

Algebra und Diskrete Mathematik (Panholzer)

Abschlussprüfung (Rekonstruktion)

27. Februar 2026

1 Vollständige Induktion (10 Punkte)

(a) Man formuliere das **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** zunächst **allgemein** für ein Prädikat $P(n)$ in der Sprache der Logik.

Durch einen Produktionsfehler sind in Entenhausen ausschließlich 4-Taler-Münzen und 5-Taler-Münzen verfügbar. Ihre Aufgabe ist es, mittels vollständiger Induktion zu zeigen, dass man mit diesen beiden Münzwerten jeden ganzzahligen Betrag von $n \geq 12$ Talern erhalten kann. Mathematischer formuliert, zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 12$ gilt:

es existieren $x, y \in \mathbb{N}$, sodass $4x + 5y = n$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(b) Geben Sie die **Induktionsvoraussetzung** $P(n)$ an.

(c) Führen Sie den **Induktionsanfang** $P(12)$ aus.

(d) Stellen Sie die **Induktionsbehauptung** $P(n+1)$ auf.

(e) Führen Sie den **Induktionsschritt** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vollständig aus.

Hinweis: für den Induktionsschritt ist eine Fallunterscheidung nützlich, ob in der ganzzahligen Linearkombination, die n darstellt, der Koeffizient $x > 0$ oder $x = 0$ ist.

2 Grundaufgaben der Kombinatorik (10 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden **Wörter** der Länge $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ über dem **quaternären Alphabet** $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, also Wörter $w = w_1w_2\dots w_n$, mit $w_j \in \Sigma$, für alle $1 \leq j \leq n$. Das Zählen der nachfolgend beschriebenen Wörter gegebener Länge n mit den geforderten Eigenschaften lässt sich immer auf in der Lehrveranstaltung kennengelernte kombinatorische Grundprobleme und Grundregeln zurückführen. Ihre Aufgabe ist es nun, Formeln für die entsprechenden Anzahlen für allgemeines $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zu ermitteln. Weiters sollen die jeweiligen Anzahlen für die Wortlänge $n = 5$ angegeben werden.

(a) Sei **A(n)** die **Anzahl aller Wörter der Länge n über Σ** ohne weitere Einschränkungen,

$$A(n) = |\{w = w_1w_2\dots w_n, \text{ mit } w_j \in \Sigma\}|.$$

(b) Sei **B(n)** die **Anzahl aller Palindromwörter der Länge n über Σ** , das heißt Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen identisch sind.

$$B(n) = |\{w = w_1w_2\dots w_n, \text{ mit } w_j \in \Sigma \mid w_1w_2\dots w_n = w_nw_{n-1}\dots w_1\}|$$

Anmerkung: Machen Sie eine Fallunterscheidung in n gerade und n ungerade.

(c) Sei **C(n)** die **Anzahl aller Wörter der Länge n über Σ , die genau ein a und genau ein b enthalten.**

$$C(n) = |\{w = w_1w_2\dots w_n, \text{ mit } w_j \in \Sigma \mid |\{j \mid w_j = a\}| = 1 \wedge |\{j \mid w_j = b\}| = 1\}|$$

(d) Sei **D(n)** die **Anzahl aller Wörter der Länge n über Σ , wo die Buchstaben im Wort in lexikographisch sortierter Reihenfolge stehen**, d.h. wenn ein Buchstabe im Alphabet weiter vorne steht als ein anderer Buchstabe, dann muss er auch im Wort vor dem anderen stehen.

$$D(n) = |\{w = w_1w_2\dots w_n, \text{ mit } w_j \in \Sigma \mid \text{lex}(w_i) \leq \text{lex}(w_j), \text{ für } i < j\}|$$

wobei $\text{lex}(\mathbf{a}) = 1$, $\text{lex}(\mathbf{b}) = 2$, $\text{lex}(\mathbf{c}) = 3$, $\text{lex}(\mathbf{d}) = 4$. Anmerkung: abbbccd ist so ein Wort, aber abba und acdc sind keine.

Hinweis: Solche Wörter können als Multimenge aufgefasst werden.

Gefundene Formeln in Tabelle eintragen, nur was hier eingefügt wurde, kann gewertet werden! Sie können aber selbstverständlich allenfalls notwendige Rechnungen/Nebenüberlegungen zur Beantwortung der Fragen auf der Rückseite des Blattes durchführen, diese bleiben aber für die Bewertung unberücksichtigt.

Formel für allgemeines n	Wert für $n = 5$
$A(n) =$	$A(5) =$
$B(n) =$ für n gerade für n ungerade	$B(5) =$
$C(n) =$	$C(5) =$
$D(n) =$	$D(5) =$

3 Lineare Algebra (10 Punkte)

(a) Von einer reellen quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ kennen wir die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie daraus die **Matrix A**.

(b) Wir betrachten nun die Matrix-Vektor-Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \vec{b}, \quad \text{mit A aus Aufgabe (a) und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ einen reellen Skalar und $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ einen reellen Vektor bezeichnen. Ihre Aufgabe ist es nun, zu ermitteln, **für welche reellen Skalare** λ die betrachtete Gleichung eine eindeutige Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ besitzt, unlösbar ist, oder unendlich viele reelle Lösungen hat, also die folgenden Mengen zu bestimmen:

$$S^{[1]} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x} + \vec{b} \text{ hat eine eindeutige Lösung } \vec{x} \in \mathbb{R}^2\},$$

$$S^{[0]} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x} + \vec{b} \text{ hat keine Lösung } \vec{x} \in \mathbb{R}^2\},$$

$$S^{[\infty]} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x} + \vec{b} \text{ hat unendlich viele Lösungen } \vec{x} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Hinweis: Formen Sie die Matrix-Vektor-Gleichung so um, dass Sie diese als lineares Gleichungssystem auffassen können und verwenden Sie dann die in der Lehrveranstaltung kennengelernte Charakterisierungen.

(c) Als Fortsetzung von Aufgabe (b) wählen Sie ein konkretes $\lambda \in S^{[\infty]}$ und geben Sie die **unendliche Lösungsmenge** $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x} + \vec{b}\}$ in Parameterform an.

4 Algebraische Strukturen (10 Punkte)

(a) Man gebe eine genaue Definition dafür, dass eine algebraische Struktur $(G, \circ)$ eine **Gruppe** ist. Die dabei auftretenden Begriffe müssen ihrerseits definiert werden.

(b) Man gebe **je ein konkretes Beispiel** für folgende **algebraische Strukturen** an, wobei jeweils sowohl die Menge als auch die binäre Operation angeführt werden muss.

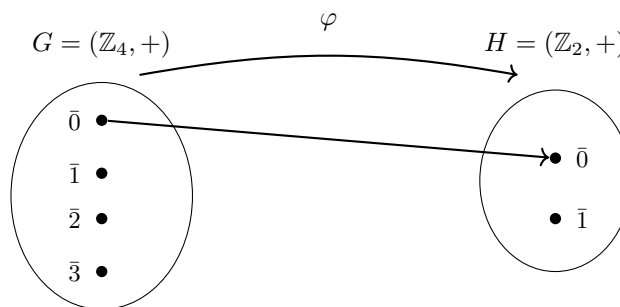
(i) Eine **endliche abelsche** (=kommutative) **Gruppe** G_1 .

(ii) Eine **unendliche abelsche Gruppe** G_2 .

(iii) Eine **nicht-abelsche Gruppe** G_3 .

(c) Man definiere, wann eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ ein **Homomorphismus** von der Gruppe $(G, \circ)$ in die Gruppe $(H, *)$ ist. Weiters gebe man $\varphi(e_G)$, also das Bild des neutralen Elementes e_G von G unter dem Homomorphismus φ , an.

(d) Ergänzen Sie das nachfolgend angegebene Venn-Diagramm durch Pfeile, sodass das entstehende **Pfeildiagramm** einen **Gruppenhomomorphismus** $\varphi : G \rightarrow H$, von der Gruppe $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ in die Gruppe $H = (\mathbb{Z}_2, +)$ darstellt.



5 Multiple Choice (10 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständige richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen).

Sie können notwendige Überlegungen zur Beantwortung der Fragen z.B. auf der Rückseite des Blattes durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Anmerkung: Wie in der Lehrveranstaltung bezeichnet K_n immer den vollständigen Graphen mit n Knoten und $K_{n,m}$ den vollständigen bipartiten (=paaren) Graphen mit zwei disjunkten Knotenmengen mit n bzw. m Knoten.

Welche der folgenden Graphen besitzen eine geschlossene Eulersche Linie?

- ☐ K_4 ☐ K_5 ☐ $K_{2,4}$ ☐ $K_{4,4}$

Welche der folgenden Graphen besitzen eine geschlossene Hamiltonsche Linie?

- ☐ K_4 ☐ K_5 ☐ $K_{2,4}$ ☐ $K_{4,4}$

Welche der folgenden Graphen sind planar?

- ☐ K_4 ☐ K_5 ☐ $K_{2,4}$ ☐ $K_{4,4}$

Sei T ein Baum mit mindestens zwei Knoten. Was ist die chromatische Zahl $\chi(T)$ von T , also was ist die Minimalanzahl an Farben, die man benötigt, um die Knoten von T zulässig zu färben?

- ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ hängt vom konkreten Baum T ab

Wie viele Kanten kann ein einfacher (=schlichter) ungerichteter Graph mit 4 Knoten maximal besitzen?

- ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ mehr als 6

Was ist der $\text{ggT}(39, 63)$?

- ☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 9 ☐ keiner der angegebenen Werte

Wie viele invertierbare Restklassen in $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ gibt es?

- ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ mehr als 6

Wie viele invertierbare Restklassen in $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ gibt es?

- ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ mehr als 6

Welche der nachfolgend in Zyklendarstellung angegebenen Permutationen $\pi \in S_5$ sind ungerade, erfüllen also $\text{sgn}(\pi) = -1$?

- ☐ $(12)(345)$ ☐ $(12)(3)(45)$ ☐ $(1234)(5)$ ☐ $(12)(3)(4)(5)$

Welche der nachfolgend in Zyklendarstellung angegebenen Permutationen $\pi \in S_5$ sind selbstinvers, erfüllen also $\pi = \pi^{-1}$?

- ☐ $(12)(345)$ ☐ $(12)(3)(45)$ ☐ $(1234)(5)$ ☐ $(12)(3)(4)(5)$