$