1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Scholz, Gernot Salzer, Robert Glowka

30. Oktober 2014

Aufgabe 1 (0.3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Schlangen können nicht schwimmen. Anacondas sind gute Schwimmer. Daher ist keine Schlange eine Anaconda.

(b) Jede Grammatik ist kontextfrei. Alle Grammatiken sind regulär. Daher ist alles Kontextfreie regulär.

(c) Kein Kind lernt gerne. Alle Schüler sind Kinder. Daher lernt kein Schüler gerne.

Lösung

(a) Schlangen können nicht schwimmen.
Anacondas sind gute Schwimmer.
———
Keine Schlange ist eine Anaconda.

Inferenzregel: Alle x können nicht y.
Alle z können y.
———
Kein x ist ein z.

Diese Inferenzregel ist *gültig*. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Menschen können nicht fliegen.
Vögel können fliegen.
———
Kein Mensch ist ein Vogel.

(b) Jede Grammatik ist kontextfrei.
Alle Grammatiken sind regulär.
———
Alles Kontextfreie ist regulär.

Inferenzregel: Alle x sind y.
Alle x sind z.
———
Alle y sind z.

Diese Inferenzregel ist *nicht gültig*. Als Gegenbeispiel kann folgende Instanz dieser Inferenzregel dienen; wie es sich für ein Gegenbeispiel gehört, sind die Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch.

Alle Katzen sind Vierbeiner.
Alle Katzen sind Fleischfresser.

Alle Vierbeiner sind Fleischfresser.

Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle x sind y.
Alle y sind z.

Alle x sind z.

Beispiel: Mäuse sind klein.
Alles Kleine ist schnell.

Mäuse sind schnell.

(c) Kein Kind lernt gerne.
Alle Schüler sind Kinder.

Kein Schüler lernt gerne.

Inferenzregel: Kein x macht y.
Alle z sind x.

Kein z macht y.

Diese Inferenzregel ist *gültig*. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Kein Ball singt.
Fußbälle sind Bälle.

Kein Fußball singt.

Alternativ kann „kein“ auch mit „alle ... nicht“ ausgedrückt werden:

Alle Kinder lernen nicht gerne.	Alle x machen nicht y.	Bälle singen nicht.
Alle Schüler sind Kinder.	Alle z sind x.	Fußbälle sind Bälle.
Alle Schüler lernen nicht gerne.	Alle z machen nicht y.	Fußbälle singen nicht.

Aufgabe 2 **(0.4 Punkte)**

Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Dein Turm ist groß, aber besonders hoch ist er nicht.

(b) Es schüttet wie aus Kübeln.

(c) Anna möchte Erdbeer- oder Schokoeis.

(d) Du darfst nicht gleichzeitig essen und reden.

(e) Ich kann den Test nur schaffen, wenn ich viel lerne oder ein Wunder geschieht.

(f) Wenn ich 18 bin, dann darf ich endlich Auto fahren.

(g) Stefan möchte entweder ein Semester im Ausland studieren oder sogar ein ganzes Jahr.

(h) 

Karl Valentin (1882–1948) war ein bayrischer Komiker, Sänger, Autor und Filmproduzent, dessen Humor und Stil bis heute Literatur und Kabarett beeinflusst.

Lösung

(a) *Dein Turm ist groß, aber besonders hoch ist er nicht.*
A ... Der Turm ist groß.
B ... Der Turm ist hoch.
Struktur: A und nicht B.
Formel: $A \land \neg B$

(b) *Es schüttet wie aus Kübeln.*
A ... Es schüttet wie aus Kübeln.
Struktur: A.
Formel: A

(c) *Anna möchte Erdbeer- oder Schokoeis.*
A ... Anna möchte Erdbeereis.
B ... Anna möchte Schokoeis.
Struktur: A oder B.
Formel: $A \lor B$

(d) *Du darfst nicht gleichzeitig essen und reden.*
A ... Du darfst essen.
B ... Du darfst reden.
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B.
Oder: Entweder nicht A oder nicht B. Formel: $\neg(A \land B)$ oder $\neg A \lor \neg B$ oder $A \uparrow B$

(e) *Ich kann den Test nur schaffen, wenn ich viel lerne oder ein Wunder geschieht.*
A ... Ich schaffe den Test.
B ... Ich lerne viel.
C ... Es geschieht ein Wunder.
Struktur: A nur dann, wenn B oder C.
Formel: $A \supset (B \lor C)$

(f) *Wenn ich 18 bin, dann darf ich endlich Auto fahren.*
A ... Ich bin 18.
B ... Ich darf Auto fahren.

Struktur: Wenn A, dann B.
Formel: $A \supset B$

Diese Übersetzung ist zutreffend, wenn man alle weiteren Bedingungen für den regulären Führerschein erfüllt hat und nur noch auf das Erreichen des richtigen Alters wartet. Durch die Implikation lässt man die Möglichkeit offen, auf anderem Wege fahren zu dürfen, etwa auf Privatgelände ohne Führerschein oder unter 18 mit L17-Führerschein.

Ist in der konkreten Situation L17 und Privatgelände ausgeschlossen, kann man Äquivalenz verwenden.

Struktur: Wenn A, dann B, und wenn A, dann B.
Formel: $A \equiv B$

Sind die anderen Bedingungen (wie Fahrstunden und Prüfungen) noch nicht erfüllt, stellt der Satz nur eine notwendige Bedingung für den Führerschein fest, es handelt sich dann um eine umgekehrte Implikation (sofern L17 und Privatgelände keine Rolle spielt).

Struktur: B nur dann, wenn A.
Formel: $B \supset A$ oder $A \subset B$

(g) *Stefan möchte entweder ein Semester im Ausland studieren oder sogar ein ganzes Jahr.*
A ... Stefan macht ein Auslandssemester.
B ... Stefan macht ein Auslandsjahr.
Struktur: Entweder A oder B (ausschließendes „oder“).
Formel: $A \not\equiv B$

Diese Formalisierung bedeutet, dass Stefan auf jeden Fall eines von beiden macht, aber nicht beides. Soll es möglich sein, dass Stefan sowohl ein Auslandssemester als auch ein Auslansdsjahr macht, so ist $A \vee B$ passender.

(h) *Ich freue mich, wenn es regnet, denn wenn ich mich nicht freue, regnet es auch!*
A ... Ich freue mich.
B ... Es regnet.
Struktur: A wenn B, und wenn nicht A dann B.
Formel: $(A \subset B) \wedge (\neg A \supset B)$

Aufgabe 3 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{iff}, \mathsf{false}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ nicht vollständig ist.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge $\{\mathsf{and}, \mathsf{not}\}$ vollständig ist. Es reicht daher zu zeigen, dass die Funktion not durch die Funktionen $\{\mathsf{and}, \mathsf{iff}, \mathsf{false}\}$

darstellbar ist. Tatsächlich gilt $\mathsf{not}(x) = \mathsf{iff}(x, \mathsf{false})$, wie sich durch Auswertung der beiden Seiten in den zwei möglichen Wahrheitsbelegungen überprüfen lässt:

x	$\mathsf{not}(x)$		$=$	$\mathsf{iff}(x,\mathsf{false})$		
0	**1**	0	✓	**1**	0	0
1	**0**	1	✓	**0**	1	0

(b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch and und or darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem wir vom einzigen Argument x ausgehend die beiden Funktionen in beliebiger Reihenfolge anwenden. Wir stellen fest, dass $\mathsf{and}(x, x) = x$ und $\mathsf{or}(x, x) = x$ gilt (Idempotenz). Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

Behauptung: Jeder Ausdruck bestehend aus and, or und x ist äquivalent zu x.

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl n der Anwendungen der Funktionen and bzw. or.

Induktionsanfang $n = 0$: Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von and und or ist x selber. Dafür gilt unsere Behauptung.

Induktionshypothese: Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit $n + 1$ Anwendungen von and bzw. or gilt. Wir haben also einen Ausdruck $\mathsf{and}(f(x), g(x))$ bzw. $\mathsf{or}(f(x), g(x))$ vor uns, bei dem sowohl f als auch g mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu x. Wie wir oben aber festgestellt haben, liefert $\mathsf{and}(x, x)$ bzw. $\mathsf{or}(x, x)$ mit dem Argument x wieder nur x.

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu x (identische Abbildung) sind, ist z.B. die einstellige Funktion not nicht darstellbar. Die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ ist daher nicht funktional vollständig.

Aufgabe 4 (0.3 Punkte)

Sei $\mathcal{M}$ die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

(m1) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \subseteq \mathcal{M}$

(m2) Wenn $u \in \mathcal{M}$, dann auch $\mathtt{*}uu \in \mathcal{M}$.

(m3) Wenn $u, v \in \mathcal{M}$, dann auch $u\mathtt{=}v \in \mathcal{M}$.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ der stufenweise Konstruktion von $\mathcal{M}$ an. (Siehe die Vorlesungspräsentation vom 7.10.2014, Seite 62.) Die Menge $\mathcal{M}_2$ enthält bereits mehr als 60 Elemente; es genügt, 10 typische Elemente anzugeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeichenkette `*b=*aab=*aa` in der Menge $\mathcal{M}$ liegt.

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `**a=a*a=a` nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegen kann.

Lösung

(a) $\mathcal{M}_0 = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$,
$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \{\texttt{*aa}, \texttt{*bb}, \texttt{a=a}, \texttt{a=b}, \texttt{b=a}, \texttt{b=b}\}$,
$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{$`**aa*aa`, `**bb*bb`, `*a=aa=a`, `*a=ba=b`, `*b=ab=a`, `*b=bb=b`,
`a=*aa`, `a=*bb`, `a=a=a`, `a=a=b`, `a=b=a`, `a=b=b`,
`b=*aa`, `b=*bb`, `b=a=a`, `b=a=b`, `b=b=a`, `b=b=b`,
`*aa=a`, `*aa=b`, `*aa=*aa`, `*aa=*bb`, `*aa=a=a`, `*aa=a=b`, `*aa=b=a`, `*aa=b=b`,
`*bb=a`, `*bb=b`, `*bb=*aa`, `*bb=*bb`, `*bb=a=a`, `*bb=a=b`, `*bb=b=a`, `*bb=b=b`,
`a=a=*aa`, `a=a=*bb`, `a=a=a=a`, `a=a=a=b`, `a=a=b=a`, `a=a=b=b`,
`a=b=*aa`, `a=b=*bb`, `a=b=a=a`, `a=b=a=b`, `a=b=b=a`, `a=b=b=b`,
`b=a=*aa`, `b=a=*bb`, `b=a=a=a`, `b=a=a=b`, `b=a=b=a`, `b=a=b=b`,
`b=b=*aa`, `b=b=*bb`, `b=b=a=a`, `b=b=a=b`, `b=b=b=a`, `b=b=b=b`$\}$

(b)

(i)	$\texttt{a} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
(ii)	Wegen $\texttt{a} \in \mathcal{M}$ gilt $\texttt{*aa} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2 und Punkt i
(iii)	$\texttt{b} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
(iv)	Wegen $\texttt{b} \in \mathcal{M}$ und $\texttt{*aa} \in \mathcal{M}$ gilt $\texttt{b=*aa} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m3 und Punkte iii und ii
(v)	Wegen $\texttt{b=*aa} \in \mathcal{M}$ gilt $\texttt{*b=*aab=*aa} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2 und Punkt iv

Die Argumentation lässt sich in strukturierter Form als Beweisbaum darstellen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\texttt{b} \in \mathcal{M}}\,\text{m1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\texttt{a} \in \mathcal{M}}\,\text{m1}}{\texttt{*aa} \in \mathcal{M}}\,\text{m2}}{\texttt{b=*aa} \in \mathcal{M}}\,\text{m3}}{\texttt{*b=*aab=*aa} \in \mathcal{M}}\,\text{m2}$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel. Steht über dem Strich nichts, handelt es sich um ein Faktum, das von keiner Bedingung abhängig ist.

(c) Um zu zeigen, dass ein bestimmtes Wort nicht in der definierten Menge liegt, muss man eine Eigenschaft finden, die alle Wörter in der Menge besitzen, nicht aber das bestimmte Wort. Für die Wahl dieser Eigenschaft gibt es verschiedene Möglichkeiten; hier zwei davon.

Argumentation über die Länge der Wörter. Bei der stufenweisen Konstruktion der gegebenen Menge $\mathcal{M}$ besitzen jene Wörter in $\mathcal{M}_i$, die neu hinzukommen (die also noch nicht in $\mathcal{M}_{i-1}$ vorhanden sind), mindestens die Länge $2i + 1$; das lässt sich mit einem kurzen Induktionsbeweis zeigen. Da das Wort `**a=a*a=a` die Länge 9 besitzt, müsste es spätestens ab $i = 4$ in den stufenweise konstruierten Mengen $\mathcal{M}_i$ liegen. Wenn man also $\mathcal{M}_4$ konstruiert und feststellt, dass das gesuchte Wort nicht vorkommt, liegt es nicht in $\mathcal{M}$.

Diese Art von Argumentation lässt sich immer dann verwenden, wenn alle Abschlusseigenschaften der induktiven Definition zu längeren Wörtern führen. Allerdings kann es aufwändig sein, alle Wörter bis zur benötigten Länge tatsächlich zu generieren. Etwa besitzt $\mathcal{M}_4$ in diesem Beispiel bereits 9 541 122 Elemente.

Argumentation über die besondere Form der `*`*-Wörter.* Wir betrachten das Ende `*a=a` des zu untersuchenden Wortes `**a=a*a=a`. Das Zeichen `*` kann nur durch die Eigenschaft m2 in ein Wort gelangen. Dann müssen diesem Symbol aber zwei Kopien eines Wortes u folgen. Für u kommt hier nur `a` in Frage, da `a=` nach Verdopplung bereits länger als die drei vorhandenen Zeichen wäre. Somit müssen gemäß Eigenschaft m2 auf `*` zwei `a` folgen, was offenbar nicht der Fall ist. Somit kann `**a=a*a=a` (und jedes andere Wort, das mit `*a=a` endet) nicht in $\mathcal{M}$ liegen.

Diese Argumentation ist kurz, allerdings benützt sie eine spezielle Eigenschaft der vorliegenden Menge $\mathcal{M}$ und ist nicht auf andere Fälle übertragbar; dort muss eine andere spezifische Eigenschaft gefunden werden.

Aufgabe 5 **(0.3 Punkte)**

Sei F die Formel $(\neg B \lor ((A \land B) \equiv C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Werten Sie $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 0$ schrittweise aus.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\land, \uparrow, \lor, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$\mathcal{V} = \{A, B, C, \ldots, A_0, A_1, \ldots\}$ (aussagenlogische Variablen)

Wir zeigen, dass $(\neg B \lor ((A \land B) \equiv C))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

- Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).
- Da A und B Formeln sind, ist auch $(A \land B)$ eine Formel (a4).
- $\neg B$ ist eine Formel, da B eine Formel ist (a3).
- Da $(A \land B)$ sowie C Formeln sind, ist auch $((A \land B) \equiv C)$ eine Formel (a4).

- Da $\neg B$ sowie $((A \wedge B) \equiv C)$ Formeln sind, ist auch $(\neg B \vee ((A \wedge B) \equiv C))$ eine Formel (a4).

Die Argumentation lässt sich in strukturierter Form als Beweisbaum darstellen.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,\text{a1}}{\neg B \in \mathcal{A}}\,\text{a3} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,\text{a1} \quad \cfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,\text{a1}}{(A \wedge B) \in \mathcal{A}}\,\text{a4} \quad \cfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,\text{a1}}{((A \wedge B) \equiv C) \in \mathcal{A}}\,\text{a4}}{(\neg B \vee ((A \wedge B) \equiv C)) \in \mathcal{A}}\,\text{a4}$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b)
$$\begin{aligned}
\mathsf{val}_I(\neg B \vee ((A \wedge B) \equiv C)) &= \mathsf{val}_I(\neg B) \text{ or } \mathsf{val}_I((A \wedge B) \equiv C) \\
&= \text{not } \mathsf{val}_I(B) \text{ or } (\mathsf{val}_I(A \wedge B) \text{ iff } \mathsf{val}_I(C)) \\
&= \text{not } 1 \text{ or } ((\mathsf{val}_I(A) \text{ and } \mathsf{val}_I(B)) \text{ iff } 0) \\
&= 0 \text{ or } ((1 \text{ and } 1) \text{ iff } 0) \\
&= 0 \text{ or } (1 \text{ iff } 0) \\
&= 0 \text{ or } 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Die Formel F ist erfüllbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie wahr ist, etwa $I(A) = I(B) = I(C) = 0$. Sie ist auch widerlegbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie falsch ist, etwa $I(A) = 0, I(B) = I(C) = 1$. Diese Interpretationen lassen sich systematisch mittels einer Wahrheitstafel finden:

A	B	C	$\neg B$	$\vee$	$((A \wedge B)$	$\equiv C)$
1	1	1	0	**1**	1	1
1	1	0	0	**0**	1	0
1	0	1	1	**1**	0	0
1	0	0	1	**1**	0	1
0	1	1	0	**0**	0	0
0	1	0	0	**1**	0	1
0	0	1	1	**1**	0	0
0	0	0	1	**1**	0	1

Die Formel ist weder unerfüllbar noch gültig.

Aufgabe 6 (0.3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$(A \supset B) \wedge (B \supset C) \quad \text{und} \quad (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C)$$

äquivalent sind, und zwar

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$(A \supset B)$	$\wedge$	$(B \supset C)$	$=$	$(A \vee \neg B \vee C)$	$\wedge$	$(\neg A \vee B \vee \neg C)$	$\wedge$ $(\neg A \vee C)$
0	0	0	1	**1**	1	✓	1	**1**	1	1
0	0	1	1	**1**	1	✓	1	**1**	1	1
0	1	0	1	**0**	0	✓	0	**0**	1	1
0	1	1	1	**1**	1	✓	1	**1**	1	1
1	0	0	0	**0**	1	✓	1	**0**	1	0
1	0	1	0	**0**	1	✓	1	**0**	0	1
1	1	0	1	**0**	0	✓	1	**0**	1	0
1	1	1	1	**1**	1	✓	1	**1**	1	1

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

(b) Zunächst einmal eliminieren wir die Implikationen in der ersten Formel:

$$(A \supset B) \wedge (B \supset C) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$$

Um zu zeigen, dass diese Formel äquivalent zur anderen Formel ist, gibt es mehrere Möglichkeiten.

Eine besteht darin, beide Formeln auf eine maximale konjunktive Normalform zu erweitern. „Maximal“ bedeutet hier, dass in jedem Konjunkt alle Variablen in negierter oder unnegierter Form vorkommen.

$$\begin{aligned}
\neg A \vee B &= (\neg A \vee B) \wedge \top \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg C) \\
&= (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \\
\neg B \vee C &= \top \wedge (\neg B \vee C) \\
&= (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C) \\
&= (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)
\end{aligned}$$

Die erste Formel ist also äquivalent zur maximalen KNF

$$(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \ .$$

Analog lässt sich die zweite Formel erweitern:

$$\begin{aligned}
\neg A \vee C &= (\neg A \vee C) \wedge \top \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (B \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)
\end{aligned}$$

Zusammen mit den anderen beiden Konjunkten erhalten wir dieselbe maximale KNF wie aus der ersten Formel, die beiden Formeln sind also äquivalent.

Diese Methode der Maximierung führt aber in der Regel zu einer exponentiellen Zahl von Konjunkten, ist also nicht besser als die Wahrheitstafel. Besser ist es die Formeln zu verkleinern statt zu vergrößern, was sich mit Hilfe von (propositionaler) Resolution erreichen lässt. Dabei handelt es sich um folgende Äquivalenz:

$$(F \vee A) \wedge (\neg A \vee G) = (F \vee A) \wedge (\neg A \vee G) \wedge (F \vee G)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung lässt sich durch mehrmalige Anwendung der Distributivität auf die linke Seite zeigen. Anwendung von Resolution und Absorption auf die zweite Formel liefert nun:

$$\begin{aligned}
& (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C) && \\
&= (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee B) && \text{Resolution 2. und 3. Konjunkt} \\
&= (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) && \text{Absorption 2. und 4. Konjunkt} \\
&= (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) && \text{Resolution 1. und 3. Konjunkt} \\
&= (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) && \text{Absorption 1. und 4. Konjunkt} \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) && \text{Resolution andersherum}
\end{aligned}$$

... womit wir bei der ersten Formel angekommen sind.

Aufgabe 7 (0.3 Punkte)

Ist die Formel A eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \subset B$, $A \vee (B \not\equiv C)$ und $B \wedge \neg C$? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehnug gilt/nicht gilt?

Lösung

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \subset B$,	$A \vee (B \not\equiv C)$,	$B \wedge \neg C$	$\models_I$	A
0	0	0	1	0	0	✓	0
0	0	1	1	1	0	✓	0
0	1	0	0	1	1	✓	0
0	1	1	0	0	0	✓	0
1	0	0	1	1	0	✓	1
1	0	1	1	1	0	✓	1
1	1	0	1	1	1	✓	1
1	1	1	1	1	0	✓	1

Die Formel A ist somit eine logische Konsequenz der Prämissen.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle

abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt. In diesem Beispiel könnte man mit der Konklusion beginnen, die leicht auszuwerten ist und die Anzahl der zu untersuchenden Fälle halbiert.

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \subset B,$	$A \vee (B \not\equiv C),$	$B \wedge \neg C$	$\models_I$	A
0	0	0	1	0		✓	0
0	0	1	1	1	0	✓	0
0	1	0	0			✓	0
0	1	1	0			✓	0
1	0	0				✓	1
1	0	1				✓	1
1	1	0				✓	1
1	1	1				✓	1

Formel zur Konsequenzbeziehung: A ist genau dann eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \subset B$, $A \vee (B \not\equiv C)$ und $B \wedge \neg C$, wenn die Formel

$$((A \subset B) \wedge (A \vee (B \not\equiv C)) \wedge (B \wedge \neg C)) \supset A$$

gültig ist.

Aufgabe 8 (0.2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$

Aufgabe 9 **(0.2 Punkte)**

Sei F die Formel $(A \supset (B \uparrow C)) \wedge (C \equiv (B \vee A))$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) DNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$(A \supset$	$(B \uparrow C))$	$\wedge$	$(C \equiv$	$(B \vee A))$
0	0	0	1	1	**1**	1	0
0	0	1	1	1	**0**	0	0
0	1	0	1	1	**0**	0	1
0	1	1	1	0	**1**	1	1
1	0	0	1	1	**0**	0	1
1	0	1	1	1	**1**	1	1
1	1	0	1	1	**0**	0	1
1	1	1	0	0	**0**	1	1

Aus dieser Tafel lässt sich folgende DNF ablesen:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$$

(b) KNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned}
&(A \supset (B \uparrow C)) \wedge (C \equiv (B \vee A)) \\
&= (\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \wedge ((C \vee \neg(B \vee A)) \wedge (\neg C \vee (B \vee A))) \\
&= (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \\
&= (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee \neg C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 **(0.4 Punkte)**

Donald Duck möchte einen neues Auto kaufen. Das Auto soll billig, schön, sicher oder schnell sein, wobei es mindestens zwei dieser Eigenschaften erfüllen soll. Dabei gehen ihm die folgenden Gedanken durch den Kopf:

- Wenn das Auto schnell ist, muss es auf jeden Fall auch schön sein.
- Das Auto ist nicht schön, wenn es billig ist.
- Donald will auf jeden Fall entweder ein sicheres oder ein schnelles Auto, aber nicht beides.

- Das Auto ist nicht gleichzeitig sicher und billig.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

(b) Findet Donald ein Auto, das er kaufen möchte? Wenn ja, welche(s)? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

C ... Das Auto ist billig.
B ... Das Auto ist schön.
S ... Das Auto ist sicher.
F ... Das Auto ist schnell.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (C \wedge B) \vee (C \wedge S) \vee (C \wedge F) \vee$ $(B \wedge S) \vee (B \wedge F) \vee (S \wedge F)$	mind. 2 Eigenschaften
$F_1 := F \supset B$	Wenn schnell, dann schön
$F_2 := C \supset \neg B$	wenn billig, dann nicht schön
$F_3 := S \not\equiv F$	entweder sicher oder schnell
$F_4 := \neg(S \wedge C)$	nicht sicher und billig zugleich

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen C, B, S, und F, sodass die Formeln $F_0, \dots, F_4$ wahr werden. Wegen Formel F_0 genügt es, jene Belegungen zu betrachten, in denen mindestens zwei der vier Variablen wahr sind.

C	B	S	F	F_0	$F \supset B$	$C \supset \neg B$	$S \not\equiv F$	$\neg(S \wedge C)$	
0	0	1	1	1	0	1	0	1	
0	1	0	1	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	0	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	0	0	
1	1	0	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	1	0	0	0	

Donald entscheidet sich für ein schönes und schnelles, oder für ein schönes und sicheres Auto.

Aufgabe 11 **(0.4 Punkte)**

Wieder einmal sinkt das Schiff von Robinson Crusoe vor einer einsamen Insel.[1] Crusoe besitzt ein rotes Taschenmesser, ein Küchenmesser aus Silber, goldfarbene Kopfhörer und einen weißen MP3-Player, er kann aber höchstens zwei Gegenstände gleichzeitig mit an Land nehmen. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Zur Unterhaltung brauche ich Taschenmesser oder MP3-Player oder, noch besser, beide.
- Den MP3-Player mitzunehmen macht nur Sinn, wenn ich auch die Kopfhörer mitnehme.
- Eines der beiden Messer muss sein, aber nicht beide.
- Um die Kannibalen zu besänftigen benötige ich etwas Goldenes oder Silbernes.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Welche Gegenstände nimmt Crusoe mit auf die Insel? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

T ... Crusoe nimmt das Taschenmesser mit.
K ... Crusoe nimmt das Küchenmesser mit.
H ... Crusoe nimmt die Kopfhörer mit.
M ... Crusoe nimmt den MP3-Player mit.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := \neg(T \wedge K \wedge H) \wedge \neg(T \wedge K \wedge M) \wedge \neg(T \wedge H \wedge M) \wedge \neg(K \wedge H \wedge M)$
höchstens zwei Gegenstände
$F_1 := T \vee M$ Taschenmesser oder MP3-Player
$F_2 := M \supset H$ MP3-Player nur, wenn Kopfhörer
$F_3 := T \not\equiv K$ ein Messer, aber nicht beide
$F_4 := K \vee H$ silbernes Küchenmesser oder goldene Hörer

[1] Ihnen sagt der Name Robinson Crusoe nichts? Dieser Mann ist der Held eines Romans des Briten Daniel Defoe aus dem Jahr 1719. Der Originaltitel liefert schon einen Teil der Inhaltsangabe: „The Life and Strange Surprizing Adventures of Robinson Crusoe, Of York, Mariner: Who lived Eight and Twenty Years, all alone in an un-inhabited Island on the Coast of America, near the Mouth of the Great River of Oroonoque; Having been cast on Shore by Shipwreck, wherein all the Men perished but himself. With An Account how he was at last as strangely deliver'd by Pyrates." Sie sollten das Buch lesen oder sich zumindest eine der vielen Verfilmungen ansehen, es ist ein Klassiker.

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen T, K, H und M, sodass die Formeln $F_0, \dots, F_4$ wahr werden. Wegen Formel F_0 genügt es jene Belegungen zu betrachten, in denen höchstens zwei Variablen wahr sind.

T	K	H	M	F_0	$T \vee M$	$M \supset H$	$T \not\equiv K$	$K \vee H$	
0	0	0	0	1	0				
0	0	0	1	1	1	0			
0	0	1	0	1	0				
0	0	1	1	1	1	1	0		
0	1	0	0	1	0				
0	1	0	1	1	1	0			
0	1	1	0	1	0				
1	0	0	0	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	1	0			
1	0	1	0	1	1	1	1	1	✓
1	1	0	0	1	1	1	0		

Crusoe nimmt Taschenmesser und Kopfhörer mit.

Aufgabe 12 (0.3 Punkte)

Zeigen Sie: $F_1, \dots, F_n \models G$ gilt genau dann, wenn die Formel $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ unerfüllbar ist.

Lösung

Beweisstrategie:

- Eine „A genau dann, wenn B“-Aussage kann man zeigen, indem man sie in zwei Implikationen zerlegt: Man zeigt, dass aus A die Aussage B folgt und dass aus B die Aussage A folgt. Diese Zerlegung vereinfacht oft die Argumentation.
- Die Äquivalenz von A und B lässt sich auch dadurch zeigen, dass man die Äquivalenz der Gegenteile von A und B überprüft, d.h., man zeigt, dass A genau dann *nicht* zutrifft, wenn B *nicht* zutrifft. Der Wechsel zu den negierten Aussagen ist sinnvoll, wenn sich einfach charakterisieren lässt, wann eine Aussage *nicht* gilt.

Sei H die Formel $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$. Wir zeigen die beiden folgenden Aussagen:

1. Wenn $F_1, \dots, F_n \models G$ nicht gilt, dann ist H erfüllbar.

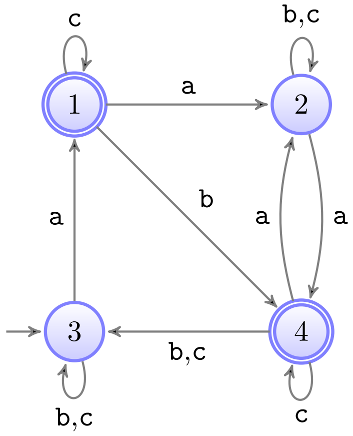
   Beweis: Wenn $F_1, \dots, F_n \models G$ nicht gilt, gibt es eine Interpretation I, sodass $F_1, \dots, F_n \models_I G$ nicht gilt. Das ist dann der Fall, wenn $\mathsf{val}_I(F_1) = \cdots = \mathsf{val}_I(F_n) = 1$ und $\mathsf{val}_I(G) = 0$ gilt. Aus $\mathsf{val}_I(G) = 0$ folgt $\mathsf{val}_I(\neg G) = 1$. Daher ist die Formel H in dieser Interpretation wahr, d.h., H ist erfüllbar.

2. Wenn H erfüllbar ist, dann gilt $F_1, \dots, F_n \models G$ nicht.

   Beweis: Wenn H erfüllbar ist, gibt es eine Interpretation I, sodass $\mathsf{val}_I(H) = 1$ gilt. Das ist der Fall, wenn $\mathsf{val}_I(F_1) = \cdots = \mathsf{val}_I(F_n) = \mathsf{val}_I(\neg G) = 1$ gilt. Aus $\mathsf{val}_I(\neg G) = 1$ folgt $\mathsf{val}_I(G) = 0$, daher gilt $F_1, \dots, F_n \models_I G$ für die Interpretation I nicht. Somit ist G keine logische Konsequenz der Formeln $F_1, \dots, F_n$.

Aufgabe 13 **(0.4 Punkte)**

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `a`, `accc`, `aa`, `abaa`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(3, \texttt{babaa})$.

(d) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert zum Beispiel `a`, `acc`, `ab`, `abba` und `aaa`.

(b) $\mathcal{A}$ akzeptiert `a`, `accc` und `abaa`, nicht aber ε und `aa`.

(c) $$\begin{aligned}\delta^*(3,\mathtt{babaa}) &= \delta^*(\delta(3,\mathtt{b}),\mathtt{abaa})\\ &= \delta^*(3,\mathtt{abaa})\\ &= \delta^*(\delta(3,\mathtt{a}),\mathtt{baa})\\ &= \delta^*(1,\mathtt{baa})\\ &= \delta^*(\delta(1,\mathtt{b}),\mathtt{aa})\\ &= \delta^*(4,\mathtt{aa})\\ &= \delta^*(\delta(4,\mathtt{a}),\mathtt{a})\\ &= \delta^*(2,\mathtt{a})\\ &= \delta^*(\delta(2,\mathtt{a}),\varepsilon)\\ &= \delta^*(4,\varepsilon)\\ &= 4\end{aligned}$$

(d) $\mathcal{A} = \langle\{1,2,3,4\},\ \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\},\ \delta,\ 3,\ \{1,4\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

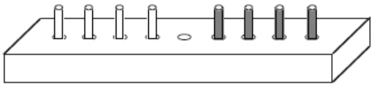
δ	a	b	c
1	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{1\}$
2	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
3	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
4	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$

$\mathcal{A}$ ist ein indeterministischer Automat, da es im Zustand 4 für das Symol `c` zwei Folgezustände gibt.

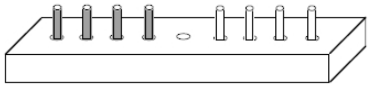
Aufgabe 14 (0.4 Punkte)

Linienhalma ist ein Knobelspiel, das aus m weißen und n schwarzen Stäben sowie einem Spielbrett mit $m+n+1$ Löchern besteht, die in einer Linie angeordnet sind. Zu Beginn befinden sich die weißen Stäbe ganz links und die schwarzen Stäbe ganz rechts in den Löchern, sodass das mittlere Loch frei ist (siehe Abb. (a) für $m = n = 4$). Ziel des Spiels ist es, diese Anordnung zu tauschen, sodass sich alle weißen Stäbe rechts und alle schwarzen Stäbe links befinden (Abb. (b)). Es gelten folgende Regeln:

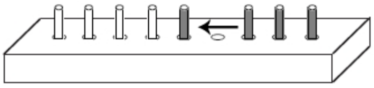
- Schwarze und weiße Stäbe werden abwechselnd gezogen, wobei mit einem schwarzen begonnen wird.
- Ein Zug besteht darin, einen Stab entweder auf ein freies Nachbarfeld (links oder rechts) zu stellen oder über einen linken oder rechten Nachbarstab beliebiger Farbe zu springen, wenn das Feld dahinter frei ist. Die Abbildungen (c) and (d) zeigen die möglichen Anfangszüge für $m = n = 4$.



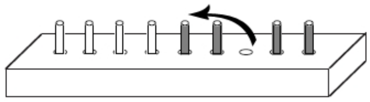
(a) Anfangsstellung



(b) Endstellung



(c) Zug auf ein freies Nachbarfeld



(d) Sprung auf das übernächste Feld

(a) Was macht einen Zustand in diesem Spiel aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wie kann man die Zustände kompakt bezeichnen? Wieviele Zustände sind abhängig von der Zahl der schwarzen und weißen Stäbe, m und n, höchstens notwendig?

(b) Welche Aktionen führen zu Übergängen in diesem System? Wie kann man sie kompakt bezeichnen?

(c) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses Spiel für $m = 1$ und $n = 2$, d.h. für einen weißen und zwei schwarze Stäbe, vollständig beschreibt.

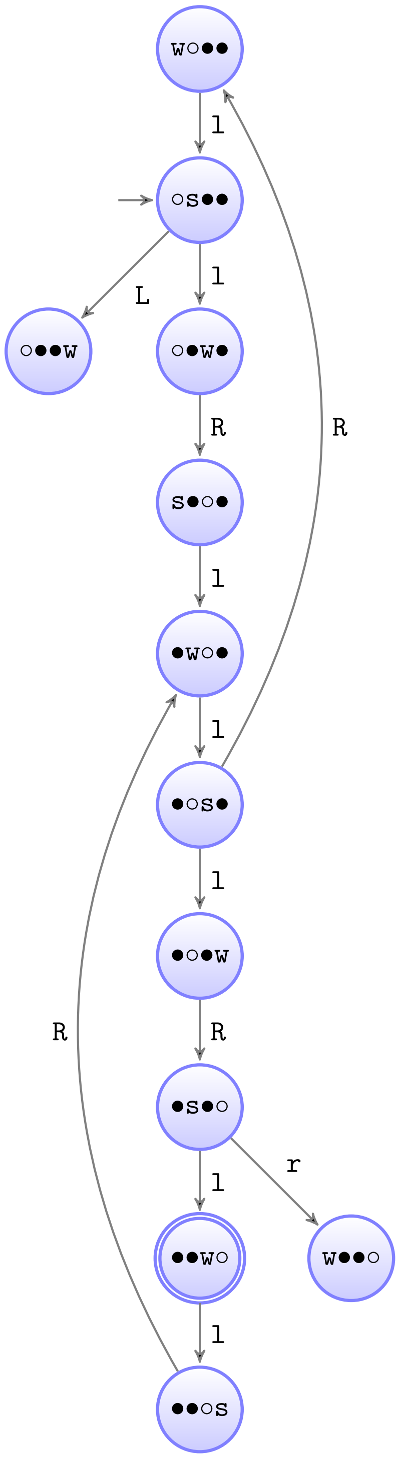
Lösung

(a) Der Zustand des Spiels wird durch die Position der weißen bzw. schwarzen Stäbe und des freien Lochs auf dem Spielbrett festgelegt sowie durch die Information, wer am Zug ist. Verwendet man $\circ$ bzw. $\bullet$, um einen weißen bzw. scharzen Stab zu symbolisieren und `-` für die Leerstelle, dann kann man das Spielbrett durch ein Wort mit $m+n+1$ Zeichen beschreiben, in dem m Mal das Zeichen $\circ$, n Mal das Zeichen $\bullet$ und einmal das Zeichen `-` vorkommt. An das Wort kann man noch `s` oder `w` anhängen, je nachdem, ob schwarz oder weiß am Zug ist; verwendet man dieses Symbol an Stelle von `-` zur Markierung des freien Lochs, wird die Beschreibung noch kürzer. Für $m = n = 4$ lässt sich die Anfangsstellung also durch `○○○○-●●●●s` oder `○○○○s●●●●` beschreiben (Abb. (a)), die Stellungen nach dem ersten Zug entsprechen den Wörtern `○○○○●-●●●w` oder `○○○○●w●●●` (Abb. (c)) bzw. `○○○○●●-●●w` oder `○○○○●●w●●` (Abb. (d)).

Die Zahl der Zustände ist durch die Anzahl der möglichen Wörter dieser Bauart beschränkt. Da $m+n+1$ Dinge ohne Zurücklegen anzuordnen sind, wobei die m weißen und die n schwarzen Stäbe ununterscheidbar sind, kann es maximal $2 \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!n!1!}$ Zustände geben; der Faktor 2 spiegelt die beiden Farben wieder, die am Zug sein können. Für $m = n = 4$ erhalten wir so 1260 als obere Schranke für die Zustandszahl, für $m = 1$ und $n = 2$ erhalten wir 24.

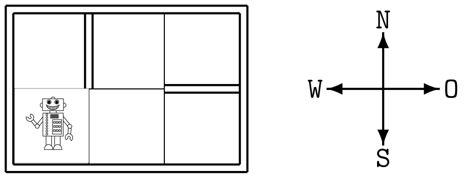
(b) Es gibt vier Zugmöglichkeiten: ein Stein kann nach links oder rechts ziehen oder nach links oder rechts springen. Wir wählen dafür die Bezeichnungen `l`, `r`, `L` und `R`.

(c)



Aufgabe 15 **(0.4 Punkte)**

Ein Roboter wird in einem Labyrinth ausgesetzt, um es zu erkunden. Er erhält jeweils einen der Steuerbefehle `N` (Nord), `S` (Süd), `W` (West) und `O` (Ost), wodurch er versucht, sich um ein Feld in die angegebene Richtung weiterzubewegen. Gelingt ihm das, antwortet er `1` (ja). Ist der Weg durch eine Mauer versperrt, bleibt er auf dem ursprünglichen Feld und antwortet `0` (nein).
Nehmen Sie an, dass das Labyrinth das folgende Aussehen besitzt und dass sich der Roboter zu Beginn im südwestlichsten Feld befindet. Die doppelten Linien markieren Mauern.



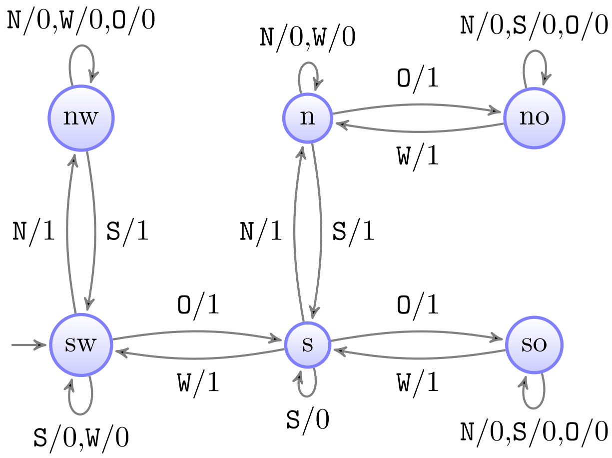
Die Eingabe `NNOSSOOOWNO` führt beispielsweise zur Ausgabe `10010110111`.

(a) Geben Sie einen Mealy-Automaten an, der das Antwortverhalten des Roboters beschreibt.

(b) Geben Sie einen Moore-Automaten an, der das Antwortverhalten des Roboters beschreibt.

Lösung

(a) Für den Mealy-Automaten benötigen wir einen Zustand pro Feld; wir wählen $Q = \{\mathrm{nw}, \mathrm{sw}, \mathrm{n}, \mathrm{s}, \mathrm{no}, \mathrm{so}\}$. Das Eingabealphabet besteht aus den Steuerbefehlen, d.h. $\Sigma = \{\mathtt{N}, \mathtt{S}, \mathtt{W}, \mathtt{O}\}$, und das Ausgabealphabet aus den beiden Antworten, d.h. $\Gamma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Startzustand ist der Zustand sw.



(b) Der Mealy-Automat lässt sich in einen Moore-Automaten umwandeln, indem alle Zustände, zu denen Übergänge mit verschiedenen Ausgaben führen, entsprechend vervielfacht werden. Da es zu jedem der Zustände sowohl einen Übergang mit Ausgabe `0` als auch mit Ausgabe `1` gibt, verdoppelt sich in dieser Aufgabe die Zahl der Zustände.