24. Man finde alle Lösungen der Differenzengleichung

a) $2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0 \; (n \geq 0)$

b) $x_{n+1} - x_n + 7 = 0 \; (n \geq 0)$

Lösung einer linearen Differenzengleichung 1. Ordnung der Gestalt $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + b & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

a) $x_{n+1} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{a} x_n - \underbrace{\frac{1}{2}}_{b}$

eingesetzt in die 1. Formel, da a ≠ 1:

$$x_n = a^n x_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x_0 - \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)}{2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x_0 - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{3-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x_0 - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x_0 - \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \underbrace{(x_0 - 1)}_{c} + 1$$

Das ist die allgemeine Lösung (Lösungsgesamtheit, enthält c)

b) $x_{n+1} = \underbrace{1}_{a} \cdot x_n - \underbrace{7}_{b} = 0$

eingesetzt in die 2. Formel, da a = 1: $x_n = x_0 + b \cdot n = \underbrace{x_0}_{c} - 7n$